ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAROUAN AJLANI

Sur une famille de cônes réticulés avec domination (les *D*-cônes)

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 4 (1974), p. 1-46

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_4_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 4 (1974), 1-46.

SUR UNE FAMILLE DE CÔNES RÉTICULÉS AVEC DOMINATION (LES D-CÔNES)

par Marouan AJLANI

Introduction.

Les espaces vectoriels réticulés que nous connaissons le mieux sont les espaces du type $\mathscr{C}(X)$ et $L^p(\mu)$. C'est ainsi que l'on a cherché à y plonger les espaces vectoriels réticulés. Mais, il y a une équivoque à lever; les espaces de type $L^p(\mu)$ doivent-ils être considérés comme des espaces de fonctions ou des espaces de mesures? La représentation de Kakutani des espaces de type M et L fait bien apparaître ces espaces respectivement comme espaces de fonctions et espaces de mesures et elle met l'accent sur la dualité. Disons en gros que les espaces complètement réticulés apparaissent comme des espaces de mesures parce qu'ils sont saturés par passage à la borne supérieure des ensembles majorés. Plusieurs auteurs (19) ont suivi l'idée de Nakano et essayé de représenter un espace réticulé comme espace de fonctions continues généralisées sur l'espace, convenablement topologisé, de ses idéaux premiers; les résultats sont décevants car la représentation est très « mince » dans l'espace des fonctions et elle est inutilisable si l'on n'impose pas de conditions supplémentaires topologiques ou algébriques. De plus rien n'indique à priori qu'un espace réticulé « doive » se représenter plutôt comme un espace de fonctions que comme un espace de mesures.

Dans (2) a été introduite une classe de cônes complètement réticulés et faiblement complets, appelés les cônes biréticulés, qui constituent une généralisation immédiate des cônes ayant pour base un simplexe de Bauer et qui apparaissent nettement comme des cônes de mesures. Le cône des formes linéaires positives sur tout cône réticulé est un cône biréticulé.

Dans ce travail nous étudions des conditions qui permettent de représenter un cône réticulé H comme cône de fonctions continues. Soit L le cône des formes linéaires positives sur H. Nous imposons à H d'être identique au cône des formes linéaires sur (L — L), positives sur L et dont la restriction à L est $\sigma(L, H - H)$ continue. Il revient au même, selon une indication de Choquet, de dire que tout filtre qui possède une base constituée d'intervalles de H et qui est de Cauchy pour la topologie $\sigma(H, L - L)$ converge vers un élément de H.

Un exemple important de cônes de fonctions dont le cône des formes linéaires positives est un cône de mesures est fourni par les cônes adaptés introduits et utilisés par Choquet (8). Soit T un espace localement compact, le cône $\mathscr{C}_0^+(T)$ des fonctions continues positives tendant vers zéro à l'infini est un cône adapté et il est bien connu que le cône des formes linéaires positives sur $\mathscr{C}_0^+(T)$ est un cône de mesures.

Étant donné un cône biréticulé L, nous nous sommes posés la question de savoir à quelle condition le cône H des formes linéaires positives et continues sur L peut se représenter comme un espace adapté de fonctions continues. Une condition « D » (définition 45) liant l'ordre et la topologie de Mackey de H permet d'affirmer que le cône $\mathscr{E}(L)\setminus\{0\}$ est localement compact et de représenter H, dans les bons cas, comme cône adapté de fonctions continues. Si le cône H ne possède pas la propriété « D », existe-t-il un sous-cône de H possédant cette propriété? La réponse à cette question est liée à l'existence, dans H, d'un élément à support conique localement-compact (définition (11)). Nous montrons que cela est assuré dès que $\mathscr{E}(L)\setminus\{0\}$ contient un ouvert localement-compact (proposition (66)).

Suivant Wils (20) et Edwards (11_b) nous appelons *centre* de H, le cône Z(H) des opérateurs linéaires de H dans H qui sont majorés par un multiple de l'identité. La proposition 69 indique quels sont les éléments de Z(H) dont l'image est contenue dans le plus grand sous-cône de H possédant la propriété « D ».

Nous avons été conduits à faire une étude détaillée du centre de H. Nous obtenons une propriété de domination faible (definition 29) qui équivaut pour l'espace $\tilde{\mathscr{E}}$ (espace topologique quotient naturel de $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$) à la propriété d'être complètement-régulier. Nous montrons que, lorsque de plus le cône L est presque-bien-coiffé, le compactifié de Stone-Čech de $\tilde{\mathscr{E}}$ est homéomorphe au spectre de l'algèbre $\mathrm{Z(H)} - \mathrm{Z(H)}$.

Lorsque H est le cône positif d'un espace E de type M de Kakutani, l'espace $\tilde{\mathscr{E}}$ est homéomorphe à l'espace, convenablement topologisé, noté max (E) (12), des points extrémaux de la partie positive de la sphère unité de E'. L'identification de ces deux espaces homéomorphes a conduit dans (12) et par la suite dans (13_b) à plonger dans un même espace de fonctions continues, des espaces d'opérateurs sur E et des sous-espaces de E. Nous pensons que cela peut prêter à confusion, voir propositions 69, 70 et 71.

Ce travail contient un développement des notes (1_a) et (1_b) et a été beaucoup stimulé par des discussions avec G. Mokobodzki.

Index.

Définitions

Notations

PREMIÈRE PARTIE

CENTRE ET SPECTRE CENTRAL DE CERTAINS CÔNES RÉTICULÉS

1. Rappels des propriétés des cônes faiblement complets.

Ce paragraphe sera consacré à un rappel de quelques résultats de Choquet sur les cônes faiblement complets [6] et [7].

Soit L un cône de la classe $\mathcal{S}$, c'est-à-dire convexe saillant et faiblement complet, soient $E = L - L$ et $A_C(L)$ l'espace des formes linéaires sur E dont les restrictions à L sont continues. On a $A_C(L) = A_C^+(L) - A_C^+(L)$, et l'on sait que le cône E'^+ est *cofinal* dans $A_C^+(L)$, c'est-à-dire : toute forme linéaire positive dont la restriction à L est continue est majorée sur L par une forme linéaire continue et positive.

Soit g une fonction continue linéaire par morceaux et convexe sur L, elle s'écrit $g(x) = \sup(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ avec $f_1, \ldots, f_n \in A_C(L)$. Si g est majorée par un élément de E' on pose $\hat{g} = \inf\{l;\, l \leqslant g \text{ sur } L\}$.

On nomme *ensemble bordant* relatif à g l'ensemble

$$B_g = \{x \in L;\, \hat{g}(x) = g(x)\}.$$

Proposition 1. — *Pour tout g linéaire par morceaux et convexe on a : $\hat{g}(x) = \sup \Sigma f_i(x_i)$ pour toute famille finie (x_i) de L telle que $x = \Sigma x_i$.*

Proposition 2. — *Il est équivalent de dire que L est réticulé ou que l'application $x \to \hat{g}(x)$ est linéaire pour tout g linéaire par morceaux et convexe.*

Proposition 3. — *Le cône L est identique à l'enveloppe convexe de B_g et aussi, avec les notations utilisées, à la somme des cônes $B_g^i = \{x \in L;\, \hat{g}(x) = f_i(x)\}$.*

Proposition 4. — *La réunion des génératrices extrémales de* L *est identique à l'intersection de tous les ensembles bordants de* L.

Proposition 5. — *Le cône* L *est identique au cône des formes linéaires positives sur* $A_C(L)$, *et les topologies induites sur* L *par* $\sigma(E, A_C(L))$ *et* $\sigma(E, E')$ *sont identiques.*

2. Les cônes biréticulés.

Nous ne reprendrons pas les démonstrations des propriétés des cônes biréticulés dont une partie a été énoncée dans [2] et dont les démonstrations ont été développées ensuite dans [13_a]. Nous donnerons cependant les démonstrations des théorèmes nouveaux.

Définition 6. — *Nous dirons que le cône* $L \in \mathcal{S}$ *est* biréticulé *si le cône* $A_C^+(L)$ *est réticulé pour son ordre propre.* Dans toute la suite nous noterons par H le cône $A_C^+(L)$.

Il résulte de la proposition 5 que si L est biréticulé alors L est complètement réticulé et la borne supérieure de deux éléments de L est identique à leur borne supérieure en tant que fonctions sur $A_C(L)$.

Il résulte de la définition que pour tout g linéaire par morceaux et convexe sur L on a $\hat{g} \in A_C(L)$ donc les ensembles B_g^i de la proposition 3 sont fermés, ce qui entraîne par la proposition 4 que la réunion des génératrices extrémales de L, notée $\mathcal{E}(L)$, est fermée ; mais on a mieux :

Proposition 7. — *Soit* L *un cône réticulé de la classe* $\mathcal{S}$, *il est équivalent de dire :*

1) *Le cône* L *est biréticulé.*

2) *L'adhérence de toute face de* L *est une face.*

3) *Tout ensemble bordant de* L *est fermé.*

4) *L'application qui associe à tout* $x \in L$ *la mesure conique maximale de barycentre* x *est continue.*

Proposition 8. — *Soit* L *un cône biréticulé, pour qu'une mesure conique sur* L *soit maximale il faut et suffit qu'elle soit portée par tout ensemble bordant.*

Pour tout $f \in \mathrm{H}$, on notera par I_f la face engendrée par f dans H c'est-à-dire : $\mathrm{I}_f = \{g \in \mathrm{H};$ Il existe $n > 0$ tel que $g \leqslant nf\}$.

Proposition 9. — *Pour tout $f \in \mathrm{H}$, il existe un espace compact Ω^f et une isomorphie d'ordre $\mathcal{I}_f$ de I_f sur $\mathscr{C}^+(\Omega^f)$ qui transforme f en* 1.

Démonstration. — La face I_f est réticulée, il suffit (voir [3], cor. II.1.11) de montrer qu'elle est complète pour sa norme canonique, qui est la jauge du segment $[-f, f]$; nous déduirons cela du lemme :

Lemme 10. — *Soit* X *un espace topologique et soit* V *un sous-cône de $\mathscr{C}^+(\mathrm{X})$ fermé dans $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ pour la convergence simple et réticulé pour son ordre propre alors* V *est complet pour les suites de type l_1.*

Démonstration. — On se ramène à montrer que pour tout $f \in \mathrm{V}$ et pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathrm{I}_f$ vérifiant $0 \leqslant u_n \leqslant f/2^n$ la série $\sum_1^\infty u_n$ converge. Considérons les suites $g_n = \sum_1^n u_p$ et $h_n = \sum_1^n u_p + f/2^n$ et la fonction $\varphi = \sup(g_n) = \inf(h_n)$ alors φ est continue, donc elle appartient à V et même à I_f et elle est égale à la somme de la série donnée.

Rappelons qu'on dit qu'un espace vectoriel réticulé E est *complet pour les suites de type* l_1 [18] ou *uniformément* complet [15] si pour tout $f \in \mathrm{E}$ l'idéal d'ordre engendré par f est complet pour sa norme canonique.

Citons quelques exemples de cônes complets pour les suites de type l_1 :

— Les cônes σ-réticulés (toute suite majorée possède une borne supérieure) voir [15].

— Les cônes $\mathscr{C}^+(\mathrm{X})$ et $\mathscr{C}_b^+(\mathrm{X})$ pour X espace topologique quelconque, voir [15].

— Les cônes réticulés de type F : On dit qu'un cône est de type F si pour tout couple de suites (x_n), (y_n) de ce cône, vérifiant $x_n \leqslant y_m$ pour tous m et n; il existe z tel que $x_n \leqslant z \leqslant y_m$ pour tous m et n, voir [19].

Définition 11. — *Pour tout* $f \in \mathrm{H}$ *nous appellerons support de* f *et noterons* $\operatorname{supp}(f)$ *l'ensemble des* $\mu \in \mathrm{L}$ *tels que pour tout* $l \in \mathrm{H}$, $\inf(f, l) = 0$ *entraîne* $l(\mu) = 0$.

Définition 12. — *Nous appellerons support strict de* f *et noterons* $\operatorname{supst}(f)$ *l'ensemble des* $\mu \in \mathrm{L}$ *tels que*

$$\langle \mu, g \rangle = \sup_n \langle \mu, \inf(nf, g) \rangle$$

pour tout $g \in \mathrm{H}$.

Les notations « sup » et « inf » désignent dans tout ce papier les bornes supérieures et inférieures pour l'ordre propre des cônes considérés; ainsi pour f et $g \in \mathrm{H}$, $\sup(f, g)$ désigne (selon les notations de Choquet) la fonction $\hat{h}$ où h est définie sur tout élément $\mu \in \mathrm{L}$ par $h(\mu) = \sup(f(\mu), g(\mu))$.

Pour toute face I de H (resp. de L) désignons par :

— $\mathrm{I}^{\perp}$ la face de H (resp. la bande de L) constituée des réunions de tous les éléments étrangers à tous ceux de I.

— I^{o} la face fermée de L (resp. la face fermée de H) constituée par les éléments de L (resp. H) qui sont nuls sur I. Nous dirons que I^{o} est l'annulateur de I.

— I^{p} le cône polaire de la face I. Nous noterons $\mathrm{A} \perp \mathrm{B}$ la relation suivante : « tout élément de l'ensemble A est étranger à tout élément de l'ensemble B ».

Dans toute la suite les seules topologies utilisées (sauf mention contraire) seront les topologies de la dualité entre $(\mathrm{H} - \mathrm{H})$ et $(\mathrm{L} - \mathrm{L})$.

Proposition 13. — *La correspondance* $\mathrm{I} \to \mathrm{I}^{o}$ *est une bijection de l'ensemble des faces fermées de* H *sur l'ensemble des bandes fermées de* L *(ou encore* $\mathrm{I} = \mathrm{I}^{oo}$ *pour toute face* I *fermée de* H*).*

Démonstration. — A une bande fermée de L on fait correspondre son annulateur qui est une face fermée de H; l'application considérée est donc surjective; montrons qu'elle est injective. Le cône L est faiblement complet, on a donc à montrer que si A et B sont des bandes fermées de L telles que $\mathrm{A} \subsetneq \mathrm{B}$ avec $\mathrm{A}^{o} = \mathrm{B}^{o}$ alors $\mathrm{A} = \mathrm{B}$. Cela est clair car $f^{-}(\mathrm{A}) = 0$ équivaut à $f^{-}(\mathrm{B}) = 0$.

LEMME 14. — *Pour tout* $f \in H$ *le cône* L *est somme directe de* supst (f) *et de l'annulateur de* I_f. $L = I_f^0 \oplus I_f^{0\perp}$.

Démonstration. — Tout $\mu \in L$ s'écrit $\mu = \mu_1 + \mu_2$ avec μ_1 défini pour tout $g \in H$ par : $\langle g, \mu_1 \rangle = \sup\limits_n \langle \inf(g, nf), \mu \rangle$ et l'on vérifie aisément que μ_1 est une forme linéaire positive sur H, c'est-à-dire un élément de L, et que $\mu - \mu_1 = \mu_2$ appartient à l'annulateur de I_f.

LEMME 15. — *Pour tout* f *de* H *le polaire du support strict de* f *est identique à l'ensemble* $\{h \in (H - H);\ h^- \perp f\}$.

Démonstration. — Il est clair que si $h \in H - H$ et si h^- est étrangère à f alors h^- vaut zéro sur supst (f). Réciproquement soit $h \in H - H$ avec $h^+(\mu) \geqslant h^-(\mu)$ pour tout $\mu \in$ supst (f) et posons $h' = \inf(h^-, f)$. On a $h'(\mu) = 0$ pour tout $\mu \in I_f^0$; il en résulte que $h^+(\mu) \geqslant h'(\mu)$ pour tout $\mu \in L$, donc $h^+ \geqslant h'$ ce qui entraîne que $h' = 0$.

PROPOSITION 16. — *Pour tout* $f \in H$ *l'adhérence de la face engendrée par* f *est identique à l'ensemble*

$$\{h \in H;\ \langle h, \mu \rangle = \sup_n \langle \mu, \inf(nf, h) \rangle \quad \textit{pour tout} \quad \mu \in L\}$$

Démonstration. — On remarque que pour tout $\mu \in (L - L)$ tel que $\mu(I_f) \geqslant 0$ on a $\mu^-(I_f) \leqslant 0$ (car pour tout $g \in H$ on a $\mu^-(g) = \sup\limits_{h \leqslant g} (-\mu(h))$). Il en résulte que

$$(I_f)^p = (I_f^0 - I_f^0) + I_f^{0\perp},$$

donc que

$$(I_f)^{pp} = (I_f^{00} - I_f^{00}) + \{h \in H - H;\ h^- \perp f\}$$

(lemmes 14 et 15). Tout $\mu \in L$ s'écrit $\mu = \mu_1 + \mu_2$ avec $\mu_1 \in I_f^0$ et $\mu_2 \in I_f^{0\perp}$, par conséquent $(h \in \bar{I}_f = (I_f)^{pp})$ est équivalent à $(h(\mu) = h^+(\mu_2))$.

On a donc, par définition du support strict,

$$h^+(\mu_2) = \sup_n \langle \mu_2, \inf(nf, h^+ \rangle = \sup_n \langle \mu, \inf(nf, h) \rangle.$$

Voici une proposition qui réunit une partie des lemmes précédents et qu'on utilisera plus loin.

PROPOSITION 17. — *Pour tout* $f \in \mathrm{H}$ *on a:*

1) $\operatorname{supp}(f) = (\mathrm{I}_f^{\perp})^0$.

2) $\operatorname{supst}(f) = (\mathrm{I}_f^0)^{\perp} = \{\mu \in \mathrm{L};\ f(\nu) \neq 0$ *pour tout*

$$0 \lneqq \nu \leqslant \mu\}$$

3) $\operatorname{supp}(f) = \overline{\operatorname{supst}(f)}$.

Démonstration. — L'assertion 1) traduit la définition 11, l'assertion 2) résulte du lemme 14 et l'assertion 3) résulte du lemme 15.

Nous nous proposons d'étudier pour tout $f \in \mathrm{H}$ la face I_f: Soit donc f fixé; par commodité nous noterons $\mathcal{J}$ *au lieu de* $\mathcal{J}_f$ l'isomorphie introduite dans la proposition 9. Tout élément de L donne par restriction à I_f un élément de I_f^{*+}; désignons par $\rho : \mathrm{L} \to \mathrm{I}_f^{*+}$ cette opération et par $\mathrm{T}' : \mathrm{L} \to \mathcal{M}^+(\Omega^f)$ *l'opérateur* $(\mathcal{J}^*)^{-1} \circ \rho$.

Définissons pour tout $g \in \mathrm{H}$ la fonction $\mathcal{J}g = \sup\{\mathcal{J}l;\ l \leqslant g,\ l \in \mathrm{I}_f\}$ sur Ω^f; elle est évidemment s.c.i. Remarquons que l'on a pour tout $g \in \mathrm{H}$, $\inf(\mathcal{J}g, n) = \mathcal{J}\inf(g, nf)$; pour le voir on écrit

$$\begin{aligned}\inf(\mathcal{J}g, n) = \inf(\sup_{l \leqslant g} \mathcal{J}l, n) &= \sup_{l \leqslant g}(\inf(\mathcal{J}l, n)) \\ &= \sup_{l \leqslant g} \mathcal{J}(\inf(l, nf)) \leqslant \mathcal{J}\inf(g, nf).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\inf(g, nf)) &= \sup_{l \leqslant \inf(g, nf)} \mathcal{J}l = \sup\{\mathcal{J}l;\ l \leqslant g, \mathcal{J}l \leqslant n\} \\ &= \sup\{\inf(\mathcal{J}l, n); \\ &\quad l \leqslant g,\ \mathcal{J}l \leqslant n\} \leqslant \sup_{l \leqslant g}(\inf(\mathcal{J}l, n)) = \inf(\mathcal{J}g, n)\end{aligned}$$

LEMME 18. — *La restriction de* T' *à* $\operatorname{supst}(f)$, *que nous noterons* T, *est une bijection continue croissante de* $\operatorname{supst}(f)$ *sur le cône des mesures de Radon positives sur* Ω^f *qui intègrent* $\mathcal{J}\mathrm{H}$.

Démonstration. — Il est clair que T est continue pour $\sigma(\mathrm{L}, \mathrm{H})$ et pour la topologie vague.

Soit $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega^f)$ tel que $\mathcal{J}^*\nu \in \rho(\operatorname{supst}(f))$; on a, par définition de supst (f), pour tout $g \in \mathrm{H}$:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{I}^*\nu, g\rangle &= \sup_n \langle \mathcal{I}^*\nu, \inf(nf, g)\rangle = \sup_n \langle \nu, \mathcal{I}\inf(nf, g)\rangle \\ &= \sup_n \langle \nu, \inf(n, \mathcal{I}g)\rangle = \sup_n \langle \nu, \inf(n, \mathcal{I}g)\rangle\end{aligned}$$

mais $\mathcal{I}g$ est s.c.i. donc $\sup\limits_n \langle \nu, \inf(n, \mathcal{I}g)\rangle < +\infty$ entraîne que $\mathcal{I}g$ est intégrable.

Soit inversement $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega^f)$ telle que $\int \mathcal{I}g\, d\nu < +\infty$ pour tout $g \in \mathrm{H}$; comme g est s.c.i., on a

$$\int \mathcal{I}g\, d\nu = \sup_n \int \inf(n, \mathcal{I}g)\, d\nu = \sup_n \langle \mathcal{I}^*\nu, \inf(nf, g)\rangle,$$

et comme $\int \mathcal{I}g\, d\nu = \langle \mathcal{I}^*\nu, g\rangle$, cette formule signifie que $\mathcal{I}^*\nu \in (\mathrm{supst}\,(f))$.

Définition 19. — *Pour tout* $f \in \mathrm{H}$ *nous désignerons par* Ω_f *l'ensemble* $\{\mu \in \mathcal{E}(\mathrm{L});\ f(\mu) = 1\}$.

Désignons par $\gamma_f : \Omega_f \to \Omega^f$ la restriction à Ω_f de l'application produit de T: supst $(f) \to \mathcal{M}^+(\Omega^f)$, par l'application $\varepsilon_x \to x$ de $\mathcal{M}^+(\Omega^f)$ dans Ω^f.

Proposition 20. — *L'application* γ_f *est une homéomorphie de* Ω_f *sur l'ensemble* $\Omega'_f = \bigcap\limits_{g \in \mathrm{H}} \{x \in \Omega^f;\ \mathcal{I}g(x) < +\infty\}$.

Démonstration. — Il résulte du lemme 18 que γ_f est une application continue et bijective de Ω_f sur Ω'_f. Pour voir que $(\gamma_f)^{-1}$ est continue il suffit de vérifier que pour tout $h \in \mathrm{H}$, l'application $x \to h(\gamma_f)^{-1}(x) = \mathcal{I}h(x)$ est continue sur Ω'_f. La fonction $\mathcal{I}h$, qui est s.c.i. sur Ω^f, est telle que

$$\inf(\mathcal{I}h, n) = \mathcal{I}\inf(h, nf)$$

soit continue pour tout n; elle est donc continue de Ω^f dans $\overline{\mathbf{R}}$; par conséquent elle est continue en tout point de Ω'_f.

3. Étude du centre de H.

La notion de centre a son origine dans les C*-Algèbres [9]. Par analogie avec les C*-Algèbres, Alfsen et Andersen [4] définissent le centre de A(K), espace des fonctions affines continues sur le convexe compact K, comme étant le sous-espace de A(K) qui opère multiplicativement sur A(K) lorsque ce dernier est identifié à l'espace de ses restrictions sur $\mathscr{E}(K)$. Ces auteurs montrent que le centre ainsi défini est isomorphe à l'espace des opérateurs linéaires de A(K) dans lui-même, qui sont bornés pour l'ordre, et à l'espace de toutes les fonctions continues sur $\mathscr{E}(K)$ muni d'une topologie convenable.

Les auteurs de [12] étudient le centre d'un espace de type « M » de Kakutani suivant la définition précédente; dans ce cas le centre dépend de la norme choisie.

Wils [20] nomme centre d'un cône C le cône des opérateurs linéaires de C dans lui-même, qui sont majorés par un multiple de l'identité.

Nous nous proposons d'étudier, pour L biréticulé et $H = A^{+}_{C}(L)$, le centre de H défini par Wils. L'équivalence des trois définitions du centre d'un A(K) dépend étroitement de la nature de l'espace considéré. Nous définirons dans la suite de ce travail un sous-cône remarquable de H (le P.G.D.C. de H) qui, d'une certaine façon, correspond à la définition du centre d'Alfsen et à l'étude des auteurs de [12].

Définition 21. — *Soit* C *un cône convexe saillant; nous appellerons centre de* C *et noterons* Z(C) *le cône des opérateurs linéaires de* C *dans lui-même ainsi défini :*

$$(T \in Z(C)) \Longleftrightarrow (\textit{il existe } r > 0 \textit{ tel que } Tx \leqslant rx \textit{ pour tout } x \in C).$$

Nous renvoyons le lecteur à [4] et à [20] pour les détails des propriétés du centre.

L'espace vectoriel engendré par le centre est canoniquement normé par la norme jauge de l'identité; on a :

$$\|T\| = \inf\{r > 0;\ Tx \leqslant rx \ \text{ pour tout } \ x \in C\}.$$

Lorsque C est complet pour les suites de type l_1, Z(C) est complet pour sa norme, et lorsque C est complètement réticulé il en est de même pour Z(C). Dans ces deux cas il existe un espace compact Ω^C et une isomorphie de Z(C) sur le cône des fonctions continues positives sur Ω^C, qui transforme l'identité en la fonction constante égale à un (Ω^C est extrêmement discontinu dans le second cas).

DÉFINITION 22. — *Nous dirons que* Ω^C *est le spectre central de* C.

Les éléments de Z(H) s'identifient canoniquement (par transposition) aux éléments continus de Z(L) que nous désignerons par $Z^*(H)$.

DÉFINITION 23. — *Nous dirons que l'opérateur* $T \in Z(L)$ *est s.c.s. (resp. s.c.i.) si pour tout* $h \in H$ *la forme linéaire* $h \circ T$ *est s.c.s. (resp. s.c.i.).*

Il résulte de cette définition et grâce au fait que L est faiblement complet, que la projection sur une bande fermée de L est un opérateur s.c.s. La borne supérieure d'une famille majorée d'opérateurs s.c.i. est un opérateur s.c.i. et toute borne inférieure d'opérateurs s.c.s. est un opérateur s.c.s. Un opérateur de Z(L) qui est à la fois s.c.i. et s.c.s. est continu et s'identifie à un élément de Z(H).

DÉFINITION 24. — *Si* I *est une face de* H, *nous dirons que cette face* I *est presque absorbante si, pour tout* $h \in H$ *et tout* $\mu \in L$, *on a* $\langle \mu, h \rangle = \sup_{f \in I} \langle \mu, \inf(f, h) \rangle$.

Nous dirons aussi qu'un élément $f \in H$ *est presque absorbant si la face* I_f *est presque absorbante.*

PROPOSITION 25. — *Pour toute face* I *presque absorbante dans* H *on a* $Z(I) = Z(H)$.

Démonstration. — Désignons par i l'injection canonique : $I \to H$; comme I est presque absorbante l'application transposée $i^* : L \to I^*$ est injective (et continue) (I^* désigne l'espace des formes linéaires sur $(I - I)$, positives sur I). Il en résulte que les bandes fermées de L sont les images réciproques par i (traces) des bandes fermées de I^*.

Tout opérateur $S \in Z(I^*)$ s'écrit $S = \int_0^\infty p_r\,dr$ où p_r désigne la projection sur la bande $B_r = \{\mu \in I^*;\ S\mu \geqslant r\mu\}$ (nous renvoyons le lecteur à [15], théorème 20.5 et suivants pour la justification de cette écriture). Supposons l'opérateur S continu sur I^* muni de $\sigma(I^*, I)$ (c'est-à-dire correspondant à un élément de $Z(I)$); alors la bande B_r est fermée. L'opérateur S' restriction de S à L, s'écrit aussi $S' = \int_0^\infty p'_r\, dr$ où p'_r désigne la projection sur la bande

$$\{\mu \in L;\ S'\mu \geqslant r\mu\} = \{\mu \in L;\ S\mu \geqslant r\mu\};$$

or cette bande est précisément la trace de B_r sur L; elle est donc fermée. Il en résulte que S', qui peut s'écrire comme borne inférieure d'opérateurs s.c.s., est s.c.s. On démontre de même que S' est s.c.i. et le transposé de S' sera le prolongement du transposé de S à H.

Exemples. — L'espace des fonctions continues positives à support compact sur R et l'espace des fonctions continues positives tendant vers zéro à l'infini ont le même centre qui est l'espace des fonctions continues positives et bornées sur R.

Si H possède un élément presque absorbant f, alors $Z(H) = I_f$; c'est ainsi que le centre de $L^p[0, 1]$ est égal à $L^\infty[0, 1]$.

Richesse du centre.

Nous aimerions que le centre contienne assez d'opérateurs, par exemple qu'il sépare les faces fermées disjointes de H. Nous n'aurons pas cela, mais nous aurons un théorème du type Urysohn assurant la richesse du spectre si le cône H possède une propriété de domination faible :

Définition 26. — *Soient f et g deux éléments de* H; *nous dirons que g domine faiblement f et noterons $f \prec g$ si l'on a* $(\operatorname{supp}(f) \subset \operatorname{supst}(g))$.

Lemme 27. — *Pour tous f et $g \in H$ tels que $f \prec g$ on a:*

1) $(f - rg)^+ \prec f$ *pour tout* $r > 0$.

2) $(f - r'g)^+ \prec (f - rg)^+$ *pour tout* $r' > r$.

Démonstration. — 1) Laissé au lecteur.

2) $f \prec g$ signifie que $I_g^0 \cap \operatorname{supp}(f) = \{0\}$. Posons

$$C = I^0_{(f-rg)^+} \cap \operatorname{supp}(f - rg)^+ \quad \text{et soit} \quad \mu \in C$$

on aura

$$\mu \in I^0_{(f-rg)^+} \cap I^0_{(f-r'g)^-} \subset I^0_{(f-r'g)^+} \cap I^0_{(f-r'g)^-},$$

donc

$$(1) \qquad f(\mu) = r'g(\mu)$$

Comme par ailleurs on a $(f - rg)(\mu) \leqslant 0$ (car $\mu \in I^0_{(f-rg)^+}$) et comme $r' > r$ on aura

$$(2) \qquad f(\mu) < r'g(\mu)$$

La comparaison de (1) et (2) entraîne $f(\mu) = g(\mu) = 0$; comme $\mu \in \operatorname{supp}(f - r'g)^+ \subset \operatorname{supp}(f)$ on aura

$$\mu \in \operatorname{supp}(f) \cap I^0_g$$

qui est réduit à l'origine par hypothèse.

Proposition 28. — *Pour tous f et $g \in H$ tels que $f \prec g$ il existe un opérateur $p \in \underline{Z(H)}$ qui induit l'identité sur $I_{(f-g)^+}$, zéro sur $I_f^\perp$, et tel que* $pH \subset \overline{I}_f$.

Démonstration. — Désignons par p_r le projecteur sur la bande $\operatorname{supp}(f - rg)^+$ (c'est un opérateur s.c.s.), et par q_r le projecteur sur la bande $\operatorname{supst}(f - rg)^+$ (c'est un opérateur s.c.i.). Il résulte du lemme 27 que pour tout $s > r$ on a

$$(1) \qquad p_s \leqslant q_r \leqslant p_r$$

Considérons l'opérateur $p^* = \int_0^\infty p_r\, dr$; c'est un élément de $Z^*(H)$; en effet il est s.c.s. comme étant borne inférieure de tels opérateurs, mais il est aussi s.c.i. car on peut écrire grâce à (1) $p^* = \int_0^\infty q_r\, dr$, donc comme borne supérieure d'opérateurs s.c.i.

La démonstration des propriétés de l'opérateur p transposé de p^* qui sont énoncées est immédiate (voir la proposition 16 pour la définition de $\overline{I}_f$).

Définition 29. — *Nous dirons que* H *possède la propriété de domination faible si tout élément de* H *est borne supérieure d'éléments faiblement dominés par lui.*

Il résulte de la proposition 28 que si H possède la propriété de domination faible alors Z(H) contient beaucoup d'opérateurs.

Remarquons immédiatement que si pour tout $f \in \mathrm{H}$ il existe $g \in \mathrm{H}$ tel que $g \succ f$ alors H possède la propriété de domination faible; en effet on a $f = \sup_{r>0} (f - rg)^+$ et $f \succ (f - rg)^+$ pour tout $r > 0$.

Exemples. — Supposons que H possède un élément presque absorbant u, on a $\operatorname{supst}(u) = \operatorname{supp}(u)$ donc tout $f \in \mathrm{H}$ est dominé par u, donc H possède la propriété de domination faible; cela n'est pas étonnant car on a déjà remarqué que $\mathrm{Z(H)}$ est isomorphe à I_u.

Les espaces L^p possèdent la propriété de domination faible grâce à la propriété remarquable que toute bande est faiblement fermée. Cette propriété entraîne que tout élément d'un espace L^p se domine lui-même car son support et son support strict sont identiques.

Nous reviendrons sur la propriété de la domination faible lors de l'étude du cas où le cône L est presque bien coiffé et montrerons qu'elle est équivalente au fait que l'espace des génératrices extrêmales de L est complètement régulier.

Le spectre central de L est le spectre de Stone (on munit l'espace des ultrafiltres de bandes d'une topologie convenable). Voici une proposition qui dit en quel sens le spectre central de H est le spectre des bandes fermées de L lorsque H possède la propriété de domination faible. Rappelons [proposition (11)] que les bandes fermées de L correspondent bijectivement aux faces fermées de H.

Proposition 30. — *Lorsque* H *possède la propriété de domination faible, l'application* $\mathrm{I} \to \{\mathrm{T} \in \mathrm{Z(H)};\ \mathrm{TH} \subset \mathrm{I}\}$ *est injective de l'ensemble, des faces fermées de* H *dans l'ensemble des faces fermées de* Z(H).

Démonstration. — On vérifie aisément que pour toute face fermée I de H la face $\{\mathrm{T} \in \mathrm{Z(H)};\ \mathrm{TH} \subset \mathrm{I}\}$ est fermée dans Z(H). Soient I et J deux faces fermées de H et $f \in \mathrm{J} \setminus \mathrm{I}$; f est par hypothèse borne supérieure d'éléments qu'il domine. Comme la face I est fermée il existe $h \leqslant f$, $h \notin \mathrm{I}$ tel que $f \succ h$, mais ceci entraîne grâce à la proposition (28) qu'il existe un opérateur non nul de Z(H) dont l'image est contenue dans J et non dans I.

4. Représentation du centre dans le cas où L est presque bien coiffé.

Nous consacrerons ce paragraphe à la représentation du centre de H lorsque L est presque bien coiffé. L'idée est que chaque face engendrée par un élément f de H est isomorphe à l'espace des fonctions continues positives sur son spectre central Ω_f; elle est donc égale à son propre centre. Comme par ailleurs cette face I_f admet une représentation sur Ω_f (définition 19) qui n'est autre que l'espace des rapports g/f pour tous les $g \in I_f$, en recollant ces divers centres locaux on obtient une représentation du centre de H sur le quotient des génératrices extrémales de L.

Dans le cas où H possède la propriété de domination faible son spectre central sera le compactifié de Stone-Čech de l'espace des génératrices extrémales de L.

Rappelons qu'on dit qu'un cône est *presque bien coiffé* si tout point de ce cône est borne supérieure de sommes finies de points appartenant chacun à un chapeau de ce cône. Comme L est réticulé et comme la somme de deux chapeaux de L est contenue dans un chapeau, on déduit trivialement que L est presque bien coiffé si et seulement si tout point de L est borne supérieure de points appartenant à des chapeaux.

LEMME 31. — *Soit* $f \in H$ *tel que* supst (f) *soit presque bien coiffé alors tout* $\mu \in$ supst (f) *est borne supérieure d'une suite d'éléments de* H *appartenant chacun à un chapeau de* supst (f).

Démonstration. — Soit $\mu \in \operatorname{supst}(f)$, $\mu = \sup \mu_\alpha$ avec $\mu_\alpha \in K_\alpha$ chapeau de supst (f); il existe une sous-suite (μ_{α_n}) telle que $\sup \mu_{\alpha_n}(f) = \mu(f)$; nous allons montrer que

$$\mu = \sup \mu_{\alpha_n}.$$

Soit $g \in H$; on a par définition du support strict :

$$g(\mu) = \sup_p \langle \inf (pf,\ g),\ \mu \rangle,$$

donc $\langle \inf (pf,\ g),\ (\mu - \mu_{\alpha_n}) \rangle \leqslant \langle pf,\ (\mu - \mu_{\alpha_n}) \rangle$ a pour limite zéro quand n tend vers l'infini. On a donc

$$g(\mu) = \sup_n \sup_p \langle \inf (pf, g), \mu_{\alpha_n} \rangle = \sup_p \sup_n \langle \inf (pf, g), \mu_{\alpha_n} \rangle$$
$$= \sup \langle \mu_{\alpha_n}, g \rangle.$$

Nous avons déjà remarqué (lemme 18) que $\operatorname{supst}(f)$ est isomorphe au cône des mesures de Radon sur Ω^f qui intègrent $\mathcal{I}$H. Voici, lorsque $\operatorname{supst}(f)$ est presque bien coiffé, une précision qui résulte du lemme précédent :

Proposition 32. — *Soit* $f \in \mathrm{H}$ *tel que* $\operatorname{supst}(f)$ *soit presque bien coiffé; alors* $\operatorname{supst}(f)$ *se représente par un cône de mesures de Radon positives sur* Ω^f *qui sont portées par* Ω'_f *(ou encore toute mesure de Radon positive sur* Ω^f *qui intègre* $\mathcal{I}$H *est portée par un* K_σ *contenu dans* Ω'_f*).*

Démonstration. — Nous renvoyons à la fin du paragraphe 2, lemme 18 et suivants, pour la signification des notations utilisées dans cette démonstration.

1. On vérifie aisément que si m est une mesure de Radon portée par un compact K de Ω_f et si π est sa résultante alors $\mathrm{T}(\pi) = \gamma(m)$ où $\gamma(m)$ est la mesure image de m par l'application $\gamma_{|\mathrm{K}} : \mathrm{K} \to \Omega'_f$.

2. L'application T est une isomorphie d'ordre de $\operatorname{supst}(f)$ sur son image dans $\mathcal{M}^+(\Omega^f)$; il en résulte qu'elle commute à la borne supérieure.

3. Soit $\mu \in \operatorname{supst}(f)$; $\mu = \sup_n \mu_n$ où (μ_n) est une suite croissante et où $\mu_n \in \mathrm{K}_n$ chapeau de $\operatorname{supst}(f)$. Soit m_n une localisation maximale de μ_n sur K_n, comme $\mathscr{E}(\mathrm{L})$ est fermé on a $\overline{\mathscr{E}(\mathrm{K}_n)} \subset \mathscr{E}(\operatorname{supst}(f))$ donc m_n est portée par $\mathscr{E}(\operatorname{supst}(f)) \setminus \{0\}$. Il existe une suite de compacts $(\mathrm{K}_{n,p})_{p \in \mathrm{N}}$ telle que $m_n = \sup_p m_{n,p}$ avec $m_{n,p} = m_{n|\mathrm{K}_{n,p}}$.

La fonction f est strictement positive sur $\mathrm{K}_{n,p}$; il en résulte que l'application $g : x \to x/f(x)$ est bijective continue de $\mathrm{K}_{n,p}$ sur son image notée $\tilde{\mathrm{K}}_{n,p} \subset \Omega_f$.

Définissons la mesure de Radon $\tilde{m}_{n,p}$ sur le compact $\tilde{\mathrm{K}}_{n,p}$ par : $\tilde{m}_{n,p}(\varphi) = \int \frac{\varphi(g(x))}{f(x)}\, dm$ pour tout $\varphi \in \mathscr{C}(\tilde{\mathrm{K}}_{n,p})$; on constate aisément que sa résultante est égale à $\mu_{n,p}$. Comme la suite $(m_{n,p})$ converge en croissant vers m_n, la suite $(\mu_{n,p})$ converge en croissant vers μ_n. De (1) il résulte que

$$\mathrm{T}(\mu_{n,p}) = \gamma(\tilde{m}_{n,p}) = \nu_{n,p}$$

mesure de Radon sur le compact $\mathrm{S}_{n,p} = \gamma(\tilde{\mathrm{K}}_{n,p}) \subset \Omega'_f$; et de (2) résulte que $\mathrm{T}(\mu) = \sup\limits_n \sup\limits_p \nu_{n,p}$ donc $\mathrm{T}(\mu)$ est portée par un K_σ contenu dans Ω'_f.

Lemme 33. — *Pour tout* f *tel que* supst (f) *soit presque bien coiffé*; Ω'_f *est dense dans* Ω^f.

Démonstration. — Nous démontrerons que toute fonction continue sur Ω^f, nulle sur Ω'_f, est nulle partout ou encore que pour tout $h \in \mathrm{I}_f$, $[h(\mu) = 0$ pour tout $\mu \in \Omega_f]$ entraîne $h = 0$. Tout $\mu \in \mathrm{L}$ s'écrit $\mu = \mu' + \mu''$ avec $\mu' \in \mathrm{I}_f^0$ et $\mu'' \in$ supst (f) d'où $h(\mu) = h(\mu'') = \sup\limits_i h(\mu_i)$ avec $\mu_i \in \mathrm{K}_i$ chapeau de supst (f); mais si h est nul sur Ω_f, h sera nul sur $\mathscr{E}$ (supst (f)) donc sur les points extrémaux de tout chapeau donc $h(\mu_i) = 0$ pour tout i d'où $h(\mu) = 0$.

Proposition 34. — *Supposons* supst (f) *presque bien coiffé*; *alors toute fonction* φ *continue bornée et positive sur* Ω_f *admet un prolongement unique appartenant à* I_f.

Démonstration. — Posons

$$\hat{\varphi} = \inf \{h \in \mathrm{I}_f;\ h \geqslant \varphi \quad \text{sur} \quad \Omega_f\}$$

et

$$\check{\varphi} = \sup \{h \in \mathrm{I}_f;\ h \leqslant \varphi \quad \text{sur} \quad \Omega_f\}$$

Ce sont évidemment des fonctions respectivement s.c.s. et s.c.i. sur L et l'on a

$$\begin{aligned} &\hat{\varphi}(\mu) = \check{\varphi}(\mu) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad \mu \in \mathrm{I}_f^0, \\ &\check{\varphi}(\mu) \leqslant \hat{\varphi}(\mu) \leqslant \|\varphi\| . f(\mu) \qquad \text{pour tout} \qquad \mu \in \text{supst}\,(f). \end{aligned}$$

Nous nous proposons de montrer que $\hat{\varphi}$ est égale à $\check{\varphi}$ et que $\hat{\varphi} = \check{\varphi}$ est un prolongement de φ à L tout entier. Pour cela il suffit de montrer que $\hat{\varphi}(\mu) = \check{\varphi}(\mu)$ pour tout $\mu \in$ supst (f) ou encore $\hat{\varphi} = \check{\varphi} = \varphi$ sur Ω_f.

Considérons l'isomorphie $\mathcal{I} : \mathrm{I}_f \to \mathscr{C}^+(\Omega^f)$; on peut définir canoniquement $\mathcal{I}\hat{\varphi}$ et $\mathcal{I}\check{\varphi}$, elles seront exactement les régularisées s.c.s. et s.c.i. de φ' image de φ par l'homéomorphie entre Ω_f et Ω'_f; elles sont donc égales à φ' sur Ω'_f, par conséquent elles définissent une fonction continue sur Ω^f qui se relève par $\mathcal{I}^{-1}$ en le prolongement cherché. On remarquera que la norme canonique du prolongement dans I_f est égale à la norme uniforme de φ.

Remarquons qu'il devient maintenant clair que Ω^f est le compactifié de Stone-Cech de Ω_f. Voici une proposition qui lie les propriétés étudiées avec le cas où L est lui-même presque bien coiffé :

Proposition 35. — *Pour tout cône biréticulé* L *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1) L *est presque bien coiffé.*

2) *Pour tout* $f \in \mathrm{A}_{\mathrm{C}}^{+}(\mathrm{L})$, supst (f) *est presque bien coiffé.*

Démonstration. — 2) $\Longrightarrow$ 1) Soit $\mu \in \mathrm{L}$, $\mu \neq 0$; il existe $f \in \mathrm{H}$ tel que $f(\mu) \neq 0$; soit μ_f la projection de μ sur supst (f); on aura $\mu_f = \sup_i \mu_f^i$ avec chaque μ_f^i dans un chapeau de supst (f) c'est-à-dire dans un chapeau de L car supst (f) est une face. Si $\mu - \mu_f \neq 0$ on reprend avec $(\mu - \mu_f)$... Il résulte du théorème de Zorn qu'il existe une famille maximale (f_α) d'éléments de H telle que $\mu = \sup \mu_{f_\alpha}$ avec $\mu_{f_\alpha} \in$ supst (f_α), c'est-à-dire borne supérieure d'éléments appartenant à des chapeaux de L; donc μ possède la même propriété.

1) $\Longrightarrow$ 2) Soit $\mu \in$ supst (f); on a $\mu = \sup_\alpha \mu_\alpha$ avec $\mu_\alpha \in \mathrm{K}_\alpha$ chapeau de L; pour tout α il existe une mesure maximale π_α sur $\mathscr{E}(\mathrm{K}_\alpha) = \mathrm{K}_\alpha \cap \mathscr{E}(\mathrm{L})$ qui représente μ_α $(\mu_\alpha = r(\pi_\alpha))$.

1) La mesure π_α ne charge pas la bande I_f^0, en effet : posons $\nu_\alpha = r(\pi_{\alpha | \mathrm{I}_f^0})$; on a $\nu_\alpha \leqslant \mu_\alpha$ et $\nu_\alpha(f) = \int_{\{f=0\}} f\, d\pi_\alpha = 0$; il en résulte par la proposition 17 n° (2) que $\nu_\alpha = 0$; donc $\pi_\alpha(\{\mu ; f(\mu) = 0\}) = 0$, on en déduit que la mesure est portée par $\mathscr{E}$ (supst (f)) $=$ supst $(f) \cap \mathscr{E}(\mathrm{L})$.

2) On a pour tout α, $\mu_\alpha = \sup\limits_n \mu_{\alpha,n}$ avec $\mu_{\alpha,n}$ dans un chapeau $C_{\alpha,n}$ de L; en effet: la mesure π_α s'écrit $\pi_\alpha = \sup\limits_n (\pi_{\alpha|K_{\alpha,n}})$ avec $(K_{\alpha,n})$ suite croissante de compacts de supst (f) ne contenant pas l'origine donc $\mu_\alpha = \sup \mu_{\alpha,n}$ avec $\mu_{\alpha,n} = r(\pi_{\alpha,n|K_{\alpha,n}}) \in \overline{\text{co}}\,(K_{\alpha,n} \cup \{0\})$; or ce dernier ensemble est un chapeau, voir par exemple (13) th. 2.19.

3) Les compacts $C_{\alpha,n}$ sont en fait des chapeaux de supst (f); en effet: nous montrerons que l'enveloppe convexe fermée de tout compact K contenu dans $\mathscr{E}$ (supst (f)) est encore dans supst (f).

Soit $\mu \in \overline{\text{co}}\,(K)$, μ est barycentre d'une mesure maximale π sur K; et soit $\mu' \leqslant \mu$, alors μ' est barycentre d'une mesure maximale π' sur K; on a $\pi' \leqslant \pi$ (théorème d'unicité de Choquet). Comme $f \geqslant \varepsilon > 0$ sur K, $f(\mu') = 0$ entraîne $\int f\,d\pi' = 0$ ce qui entraîne que $\pi' = 0$ donc $\mu' = 0$ cela étant vrai pour tout $\mu' \leqslant \mu$ on conclut à l'aide de la proposition 17 que $\mu \in$ supst (f).

Nous désignerons par $\tilde{\mathscr{E}}$ l'espace topologique quotient de $\mathscr{E}(L)\setminus\{0\}$ par la relation d'équivalence: ($\mu \sim \nu$ si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $\mu = r\nu$); soit aussi, pour tout $f \in H$, $\tilde{\Omega}_f$ le quotient de

$$R_+^* . \Omega_f = \mathscr{E}\,(\text{supst}\,(f))\setminus\{0\}$$

par cette relation d'équivalence. Voici un lemme pour fixer les notations.

LEMME 36. — *Soit* $f \in H$ *tel que* supst (f) *soit presque bien coiffé; alors pour tous* $T \in Z(H)$ *et* $g \in I_f$ *on a:*

$$\frac{Tf(\mu)}{f(\mu)} = \frac{Tg(\mu)}{g(\mu)}$$

pour tout $\mu \in \mathscr{E}$ (supst (g))$\setminus\{0\}$.

Démonstration. — La restriction de T à I_f appartient au centre de I_f; il existe donc $\varphi'_{(T,f)} \in \mathscr{C}_b^+(\Omega_f)$ tel que

$$Tf_{|\Omega_f} = \varphi'_{(T,f)} \qquad \text{et} \qquad Tg_{|\Omega_f} = \varphi'_{(T,f)} \cdot g_{|\Omega_f}.$$

Soit $\mu \in \mathscr{E}(\text{supst}(g))\setminus\{0\}$; on a $g(\mu) \neq 0$, il existe $\nu \in \Omega_f$ tel que $\mu = r\nu$ avec $r > 0$ d'où :

$$\frac{\mathrm{T}f(\nu)}{f(\nu)} = \varphi'_{(\mathrm{T},f)}(\nu) = \frac{\mathrm{T}g(\nu)}{g(\nu)}$$

d'où le résultat cherché par homogénéité.

Proposition 37. — *Pour tout cône* L *presque bien coiffé et biréticulé, le cône* Z(H) *est isomorphe au cône des fonctions continues positives et bornées sur* $\tilde{\mathscr{E}}$.

Démonstration. — On a $\tilde{\mathscr{E}} = \cup \{\tilde{\Omega}_f;\ f \in \mathrm{H}\}$.

1) Soit $\mathrm{T} \in \mathrm{Z(H)}$ on définit sur chaque $\tilde{\Omega}_f$ la fonction continue $\varphi_{(\mathrm{T},f)}$ image de $\varphi'_{(\mathrm{T},f)}$ (voir démonstration du lemme 36) par l'homéomorphie de $\tilde{\Omega}_f$ sur Ω_f. Comme tout couple d'éléments f et g de H appartient à I_{f+g} on a $\tilde{\Omega}_f \cap \tilde{\Omega}_g \subset \tilde{\Omega}_{f+g}$ et le lemme 36 montre que :

$$\varphi_{(\mathrm{T},f)}|_{\tilde{\Omega}_f \cap \tilde{\Omega}_g} = \varphi_{(\mathrm{T},g)}|_{\tilde{\Omega}_f \cap \tilde{\Omega}_g} = \varphi_{(\mathrm{T},f+g)}|_{\tilde{\Omega}_f \cap \tilde{\Omega}_g}$$

Soit φ_{T} la fonction continue sur $\tilde{\mathscr{E}}$ obtenue par recollement des $\varphi_{(\mathrm{T},f)}$ pour tous les $f \in \mathrm{H}$. Il est clair que $\mathrm{T} \leqslant \mathrm{T}'$ entraîne $\varphi_{\mathrm{T}} \leqslant \varphi_{\mathrm{T}'}$, et que $\varphi_{\mathrm{T}} \leqslant \|\mathrm{T}\|$.

2) Soit réciproquement $\varphi \in \mathscr{C}_b^+(\tilde{\mathscr{E}})$ et considérons pour $f \in \mathrm{H}$ la fonction $\varphi|_{\tilde{\Omega}_f}$ et son image φ' par l'homéomorphie de Ω_f sur $\tilde{\Omega}_f$; il existe un prolongement unique de φ' dans I_f (propositions 34 et 35). Notons ce prolongement $\mathrm{T}_\varphi f$; la relation $\mathrm{T}_\varphi(f + g) = \mathrm{T}_\varphi f + \mathrm{T}_\varphi g$ résulte de l'unicité du prolongement dans I_{f+g} et du lemme 36; ici aussi il est clair que $\varphi \leqslant \Psi$ entraîne $\mathrm{T}_\varphi \leqslant \mathrm{T}_\psi$.

Cette représentation du centre de H sur $\tilde{\mathscr{E}}$ (que l'on peut nommer le spectre extrémal de H) ne dit rien sur la structure du centre, remarquons tout de même que $\tilde{\mathscr{E}}$ possède une base de sa topologie formée par les ensembles Ω_f qui sont complètement réguliers. Voici une proposition qui précise quand le spectre central est le compactifié de Stone-Cech du spectre extrémal.

PROPOSITION 38. — *Pour que le spectre extrémal de* H *soit complètement régulier il faut et il suffit que* H *possède la propriété de domination faible.*

Démonstration. — 1) Supposons $\tilde{\mathscr{E}}$ complètement régulier, alors pour tout $f \in \mathrm{H}$ la fonction caractéristique de $\tilde{\Omega}_f$ est s.c.i. et borne supérieure de fonctions continues dont le support est contenu dans $\tilde{\Omega}_f$. Cela signifie, moyennant l'homéomorphie $\tilde{\Omega}_f \to \Omega_f$ et la proposition 34, que f est borne supérieure d'éléments de H qu'il domine faiblement.

2) Soient réciproquement C un cône fermé de $\mathscr{E}(\mathrm{L})$ et C′ une génératrice extrémale non contenue dans C, correspondant à un fermé $\tilde{\mathrm{C}}$ et un point $\tilde{\mathrm{C}}'$ distinct de $\tilde{\mathrm{C}}$ dans $\tilde{\mathscr{E}}$. On sait, grâce au fait que $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{C})$ est une face, qu'il existe un élément $g \in \mathrm{H}$ tel que $g(\mu) \neq 0$ pour tout $\mu \in \mathrm{C}' \setminus \{0\}$ et qui vaut zéro sur $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{C})$.

Si l'on suppose que g est borne supérieure d'éléments dominés par lui, il existe $f \in \mathrm{H}$, $f \prec g$ vérifiant les mêmes propriétés que g. Pour la même raison il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{C}' \subset \operatorname{supst}((f - rg)^+)$; on déduit de la proposition 28 qu'il existe un élément du centre de H qui vaut l'identité sur $\mathrm{I}_{(f-rg)^+}$ et qui induit zéro sur $\mathrm{I}_f^{\perp}$; on déduit alors par la proposition 37 et grâce au fait que $\mathrm{C} \subset \mathrm{I}_f^0$, qu'il existe une fonction continue sur $\tilde{\mathscr{E}}$ valant zéro sur le fermé $\tilde{\mathrm{C}}$ et strictement positive au point $\tilde{\mathrm{C}}'$.

5. Spectre central d'un cône complètement réticulé et des espaces L^p.

Les espaces $\mathrm{L}^p(\mu)$, qui sont complètement réticulés et dont les cônes positifs sont biréticulés pour $p \neq 1$, ont la propriété remarquable que pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ le dual normal de $\mathrm{L}^p(\mu)$ est identique à $\mathrm{L}^q(\mu)$ où q est le conjugué de p, ce qui entraîne que toute bande est faiblement fermée, ou encore : pour tous r et s les bandes de $\mathrm{L}^r(\mu)$ sont en bijection avec celles de $\mathrm{L}^s(\mu)$. Nous montrerons dans ce paragraphe que toute isomorphie d'ordre d'un espace L^p est le produit d'une isométrie positive par un opérateur du centre de L^p_+.

Nous étudierons pour commencer le spectre central d'un cône complètement réticulé sur lequel on peut représenter le cône des opérateurs normaux qui conservent les bandes.

Notations. — Soit H un cône complètement réticulé, nous dirons qu'une forme linéaire (resp. un opérateur linéaire) T sur $(H - H)$ *est normale si*, pour toute famille filtrante croissante $(h_\alpha) \subset H$ de borne supérieure h, on a

$$Th = \sup_\alpha Th_\alpha.$$

L'espace vectoriel engendré par les formes linéaires normales sera désigné par le *dual normal* de H.

Nous dirons qu'un opérateur linéaire de H dans H conserve les bandes si $TB \subset B$ pour toute bande B de H. Une isomorphie d'ordre d'un espace vectoriel ordonné est un opérateur linéaire bijectif, positif ainsi que son inverse. Nous désignerons, pour tout $u \in H$, par B_u la bande engendrée par u. Pour toute bande B de H nous noterons u_B la projection de u sur B.

Nous désignerons par $N(H)$ *le cône des opérateurs normaux de* H *dans* H *qui conservent les bandes*; *alors* $N(H) \supset Z(H)$.

Si X est un espace topologique, nous désignerons par $\mathscr{D}(X)$ l'espace des fonctions continues de X dans $\overline{R}$ qui valent l'infini au plus sur un ensemble rare de X.

Les cônes $Z(H)$ et $N(H)$ sont complètement réticulés et il est facile à vérifier que les bandes de $Z(H)$ et celles de $N(H)$ correspondent bijectivement à celles de H; il en résulte que ces trois cônes ont le même spectre central (c'est en fait le spectre de Stone de l'algèbre de Boole des bandes).

Comme il n'existe pas d'opérateur non nul de $N(H)$ étranger à l'identité, le cône $Z(H)$ est presque absorbant dans $N(H)$; ceci va nous donner une représentation du cône $N(H)$.

PROPOSITION 39. — *L'isomorphie canonique de* $Z(H)$ *sur* $\mathscr{C}^+(\Omega^H)$ *se prolonge en une isomorphie, notée* i, *du cône* $N(H)$ *sur une bande de* $\mathscr{D}^+(\Omega^H)$ *stable par multiplication.*

Démonstration. — L'extension de l'isomorphie considérée est aisée : Remarquer que tout $T \in N(H)$ s'écrit

$$T = \sup_n \inf (T, nI)$$

où I désigne l'opérateur identité. Voir [1_c] pour les détails de démonstration.

Pour montrer que l'image de N(H) est contenue dans $\mathcal{D}^+(\Omega^H)$, étant donnée la correspondance bijective des bandes de N(H) et des ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés de Ω^H, nous montrerons que pour toute bande B de N(H) il existe une bande $B' \subset B$ et un entier n tels que

$$T_{B'} \leqslant nI_{B'}.$$

Il existe n tel que $(T_B - nI_B)^- \neq 0$; notons par B' la bande engendrée par $(T_B - nI_B)^-$; on a bien $T_{B'} \leqslant nI_{B'}$ et $B' \subset B$.

Nous noterons $\tilde{N}(H)$ *l'image de* N(H) *par l'isomorphie* i. Dans la suite de ce paragraphe nous supposerons que les *formes linéaires normales sur* H *séparent les points de* H, et nous désignerons par L *le cône positif du dual normal de* H. Comme toute bande de H est $\sigma(H, L)$ fermée (voir [5] et [16]), il en résulte que H et L ont le même spectre central et le même centre.

Notons pour tout $\varphi \in \tilde{N}(H)$ par $T_\varphi = i^{-1}(\varphi)$ l'opérateur de N(H) correspondant. Pour tous $h \in H$, $l \in L$ et

$$\varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega^H),$$

l'application $\varphi \to \langle T_\varphi h, l\rangle$ est une mesure normale sur Ω^H; nous la noterons $[h, l]$; l'ensemble de ces mesures sera appelé l'espace des *mesures spectrales* et désigné par [H, L]. Le cône [H, L] est complètement réticulé et c'est une face du cône des mesures normales positives sur Ω^H; de plus toute mesure normale sur Ω^H appartient à la bande engendrée par les mesures spectrales (voir [11_a] et [1_c]).

Supposons H *identique au cône positif du bidual normal de* (H — H) et notons par $L^p_+[H, L]$ le cône des fonctions positives sur Ω^H dont la puissance pième est intégrable pour toute mesure spectrale.

Proposition 40. — *Le cône* $\tilde{N}(H)$ *est identique au sous-cône de* $\mathcal{D}^+(\Omega^H)$ *constitué par les fonctions qui sont intégrables pour toute mesure spectrale. On a de plus,*

$$\tilde{N}(H) = L^1_+[H.L] = \bigcap_{p \geqslant 1} L^p_+[H, L].$$

Démonstration. — Soient $\varphi \in \tilde{N}(H)$ et $[h, l]$ une mesure spectrale, on pose $[h, l](\varphi) = \langle T_\varphi h, l \rangle$ pour définir l'intégrale de φ par rapport à la mesure $[h, l]$.

Réciproquement si $\varphi \in \mathscr{D}^+(\Omega^H)$ est intégrable par rapport à la mesure spectrale $[h, l]$, on a :

$$[h, l](\varphi) = \sup\{[h, l](\varphi'); \varphi' \in \mathscr{C}^+(\Omega^H), \varphi' \leqslant \varphi\}$$
$$= \sup\{\langle T_{\varphi'} h, l \rangle; \varphi' \in \mathscr{C}^+(\Omega^H), \varphi' \leqslant \varphi\}.$$

On définit $T_\varphi h$ comme étant la forme linéaire normale sur L valant $[h, l](\varphi)$ en chaque point $l \in L$. Pour montrer que $L^1[H, L] \subset L^p[H, L]$ pour tout $p \geqslant 1$, on remarque que si $\varphi \in \mathscr{D}^+(\Omega^H)$ est intégrable par rapport à la mesure $[h, l]$ alors elle définit une nouvelle mesure spectrale $[h, T_\varphi l]$ par rapport à laquelle elle est de nouveau intégrable et l'on a $[h, T_\varphi l](\varphi) = [h, l](\varphi^2) < +\infty$ donc φ^2 appartient à

$$L^1[H, L]$$

et ainsi de suite.

Pour identifier $\tilde{N}(H)$ à l'espace des fonctions intégrables pour toute mesure spectrale nous avons été amenés à supposer H identique au cône positif de son bidual normal. Dans ce qui suit nous donnerons des conditions suffisantes pour que $N(H) = Z(H)$.

Proposition 41. — *Soit* H *un cône complètement réticulé et supposons* $(H - H)$ *normé avec une norme croissante sur* H. *Alors tout opérateur* $T \in N(H)$ *qui est continu appartient au centre de* H *et sa norme comme opérateur sur* H *est égale à sa norme canonique dans* $Z(H)$.

Démonstration. — Soit $T \in N(H)$ et posons $\varphi_T = i(T)$ (prop. 39); on a $\varphi_T = \sup\{\varphi'; \varphi' \text{ étagée}, \varphi' \leqslant \varphi_T\}$; posons, pour un tel φ', $T_{\varphi'} = i^{-1}(\varphi')$; on a $T_{\varphi'} \leqslant T$, ce qui entraîne à cause de la croissance de la norme sur H : $\|T_{\varphi'}\| \leqslant \|T\|$. Il en résulte que l'on aura $\|T\| \geqslant \varphi_T(x)$ pour tout $x \in \Omega^H$ dès que l'on a $\|T_{\varphi'}\| \geqslant \varphi'(x)$ pour toute fonction étagée φ; donc pour toute fonction caractéristique d'ouvert et fermé de Ω^H; or pour ces fonctions on a toujours $\|T_{\varphi'}\| \geqslant \varphi'(x)$, car $T_{\varphi'}$ est un projecteur.

Finalement si l'on note $\|\varphi_T\|_\infty$ la norme uniforme de φ_T sur Ω^H, on a démontré que pour tout $T \in N(H)$ qui est continu sur H, on a $\|T\| \geqslant \varphi_T$. Comme par ailleurs on a $\varphi_T \leqslant \|\varphi_T\|_\infty . 1_{\Omega^H}$, on aura aussi $\|T\| \leqslant \|\varphi_T\|_\infty$.

Il suffit maintenant de remarquer que l'isomorphie de $Z(H)$ sur $\mathscr{C}^+(\Omega^H)$ est une isométrie pour les normes canoniques.

Nous pouvons maintenant énoncer que chaque fois que les opérateurs de $N(H)$ sont continus, alors $N(H) = Z(H)$.

Corollaire 42. — *Sous les hypothèses de la proposition* 41 *et lorsque la topologie de* H *est identique à sa topologie de l'ordre, ou lorsque* $H - H$ *est un espace de Banach, on a* $N(H) = Z(H)$.

Ce corollaire qui n'est pas très satisfaisant (car il fait jouer un rôle important à la norme et à la complétion de l'espace) ne peut s'étendre au cas où $(H - H)$ est par exemple un espace de Fréchet. Il existe des algèbres qui sont de Fréchet et qui contiennent strictement leurs centres : par exemple R^N et $\bigcap_{p \geqslant 1} L^p(\mu)$.

Soit $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré localisable, c'est-à-dire que $L^\infty(X, \mathfrak{A}, \mu)$ est complètement réticulé, posons

$$H = L^p_+(X, \mathfrak{A}, \mu), \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty;$$

il est aisé de voir que les ensembles μ-mesurables de X correspondent bijectivement aux bandes de H donc aussi à celles de $Z(H)$; ainsi le spectre central de H s'identifie au spectre de Stone [10] de l'algèbre de Boole des ensembles μ-mesurables de X. Il en résulte que le centre $Z(H)$ s'identifie à $L^\infty_+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, avec le produit des fonctions comme opération.

Proposition 43. — *Soit* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *un espace mesuré localisable et posons* $H = L^p_+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. *Alors toute isomorphie d'ordre* T *de* $L^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *s'écrit de manière unique* $T = T_1 \circ T_2$ *avec* $T_1 \in Z(H)$ *et* T_2 *isométrie positive de* $L^p(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Démonstration. — Supposons que H contienne un élément presque absorbant; on sait alors grâce au théorème de représentation de Kakutani (voir par exemple [14]) que H est isomorphe à $L^p(\Omega^H, \nu)$ où ν est une mesure normale sur le spectre de H. Remarquons que l'isomorphie d'ordre T induit une isomorphie de l'algèbre de Boole des bandes de H donc une homéomorphie τ de Ω^H. Comme ν est une mesure normale, ν et $\tau(\nu)$ ont les mêmes ensembles négligeables (ce sont les ensembles rares de Ω^H); il existe donc $f \in L^1_+(\Omega^H, \nu)$ tel que $\tau(\nu) = f.\nu$.

Soit θ : $$h \in L^p(\Omega^H, \nu) \to f^{1/p}(h \circ \tau^{-1}),$$

on vérifie aisément que c'est une isométrie positive. Posons $T_1 = T \circ \theta$; c'est un opérateur normal qui conserve les bandes; il résulte du corollaire 42 que $T_1 \in Z(H)$. On en déduit que $T = T_1 \circ \theta^{-1}$.

Dans le cas où H ne contient pas d'élément presque absorbant, on remarque que pour tout $h \in H$ la bande engendrée par $\{T^n h\}_{n\in\mathbb{Z}}$ admet $h' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} \frac{T^n(h)}{\|T^n(h)\|}$ comme élément presque absorbant. Cette bande $B_{h'}$ est stable par T, ainsi que sa bande supplémentaire; il existe donc une famille maximale (B_i) de telles bandes deux à deux étrangères, telle que $H = \overline{\oplus B_i}$. On a d'après la première partie $T_{B_i} = T_1^i \circ T_2^i$ avec $T_1^i \in Z(B_i)$ et T_2^i isométrie positive de B_i; on en déduit que la restriction de T à $\oplus B_i$ s'écrit $T_{\oplus B_i} = \oplus T_1^i \circ T_2^i$. Posons $T_2 = \oplus T_2^i$; c'est une isométrie de $\oplus B_i$; elle se prolonge en une isométrie sur H tout entier que nous appellerons aussi T_2, mais alors on constate que $T \circ T_2^{-1}$ est un opérateur normal qui conserve les bandes, c'est donc un élément de $Z(H)$.

DEUXIÈME PARTIE

LES D-CONES

Nous continuerons à désigner dans cette deuxième partie par H un cône convexe, saillant, réticulé pour son ordre propre et séparé par le cône L des formes linéaires positives, mais nous n'avons pas besoin, pour les deux premiers paragraphes, de supposer que H est identique au cône $A_C^+(L)$ (voir définition 6).

DÉFINITION 44. — *Soient f et g deux éléments de* H *nous dirons que g domine f et noterons $f \in d(g)$ la relation suivante : Pour toute suite $(h_n)_{n \in N}$ de* H, *majorée par f, décroissante et $\sigma(H, L)$ convergente vers zéro et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_ε tel que $h_{n_\varepsilon} \leqslant \varepsilon g$.*

Soient par exemple f et g deux fonctions continues sur un espace localement compact. Suivant Choquet [8] nous noterons $f \in \delta(g)$ la relation : Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K_ε tel que $f(x) \leqslant \varepsilon g(x)$ pour tout $x \in \complement K_\varepsilon$. Il résulte alors, par simple application du théorème de Dini, que $f \in \delta(g)$ entraîne, si g est strictement positive, $f \in d(g)$.

DÉFINITION 45. — *Nous dirons qu'un sous-cône* P *de* H *est un* D*-sous-cône si tout $f \in P$ est dominé par un élément* $g \in H$. Le cône H sera dit un D-*cône* s'il est un D-*sous-cône de lui-même*, dans ce cas on dira aussi que le cône H possède *la propriété* « D ».

Rappelons la définition des cônes adaptés des fonctions continues introduite et exploitée par Choquet [8] et plus tard par Mokobodzki et Sibony [17] :

Soit Ω un espace localement compact et soit C un cône convexe contenu dans $\mathscr{C}^+(\Omega)$. Nous dirons que C est un cône adapté si :

1. — Pour tout $x \in \Omega$ il existe $f \in C$ tel que $f(x) \neq 0$.

2. — Pour tout $f \in C$ il existe $g \in C$ tel que $f \in \delta(g)$.
Il en résulte que tout cône adapté qui contient une fonction strictement positive et tout $\mathscr{C}_0^+(W)$ où W est localement compact sont des D-cônes.

1. Lemme fondamental.

Le lemme 46 qui va suivre est la clé du reste, il montre que la domination dans H est liée à une certaine compacité comme pour les cônes adaptés de fonctions continues.

LEMME 46. — *Soient f et g deux éléments non nuls de* H *tels que $f \in d(g)$. Alors pour tout $r > 0$ la bande fermée* $\operatorname{supp}((f - rg)^+)$ *est un cône localement compact dont l'ensemble* $B_1 = \{\mu \in L;\ f(\mu) = 1\} \cap \operatorname{supp}((f - rg)^+)$ *est une base compacte.*

Démonstration. — Comme le cône L est faiblement complet et comme l'ensemble B_1 est fermé il suffit de montrer que B_1 est faiblement borné et que f est non nul sur

$$\operatorname{supp}((f - rg)^+)\setminus\{0\}.$$

Pour montrer que le convexe fermé B_1 est borné, on montrera que pour tout $l \in H$, l'ensemble $l(B_1)$ est borné. Considérons pour un tel $l \in H$ la suite $\inf\left(f, \frac{1}{n} l\right)$; elle est majorée par f, décroissante, et a pour limite zéro en tout point de L. Par conséquent il existe n_0 tel que

$$\inf\left(f, \frac{1}{n_0} l\right) \leqslant rg,$$

comme on a aussi $\inf\left(f, \frac{1}{n_0} l\right) \leqslant f$ il en résulte que

$$\inf\left(f, \frac{1}{n_0} l\right) \leqslant \inf(f, rg).$$

Comme $\frac{1}{n_0} l$ s'écrit $\frac{1}{n_0} l = \inf\left(f, \frac{1}{n_0} l\right) + \frac{1}{n_0} l - \inf\left(f, \frac{1}{n_0} l\right)$ on obtient $\frac{1}{n_0} l \leqslant f + l'$ en posant $l' = \frac{1}{n_0} l - \inf\left(f, \frac{1}{n_0} l\right)$.

Si nous montrons que $l'(\mu) = 0$ pour tout

$$\mu \in \operatorname{supp}((f - rg)^+)$$

le lemme sera démontré car on aura $l(\mu) \leqslant n_0 f(\mu)$ pour tout $\mu \in \operatorname{supp}((f - rg)^+)$, donc $l(\mu) \leqslant n_0$ sur B_1, mais aussi $f(\mu) \neq 0$ pour tout $\mu \in \operatorname{supp}((f - rg)^+) \setminus \{0\}$ car pour un tel μ il existe $l \in L$ tel que $l(\mu) \neq 0$.

Pour montrer que $l'(\mu) = 0$ pour tout $\mu \in \operatorname{supp}((f - rg)^+)$, il suffit de montrer que $\inf(l', (f - rg)^+) = 0$ (définition 11) or on a $(f - rg)^+ = f - \inf(f, rg) \leqslant f - \inf\left(f, \frac{1}{n_0} l\right)$ donc

$$\inf((f - rg)^+, l') \leqslant \inf\left(\left(f - \inf\left(f, \frac{1}{n_0} l\right)\right), \left(\frac{1}{n_0} l - \inf\left(f, \frac{1}{n_0} l\right)\right)\right)$$

et le membre de droite de cette inégalité est égal à zéro.

Corollaire 47. — *Soit Ω un espace localement compact et soient f et g deux fonctions continues positives sur Ω; alors $f \in d(g)$ entraîne $f \in \delta(g)$.*

Démonstration. — Désignons par $S(f - rg)^+$ le support de la fonction continue positive $(f - rg)^+$; on peut démontrer d'une façon analogue au lemme 46 que $S(f - rg)^+$ est compact; comme $f = \sup(f - rg)^+$, la fonction f est nulle hors d'un K_σ réunion d'une suite $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ strictement croissante de compacts de Ω. Soit φ_n une fonction continue positive sur Ω valant zéro sur K_n et un sur $\complement K_{n+1}$ alors la suite $h_n = f.\varphi_n$ est constituée de fonctions continues majorées par f; elle est décroissante et de limite zéro en tout point de Ω. Il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_ε tel que $h_{n_\varepsilon} \leqslant \varepsilon g$ c'est-à-dire $f \leqslant \varepsilon g$ hors du compact $K_{n_\varepsilon + 1}$ donc $f \in \delta(g)$.

Corollaire 48. — *S'il existe dans H un couple d'éléments f et g tel que $f \in d(g)$, alors $\mathscr{E}(L) \setminus \{0\}$ n'est pas vide.*

Nous avons vu dans la démonstration du lemme 46 que f

est non nul sur $\operatorname{supp}((f - rg)^+) \setminus \{0\}$ ce qui entraîne que f domine faiblement $(f - rg)^+$ (définition 26). On a mieux :

COROLLAIRE 49. — *Soient* f *et* $g \in H$ *tels que* $f \in d(g)$; *alors* $(f - rg)^+ \in d(f)$ *pour tout* $r > 0$.

Démonstration. — Soit $(h_n)_{n \in N}$ une suite d'éléments de H décroissante vers zéro et majorée par $(f - rg)^+$; comme $(f - rg)^+ \leqslant f$ et $f \in d(g)$, pour tout ε il existe n_0 tel que $h_{n_0} \leqslant \varepsilon rg$. Comme $rg = f - (f - rg)^+ + (f - rg)^-$ on déduit que $\varepsilon rg = (\varepsilon f - \varepsilon(f - rg)^+) + (\varepsilon(f - rg)^-)$, donc par le lemme de décomposition de Riesz $h_{n_0} \leqslant \varepsilon f$.

2. Propriétés essentielles des D-cônes.

PROPOSITION 50. — *Pour tout* D-*cône* H, *la réunion des génératrices extrémales de* L *diminuée de l'origine est* $\sigma(L, H)$ *localement compacte.*

Démonstration. — Soit μ_0 un point différent de l'origine d'une génératrice extrémale de L; il existe $f \in H$ tel que $f(\mu_0) = 1$, soit $g \in H$ un élément qui domine f. Prenons $s > 0$ tel que $f(\mu_0) - sg(\mu_0) > 0$, il en résulte que l'ensemble $U_s = \{\mu \in \mathscr{E}(L); f(\mu) \neq 0$ et $(sg - f)^+(\mu) = 0\}$ est un voisinage conique de $R_*^+ . \mu_0$.

Pour tout $0 < r < s$ on a $U_s \subset \operatorname{supp}((f - rg)^+)$; sinon il existerait $\mu_1 \in U_s$ et $l \in H$ tel que $\inf(l, (f - rg)^+)(\mu_1) = 0$ (définition 11) avec $l(\mu_1) \neq 0$, soit puisque μ_1 est sur une génératrice extrémale $(f - rg)^+(\mu_1) = 0$, et à fortiori

$$(f - sg)^+(\mu_1) = 0.$$

Cela est impossible, du fait que $\mu_1 \in U_s$ entraînerait $f(\mu_1) = sg(\mu_1)$ donc $f(\mu_1) = sg(\mu_1)$ et $f(\mu_1) \leqslant rg(\mu_1)$ à la fois, ce qui n'est pas possible car $f(\mu_1) \neq 0$.

Considérons l'ensemble $V = \operatorname{supp}((f - rg)^+) \cap \mathscr{E}(L)$; d'après ce qui précède c'est un voisinage conique de $R_*^+ . \mu_0$ dans $\mathscr{E}(L)$, il résulte du lemme 46 que l'ensemble

$$V \cap \{\mu ; f(\mu) = 1\}$$

est un voisinage compact de μ_0 dans

$$\mathscr{E}(\mathrm{L}) \cap \{\mu\,;\, f(\mu) = 1\}$$

mais aussi que l'ensemble

$$\mathrm{V} \cap \left\{\mu\,;\, \frac{1}{2} \leqslant f(\mu) \leqslant \frac{3}{2}\right\} = \cup \left\{\lambda\mathscr{E}(\mathrm{B}_1)\,;\, \frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{3}{2}\right\}$$

est un voisinage compact de μ_0 dans $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$.

Remarque 51. — La démonstration de la proposition précédente est localisable au sens suivant : *Si* H *est un cône réticulé* qui n'est pas un D-cône et si f *et* g *sont deux éléments de* H *vérifiant* $f \in d(g)$ *alors* $\mathscr{E}(\mathrm{supst}\,(f))\setminus\{0\}$ *est un espace localement compact dénombrable* à l'infini; on en déduit que Ω_f (définition 19) l'est aussi.

Proposition 52. — *Pour tout* D-*cône* H, *le cône* L *est presque bien coiffé.*

Démonstration. — Pour tout élément $\mu \in \mathrm{L}\setminus\{0\}$ il existe $\mu' \in \mathrm{L}\setminus\{0\}$ avec $\mu' \leqslant \mu$ et μ' contenu dans une face localement compacte de L; en effet, il existe $f \in \mathrm{H}$ avec $f(\mu) = 1$ et $g \in \mathrm{H}$ qui domine f; comme $f = \sup\,\{(f - rg)^+\,;\, r > 0\}$, il existe un r_0 tel que $(f - r_0 g)^+(\mu) \neq 0$. La projection μ' de μ sur $\mathrm{supp}\,((f - r_0 g)^+)$ convient car $\mu' = 0$ entraînerait que μ est orthogonal à $\mathrm{supp}\,((f - r_0 g)^+)$ donc $(f - r_0 g)^+(\mu) = 0$.

Posons $\nu = \sup\,\{\mu_i\,;\, 0 < \mu_i \leqslant \mu,\ \mu_i$ dans un chapeau $\mathrm{K}_i\}$ alors $\nu = \mu$; en effet, posons $\pi = \mu - \nu$. Si π n'était pas nulle il existerait π' non nul et contenu dans un chapeau K; la relation $\mu \geqslant \nu + \pi'$ entraînerait $\mu \geqslant \mu_i + \pi'$ pour tout i. Comme il est facile à vérifier que $\mu_i + \pi'$ est dans un chapeau, on déduit que $\nu = \sup\,(\mu_i + \pi') = \nu + \pi'$ ce qui est absurde.

Remarque 53. — La proposition 52 est localisable au sens suivant : Si H est un cône réticulé qui n'est pas un D-cône, et si f et g sont deux éléments de H tels que $f \in d(g)$, alors $\mathrm{supst}\,(f)$ est presque bien coiffé.

Remarque 54. — Il résulte de la proposition 8 que si L est presque bien coiffé, il est équivalent de dire pour une mesure conique sur L qu'elle est maximale ou qu'elle est portée par $\mathscr{E}(L)$.

DÉFINITION 54. — Nous dirons suivant Choquet [7] qu'une mesure conique $\underline{m}$ sur L est localisable par une mesure de Radon $\tilde{\underline{m}}$ sur $\mathscr{E}(L)\setminus\{0\}$ si l'on a : $\underline{m}(f) = \tilde{\underline{m}}(f_{|\mathscr{E}(L)\setminus\{0\}})$ quelle que soit la fonction linéaire par morceaux f.

PROPOSITION 55. — *Pour tout* D-*cône* H, *toute mesure conique maximale, portée par* L, *est localisable par une mesure de Radon sur* $\mathscr{E}(L)\setminus\{0\}$.

Démonstration. — Soit $\underline{m}_x$ une mesure conique maximale portée par L de résultante x. La démonstration de la proposition 52 indique que $x = \sup_i x_i$ où $x_i \in L_i$ et L_i est une face à base compacte de L. On déduit grâce au théorème de la représentation barycentrique dans les cônes réticulés de Choquet [6] que $\underline{m}_x = \sup_i \underline{m}_{x_i}$ où $\underline{m}_{x_i}$ est la mesure maximale de barycentre x_i. Chaque mesure $\underline{m}_{x_i}$ admet une localisation [7] sur $\mathscr{E}(L_i)\setminus\{0\}$ que nous noterons $\tilde{\underline{m}}_{x_i}$.

Posons $\tilde{\underline{m}}_x = \sup_i \tilde{\underline{m}}_{x_i}$ et montrons que $\tilde{\underline{m}}_x$ est une mesure de Radon; il suffit de montrer que $\tilde{\underline{m}}_x(K) < +\infty$ pour tout compact $K \subset \mathscr{E}(L)\setminus\{0\}$; or un tel compact K est contenu dans un cône L_K à base compacte (il suffit de prendre le cône engendré par l'enveloppe convexe fermée de K). Considérons un élément $f_K \in H$ tel que l'ensemble

$$B_K = \{\mu \in L_K ; f_K(\mu) = 1\}$$

soit une base de L_K ; on obtient en désignant par $\underline{m}_{x|L_K}$ la restriction de $\underline{m}_x$ sur L_K et par α la borne inférieure de f_K sur K :

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{m}}_x(K) = \sup_i \tilde{\underline{m}}_{x_i}(K) &\leqslant \sup_i \tilde{\underline{m}}_{x_i}\left(\frac{1}{\alpha} f_{K|K}\right)\\ &\leqslant \sup_i \tilde{\underline{m}}_{x_i|L_K}\left(\frac{1}{\alpha} f_K\right) \leqslant \underline{m}_{x|L_K}\left(\frac{1}{\alpha} f_K\right) < +\infty.\end{aligned}$$

Il reste à montrer que toute restriction d'une fonction f linéaire par morceaux sur $\mathscr{E}(L)$ est $\tilde{\underline{m}}_x$ intégrable, cela se déduit du fait que f est $\underline{m}_x$ intégrable. Le fait que $\tilde{\underline{m}}_x$ localise $\underline{m}_x$ résulte des théorèmes généraux de l'intégration en remarquant grâce au lemme 31 qu'on peut prendre la famille (x_i) dénombrable.

Nous dirons qu'une suite d'éléments de H est une *suite presque absorbante* si la face engendrée par cette suite est presque absorbante. Voici alors un théorème de représentation de D-cônes.

PROPOSITION 56. — *Tout* D-*cône* H *qui contient une suite presque absorbante est isomorphe à un cône adapté* $\tilde{\mathrm{H}}$ *de fonctions continues sur un espace localement compact dénombrable à l'infini.*

Démonstration. — Remarquons qu'en prenant des bornes supérieures convenables on peut supposer la suite presque absorbante donnée $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ croissante et vérifiant $e_n \in d(e_{n+1})$ quel que soit n.

Soit $\mu \in \mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$; il existe $g \in \mathrm{H}$ tel que $g(\mu) = 1$; comme $g = \sup\limits_{mn} \{g_{m,n}\}$ avec $g_{m,n} = \inf(g, me_n)$, il existe m et n tels que $0 < e_n(\mu) \leqslant m$. On déduit de ce qui précède que $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\} = \bigcup\limits_{m,n} \{\mu \in \mathscr{E}(\mathrm{L});\ 0 < e_n(\mu) \leqslant m\}$; montrons que cet ensemble est un K_σ; pour cela il suffit de montrer que pour tout n l'ensemble $\mathrm{A}_n = \{\mu \in \mathscr{E}(\mathrm{L});\ 0 < e_n(\mu) \leqslant 1\}$ est un K_σ. Comme $\mathrm{A}_n \subset \bigcup\limits_p \operatorname{supp}\left(\left(e_n - \frac{1}{p} e_{n+1}\right)^+\right)$ on peut écrire A_n sous la forme suivante :

$$\mathrm{A}_n = \bigcup_{p,q} \left\{\operatorname{supp}\left(\left(e_n - \frac{1}{p} e_{n+1}\right)^+\right) \cap \left\{\mu \in \mathscr{E}(\mathrm{L});\ \frac{1}{q} \leqslant e_n(\mu) \leqslant 1\right\}\right\}.$$

On sait grâce au lemme 46, et en remarquant que $\mathscr{E}(\mathrm{L})$ est fermé, que pour tous p et q l'ensemble

$$\operatorname{supp}\left(\left(e_n - \frac{1}{p} e_{n+1}\right)^+\right) \cap \left\{\mu \in \mathscr{E}(\mathrm{L});\ \frac{1}{q} \leqslant e_n(\mu) \leqslant 1\right\}$$

est compact. Comme il résulte du lemme 46 que

$$\operatorname{supst}(e_n) \supset \operatorname{supp}\left(\left(e_n - \frac{1}{p}\, e_{n+1}\right)^+\right)$$

pour tout n et p, on déduit que les intérieurs de ces compacts recouvrent $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$, ce qui entraîne que $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$ est localement compact.

Étant donné que $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$ est localement compact dénombrable à l'infini et que la suite $(e_{n|\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}})_{n\in\mathrm{N}}$ est constituée de fonctions homogènes positives continues telles qu'en tout point de $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$ il existe une fonction de cette suite qui ne s'annule pas en ce point, il existe une suite de réels strictement positifs $(\alpha_n)_{n\in\mathrm{N}}$ telle que la fonction homogène définie par $e = \Sigma\, \alpha_n e_n$ soit continue et strictement positive sur $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$.

Si $\Omega = \{\mu \in \mathscr{E}(\mathrm{L})\,;\; e(\mu) = 1\}$, l'ensemble Ω est une section continue de $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$; c'est donc un K_σ localement compact.

Désignons par $\tilde{\mathrm{H}}$ le cône des restrictions des éléments de H à Ω; il est évidement isomorphe à H et comme c'est un D-cône il résulte du corollaire 47 que c'est un cône adapté.

3. Existence d'un plus grand D-sous-cône.

Nous supposerons désormais que le cône H est identique au cône $\mathrm{A}^+_{\mathrm{C}}(\mathrm{L})$, c'est-à-dire (voir l'introduction) que tout filtre de Cauchy dans H possédant une base constituée d'intervalles est convergent dans H.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de donner une condition nécessaire et suffisante pour que H contienne un D-sous-cône non trivial et d'énoncer une réciproque partielle des propositions 50 et 52.

Proposition 57. — *Les énoncés suivants sont équivalents:*

1) *Dans* H *il existe un* D-*sous-cône non réduit à l'origine.*

2) *Dans* H *il existe* f *et* g *non nuls avec* $f \in d(g)$.

3) *Il existe un point de* $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$ *qui possède un voisinage compact.*

Démonstration. — 1) et 2) sont équivalents par définition.

2) entraîne 3) : Il existe $\mu_0 \in L$ tel que $f(\mu_0) = 1$, il résulte alors de la remarque 51 que μ_0 possède un voisinage compact dans $\mathscr{E}(L)\setminus\{0\}$.

3) entraîne 2) : Soient μ_0 et V_{μ_0} un voisinage compact de μ_0 dans $\mathscr{E}(L)\setminus\{0\}$; il existe $g \in H$ tel que $g(\mu_0) = 1$. L'ensemble $U_{\mu_0} = V_{\mu_0} \cap \Omega_g$ est un voisinage compact de μ_0 dans Ω_g. Soit f' une fonction continue à support dans U_{μ_0} ; comme f' est à support compact dans Ω_g on a $f' \in \delta(1)$. Notons par f le prolongement de f' appartenant à I_g (proposition 34) alors il est clair que $[f' \in \delta(1)]$ est équivalent à $[f \in d(g)]$.

L'existence d'un plus grand D-sous-cône résulte du fait que la somme de tous les D-sous-cônes de H est un D-sous-cône de H ; il suffit pour le voir de montrer que la somme de deux D-sous-cônes en est un :

Lemme 58. — *La somme de deux* D-*sous-cônes de* H *est un* D-*sous-cône.*

Démonstration. — Soient P_1 et P_2 deux D-sous-cônes de H et $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in P_1$ et $f_2 \in P_2$. Il existe g_1 et g_2 tels que $f_1 \in d(g_1)$ et $f_2 \in d(g_2)$; posons $g = g_1 + g_2$ et montrons que $f \in d(g)$. Soit $(h_n)_{n\in N}$ une suite décroissante de limite zéro et majorée par f, on obtient grâce au lemme de décomposition de Riesz deux suites (h_n^1) et (h_n^2) décroissantes de limite zéro majorées respectivement par f_1 et f_2. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_1 et n_2 tels que $h_{n_1}^1 \leqslant \varepsilon g_1$ et $h_{n_2}^2 \leqslant \varepsilon g_2$. Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$ alors

$$h_{n_0} = h_{n_0}^1 + h_{n_0}^2 \leqslant \varepsilon(g_1 + g_2) = \varepsilon g,$$

donc $f \in d(g)$.

Proposition 59. — *Pour tout cône réticulé* H *il existe un plus grand* D-*sous-cône contenu dans* H.

Notation 60. — Nous désignerons par *P.G.D.C. de* H le plus grand D-sous-cône de H ; c'est une face réticulée de H.

Voici une réciproque partielle des propositions 50 et 52.

Proposition 61. — *Pour tout cône* L *biréticulé, presque bien coiffé et tel que* $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$ *soit localement compact, le cône des formes linéaires positives sur le P.G.D.C. de* H *s'identifie à* L *(par l'application restriction naturelle).*

Démonstration. — Nous avons déjà remarqué (avant le lemme 26) que pour tout $f \in \mathrm{H}$ et tout $\mu \in \Omega_f$ un système fondamental de voisinages de μ dans Ω_f est constitué par les ensembles $\mathrm{V}_\varphi = \Omega_f \cap \{\nu \in \mathrm{L};\ \varphi(\nu) > 0\}$ pour $\varphi \in \mathrm{H}$, $\varphi(\mu) \neq 0$.

1) Nous commençons par démontrer que le cône $\mathrm{H_C}$ des éléments de H dont le support est à base compacte n'est pas vide : Soit $\mu \in \mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$ et soit W un voisinage compact de μ dans $\mathscr{E}(\mathrm{L})\setminus\{0\}$; prenons $f \in \mathrm{H}$ tel que $f(\mu) = 1$, alors $\mathrm{W} \cap \Omega_f$ contient un voisinage de la forme V_φ; posons $g = \inf(f, \varphi)$, alors le cône engendré par V_φ sera exactement $\mathscr{E}(\mathrm{L}) \cap \{\nu;\ g(\nu) \neq 0\} = \mathscr{E}\,(\mathrm{supst}\,(g))$. Il résulte alors de la proposition 17, n° 3 et grâce au fait que supst (g) est presque bien coiffé, que $\mathrm{supp}\,(g) \subset \overline{\mathrm{co}}\,(\mathscr{E}\,(\mathrm{supst}\,(g))) \subset \mathbf{R}_*^+ . \overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{W})$; or ce dernier cône est localement compact car $\overline{\mathrm{co}}\,(\mathrm{W})$ est un convexe compact qui ne contient pas l'origine.

2) Tout élément de H est borne supérieure d'éléments de $\mathrm{H_C}$: Rappelons que pour tout $g \in \mathrm{H}$ la face I_g est isomorphe à $\mathscr{C}_b^+(\Omega_g)$ (proposition 34); comme Ω_g est localement compact, la fonction constante égale à 1 dans $\mathscr{C}_b^+(\Omega_g)$ est borne supérieure de fonctions à support compact dans Ω_g; comme toute fonction à support compact dans Ω_g se prolonge en un élément à support localement compact de I_g, l'élément g est borne supérieure d'éléments à support localement compact de I_g.

3) Le cône $\mathrm{H_C}$ est un D-sous-cône : Pour tout $f \in \mathrm{H_C}$, le cône supp (f) possède une base compacte déterminée par un élément $g \in \mathrm{H}$, alors le théorème de Dini sur cette base entraîne que $f \in d(g)$.

4) Toute forme linéaire positive μ sur le P.G.D.C. s'étend en un élément $\tilde{\mu}$ de L : On pose $\tilde{\mu}(f) = \sup\{\mu(h)\}$ pour tout $h \in f$, h élément du P.G.D.C. l'application $\tilde{\mu}$ est bien définie, en effet s'il existait un $g \in \mathrm{H}$ tel que $g(\tilde{\mu}) = +\infty$ il existerait d'après ce qui précède une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments

de $H_C \cap I_g$ telle que $\varphi_n \in d(g)$, $\varphi_n \leqslant g$ et $\varphi_n \geqslant 4^n$ pour tout n. Posons $\varphi = \sum_n \frac{1}{2^n} \varphi_n$; alors $\varphi \in d(g)$, donc φ est un élément du P.G.D.C. et pourtant $\mu(\varphi) = +\infty$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Le fait que $\tilde{\mu}$ est linéaire résulte immédiatement du fait que le P.G.D.C. est réticulé et de l'application du lemme de décomposition de Riesz.

5) Tout $\mu \in L$ qui induit zéro sur le P.G.D.C. est identiquement nul : cela va résulter du fait que si μ induit zéro sur H_C alors μ est nul. Supposons qu'il existe $f \in H$ tel que $f(\mu) \neq 0$, c'est-à-dire $\mu \in \operatorname{supst}(f)$; il résulte des propositions 32 et 20 que μ se représente par une mesure de Radon m sur Ω_f. L'hypothèse que μ induit zéro sur H_C entraîne que m induit zéro sur les fonctions continues à support compact dans Ω_f, donc $m(1_{\Omega_f}) = \mu(f) = 0$ contrairement à l'hypothèse.

Remarque 62. — Soient f et g deux éléments de H tels que $f \in d(g)$; alors l'ensemble Ω'_f défini dans la proposition 20 est identique à l'ensemble $\{x \in \Omega^f;\ \mathcal{J}g(x) < +\infty\}$.

Démonstration. — Nous avons à montrer que, pour tout $x \in \Omega^f$, $\mathcal{J}g(x) < +\infty$ entraîne $h(x) < +\infty$ pour tout $h \in H$. Si $x \in \Omega^f$ il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{J}(f - rg)^+(x) \neq 0$; considérons la suite $\inf\left(f, \frac{1}{n} h\right)$; il résulte du fait que $f \in d(g)$ qu'il existe n_0 tel que $\mathcal{J} \inf\left(f, \frac{1}{n_0} h\right) \leqslant \mathcal{J}rg$ et cela entraîne $\mathcal{J}h(x) \leqslant n_0 r \mathcal{J}g(x)$.

Le cas où H est un espace de Fréchet pour la topologie de l'ordre.

Nous supposerons désormais que H est muni de la *topologie de l'ordre* $\mathcal{C}_0$; c'est la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle les ensembles bornés pour l'ordre sont bornés; c'est aussi la topologie de Mackey $\sigma(H, L)$, et nous supposerons que H est un espace de Fréchet pour cette topologie. C'est le cas des espaces de type M de Kakutani par exemple.

LEMME 63. — *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite d'éléments de* H *et* $g \in$ H *tels que* $f_n \in d(g)$ *pour tout* n; *alors il existe* $h \in$ H *tel que* $h \in d(g)$ *et* $f_n \in d(h)$ *pour tout* n.

Démonstration. — 1) Supposons d'abord la suite (f_n) réduite à un seul élément que nous noterons f; on pose

$$h_n = \inf\left(f, \frac{1}{2^n} g\right);$$

il résulte du fait que H est complet pour la topologie de l'ordre que $h = \sum_n h_n$ appartient à H.

L'élément f est dominé par h : si (f_n) est une suite d'éléments de H majorée par f et décroissante de limite la fonction nulle, pour tout n il existe $\mathrm{N}_n \in \mathbf{N}$ tel que $f_{\mathrm{N}_n} \leqslant h_n$ mais cela entraîne $nf_{\mathrm{N}_n} \leqslant \sum_{p=1}^{n} h_p \leqslant h$, ce qui signifie que h domine f. L'élément h est dominé par g : En effet h s'écrit $h = \sum_1^{\mathrm{N}} h_n + \sum_{\mathrm{N}+1}^{+\infty} h_n$ où $\sum_{\mathrm{N}+1}^{+\infty} h_n \leqslant \frac{1}{2^{\mathrm{N}}} g$; on conclut aisément par application du lemme de décomposition de Riesz.

2) Posons $h_1 = f_1$ il existe d'après la première partie $\varphi_2 \in d(g)$ tel que $h_1 \in d(\varphi_2)$, on pose $h_2 = \sup(\varphi_2, f_2)$ il existe φ_3 tel que $\varphi_3 \in d(g)$ et $h_2 \in d(\varphi_3)$, etc...

La suite $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de H est constituée d'éléments tous dominés par g et vérifiant $h_n \in d(h_{n+1})$ pour tout n. Posons $h = \Sigma\, h_n/2^n\|h_n\|_g$ où $\|h_n\|_g = \inf\{r > 0;\ h_n \leqslant rg\}$ alors $h \in \mathrm{I}_g$ et $f_n \in d(h)$ pour tout n. On montre que $h \in d(g)$ de la même façon qu'au 1).

Le théorème suivant est dû à G. Mokobodzki et D. Sibony [17], nous basons sur lui la démonstration du fait que sous les hypothèses de ce paragraphe le P.G.D.C. est fermé.

THÉORÈME 64. — *Soient* Ω *un espace localement compact dénombrable à l'infini,* (K_n) *une suite de parties vaguement compactes de l'espace des mesures de Radon positives sur* Ω, *et* V *l'ensemble des fonctions continues positives* f *sur* Ω *telles que l'application* $\mu \to \int f\, d\mu$ *soit continue sur* K_n *pour tout* $n \in$ N, *alors* V *est un cône adapté qui est un espace* *de Fréchet pour la topologie de l'ordre; la topologie de l'ordre* $\mathcal{C}_0$ *et la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles* $(K_n)_{n\in N}$ *coïncident sur* V *et le cône* $\mathscr{C}_K^+(\Omega)$ *des fonctions positives continues à support compact dans* Ω *est dense dans* V.

Proposition 65. — *Soient* h *et* g *deux éléments de* H *tels que* $h \in d(g)$; *alors l'adhérence du* D-*sous-cône* $d(h) = \{f \in H; f \in d(h)\}$ *est un* D-*sous-cône de* H.

Démonstration. — Il résulte des remarques 51 et 53 que supst (h) est presque bien coiffé et que Ω_h est un K_σ localement compact; d'ailleurs la conclusion de la proposition subsiste sous ces seules hypothèses sur h. Il résulte du lemme 63 que $d(h)$ est D-sous-cône.

Soit (V_n) une base de voisinages de l'origine de H; la topologie de H est celle de la convergence uniforme sur la suite des compacts faibles (V_n^0) où V_n^0 désigne le polaire de V_n. Il est clair que $d(h)$ est isomorphe à l'espace des restrictions de ses éléments à Ω_h, que cet espace des restrictions est le cône $C_0^+(\Omega_h)$ et que les restrictions des éléments de V_n^0 à $d(h)$ se représentent par des mesures de Radon sur Ω_h dont nous noterons l'ensemble par K_n.

Comme chaque V_n^0 est faiblement compact on vérifie facilement que K_n est vaguement compact pour tout n.

Munissons $\mathscr{C}_0^+(\Omega_h)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts K_n, l'isomorphie entre $d(h)$ et $\mathscr{C}_0^+(\Omega_h)$ devient une isomorphie des structures uniformes et se prolonge aux complétés de ces deux cônes. On sait, grâce au théorème 64 et au fait que $\mathscr{C}_0^+(\Omega_h)$ contient $\mathscr{C}_K^+(\Omega_h)$, que le complété de $\mathscr{C}_0^+(\Omega_h)$ est un espace adapté; mais c'est aussi un D-cône car il contient une fonction strictement positive.

Proposition 66. — *Le P.G.D.C. de* H *est identique à l'adhérence du cône* H_C *des éléments de* H *dont le support est localement compact.*

Démonstration. — Le cône H_C est un D-sous-cône : cela a déjà été vu dans la démonstration de la proposition 61;3). L'adhérence de H_C contient le P.G.D.C. : en effet tout $f \in H$ s'écrit $f = \sup\limits_{r>0} (f - rg)^+$ pour tout $g \in H$ dominant f;

la fonction $(f - rg)^+$ est à support conique localement compact (lemme 46) et le filtre des sections est convergent pour la topologie de l'ordre.

Le P.G.D.C. est fermé : Étant donné que H est un espace de Fréchet, nous vérifierons que toute suite d'éléments du P.G.D.C. est contenue dans un D-sous-cône fermé. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une telle suite et soit $(f'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de H telle que $f_n \in d(f'_n)$ pour tout n. Comme H est un espace de Fréchet il existe une suite de réels strictement positifs (α_n) telle que $f = \sum_n \alpha_n f'_n$; et il est clair que $f_n \in d(f)$ pour tout n.

On sait grâce au lemme 63 qu'il existe $h \in \mathrm{H}$ tel que $f_n \in d(h)$ pour tout n avec $h \in d(f)$. On conclut à l'aide de la proposition 65.

Lien avec le centre de H lorsque L est presque bien coiffé :

Nous supposons toujours que H est un espace de Fréchet pour la topologie de l'ordre; de *plus nous supposerons désormais que le cône* L *est presque bien coiffé.*

Notons par P le P.G.D.C.; comme P est fermé il est identique à son biannulateur P^{oo} (proposition 13) et l'on a $\mathrm{L} = \mathrm{P}^o + \mathrm{P}^{o\perp}$ où $\mathrm{P}^{o\perp} = \bigcup_{f \in \mathrm{P}} \operatorname{supst}(f)$, et

$$\mathscr{E}(\mathrm{L}) = \mathscr{E}(\mathrm{P}^o) \cup \mathscr{E}(\mathrm{P}^{o\perp}).$$

Comme $\mathscr{E}(\operatorname{supst}(f)) \setminus \{0\}$ est localement compact pour tout $f \in \mathrm{P}$ (remarque 51), on déduit grâce à la proposition 57 que $\mathscr{E}(\mathrm{P}^{o\perp}) \setminus \{0\} = \bigcup_{f \in \mathrm{P}} \mathscr{E}(\operatorname{supst}(f)) \setminus \{0\}$ est le plus grand ouvert localement compact de $\mathscr{E}(\mathrm{L}) \setminus \{0\}$.

Notation 67. — Nous désignerons par $\tilde{\mathrm{W}}$ le quotient de $\mathscr{E}(\mathrm{P}^{o\perp}) \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence :
$(\mu \sim \nu)$ si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $\mu = r\nu$.

On vérifie aisément que $\tilde{\mathrm{W}}$ est le plus grand ouvert localement compact de $\tilde{\mathscr{E}}$.

Remarquons à ce propos que si H_0 est un D-sous-cône de H, L_0 est le cône des formes linéaires positives sur H_0; on peut montrer grâce à la remarque 62 que les deux espaces localement compacts $\mathscr{E}(L_0)\setminus\{0\}$ et

$$\bigcup_{f \in H_0} \mathscr{E}\,(\mathrm{supst}\,(f))\setminus\{0\} \subset \mathscr{E}(L)$$

sont homéomorphes.

Notation 68. — Nous noterons par $Z(H/P)$ le sous-cône du centre de H ainsi défini

$$Z(H/P) = \{T \in Z(H)\,;\, T(H) \subset P\}.$$

PROPOSITION 69. — *Pour tout cône* H *qui est de Fréchet pour la topologie de l'ordre et tel que le cône* L *soit presque bien coiffé, le cône* $Z(H/P)$ *est isomorphe au cône des fonctions continues positives sur* $\tilde{\mathscr{E}}$ *qui sont nulles sur* $\tilde{\mathscr{E}}\setminus\tilde{W}$.

Démonstration. — Il est équivalent de dire, pour tout $T \in Z(H)$, que $T(H) \subset P$ ou que $T^*(L) \subset P^{0\perp}$. Comme L est presque bien coiffé cela est équivalent à dire que $T^*(\mu) = 0$ pour tout $\mu \in \mathscr{E}(P^0)$, ce qui est équivalent à dire que la fonction $\varphi_T \in \mathscr{C}_b^+(\tilde{\mathscr{E}})$ correspondant à T (proposition 37) est nulle en tout point $x \in \tilde{\mathscr{E}}\setminus\tilde{W}$.

Le P.G.D.C. d'un espace de type M de Kakutani.

Rappelons qu'un espace de type M de Kakutani est un espace de Banach réticulé dont la norme commute à la borne supérieure d'un nombre fini d'éléments et que le cône positif d'un tel espace est un espace de Fréchet pour la topologie de l'ordre.

Soit H le cône positif d'un espace E de type M de Kakutani muni d'une norme notée p. Posons $L = E'^+$; alors L est un cône biréticulé et possède un chapeau universel K_p qui est la partie positive de la boule unité de E'. L'espace $\mathscr{E}(K_p)\setminus\{0\}$ muni de la topologie faciale introduite par Effros est noté $\max_p(E)$ (voir par exemple [12]); il est homéomorphe à $\tilde{\mathscr{E}}$.

Toute norme q équivalente à la norme donnée p est aussi une norme d'espace de type M de Kakutani et $\max_p(\mathrm{E})$ est homéomorphe à $\max_q(\mathrm{E})$.

Suivant les auteurs de [12] nous noterons par C_p^+ le sous-cône des fonctions de H dont les restrictions à $\mathscr{E}(\mathrm{K}_p)\setminus\{0\}$ sont des fonctions continues sur $\max_p(\mathrm{E})$. Ces auteurs montrent que le cône des restrictions de C_p^+ est identique à $\mathscr{C}_0^+(\mathrm{W}_p)$ où W_p est le plus grand ouvert facial de $\max_p(\mathrm{E})$ sur lequel les topologies faible et faciale coïncident; ils montrent aussi que W_p est localement compact.

Proposition 70. — *Tout élément de* H *dont le support est à base compacte appartient à un cône* C_q^+ *pour une norme* q *équivalente à* p.

Démonstration. — Soit $f \in \mathrm{H_C}$ un élément de H dont le support est à base compacte; il existe un autre élément g de $\mathrm{H_C}$ tel que l'ensemble $\mathrm{B} = \{\mu \in \mathrm{L};\ g(\mu) = 1\} \cap \mathrm{supp}\,(f)$ soit une base compacte de $\mathrm{supp}\,(f)$. Comme la norme p est bornée supérieurement sur les compacts faibles de L, il existe $r > 0$ tel que pour tout $\mu \in \mathrm{B}$ on ait $p(\mu) \geqslant r$. Posons $q = \sup\,(p,\ rg)$; c'est une norme équivalente à la norme donnée p, et l'on vérifie que $f_{|\mathscr{E}(\mathrm{K}_q)\setminus\{0\}}$ est une fonction continue à support compact contenu dans l'ouvert facial $0_g = \mathrm{supst}\,(g) \cap \mathscr{E}(\mathrm{K}_q)\setminus\{0\}$. Il suffit enfin de remarquer que les topologies faible et faciale coïncident sur 0_g parce que le support de g est à base compacte, ce qui entraîne que $f \in C_q^+$.

Comme tout cône C_q^+ est isomorphe à un cône de type $\mathscr{C}_0^+$, la réunion des divers C_q^+ est contenue dans le P.G.D.C. et elle contient $\mathrm{H_C}$ d'après la proposition précédente il résulte alors de la proposition 66 :

Proposition 71. — *Le P.G.D.C. du cône positif d'un espace de type* M *de Kakutani est identique à l'adhérence de la réunion des cônes* C_q^+ *pour toutes les normes* q *équivalentes à la norme donnée.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] (*a*) M. Ajlani, Représentation du centre de certains cônes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 273, p. 1228-1230.
(*b*) M. Ajlani, Les D-cônes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, p. 557-560.
(*c*) M. Ajlani, Factorisation des isomorphies d'ordre des espaces L^p; *Séminaire Choquet: Initiation à l'analyse*, 9e année, 69-70, n° 17.

[2] M. Ajlani et A. Goullet de Rugy, Les cônes biréticulés, *C. R. Acad. Sc. Paris*, série A, t. 270 (1970), 242-245.

[3] E. M. Alfsen, Compact convex sets and boundary integrals, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 57, Springer-Verlag, 1971.

[4] E. M. Alfsen and T. B. Andersen, On the concept of center for A(K)-spaces, *J. London Math. Soc.*, à paraître.

[5] I. Amemiya, On ordered topological linear spaces, *Proc. of the intern. sympos. on lin. spaces*, 1960, Jerusalem, p. 14-23, Jerusalem Academic Press; Oxford, Pergamon Press, 1961.

[6] G. Choquet, Les cônes faiblement complets dans l'analyse, *Proc. of the Intern. Congress of Math.* (14.1962, Stockholm), p. 317-330, Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.

[7] G. Choquet, Lectures on Analysis, Édit. J. Mardsen, T. Lance and S. Gelbar, New York Benjamin Inc. 1969.

[8] G. Choquet, Le problème des moments; *Séminaire Choquet: Initiation à l'analyse*, 1re année 1962, n° 4.

[9] J. Dixmier, Ideal center of C-Algebras, *Duke Math. J.*, 35 (1968), 337-382.

[10] J. Dixmier, Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, *Summa Brasil. Math.*, vol. 2 (1951), 151-182.

[11] (*a*) D. A. Edwards and C. T. Ionescu Tulcea, Some remarks on commutatif algebras of operators on Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93 (1959), 541-551.
(*b*) D. A. Edwards, On the ideal centres of certain partially ordered spaces, *J. of the London Math. Soc.*, (2), 6 (1973), 656-658.

[12] H. Fakhoury, M. Rogalski et A. Goullet de Rugy, Centre d'un M-Espace, *C. R. Acad. des Sc.*, Paris, t. 270, série A (1970), 1741-1743.

[13] (*a*) A. Goullet de Rugy, La théorie des cônes biréticulés, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. XXI, fasc. 4 (1971).
(*b*) A. Goullet de Rugy, La structure idéale des M-espaces, *J. Math. pures et appl.*, 51 (1972), 331 à 373.

[14] J.-L. Krivine, Sous-espaces et cônes convexes dans les espaces L^p, thèse Sc. Math., Paris, 1967.

[15] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, Riesz spaces (Linear vector lattices). North Holland Publishing Company, 1971.

[16] G. Mokobodzki, Espaces de Riesz complètement réticulés et ensembles équicontinus de fonctions harmoniques, *Séminaire Choquet: Initiation à l'analyse*, 5e année, 1965-1966, n° 6.

[17] G. Mokobodzki and D. Sibony, Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel; *Séminaire Choquet: Initiation à l'analyse*, 1966-1967, n° 5.

[18] H. H. SCHAEFER, Topological vector spaces, Macmillan, 1966, New York.
[19] G. L. SEEVER, Measures on F-spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, n° 133 (1968).
[20] W. WILS, The ideal center of partially ordered Vector Spaces, *Acta Mathematica*, t. 127, n° 1-2 (1971), 41-77.

Manuscrit reçu le 27 décembre 1973
accepté par G. Choquet.

Marouan AJLANI,
107, rue de la Porte-des-Trivaux
92140 Clamart.