ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NGÔ VAN QUÊ
A.A.M. RODRIGUES

Troisième théorème fondamental de réalisation de Cartan

Annales de l'institut Fourier, tome 25, n° 1 (1975), p. 251-280
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_1_251_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 1 (1975), 251-282

TROISIÈME THÉORÈME FONDAMENTAL DE RÉALISATION DE CARTAN

par A.A.M. RODRIGUES et Ngô van QUÊ

Introduction.

DEFINITION DES PSEUDO-GROUPES INFINITESIMAUX. – Etant donné T, le fibré tangent d'une variété M ($\mathcal{C}^\infty$-différentiable), $J_k(T)$ désigne l'ensemble de tous les jets d'ordre k des sections (différentiables) du fibré T sur M. $J_k(T)$ est encore un fibré vectoriel sur M, dont pour tout X, un champ de vecteurs sur M i.e. une section de T, $j^k X$ est une section (différentiable) :

$$j^k X : M \to J_k(T),\ x \to j_x^k X$$

Rappelons que $J_k(T)$ désignant encore sans risque de confusion le faisceau des sections de $J_k(T)$ sur M, $J_k(T)$ est un faisceau de R-algèbre de Lie [6], [10], [14] :

$$J_k(T) \underset{R}{\wedge} J_k(T) \to J_k(T)$$

$$[fj^k X, gj^k Y] = f.\, gj^k[X, Y] + f(X.g)\, j^k Y - g(Y.f)\, f^k X$$

où [X , Y] est le crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y, f et g sont des fonctions numériques (différentiables) sur M, et X . g et Y . f les dérivées de Lie de g et f par les champs de vecteurs X et Y.

Ce crochet d'algèbre de Lie étant un opérateur différentiel d'ordre 1, nous en déduisons un morphisme de fibrés vectoriels sur M τ[14].

$$\tau : J_{k+1}(T) \wedge J_{k+1}(T) \to J_k(T)$$

$$\tau(j^{k+1} X, j^{k+1} Y) = j^k[X, Y]$$

Si ξ et η sont deux sections de $J_{k+1}(T)$, $\tau(\xi, \eta)$ est souvent noté par $[\![\xi, \eta]\!]$, appelé le crochet formel de ces deux sections.

A tout jet d'ordre k, on peut associer naturellement un jet d'ordre $k-1$, d'où un morphisme naturel surjectif de fibrés vectoriels

$$\pi : J_k(T) \to J_{k-1}(T)$$

Désignons par $J_\infty(T)$ la limite projective relative à ce morphisme des $J_k(T)$, avec l'entier k tendant vers l'infini. Le crochet formel définit alors sur $J_\infty(T)$ une structure de fibré d'algèbre de Lie de dimension infinie sur M, dont la fibre D_a en un point a de M n'est autre que l'algèbre des champs de vecteurs formels $D(R^n)$ sur R^n, n étant la dimension de M (voir la partie I,i) plus loin). Remarquons que D_a est une algèbre de Lie filtrée complète par rapport à la topologie définie par sa filtration, ceci dit rappelons la définition des Pseudo-Groupes infinitésimaux de Lie (notés simplement par P.G.I.) :

DEFINITION [7], [14], [17], [18], [19]. – *Un sous-faisceau d'algèbre de Lie θ du faisceau d'algèbre de Lie de champs de vecteurs sur* M *est dit un P.G.I. (de Lie) si* $J_k(\theta)$, *l'ensemble de tous les jets d'ordre k des sections locales* X *de θ est, pour tout entier k, un sous-fibré vectoriel de* $J_k(T)$ *et s'il existe un entier* $k_0 \geqslant 0$ *tel que θ est le faisceau des germes de solutions de* $J_{k_0}(\theta)$.

Ainsi donc, pour tout entier k, $E_k = J_k(\theta)$ est un système différentiel régulier d'ordre k dans T [7], [8], [15], complètement intégrable i.e. tout élément de E_k est le jet d'ordre k d'une germe de solution de E_k (précisément ici, une germe de section de θ). Pour tout entier k, E_{k+1} est évidemment contenu dans le système de prolongement de E_k :

$E_{k+1} \subset J_1(E_k) \cap J_{k+1}(T)$, où pour tout entier r et fibré E (différentiable) sur M, $J_r(E)$ est l'ensemble des jets d'ordre r des germes de sections de E. On sait que par un argument Nothérien, Kuranishi [7] a prouvé un résultat conjecturé par Cartan qu'il existe un entier k_1, tel que si $k \geqslant k_1$, E_{k+1} est exactement le système différentiel de prolongement de E_k, i.e. $E_{k+1} = J_1(E_k) \cap J_{k+1}(T)$, et de plus il existe un k_2, plus grand que k_1, tel que E_{k_2} est involutif [7], [8], [15].

Dans le cas où M est une variété analytique, les E_k des sous-fibrés vectoriels analytiques de $J_k(T)$, autrement dit des systèmes différentiels linéaires analytiques dans T, et θ exactement le faisceau de toutes les germes de solutions analytiques de E_{k_0}, k_0 étant son ordre, nous dirons que θ est un P.G.I. *analytique*.

Etant donné un P.G.I. θ, le faisceau des sections de E_k ($= J_k(\theta)$) est évidemment un sous-faisceau d'algèbre de Lie du faisceau d'algèbre de Lie $J_k(T)$. On dit souvent pour cela que E_k est un système différentiel de Lie. En particulier, le crochet formel τ de $J_k(T)$ induit le crochet formel de E_k à valeurs dans E_{k-1} :

$$\tau : E_k \wedge E_k \rightarrow E_{k-1}$$

Désignons de même par $J_\infty(\theta)$, la limite projective des E_k par rapport au morphisme canonique surjectif $\pi : E_k \rightarrow E_{k-1}$. Evidemment $J_\infty(\theta)$ est un sous-fibré d'algèbre de Lie de $J_\infty(T)$. En particulier, si $L_a(\theta)$ est la fibre en un point a de $J_\infty(\theta)$, $L_a(\theta)$ est une sous-algèbre de D_a, le fibre en a de $J_\infty(T)$. Nous associons ainsi à tout P.G.I. θ une sous-algèbre $L_a(\theta)$ de D_a.

Le troisième théorème fondamental de réalisation de Cartan consiste à associer inversement à toute sous-algèbre de Lie transitive L_a de D_a un P.G.I. analytique "local" θ tel que $L_a(\theta)$ soit isomorphe à L. Nous allons donner un énoncé plus précis de ce théorème. Notre travail est de démontrer en plus un théorème de réalisation relative et homogène, dans un sens à comprendre ultérieurement. Ce travail est basé sur les idées qu'a esquissées le second auteur dans une série de notes aux C.R. de l'Académie des Sciences de Paris [17]. Il est à signaler que certains de nos résultats concordent avec ceux obtenus indépendamment par H. Goldschmidt dans un tout autre formalisme [2].

I. Théorème de Réalisation de Cartan.

i) *Algèbre de Lie transitive filtrée complète.*

Pour fixer les notations, nous allons rappeler ici quelques notions algébriques devenues plus ou moins classiques. Le problème considéré étant un problème local, nous pouvons supposer la variété M être l'espace numérique R^n de dimension n, noté plus simplement par V. Alors l'algèbre de Lie infinie D_a, la fibre à l'origine a de l'espace vectoriel $V = R^n$ de $J_\infty(T)$, est l'algèbre D(V) des champs de vecteurs formels sur V, plus précisément D(V) étant l'algèbre des séries formelles sur V à valeurs dans V :

$$D(V) = R[\![V^*]\!] \otimes V$$

où $R[\![V^*]\!]$ est l'algèbre des séries formelles sur V, et pour la structure d'algèbre de Lie, on a

$$[P \otimes u , Q \otimes v] = P . (\partial_u Q) \otimes v - Q . (\partial_v P) \otimes u$$

$\partial_u Q$ et $\partial_v P$ étant des dérivées par rapport au vecteur u et v des séries formelles Q et P.

Evidemment D(V) est une algèbre de Lie filtrée complète :

$$D(V) = D_{-1} \supset D_0 \supset D_1 \supset \cdots \supset D_k \supset \cdots$$

où D_k est l'ensemble des séries formelles qui s'annulent à l'ordre k à l'origine a de V.

Soit L une sous-algèbre fermée de D(V), ayant une topologie définie naturellement par la filtration. Sur L, on a la filtration induite :

$$L \supset L_{-1} \supset L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_k \supset \cdots$$

Désignons respectivement par D^k et L^k, les algèbres tronquées $D(V)/D_k$ et L/L_k. On a naturellement les suites exactes, la première contenant la seconde,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & S^k(V^*) \oplus V & \to & D^k & \xrightarrow{\pi} & D^{k-1} & \to & 0 \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ 0 & \longrightarrow & g^k & \longrightarrow & L^k & \xrightarrow{\pi} & L^{k-1} & \to & 0 \end{array}$$

où $S^k(V^*) \otimes V$ est l'espace des polynômes homogènes de degré k sur V à valeurs dans V. D^0 est naturellement isomorphe à V ; rappelons à ce propos que l'algèbre L est dite sous-algèbre *transitive* de D(V) si L^0, sous-espace de D^0, est égal à $D^0 = V$.

La filtration de L induit sur le tronqué L^k une filtration :

$$L^k = L^k_{-1} \supset L^k_0 \supset \cdots \supset L^k_{k-1}$$

où $L^k_{k-p} = L_{k-p}/L_k$. Et le crochet de Lie dans L définit naturellement le crochet formel τ :

$$\tau : L^k \wedge L^k \to L^{k-1}$$

$$\tau(x , y) = [\![x , y]\!]$$

permutable avec le morphisme canonique $\pi : L^q \to L^{q-r}$, i.e.

$$\pi [\![x , y]\!] = [\![\pi(x) , \pi(y)]\!] .$$

Muni de cette filtration et de ce crochet formel, L^k est appelé l'algèbre tronquée filtrée de L à l'ordre k.

Désignons par P l'opérateur d'antisymétrisation canonique :

$$\partial : \wedge^p V^* \otimes S^k(V^*) \otimes V \to \wedge^{p+1} V^* \otimes S^{k-1}(V^*) \otimes V$$

Nous pouvons le restreindre au sous-espace $\wedge^p V^* \otimes g^k$, et en déduisons une suite cohomologique [15], [20] :

$$0 \to g^{k+p} \xrightarrow{\partial} V^* \otimes g^{k+p-1} \xrightarrow{\partial} \wedge^2 V^* \otimes g^{k+p-2} \to \ldots \xrightarrow{\partial} \wedge^p V^* \otimes g^k$$

Nous disons que l'algèbre L est *involutive à l'ordre* k_0 si la suite précédente est exacte pour tout entier p et tout entier $k \geqslant k_0$. Nous y avons pris la convention que $g^0 = L^0$ et g^r n'est pas défini pour r négatif.

Il existe une définition abstraite de l'algèbre de Lie filtrée transitive complète (et par suite la notion d'isomorphisme) telle qu'ont donnée Singer et Sternberg [3], [19]. Nous ne la redonnerons pas rappelant qu'il existe en effet un théorème dit de réalisation [4] : Toute algèbre de Lie filtrée transitive complète est isomorphe comme algèbre de Lie filtrée à une sous-algèbre transitive fermée L de D(V), V étant l'espace numérique R^n pour un certain entier n.

Soient alors données deux sous-algèbres fermées transitives L et H de D(V), que nous supposons involutives à l'ordre k. Rappelons que les tronqués L^k et H^k sont dits isomorphes si et seulement si nous avons un couple d'isomorphismes linéaires $(\widetilde{\rho} , \rho)$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
L^k \arrow[r, "\widetilde{\rho}", "\sim"'] \arrow[d, "\pi"'] & H^k \arrow[d, "\pi"] \\
L^{k-1} \arrow[r, "\rho", "\sim"'] & H^{k-1}
\end{tikzcd}$$

et tel que, x et y étant deux éléments quelconques de L^k,

$$\rho[\![x , y]\!] = [\![\widetilde{\rho}(x) , \widetilde{\rho}(y)]\!]$$

Nous avons alors un théorème de Rim [16] disant que si L^k et H^k sont isomorphes, alors L et H sont isomorphes comme sous-algèbres filtrées fermées de D(W), où W est l'espace vectoriel $D^{k-1} = D(V)/D_{k-1}$. En effet, L et H sont canoniquement des sous-algèbres fermées de D(W) ; et dire qu'elles sont isomorphes comme sous-algèbres de D(W) revient à dire qu'elles sont isomorphes comme algèbres de Lie filtrées $L^{(k)}$ et $H^{(k)}$ avec une filtration décalée à l'ordre k :

$$L = L^{(k)} = L_{-1}^{(k)} \supset L_0^{(k)} \supset \cdots \supset L_p^{(k)} \supset \cdots$$

et

$$H = H^{(k)} = H_{-1}^{(k)} \supset H_0^{(k)} \supset \cdots \supset H_p^{(k)} \supset \cdots$$

avec respectivement

$$L_p^{(k)} = L_{k+p} \quad \text{et} \quad H_p^{(k)} = H_{k+p} \ .$$

Si nous supposons en plus que ρ est un isomorphisme d'espaces filtrés de L^k avec H^k, avec la filtration induite par celle de L et H, – nous disons alors que les *algèbres tronquées filtrées* L^k *et* H^k *sont isomorphes* – on a en plus le résultat que L et H sont isomorphes comme sous-algèbres filtrées fermées transitives de D(V), et alors il existe un automorphisme de D(V) transportant L sur H [4]. Citons le résultat dû au second auteur précisant que tout automorphisme de D(V) provient de façon canonique d'une application formelle de V dans V inversible [12] :

$$f : V = R^n \to R^n$$

$f(x^1 , \ldots , x^n) = (f^1 , \ldots , f^n)$, les f^i sont des séries formelles des x^i et l'inverse f^{-1} existe comme application formelle. Pour ce qui nous concerne, nous demandons en plus au lecteur de vérifier avec les techniques dûes à Hayashi et Rodrigues que si L et H sont isomorphes comme sous-algèbres filtrées de D(V), involutives à l'ordre k, il existe une application polynomiale $f : V \to V$ inversible (i.e. les f^i sont des polynomes des x^i et l'inverse f^{-1} existe et est alors une application analytique) telle que f transporte l'algèbre L en une sous-algèbre $\underline{L}$, dont le tronqué $\underline{L}^k$ est exactement H^k (les tronqués $\underline{L}^k$ et H^k étant des sous-espaces de $D^k = D(V)/D_k$).

ii) *Théorème fondamental de Cartan*

Soit L une sous-algèbre fermée transitive de D(V) que nous supposons être involutive à l'ordre k. Par la théorie de prolongement on sait que L est aussi canoniquement une sous-algèbre fermée, transitive et involutive à l'ordre 1, de $D(L^{k-1})$, où L^{k-1} est le tronqué à l'ordre $k-1$ de L. Considérons la suite exacte

$$0 \to g^k \to L^k \xrightarrow{\pi} L^{k-1} \to 0$$

et on a donc g^k comme algèbre d'opérateurs sur L^{k-1},

$$g^k \subset (L^{k-1})^* \otimes L^{k-1} .$$

Désignons par λ une scission quelconque donnée de la suite exacte précédente :

$\lambda : L^{k-1} \to L^k$, telle que $\pi \circ \lambda =$ Identité sur L^{k-1}. Le crochet formel de L^k, à valeurs dans L^{k-1}, définit alors une application c :

$$c : L^{k-1} \wedge L^{k-1} \to L^{k-1}$$

$$c(x, y) = [\![\lambda(x), \lambda(y)]\!] .$$

Considéré comme un élément de $(\wedge^2 L^{k-1})^* \otimes L^{k-1}$, l'application c n'est définie en dépendant de la scission λ que modulo le sous-espace $\partial((L^{k-1})^* \otimes g^k)$, et est ce qu'on appelle *les constants de structures de Cartan* à l'ordre k de l'algèbre transitive L.

Reprenons la notation de Hayashi [4], désignons par c^2 l'application

$$c^2 : \wedge^3 L^{k-1} \to L^{k-1}$$

$$c^2(x, y, z) = c(c(x, y), z) + c(c(y, z), x) + c(c(z, x), y)$$

Alors on vérifie immédiatement que comme élément de l'espace $(\wedge^3 L^{k-1})^* \otimes L^{k-1}$, on a :

C-1) $c^2 = 0$, modulo $\partial((\wedge^2 L^{k-1})^* \otimes g^k)$.

D'autre part, l'algèbre de Lie d'opérateurs g^k sur l'espace L^{k-1} s'étendant de façon usuelle en une algèbre d'opérateurs sur

$$(\wedge^2 L^{k-1})^* \otimes L^{k-1} ,$$

on a aussi pour tout u de g^k :

C-2) $u(c) = 0$, modulo $\partial((L^{k-1})^* \otimes g^k)$.

Les dernières relations C-1) et C-2) sont dites les identités de Cartan.

Ceci dit en précisant notre hypothèse et les notations, nous allons énoncer le théorème fondamental de Cartan, sans refaire la démonstration ([1], voir aussi [5]). Cartan a en effet donné une démonstration de son théorème à l'aide de la *théorie des systèmes différentiels extérieurs,* sur laquelle il serait trop long à revenir [1], [7], [8], [11].

Précisons d'abord que θ étant une 1-forme différentielle sur une variété M à valeurs dans un espace vectoriel K de même dimension que M, θ est dite de *rang maximal,* si pour tout élément x de M, θ_x est un isomorphisme linéaire de l'espace tangent T_x en x avec l'espace vectoriel K.

THEOREME FONDAMENTAL DE CARTAN [1]. – *Avec les données précisées précédemment, il existe un ouvert* U *de* L^k *et une* 1*-forme extérieure analytique* (ω, θ) *de rang maximal, définie sur* U *et à valeurs dans l'espace vectoriel* $(g^k) \times (L^{k-1})$, *telle que pour la différentielle* $d\theta$ *on a :*

$$d\theta = c(\theta, \theta) + \omega \,\overline{\wedge}\, \theta$$

Pour expliquer la dernière égalité, prenant deux vecteurs tangents x et y en un point quelconque de U, on a par définition :

$$d\theta(x, y) = c(\theta(x), \theta(y)) + 1/2(\omega(x)[\theta(y)] - \omega(y)[\theta(x)])$$

Nous pouvons supposer l'ouvert U contenir l'origine a de L^k, et L^k étant identifié canoniquement avec l'espace tangent $T_a(U)$, que nous avons la condition initiale (ω_a, θ_a) correspondre à la décomposition de L^k au produit $(g^k) \times (L^{k-1})$ définie par la scission λ, i.e.

$$\theta_a = \pi$$

et pour tout x de L^k, $x = \lambda \circ \theta_a(x) + \omega_a(x)$.

Soient (X_i), $1 \leqslant i \leqslant m =$ dimension de L^k, une base libre de champs de vecteurs sur U. Considérons le système différentiel analytique E d'ordre 1 dans T, le fibré tangent sur U :

$$E \subset J_1(T)$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} f^i j^1 X_i + u \mid u \in T^* \otimes T, f^i \mathcal{L}(X_i)\theta + u(\theta) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \text{et} \quad f^i \mathcal{L}(X_i)\, d\theta + u(d\theta) = 0 \end{array} \right\}$$

où $\mathcal{L}(X_i)$ est la dérivation de Lie, et $u(\theta)$, $u(d\theta)$ s'expliquent comme $T^* \otimes T$ opère de façon canonique sur les espaces de formes extérieures.

Le système différentiel E est le système dont les germes de solution sont des germes de champs de vecteurs X sur U laissant invariante la forme θ, i.e. $\mathcal{L}(X)\,\theta = 0$ [14].

De nouveau par la théorie des systèmes différentiels extérieurs, on démontre que E est un système complètement intégrable, involutif à l'ordre 1. Autrement dit, si θ est le faisceau de toutes les germes de champs de vecteurs analytiques sur U laissant invariant la forme θ, θ est un P.G.I. analytique sur U et $J_1(\theta) = E$. On vérifie facilement que E se projette surjectivement par l'application canonique π sur T, ce qui veut dire que $J_0(\theta) = T$; θ est donc un P.G.I. transitif sur U. De façon plus précise encore, on a $L_a(\theta)$ une sous-algèbre transitive fermée, involutive à l'ordre 1 de $D(L^k)$.

Désignons alors pour simplifier par H le tronqué à l'ordre 1 de $L_a(\theta)$; H est donc la fibre en a de E. Nous noterons par h le noyau de H sur L^k :

$$0 \to h \to H \xrightarrow{\pi} L^k \to 0$$

Ceci dit, nous allons démontrer cependant les deux lemmes algébriques suivants, comme ils ne sont pas explicites dans Cartan :

LEMME 1. —

$$h = g^{k+1}$$

Preuve. — En effet, h et g^{k+1} sont canoniquement des algèbres d'opérateurs sur L^k. Donc l'égalité a un sens. Rappelons que g^{k+1} est aussi le sous-espace de $(L^{k-1})^* \otimes g^k$ tel que la suite suivante est exacte :

$$0 \to g^{k+1} \to (L^{k-1})^* \otimes g^k \xrightarrow{\partial} (\wedge^2 L^{k-1})^* \otimes L^{k-1}$$

Or revenons à la définition donnée du système différentiel E, on a :

$$h = \{u \in (L^k)^* \otimes L^k \,,\, u(\theta_a) = 0 \quad \text{et} \quad u(d\theta_a) = 0\}.$$

Rappelons que $\pi = \theta_a : L^k \to L^{k-1}$; dire que $u(\pi) = 0$ est équivalent à dire u est à valeurs dans le sous-espace g^k de L^k. D'autre part x et y étant deux vecteurs de L^k, on a par la formule de $d\theta$:

$$\begin{aligned} u(d\theta_a)(x\,,y) &= c(\pi(ux)\,,\pi(y)) + c(\pi(x)\,,\pi(uy)) \\ &\quad + 1/2(\omega_a(ux)[\pi(y)] + \omega_a(x)[\pi(uy)]) \\ &\quad - 1/2(\omega_a(uy)[\pi(x)] + \omega_a(y)[\pi(ux)]) \end{aligned}$$

Si nous supposons que $u(\pi) = 0$, i.e. $\pi(ux) = 0$ pour tout vecteur x, on a simplement comme deuxième condition :

$$2u(d\theta_a)(x\,,y) = \omega_a(ux)[\pi(y)] - \omega_a(uy)[\pi(x)] = 0$$

Ceci étant vrai pour tout y, si x est dans g^k, i.e. $\pi(x) = 0$, on doit avoir $ux = 0$. Autrement dit, u doit passer au quotient $\mathrm{L}^k/g^k = \mathrm{L}^{k-1}$. Donc h est canoniquement un sous-espace de $(\mathrm{L}^{k-1})^* \otimes g^k$, et rappelant que ω_a restreint à g^k est l'identité, on a

$$\begin{aligned} h &\subset (\mathrm{L}^{k-1})^* \otimes g^k \\ &= \{u \in (\mathrm{L}^{k-1})^* \otimes g^k\,,\ u(x)[y] - u(y)[x] = 0\,,\ x \quad \text{et} \quad y \in \mathrm{L}^{k-1}\} \end{aligned}$$

Ainsi donc nous avons aussi canoniquement la suite exacte :

$$0 \to h \to (\mathrm{L}^{k-1})^* \otimes g^k \xrightarrow{\partial} (\wedge^2 \mathrm{L}^{k-1})^* \otimes \mathrm{L}^{k-1} \ ./.$$

Remarque. – Comme par hypothèse l'algèbre L est involutive à l'ordre k, g^{k+1} est une algèbre de Lie involutive sur L^k. Le *lemme 1* est la condition algébrique pour que E soit un système différentiel involutif.

Rappelons que H est une algèbre tronquée sur L^k, i.e. munie du crochet formel :

$$\begin{aligned} \tau : \mathrm{H} \wedge \mathrm{H} &\to \mathrm{L}^k \\ (x\,,y) &\to [\![x\,,y]\!] \end{aligned}$$

LEMME 2. – *Pour tout couple d'éléments* $(x\,,y)$ *de* H, *on a*

$$\pi([\![x\,,y]\!]) = [\![\pi(x)\,,\pi(y)]\!]$$

le second membre étant évidemment le crochet formel défini par l'algèbre L *de deux éléments de* L^k *à valeur dans* L^{k-1}.

Preuve. – Par définition : $\mathrm{H} = \mathrm{J}^1_a(\theta)$, l'ensemble des jets d'ordre 1 au point $a \in \mathrm{U}$ des germes de sections de θ, nous pouvons poser

$x = j_a^1 X$ et $y = j_a^1 Y$, X et Y étant des germes de section de θ. On sait que, L^k étant identifié avec l'espace tangent $T_a(U)$,

$$[\![x, y]\!] = [X, Y]_a$$

la valeur en a du crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y.

D'autre part, X et Y laissant invariant la forme θ, on a

$$0 = (\mathcal{L}(X)\,\theta)(Y) = X\,.\,\theta(Y) - \theta[X, Y]$$

$$0 = (\mathcal{L}(Y)\,\theta)(X) = Y\,.\,\theta(X) - \theta[Y, X]$$

D'où, par la formule classique :

$$d\theta(X, Y) = X\,.\,\theta(Y) - Y\,.\,\theta(X) - \theta[X, Y]\ ,$$

nous avons

$$d\theta(X, Y) = \theta[X, Y]\ .$$

Ainsi, de la formule de $d\theta$, on a

$$\theta[X, Y] = c(\theta(X), \theta(Y)) + 1/2(\omega(X)[\theta(Y)] - \omega(Y)[\theta(X)])$$

Prenons la valeur en a des deux membres de la dernière égalité, et rappelant que $\theta_a = \pi : L^k \to L^{k-1}$, nous avons

$$\pi([X, Y]_a) = c(\pi(X_a), \pi(Y_a)) + 1/2(\omega_a(X)[\pi(Y_a)] - \omega_a(Y)[\pi(X_a)])$$

Revenant à la définition de c, le second membre est donc :

$$[\![\lambda \circ \pi(X_a), \lambda \circ \pi(Y_a)]\!] + 1/2(\omega_a(X)[\pi(Y_a)] - \omega_a(Y)[\pi(X_a)])$$

$$= [\![\lambda \circ \pi(X_a) + \omega_a(X), \lambda \circ \pi(Y_a) + \omega_a(Y)]\!] = [\![X_a, Y_a]\!]$$

Comme $X_a = \pi(x)$ et $Y_a = \pi(y)$, nous avons donc

$$\pi([\![x, y]\!]) = \pi([X, Y]_a) = [\![\pi(x), \pi(y)]\!]\ ./.$$

Le *lemme 1* et le *lemme 2* précédents impliquent que H est une *algèbre tronquée de prolongement* de l'algèbre tronquée L^k [4]. Alors de nouveau par un résultat de Rim, cité déjà en I-i) [16], on déduit que $L_a(\theta)$, sous-algèbre fermée transitive de $D(L^k)$, est isomorphe à l'algèbre L donnée, considérée comme sous-algèbre de $D(L^k)$; autrement dit, rappelons-le, $L_a(\theta)$ munie de la filtration induite par celle de $D(L^k)$ est isomorphe à l'algèbre $L^{(k+1)}$, qui est L munie de la filtration décalée à l'ordre $k + 1$.

En résumé, omise la démonstration par la théorie de systèmes différentiels extérieurs que le système différentiel E est complètement intégrable, nous avons prouvé le théorème suivant, connu couramment comme la seconde partie du théorème fondamental de Cartan :

THEOREME FONDAMENTAL DE CARTAN SECONDE PARTIE. – *Etant donné l'ouvert* U *de* L^k, *muni de la* 1*-forme extérieure analytique* θ *comme il a été dit dans le théorème précédent le faisceau* θ *de toutes les germes de champs de vecteurs analytiques sur* U, *laissant invariant la forme* θ, *est un P.G.I. analytique transitif sur* U, *tel que si a est un point de* U, $L_a(\theta)$ *est isomorphe à l'algèbre décalée* $L^{(k+1)}$ *de l'algèbre* L *donnée.*

Remarque. – En particulier, l'algèbre $L_a(\theta)$ est isomorphe à l'algèbre L comme algèbres topologiques, les filtrations respectives induisant une topologie naturelle sur $L_a(\theta)$ et L. Le dernier théorème est donc déjà effectivement un théorème de réalisation. Cependant nous allons prouver par un passage au quotient du dernier théorème qu'on peut de fait réaliser l'algèbre L avec sa filtration donnée. Ce résultat est évidemment plus ou moins implicite dans les travaux de Cartan.

iii) *Théorème de Réalisation.*

Soit θ un P.G.I. transitif sur une variété M. Etant donné un point a de M, nous avons donc $L_a(\theta)$ une sous-algèbre fermée transitive de D_a, la fibre en a de $J_\infty(T)$, i.e. nous avons l'application naturelle surjective :

$$L_a(\theta) \xrightarrow{\pi} L_a^0(\theta) = T_a \to 0$$

où T_a est l'espace tangent en a de M.

Prenons un p-plan P_a contenu dans T_a. Supposons par *hypothèse* que

$$H_a = \pi^{-1}(P_a)$$

est une *sous-algèbre* de $L_a(\theta)$. En particulier donc P_a est un sous-espace vectoriel de dimension p de T_a, invariant par l'algèbre linéaire d'isotropie g_a^1 de θ, g_a^1 étant précisément le noyau de la suite exacte :

$$0 \to g_a^1 \to L_a^1(\theta) \to T_a \to 0$$

Par la théorie classique des G-structures, on sait alors que le Pseudogroupe Γ des difféomorphismes locaux de M, obtenu de façon habituelle en intégrant les germes de champs de vecteurs X de θ, déplace P_a pour définir une distribution de p-plans P sur la variété M, qui est invariante par θ. Le lemme suivant a été donné dans [13], comme sa démonstration est assez simple, nous allons la répéter :

LEMME. – *La distribution* P *de p-plans, ainsi construite sur* M, *est complètement intégrable.*

Preuve. – Soit $E_1 = J_1(\theta)$, l'équation de Lie d'ordre 1 de θ :

$$0 \to g^1 \to E_1 \xrightarrow{\pi} T \to 0$$

Désignons par H^1 le sous-fibré de E_1 défini comme l'image inverse $\pi^{-1}(P)$ de la distribution. L'hypothèse sur P_a implique que le crochet formel de deux éléments quelconques de H_a^1 est dans P_a. Comme le crochet formel est invariant par transport défini par des difféomorphismes, nous avons plus généralement :

$$\begin{array}{ccc} \tau : E_1 \wedge E_1 & \to & T \\ \cup & & \cup \\ H^1 \wedge H^1 & \to & P \end{array}$$

Soit X, Y deux germes de sections quelconques de P. Comme θ est transitif, nous pouvons écrire X (et Y) comme des combinaisons linéaires (finies) des germes de champs de vecteurs ξ_i de θ (respectivement η_j), à coefficients des germes de fonctions :

$$X = f^i \xi_i \quad \text{et} \quad Y = g^j \eta_j \,,\ \xi_i \,,\ \eta_j \in \theta$$

Alors,

$$X' = f^i j^1 \xi_i \quad \text{et} \quad Y' = g^j j^1 \eta_j$$

sont des sections de H, qui se projettent par π sur X et Y. Rappelons que [12]

$$[\![X' . Y']\!] = [\![f^i j^1 \xi_i \,, g^j j^1 \eta_j]\!] = f^i g^j [\xi_i \,, \eta_j]$$

Le dernier membre est donc une section de P. D'autre part,

$$\begin{aligned}[X, Y] &= f^i[\xi_i, Y] - (Y . f^i)\,\xi_i \\ &= f^i[\xi_i, Y] - g^j(\eta_j . f^i)\,\xi_i \\ &= f^i[\xi_i, Y] - g^j[\eta_j, X] - f^i g^j[\xi_i, \eta_j]\end{aligned}$$

Comme la distribution P est invariante par θ, les crochets de Lie $[\eta_j, X]$ et $[\xi_i, Y]$ sont aussi des sections de P. Ainsi $[X, Y]$ est une section de P ./.

Remarque. – Inversement, le même calcul montre que si P est une distribution de p-plans complètement intégrable et invariante par θ alors P vérifie notre hypothèse, i.e. $H_a = \pi^{-1}(P_a)$ est une sous-algèbre de $L_a(\theta)$.

La distribution P définit donc un feuilletage sur M. Comme nos considérations sont locales, nous pouvons supposer que le feuilletage considéré correspond à une fibration (M, ρ, N), i.e. une submersion ρ de M sur N telle que $x \in N$, le fibre $\rho^{-1}(x)$ est une feuille (par définition connexe) du feuilletage. Le P.G.I. θ laissant invariant alors la fibration est donc un faisceau de champs de vecteurs projetables par ρ sur N. Nous désignerons par $\underline{\theta}$, l'image directe par ρ du faisceau θ dans le faisceau des champs de vecteurs sur N. Citons à propos le résultat dû à Kuranishi et Rodrigues, dont pour la démonstration, nous renvoyons à [9], [17].

PROPOSITION 1. – *Soit θ un P.G.I. analytique transitif sur* M, *laissant invariant une fibration analytique* (M, ρ, N) *à fibre connexe. Le faisceau $\underline{\theta}$, qui est l'image directe par ρ de θ, est un P.G.I. analytique transitif sur* N.

Si θ est un P.G.I. analytique, comme nous allons le supposer dans la suite, la distribution P, qui est invariante par θ, est une distribution analytique et par suite la fibration considérée (M, ρ, N) est analytique (ρ est une submersion analytique). Nous pouvons donc appliquer la dernière proposition pour dire que $\underline{\theta}$ est un P.G.I. analytique transitif sur N. Désignons par b, l'image $\rho(a)$. Nous allons maintenant définir l'algèbre filtrée $L_b(\underline{\theta})$ à partir de $L_a(\theta)$ et P_a.

Pour cela, rappelons d'abord que le tronqué à l'ordre k H^k de l'algèbre H_a n'est autre que le sous-espace $\pi^{-1}(P_a)$ contenu dans le tronqué $L_a^k(\theta)$ [17].

$$L_a^k(\theta) \xrightarrow{\pi} T_a \to 0 .$$

Désignons par N^1, le sous-espace de H^1 formé des éléments x tels que le crochet formel de x avec tout élément y de $L_a^1(\theta)$ est dans P_a :

$$N^1 = \{x \in H^1 , [\![x , L_a^1(\theta)]\!] \subset P_a\}$$

Plus généralement, par induction, posons avec une notation évidente :

$$N^k = \{x \in H^k , [\![x , L_a^k(\theta)]\!] \subset N^{k-1}\}$$

On vérifie immédiatement que π étant la projection canonique : $L^k \to L^{k-1}$, on a $\pi(N^k) \subset N^{k-1}$. Comme $L_a(\theta)$ est la limite projective des $L_a^k(\theta)$ relativement à la projection π, la limite projective N de N^k relativement à π est canoniquement un sous-espace de $L_a(\theta)$, plus précisément, comme on peut vérifier, une sous-algèbre normale de $L_a(\theta)$, contenue dans H_a :

$$N \subset H_a \subset L_a(\theta) .$$

PROPOSITION 2. — *Les notations étant précisées précédemment,* $L_b(\underline{\theta})$, *sous-algèbre transitive filtrée fermée de* D_b, *est isomorphe comme algèbre filtrée à l'algèbre filtrée transitive* $\underline{L} = L_a(\theta)/N$, *dont la filtration est définie par la donnée* $\underline{L}_0 = H_a/N \subset \underline{L}$.

La démonstration de cette proposition ne présente aucune difficulté. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à un travail de Petitjean [12] (voir aussi [13] et [17]). Disons simplement qu'on vérifie sans peine que N^k est l'ensemble des jets $j_a^k X$ des germes de champs de vecteurs X de θ, qui sont "tangents à l'ordre k" en a à la fibre passant par a, et H_a est le complété de l'espace des jets infinis en a des mêmes germes de champs de vecteurs tangents en a à la fibre.

Remarque. — 1) N est aussi la sous-algèbre de H_a formé des éléments x tels que le crochet successif de x avec un nombre quelconque d'éléments de $L_a(\theta)$ est encore dans H_a :

$$N = \{x \in H_a , [\dots [x , L_a(\theta)] , \dots , L_a(\theta)] \subset H_a\}$$

2) Nous démontrerons de fait dans la suite que si N est une sous-algèbre normale quelconque d'une algèbre filtrée transitive, l'algèbre quotient L/N est canoniquement une algèbre filtrée transitive.

3) Rappelons qu'étant donnée L_0 un sous-espace d'une algèbre de Lie L, on peut définir sur L une filtration naturelle :

$$L = L_{-1} \supset L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_k \supset \cdots$$

en posant par induction :

$$L_{k+1} = \{x \in L_k , [x , L] \subset L_k\} .$$

Ces préparatifs étant faits, revenons donc à l'hypothèse du *théorème fondamental de Cartan seconde partie.* Soit donc donné une sous-algèbre fermée transitive L de D(V), involutive à l'ordre k. Par le même théorème, on a un P.G.I. analytique θ défini sur un ouvert U de L^k, tel que a étant un point de U, $L_a(\theta)$ est isomorphe à l'algèbre $L^{(k+1)}$, i.e. L avec une filtration décalée à l'ordre $k+1$. Par un abus de notation, qui ne risque pas de confusion, nous noterons $L_a(\theta)$ par L, autrement dit nous identifions $L_a(\theta)$ avec l'algèbre L. Ceci dit, l'espace tangent T_a est donc aussi identifié avec L^k ; et nous avons le sous-espace P_a :

$$P_a = L_0^k = L_0/L_k \subset L/L_k = L^k = T_a .$$

Alors $H_a = \pi^{-1}(P_a)$, sous-espace de $L_a(\theta)$, n'est autre L_0, qui est une sous-algèbre de L. Nous pouvons donc appliquer le lemme. Plus précisément, en réduisant au besoin l'ouvert U, nous avons une fibration analytique à fibre connexe (U , ρ , W), avec W pouvant être identifié avec un ouvert de $V = R^n$ donné, invariante par θ. Appliquons alors les dernières propositions et nous avons un P.G.I. analytique transitif $\underline{\theta}$ sur W, tel que $b = \rho(a)$, $L_b(\underline{\theta})$ est isomorphe à l'algèbre filtrée transitive L/N avec $(L/N)_0 = L_0/N$. Or N est d'après notre remarque 1) précédente :

$$N = \{x \in L_0 , [\ldots[x , L] , \ldots , L] \subset L_0\}$$

ce qui veut dire que $N \subset L_k$ pour tout k. Comme L est une sous-algèbre de D(V), on a $\bigcap_k L_k = 0$. La sous-algèbre normale N est donc nulle ; $L_b(\underline{\theta})$ est isomorphe à l'algèbre L avec la filtration originale donnée. Ainsi nous avons prouvé le théorème suivant, qui est une conséquence, rappelons-le du théorème fondamental de Cartan :

THEOREME DE REALISATION. — *Etant donnée une sous-algèbre transitive fermée* L *de* D(V), $V = R^n$, *il existe un P.G.I. analytique* θ *défini* *sur un ouvert* U *de* V *tel que a étant un point de* U, $L_a(\theta)$ *est isomorphe à* L *comme sous-algèbres de* D(V).

Nous rappelons à ce propos que $L_a(\theta)$ est canoniquement une sous-algèbre de D(V). D'autre part d'après ce que nous avons dit à la fin de la section I-i), il existe une application polynômiale φ "inversible" de V dans V, avec $\varphi(a) = a$, transportant l'algèbre $L_a(\theta)$ en une sous-algèbre $\underline{L}$ de D(V) telle que l'entier k quelconque étant donné, φ dépendant donc de cet entier, l'algèbre tronquée $\underline{L}^k$ soit exactement l'algèbre tronquée L^k de l'algèbre L. Evidemment nous pouvons considérer l'application φ comme un difféomorphisme analytique de U avec un autre ouvert W de V, contenant a, transportant θ en un autre P.G.I. analytique $\underline{\theta}$ défini sur W, tel que $L_a(\underline{\theta}) = \underline{L}$. Autrement dit nous avons ce corollaire :

COROLLAIRE. – *Etant donnée une sous-algèbre transitive fermée* L *de* D(V), *il existe un P.G.I. analytique θ défini sur un ouvert* U *de* V, *contenant un point a donné, tel que l'entier k étant donné à priori,* $L_a^k(\theta)$ *soit exactement l'algèbre de Lie tronquée* L^k *de l'algèbre* L.

II. Théorème de Réalisation Relative et Homogène.

i) *Théorème de Réalisation relative.*

Nous désignerons par (H , L) tout couple de sous-algèbres transitives fermées de D(V), tel que L contient H :

$$H \subset L \subset D(V) .$$

Nous dirons que deux couples (H , L) et ($\underline{H}$, $\underline{L}$) de sous-algèbres de D(V) sont isomorphes s'il existe un automorphisme de D(V) transportant les algèbres $\underline{H}$ et $\underline{L}$ respectivement en H et L. Rappelons à ce propos la proposition suivante (voir [4] dont la proposition n'est que le théorème 2 écrit sous une autre forme) :

PROPOSITION. – *Etant donnés deux couples* (H , L) *et* ($\underline{H}$, $\underline{L}$) *de sous-algèbres transitives fermées de* D(V), *avec* L *et* $\underline{L}$ *involutives à l'ordre k, s'il existe un isomorphisme φ des algèbres tronquées filtrées* L^k *et* $\underline{L}^k$ *tel que* $\varphi(H^k) = \underline{H}^k$

$$\begin{array}{ccc} L^k & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & \underline{L}^k \\ \cup & & \cup \\ H^k & \longrightarrow & \underline{H}^k \end{array}$$

alors les deux couples (H, L) *et* $(\underline{H}, \underline{L})$ *sont isomorphes.*

Soit donc donné un couple $(\underline{H}, \underline{L})$ de sous-algèbres transitives fermées de $D(V)$. D'après le théorème de Réalisation, section I-iii), il existe donc un P.G.I. analytique θ défini sur un ouvert U de V, que nous pouvons supposer simplement connexe et contenant l'origine a de V, tel que l'algèbre $H = L_a(\theta)$ soit isomorphe à $\underline{H}$. Désignons par φ l'isomorphisme de $D(V)$ transportant $\underline{H}$ en H. Notons par L, la sous-algèbre $\varphi(\underline{L})$ de $D(V)$; nous avons évidemment ainsi un couple (H, L) de sous-algèbres transitives fermées de $D(V)$ isomorphe au couple $(\underline{H}, \underline{L})$.

Notons alors par Γ le Pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de U, obtenus de façon habituelle en intégrant les champs de vecteurs X de θ. Précisons que nous avons pour tout entier k :

$L_a^k(\theta) = H^k \subset L^k \subset D^k(V) = J_k(T)|_a$, la fibre en a de $J_k(T)$, T étant le fibré tangent de U.

On sait que Γ est un groupoïde d'opérateurs sur $J_k(T)$ par la théorie de prolongement, dont le groupe d'isotropie en a laisse évidemment invariant le sous-espace L^k de $J_k(T)|_a$. Par la théorie classique des G-structures d'ordre supérieur, Γ déplace donc L^k pour définir un sous-fibré vectoriel analytique F_k de $J_k(T)$. Ceci étant fait pour tout k, les propriétés suivantes sont facilement vérifiées :

1) $F_k \supset J_k(\theta) = E_k$, équation de Lie d'ordre k de θ

2) $\pi(F_k) = F_{k-1}$, π étant le morphisme $J_k(T) \to J_{k-1}(T)$

3) $\tau : F_k \wedge F_k \to F_{k-1}$, i.e. le crochet formel de deux éléments de F_k est dans F_{k-1}.

LEMME. – *Pour tout entier k, le système différentiel* F_k *est contenu dans le système de prolongement de* F_{k-1} :

$$F_k \subset J_1(F_{k-1}) \cap J_k(T)$$

Preuve. – Désignons par D l'opérateur de Spencer ; l'opérateur différentiel d'ordre 1 :

$$D : J_k(T) \to T^* \otimes J_{k-1}(T)$$
$$fj^k X \to df \otimes j^{k-1} X$$

D'après un résultat connu [10], [14], comme $\pi(F_k) = F_{k-1}$ il suffit pour démontrer le lemme de montrer que l'opérateur D restreint à F_k est à valeurs dans $T^* \otimes F_{k-1}$:

$$D : F_k \to T^* \otimes F_{k-1}$$

Soit donc s une section de F_k, que nous pouvons écrire localement

$$s = f^i j^k X_i \quad \text{(sommation finie)}$$

Quelque soit Y, une germe de section de θ ; par construction θ laisse invariant F_k, donc pour le crochet de Lie dans $J_k(T)$, on a $[j^k Y, s]$ comme une section de F_k. Or

$$[j^k Y, s] = [j^k Y, f^i j^k X] = (Y . f^i) j^k X_i + f^i j^k [Y, X_i]$$

D'où
$$\pi[j^k Y, s] = (Y . f^i) j^{k-1} X_i + f^i j^{k-1} [Y, X_i]$$
$$= (Y . f^i) j^{k-1} X_i + [\![j^k Y, s]\!]$$

Comme $F_k \supset J_k(\theta)$, $j^k Y$ est aussi une section de F_k. D'après la propriété 3) précédente, $[\![j^k Y, s]\!]$ est donc une section de F_{k-1}, et de même évidemment le premier membre de la dernière égalité ; nous avons donc

$$(Y . f^i) j^{k-1} X_i = D_Y(s)$$

comme une section de F_{k-1}. Ceci étant pour tout Y dans θ, et que θ est un P.G.I. transitif sur U, on a $D(s)$ une section de $T^* \otimes F_{k-1}$./.

Il en découle que si l'algèbre de Lie L est involutive à l'ordre k, le système différentiel analytique F_k est involutif, donc complètement intégrable. D'autre part, c'est aussi une équation de Lie. Désignons par θ_0 le faisceau de toutes les germes de solutions analytiques de F_k ; θ_0 est un P.G.I. analytique transitif sur U, dont le P.G.I. θ est un sous-P.G.I. Précisons qu'on a pour tout k, $J_k(\theta_0) = F_k$ et $L_a(\theta_0) = L$. Ainsi nous avons prouvé le théorème suivant :

THEOREME DE REALISATION RELATIVE. – *Etant donné un couple* $(\underline{H}, \underline{L})$ *de sous-algèbres transitives fermées de* D(V), *il existe deux P.G.I. analytiques* θ *et* θ_0, *définie sur un ouvert* U *de* V, *tels que*

1) $\theta \subset \theta_0$

2) *a étant un point de* U, $H = L_a(\theta)$ *et* $L = L_a(\theta_0)$ *on a* (H, L) *isomorphe au couple* $(\underline{H}, \underline{L})$ *donné.*

De nouveau, d'après ce que nous avons dit à la fin de la section I-i) ou plus précisément en appliquant le corollaire du *théorème de réalisation* de la section I-iii), nous pouvons supposer $H = L_a(\theta)$ admettant comme algèbre tronquée H^k l'algèbre $\underline{H}^k$, l'algèbre tronquée de $\underline{H}$. Alors l'automorphisme φ de D(V), transportant $\underline{H}$ et H, peut être supposé égal à l'identité "à l'ordre k", ou plus précisément tel que $L = \varphi(\underline{L})$ admet la même algèbre tronquée à l'ordre k que $\underline{L}$, i.e. $L^k = \underline{L}^k$. D'où ce corollaire

COROLLAIRE 1. – *Etant donné un couple* $(\underline{H}, \underline{L})$ *de sous-algèbres transitives fermées de* D(V), *et un entier k quelconque, il existe deux P.G.I. analytiques* θ *et* θ_0 *définis sur un ouvert* U *de* V *tels que*

1) $\theta \subset \theta_0$

2) *a étant un point de* U, $H = L_a(\theta)$ *et* $L = L_a(\theta_0)$ *les couples* (H, L) et $(\underline{H}, \underline{L})$ *sont isomorphes et de plus on a* $H^k = \underline{H}^k$ *et* $L^k = \underline{L}^k$.

Nous pourrons aussi nous donner au préalable un P.G.I. analytique transitif $\underline{\theta}$ défini sur une variété M, que nous supposons être un ouvert de V (nos considérations sont en effet d'ordre local). Soit alors $\underline{H}$ une sous-algèbre transitive fermée de D(V), contenue dans $\underline{L} = L_a(\underline{\theta})$, a étant un point de M. Appliquons alors le corollaire précédent et réalisons le couple $(\underline{H}, \underline{L})$ par deux P.G.I. θ et θ_0 définis sur un ouvert U de V, contenant a. Or d'après le théorème d'équivalence [13] de Petitjean et Rodrigues, comme $L_a(\underline{\theta})$ et $L_a(\theta_0)$ sont isomorphes et de même algèbre tronquée à l'ordre k, il existe un difféomorphisme analytique d'un ouvert W de U, contenant a, dans la variété M, difféomorphisme qui est égal à l'identité "à l'ordre k" en a, et transporte θ_0 en $\underline{\theta}$. Ce même difféomorphisme transporte évidemment le sous-P.G.I. θ de θ_0 en un sous-P.G.I. $\underline{\theta}'$ de θ, t.q. $L(\underline{\theta}')$ est isomorphe à $\underline{H}$ et admet même comme algèbre tronquée à l'ordre k donné l'algèbre tronquée $\underline{H}^k$. En résumé, nous avons donc ce corollaire

COROLLAIRE 2. — *Etant donnée une sous-algèbre transitive fermée* H *de* $L = L_a(\theta_0)$, *l'algèbre formelle en a d'un P.G.I. analytique transitif* θ_0 *défini sur un ouvert* U *de* V, *il existe un sous-P.G.I.* θ *de* θ_0, *défini éventuellement seulement sur un ouvert* W, *contenu dans* U *et contenant le point a, tel que* $L_a(\theta)$ *est isomorphe à* H *et en plus on a, l'entier k étant donné à priori,*

$$L_a^k(\theta) = H^k \ .$$

Remarque. — Notre démonstration du *théorème de Réalisation relative* montre de fait le résultat suivant : Soit donné un P.G.I. analytique transitif θ sur une variété M simplement connexe. Alors pour toute sous-algèbre fermée L de $D(T_a)$ contenant $H = L_a(\theta)$, il existe un P.G.I. analytique θ_0, contenant θ, défini sur M tel que $L_a(\theta_0) = L$.

ii) *Sous-algèbres homogènes*

Dans le travail que nous avons déjà donné comme références [18], le second auteur a considéré la catégorie des P.G.I. homogènes dont voici la définition

DEFINITION DES P.G.I. HOMOGENES. — *Un P.G.I.* θ *défini sur une variété* M *est dit homogène si son normalisateur dans le faisceau* T *d'algèbres de Lie de toutes les germes de champs de vecteurs sur* M *est un faisceau transitif.*

La définition veut dire plus précisément que pour tout point a de M, il existe une base libre (X_i), $1 \leqslant i \leqslant n$ dimension de M, de champs de vecteurs définis sur un voisinage U de a telle que sur U, on a $[X_i, \theta] \subset \theta$. On a à ce propos le théorème suivant :

THEOREME. — *Si* θ *est un P.G.I. analytique homogène défini sur une variété* M, *alors son normalisateur* $N(\theta)$ *est un P.G.I. transitif sur* M.

La catégorie des P.G.I. analytiques homogènes a été introduite par le second auteur comme une catégorie naturelle contenant comme sous-catégorie la catégorie des germes de groupes de Lie et admettant la notion de noyaux et de co-noyaux (voir les théorèmes du noyau et du quotient dans [18]).

A cette catégorie, il correspond la notion des sous-algèbres homogènes de D(V). En effet, si θ est un P.G.I. analytique homogène défini sur une variété M, alors a étant un point de M, $N = L_a(N(\theta))$ est facilement démontré être le normalisateur de $L_a(\theta)$ dans l'algèbre $D(T_a)$. D'où la définition naturelle suivante :

DEFINITION DES SOUS-ALGEBRES HOMOGENES. – *Une sous-algèbre* L *de* D(V) *est dite homogène si son normalisateur* N *dans* D(V) *est sous-algèbre transitive de* D(V).

Remarquons que si L est une sous-algèbre fermée de D(V), il en est évidemment de même pour son normalisateur N.

Cette définition a été introduite ; nous allons généraliser ici quelques résultats connus sur les sous-algèbres transitives au cas des sous-algèbres homogènes. Nous n'en ferons donc qu'un très bref exposé, en demandant peut être pour la compréhension au lecteur une étude préalable du travail de Hayashi sur les algèbres filtrées transitives [4].

Soient donc N une sous-algèbre fermée transitive de D(V) et L une sous-algèbre fermée normale de N. Nous dénoterons respectivement par N^k et L^k les algèbres tronquées de N et L :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & h^k & \to & N^k & \xrightarrow{\pi} & N^{k-1} & \to & 0 \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ 0 & \to & g^k & \to & L^k & \xrightarrow{\pi} & L^{k-1} & \to & 0 \end{array}$$

la première suite contenant la deuxième. Remarquons que comme L est une sous-algèbre homogène de D(V) quoique N ne soit pas nécessairement son normalisateur, on a l'application injective :

$$0 \to g^k \xrightarrow{\partial} V^* \otimes g^{k-1}$$

où ∂ est l'application d'antisymétrisation naturelle (voir I-i). Donc pour toute sous-algèbre homogène L de D(V), nous avons aussi la notion de ∂-cohomologie et de degré d'involutivité.

PROPOSITION 1. – *L'algèbre quotient* Q = N/L *est naturellement une algèbre de Lie filtrée transitive complète.*

Preuve. – En effet, Q est une algèbre de Lie filtrée complète car Q est naturellement la limite projective des algèbres tronquées

$Q^k = N^k/L^k$. Il nous reste à vérifier qu'elle est transitive. Or étant donnée la suite exacte

$$0 \to q^k \to Q^k \xrightarrow{\pi} Q^{k-1} \to 0$$

où $q^k = h^k/g^k$, dire que Q est transitive revient à dire que pour k plus grand que certain k_0 donné, l'application suivante est injective

$$q^k \xrightarrow{\partial} (Q^k)^* \otimes q^{k-1}$$

où si $\xi \in q^k$ et $\eta \in Q^k$, $\partial_\eta(\xi) = [\![\xi , \eta]\!] \in q^{k-1}$.

Or posons donc respectivement par x et y les éléments de h^k et N^k, tels que

$$\xi = x \text{ mod. } (g^k)$$

$$\eta = y \text{ mod. } (L^k)$$

On a $\partial_\eta(\xi) = [\![\xi , \eta]\!] = [\![x , y]\!]$ mod. (g^{k-1}).

D'où pour que $\partial(\xi) = 0$, il faut que $\partial(x)$, élément de $(N^k)^* \otimes h^{k-1}$, soit dans le sous-espace $(N^k)^* \otimes g^{k-1}$. Alors il nous suffit de choisir pour k_0, le degré d'involutivité de L ; car si k est plus grand que $k_0 + 1$ ainsi choisi, la suite suivante est exacte :

$$0 \to g^k \to (N^k)^* \otimes g^{k-1} \to \wedge^2(N^k)^* \otimes g^{k-2}$$

D'où en effet si $\partial(x)$ est dans $(N^k)^* \otimes g^{k-1}$, il existe $z \in g^k$ tel que $\partial(x) = \partial(z)$. Mais comme ∂ est une application injective défini sur $h^k \supset g^k$, on doit avoir $x = z \in g^k$ ./.

Remarquons que l'algèbre tronquée L^k est une *sous-algèbre tronquée normale* de l'algèbre tronquée N^k, i.e. pour tout $x \in N^k$, on a

$$[\![x , L^k]\!] \subset L^{k-1}$$

Nous allons supposer dans la suite que les algèbres N et L sont toutes les deux involutives à l'ordre k_0.

PROPOSITION 2. – *Etant donné $k \geqslant k_0 + 2$, dans tout prolongement maximal $\underline{N}^{k+1}$ de l'algèbre tronquée N^k, il existe un prolongement maximal $\underline{L}^{k+1}$ de l'algèbre tronquée L^k, tel que $\underline{L}^{k+1}$ est une sous-algèbre tronquée normale de $\underline{N}^{k+1}$.*

Preuve. – Précisons d'abord que dans notre terminologie, un prolongement maximal d'une algèbre de Lie tronquée transitive, ou évidemment de même homogène, est désigné par Hayashi comme "a normal prolongation". Nous en renvoyons donc pour la définition à la page 10 de notre papier de référence [4].

Choisissons une section linéaire quelconque s de l'application π :

$$\mathrm{N}^k \xrightarrow{\pi} \mathrm{N}^{k-1} \to 0$$

telle que $s(\mathrm{L}^{k-1}) \subset \mathrm{L}^k$. Ceci dit, si σ est une section quelconque linéaire de l'application $\pi : \underline{\mathrm{N}}^{k+1} \to \mathrm{N}^k \to 0$, considérons la forme ω_x, définie pour tout x dans L^k,

$$\omega_x : \mathrm{N}^k \to h^k$$

$$\omega_x(y) = [\![\sigma(x) , \sigma(y)]\!] - s([\![x , y]\!])$$

ω_x est donc un élément de $(\mathrm{N}^k)^* \otimes h^k$, qui est appliqué, comme on voit facilement par la formule de Jacobi des crochets formels, par l'opérateur d'antisymétrisation ∂ dans $\wedge^2(\mathrm{N}^k)^* \otimes g^{k-1}$. Par hypothèse sur k, on doit donc avoir

$$\omega_x = \partial(\alpha_x) + \theta_x$$

où θ_x est un élément de $(\mathrm{N}^k)^* \otimes g^k$ et α_x, un élément de h^{k+1}. Evidemment, α_x peut être choisi de façon linéaire en x, i.e. nous avons une application linéaire

$$\alpha : \mathrm{L}^k \to h^{k+1} , \alpha(x) = \alpha_x$$

Il nous reste simplement à vérifier que l'application $\sigma + \alpha$ est une section (par rapport à l'application π) définie sur L^k à valeurs dans N^{k+1}, telle que pour tout $x \in \mathrm{L}^k$ et $y \in \underline{\mathrm{N}}^{k+1}$, on a

$$[\![\sigma(x) + \alpha(x) , y]\!] \in \mathrm{L}^k$$

La vérification est immédiate, nous la laissons au lecteur ./.

Soient donc $\underline{\mathrm{N}}^{k+1}$ et $\underline{\mathrm{L}}^{k+1}$ des prolongements maximaux respectifs de N^k et L^k, construits comme il a été dit dans la proposition précédente. Nous savons qu'il existe un isomorphisme φ d'algèbres de Lie transitifs tronquées de N^{k+1} avec $\underline{\mathrm{N}}^{k+1}$:

$$\begin{tikzcd} N^{k+1} \arrow[r, "\underset{\sim}{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"] & N^{k+1} \arrow[d, "\pi"] \\ N^{k} \arrow[r, "\underset{\sim}{\mathrm{id.}}"] & N^{k} \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 3. – *Pour tout tel isomorphisme φ, nous avons* $(k \geqslant k_0 + 2)$

$$\varphi(\mathrm{L}^{k+1}) = \underline{\mathrm{L}}^{k+1}$$

Preuve. – Désignons par s une section quelconque (par rapport à l'application π) de L^k dans L^{k+1}, et $\underline{s}$, une section quelconque de L^k dans $\underline{\mathrm{L}}^{k+1}$. Alors pour tout $x \in \mathrm{L}^k$, on a

$$h(x) = \varphi \circ s(x) - \underline{s}(x), \text{ comme élément de } h^{k+1}.$$

Or pour tout $y \in \mathrm{N}^{k+1}$,

$$\begin{aligned} [\![h(x) , \varphi(y)]\!] &= [\![\varphi \circ s(x) , \varphi(y)]\!] - [\![\underline{s}(x) , \varphi(y)]\!] \\ &= [\![s(x) , y]\!] - [\![\underline{s}(x) , \varphi(y)]\!] \end{aligned}$$

dont le dernier membre est évidemment dans L^k. D'où nous avons

$$\partial(h(x)) \in \mathrm{V}^* \otimes g^k$$

Par hypothèse sur k, la dernière relation implique : $h(x) \in g^{k+1}$./.

DEFINITION. – *Deux sous-algèbres de Lie* L *et* $\underline{\mathrm{L}}$ *homogènes de* D(V) *sont dites isomorphes s'il existe un automorphisme de* D(V) *transportant l'une sur l'autre.*

Les propositions 2 et 3 impliquent que comme dans le cas des algèbres transitives, la classe d'isomorphisme des sous-algèbres fermées homogènes de D(V) donnée est caractérisée par les algèbres tronquées d'un certain ordre correspondantes.

Plus précisément, soit L une sous-algèbre fermée de D(V). Nous pouvons toujours en définir les algèbres tronquées L^k :

$$0 \to g^k \to \mathrm{L}^k \xrightarrow{\pi} \mathrm{L}^{k-1} \to 0$$

Supposons en plus que l'opérateur d'antisymétrisation ∂ est tel que $\partial(g^k) \subset V^* \circ g^{k-1}$. Alors d'après les propositions 2 et 3, pour que L soit isomorphe comme algèbre filtrée à une sous-algèbre fermée homogène $\underline{L}$ de D(V), il faut et il suffit que L^{k_0} soit isomorphe comme algèbre tronquée à l'algèbre tronquée $\underline{L}^{k_0}$ pour un certain ordre k_0 assez grand donné.

Précisons que nous ne connaissons pas de méthode inductive *finie* pour déterminer si une sous-algèbre fermée L donnée de D(V) est une sous-algèbre homogène. Nous nous demandons aussi, sans pouvoir y répondre, la question de savoir s'il est possible de donner une définition abstraite de l'algèbre filtrée complète homogène (comme c'est le cas des sous-algèbres fermées transitives de D(V) [4], [19]).

iii) *Théorème de réalisation homogène.*

Soit donné un P.G.I. analytique transitif θ défini sur une variété connexe M. Nous désignerons encore par Γ le Pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de M, obtenus de façon habituelle en intégrant les champs de vecteurs X de θ.

Donnons-nous un point a de M et une sous-algèbre fermée normale L de $N = L_a(\theta)$: $L \subset N \subset D(T_a)$, où T_a est l'espace tangent en a de M. De nouveau pour tout entier k, Γ étant un groupoïde d'opérateurs sur $J_k(T)$, déplace le sous-espace L^k de $J_k(T)|_a$ pour définir un sous-espace fibré vectoriel analytique F_k de $J_k(T)$. On a alors les propriétés suivantes :

1) $F_k \subset E_k = J_k(\theta)$, équation de Lie d'ordre k de θ.

2) $\pi(F_k) = F_{k-1}$, π étant le morphisme canonique de $J_k(T)$ sur $J_{k-1}(T)$.

3) pour tout x de F_k, et tout y de E_k on a

$$\tau(x, y) = [\![x, y]\!] \in F_{k-1}$$

4) le système différentiel F_k est contenu dans le système de prolongement du système F_{k-1}.

Les propriétés 1), 2) et 3) sont évidentes par transport défini par difféomorphismes. La démonstration de la propriété 4) est en tout point identique à la démonstration du lemme précédant le théorème de Réalisation relative (section II-i). Il en découle que si l'algèbre L est involutive à l'ordre k, le système différentiel analytique F_k est involutif donc complètement intégrable [8], [15], [20]. Nous pouvons supposer que k est choisi tel que E_k est aussi involutif. Alors l'ensemble de toutes les germes de solutions analytiques de F_k est un sous-P.G.I. θ_0 du P.G.I. θ donné. Evidemment on a $L_a(\theta_0) = L$, et θ_0 est un *sous-P.G.I. normal* de θ, i.e. pour tout $X \in \theta$, $[X, \theta_0] \subset \theta_0$. Ainsi nous avons démontré la proposition :

PROPOSITION 1. – *Etant donnés un P.G.I. analytique transitif* θ *défini sur une variété connexe* M, *et* L *une sous-algèbre fermée normale de* $N = L_a(\theta)$, *il existe un sous-P.G.I. normal* θ_0 *de* θ, *défini sur* M, *tel que*

$$L_a(\theta_0) = L .$$

Plus précisément, comme l'algèbre quotient $Q = N/L$ est une algèbre filtrée complète transitive d'après la proposition 1 de II-ii) nous pouvons donc la réaliser comme l'algèbre formelle d'un P.G.I. analytique $\underline{\theta}$. D'après un résultat de Petitjean et Rodrigues [13], il existe un homomorphisme local (au sens de Rodrigues [18]) de θ sur $\underline{\theta}$. Le noyau de ce homomorphisme local est un sous-P.G.I. normal θ_0 de θ, qu'on peut supposer défini au voisinage de $a \in M$, tel que évidemment $L_a(\theta_0) = L$. Ce sous-P.G.I. coïncide dans son domaine de définition avec le P.G.I. θ_0 de la proposition précédente. Sans entrer trop dans les détails (voir donc [13] et [18]), nous pouvons aussi énoncer

PROPOSITION 2. – *Etant donné un P.G.I. analytique transitif* θ *défini sur une variété* M *et une sous-algèbre fermée normale* L *de* $N = L_a(\theta)$, *il existe un homomorphisme local de* θ *sur un autre P.G.I. transitif* $\underline{\theta}$ *tel que son noyau est un sous-P.G.I.* θ_0 *de* θ *défini au voisinage de* a *et* $L_a(\theta_0) = L$.

THEOREME DE REALISATION HOMOGENE. – *Etant donnée une sous-algèbre fermée homogène* L *de* D(V), *il existe un P.G.I. analytique homogène* θ_0 *défini sur un ouvert* U *de* V, *tel que* a *étant un point de* U, $L_a(\theta_0)$ *est une sous-algèbre homogène de* D(V) *isomorphe à* L.

Preuve. – Soit N la sous-algèbre transitive fermée de D(V), qui est le normalisateur de L. D'après le théorème de réalisation, il existe un P.G.I. analytique transitif θ défini sur un ouvert U de V, tel que $L_a(\theta)$ est isomorphe à N. L'isomorphisme qui transporte N en $L_a(\theta)$, transporte la sous-algèbre normale L de N en une sous-algèbre normale L_a de $L_a(\theta)$. L'ouvert U pouvant être choisi connexe, il nous reste qu'à appliquer la proposition 1 précédente en réalisant L_a, i.e. $L_a = L_a(\theta_0)$ où θ_0 est un sous-P.G.I. normal de θ ./.

Remarque. – D'après le corollaire du théorème de réalisation (I,iii), nous pouvons supposer que l'entier k étant donné à priori, l'algèbre tronquée $L_a^k(\theta)$ coïncide avec l'algèbre tronquée N^k du normalisateur N de L. Cela étant fait, l'algèbre tronquée $L_a^k(\theta_0)$ coïncide évidemment aussi avec l'algèbre tronquée L^k de L. Autrement dit, nous pouvons réaliser, pour tout entier k donné à priori, l'algèbre fermée homogène donnée L comme une isomorphe à $L_a(\theta_0)$ d'un P.G.I. homogène analytique avec en plus l'égalité $L^k = L_a^k(\theta_0)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CARTAN, Sur la structure des groupes infinis de Transformations, *Oeuvres complètes,* partie II, Vol. 2, Gauthiers-Villars ed. 571-714. La structure des groupes infinis, idem, 1335-1384.

[2] H. GOLDSCHMIDT, Sur la structure des équations de Lie : Le troisième théorème fondamental, partie I, *Journal Diff. Geometry*, 6 (1972), 357-373.
partie II, idem Vol. 7 (à paraître).

[3] V.W. GUILLEMIN and S. STERNBERG, An algebraic model of transitive differential geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70 (1964), 16-47.

[4] I. HAYASHI, Embedding and existences theorems of infinite algebras, *Journ. Math. Soc. of Japan*, 22 (1970), 1-14.

[5] A. KUMPERA, A theorem on Cartan Pseudogroups, Topologie et Géom. différentielle, *Séminaire Ehresmann,* Vol. VI (1964), exp. 7.

[6] A. KUMPERA and D.C. SPENCER, Lie Equations, Volume I : General theory, *Ann. of Math. Studies,* 73 (1972), Princeton Univ. Pres.

[7] M. KURANISHI, On the local theory of continuous infinite pseudo-groups II, *Nagoya Mathematical Journal,* vol. 19 (1961).

[8] M. KURANISHI, Lectures on involutif systems of partial differential equations, Instituto de Pesquisas Matemáticas, Universidade de São Paulo, 1967.

[9] M. KURANISHI et A.A.M. RODRIGUES, Quotients of Pseudogroups by Invariant Fiberings, *Nagoya Math. Journal,* 24 (1964), 109-128.

[10] B. MALGRANGE, Equations de Lie, *Journ. Diff. Geom.,* 6 (1972), 503-522., 7 (1972) 117-141.

[11] Y. MATSUSHIMA, On a theorem concerning the prolongation of a differential system, *Nagoya Math. J.* 6 (1953), 1-16.

[12] A. PETITJEAN, Prolongements d'homomorphismes d'algèbres de Lie filtrées transitives (à paraître).

[13] A. PETITJEAN et A.A.M. RODRIGUES, Correspondance entre algèbres de Lie abstraites et Pseudo-groupes de Lie transitifs, *Ann. of Math.* (à paraître).

[14] NGÔ VAN QUÊ, Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, (1967), 157-223.

[15] D.G. QUILLEN, Formal properties of overdetermined systems of linear partial differential equations, Thesis, Harvard 1964.

[16] D.S. RIM, Deformation of transitive Lie algebras, *Ann. of Math.,* 83 (1966), 339-357.

[17] A.A.M. RODRIGUES, *CR. Acad. Sciences de Paris,* Série A
i) 15/12/1968, 1154-1155.
ii) 22/12/1969, 2211-2213.
iii) 19/01/1970, 192-194.

[18] A.A.M. RODRIGUES, On a category of infinite Lie groups (à paraître).

[19] I.M. SINGER and S. STERNBERG, The infinite groups of Lie and Cartan : I – the transitive groups, *Journ. Analyse Math.,* 15 (1965), 1-114.

[20] D.C. SPENCER, Deformation of structures on manifolds defined by transitive continuous pseudogroups, I-II, *Ann. of Math.*, 76 (1962), 306-445. III, idem 81 (1965), 389-450.

[21] D.C. SPENCER, Over-determined Systems of linear partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 179-239.

Manuscrit reçu le 5 décembre 1973
accepté par B. Malgrange.

NGÔ VAN QUÊ,
Département de Mathématiques
Université de Montréal
Case Postale 6128
Montréal 101 (Canada).

A.A.M. RODRIGUES,
Universidade de Brasilia.
Brasilia (Brésil).