

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN GOULLET DE RUGY

## Une nouvelle définition des cônes biréiculés

*Annales de l'institut Fourier*, tome 24, n° 3 (1974), p. 37-41

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1974\\_\\_24\\_3\\_37\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_37_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UNE NOUVELLE DÉFINITION DES CÔNES BIRÉTICULÉS

par Alain GOULLET de RUGY (\*)

1. *Notations.* — Les espaces vectoriels considérés ici sont réels. On rappelle que si  $E$  est un espace vectoriel topologique,  $E^*$  désigne son dual algébrique et  $E'$  son dual topologique. La seule topologie qu'on considèrera sur  $E^*$  ou  $E'$  sera la topologie faible  $\sigma(E^*, E)$  ou  $\sigma(E', E)$ .

Dans toute la suite,  $X$  désignera un cône convexe saillant complet dans un espace localement convexe séparé *faible*. Par abus de langage, une application de  $X$  dans un espace vectoriel sera dite *linéaire* si elle est additive et positivement homogène. On note  $L_c(X)$  l'espace vectoriel des formes linéaires définies et continues sur  $X$ . On rappelle ([2], déf. 1.7) que  $X$  est dit *biréticulé*, si  $L_c(X)$  est réticulé pour l'ordre usuel (associé à un espace de fonctions réelles).

2. *DEFINITION.* — On dit qu'un espace vectoriel ordonné  $E$  est un *préduel* de  $X$  s'il existe une bijection linéaire bicontinue de  $X$  sur le cône convexe  $E_+^*$  des formes linéaires positives sur  $E$  muni de la topologie faible  $\sigma(E_+^*, E)$ .

3. *THEOREME.* — Pour que  $X$  soit biréticulé, il faut et il suffit qu'il ait au moins un *préduel* réticulé.

*Démonstration.* — La condition est nécessaire puisque  $L_c(X)$  est un *préduel* de  $X$  (lemme 3.16 de [2]). Réciproquement, soit  $E$  un *préduel* réticulé de  $X$ . Supposons d'abord que  $E_+^*$  sépare les points de  $E$ . D'après le théorème 23.15 de [5], il revient au même de dire que le cône positif  $E_+$  de  $E$  est fermé pour  $\sigma(E, E_+^* - E_+^*)$ . Alors,

-----  
(\*) Equipe de Recherches associée au C.N.R.S. n° 294.

d'après l'exemple 1.11 de [2],  $E_+^*$ , donc aussi  $X$ , est biréticulé. Supposons maintenant que  $E_+^*$  ne sépare plus, à priori, les points de  $E$ . Considérons l'intersection  $I$  des noyaux des éléments de  $E_+^*$ . Montrons que  $I$  est un idéal d'ordre de  $E$ . D'abord, il est clair que  $I_+ = I \cap E_+$  est une face de  $E_+$ . Reste à voir que  $I$  est positivement engendré. Soit donc  $x \in I$ . Montrons que  $x_+$  et  $x_- \in I$ . Supposons par exemple que  $x_+ \notin I$ . Alors, il existe  $L \in E_+^*$  telle que  $L(x_+) > 0$ . D'après un résultat classique (th. 2.6.4 de [4]), il existe  $L' \in E_+^*$  telle que  $0 \leq L' \leq L$ ,  $L'(x_+) = L(x_+) > 0$  et  $L'(x_-) = 0$ . Alors  $L'(x) = L'(x_+) > 0$ , ce qui contredit la définition de  $I$ . Ainsi,  $I$  est un idéal d'ordre et  $F = E/I$  est un espace vectoriel réticulé (prop. 2.2.13 de [4]). Ainsi  $F$  est un préduel de  $X$  tel que  $E_+^*$  sépare les points de  $F$ . Par suite, comme on l'a déjà vu,  $X$  est biréticulé.

4. Cela conduit à la définition suivante : on dit que  $X$  est *biréticulé* s'il possède un préduel réticulé. Cette définition équivalente à la définition initiale par le théorème précédent est particulièrement agréable en ce sens qu'elle évite toute référence à l'espace  $L_c(X)$ , parfois mal commode à déterminer.

5. Inversement cette définition pose au moins un problème que nous allons examiner : reconnaître  $L_c(X)$  parmi les préduaux de  $X$ .

Dans ce qui suit, si  $E$  est un espace vectoriel réticulé, on pose  $E_b = E_+^* - E_+^*$ .

6. LEMME. — Soit  $E$  un espace vectoriel réticulé tel que  $E_b$  sépare les points de  $E$ . Considérons l'application canonique  $j$  de  $E$  dans  $E^{**}$  et l'application  $i$  de  $E$  dans  $L_c(E_+^*)$  définie par  $i(e) = j(e) \mid E_+^*$ . Alors  $i$  est une injection linéaire telle que

$$i(e \vee f) = \sup_a(i(e), i(f)) \quad (\forall e, f \in E)$$

où  $\sup_a(i(e), i(f))$  désigne la borne supérieure de  $i(e)$  et  $i(f)$  dans  $L_c(E_+^*)$ .

*Démonstration.* — Que  $i$  soit une injection linéaire tient à ce que  $E_+^*$  sépare les points de  $E$ . Par ailleurs,  $i$  conserve l'ordre, c'est-à-dire que :  $e \geq 0$  si et seulement si  $i(e) \geq 0$  ( $\forall e \in E$ ). Cela étant

posons  $1 = \sup_a (i(e), i(f))$ . On a  $i(e \vee f) \geq 1$ . Si  $H = \{h \in E ; i(h) \geq 1\}$ , on a :

$$1 = \inf \{i(h) ; h \in H\}, \quad (6.1)$$

par un théorème d'approximation bien connu (cf. p. 87 de [1]). Mais, si  $h \in H$ , on a  $i(h) \geq i(e), i(f)$ , donc, comme  $i$  conserve l'ordre, on a  $h \geq e \vee f$ . De (6.1) on déduit l'égalité annoncée :  $i(e \vee f) = 1$ .

7. DEFINITION. — (G. Choquet). *On dit qu'un espace vectoriel ordonné E est intervallement-complet, en abrégé inter-complet si, tout filtre sur E ayant une base formée d'intervalles d'ordre, de Cauchy pour la topologie  $\sigma(E, E_b)$ , est convergent, pour  $\sigma(E, E_b)$ , vers un point e de E.*

Une autre formulation de cette définition est la suivante : Si A (resp. B) est une famille filtrante croissante (resp. décroissante) de points de E telle que :

$$\sup \{L(a) ; a \in A\} = \inf \{L(b) ; b \in B\} \quad (\forall L \in E_+^*)$$

il existe  $e \in E$  tel que :  $a \leq e \leq b, (\forall a \in A, \forall b \in B)$ .

8. Exemples. — Tout espace complètement réticulé est trivialement inter-complet. Tout espace réticulé qui est un Fréchet ordonné normal est inter-complet (cf. [3]).

9. THEOREME. — *Soit E un espace vectoriel réticulé tel que  $E_+^*$  sépare les points de E. Pour que E soit isomorphe, en tant qu'espace vectoriel ordonné, à  $L_c(E_+^*)$  il faut et il suffit qu'il soit inter-complet.*

*Démonstration.* — Comme l'inter-complétude se conserve par isomorphisme, la condition est nécessaire. Inversement, supposons E inter-complet et considérons l'injection linéaire  $i$  de E dans  $L_c(E_+^*)$  définie au lemme précédent. Montrons qu'elle est surjective, ce qui achevera la démonstration. Fixons  $1 \in L_c(E_+^*)$  et posons  $A = \{e \in E : i(e) \leq 1\}$  et  $B = \{e \in E : i(e) \geq 1\}$ . Par le lemme précédent, on voit que A est filtrante croissante et B filtrante décroissante ; et par le théorème d'approximation déjà utilisé (p. 87 de [1]), on a

$$\sup \{L(a) ; a \in A\} = 1(L) = \inf \{L(b) ; b \in B\} \quad (\forall L \in E_+^*) \quad (9.1)$$

Comme  $E$  est inter-complet, il existe  $e \in E$  tel que  $a \leq e \leq b$  ( $\forall a \in A, \forall b \in B$ ). Par (9.2) cela impose  $i(e) = 1$ .

Pour terminer donnons le résultat suivant qui semble utile pour déterminer l'espace inter-complet associé à un espace vectoriel réticulé :

**10. PROPOSITION.** — Soient  $E$  (resp.  $F$ ) un espace vectoriel réticulé tel que  $E_+^*$  (resp.  $F_+^*$ ) sépare les points de  $E$  (resp.  $F$ ) et  $i$  une injection linéaire de  $E$  dans  $F$  conservant l'ordre. On suppose que :

- i)  $F$  est inter-complet
- ii)  $i(E)$  est cofinal dans  $F$
- iii)  $i(E)$  est dense dans  $F$  pour la topologie  $\sigma(F, F_b)$ .

Alors,  $F$  est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel ordonné, à  $L_c(E_+^*)$ .

*Démonstration.* — Considérons l'application  $\hat{i}$  de  $F_b$  dans  $E_b$  définie par :  $\hat{i}(L) = L \circ i (\forall L \in F_b)$ . Puisque  $i$  est linéaire,  $\hat{i}$  est linéaire. Puisque  $i$  est une injection, il résulte de iii) que  $\hat{i}$  est injective. Puisque en outre,  $i$  conserve l'ordre, il résulte du théorème d'extension des formes linéaires positives (th. 1.6.1 de [4]) que  $\hat{i}$  est injective et conserve l'ordre. Sa restriction à  $F_+^*$  est donc un isomorphisme du cône  $F_+^*$  sur  $E_+^*$ . Par ii), c'est même un isomorphisme lorsqu'on munit  $F_+^*$  (resp.  $E_+^*$ ) de la topologie faible  $\sigma(F_+^*, F)$  (resp.  $\sigma(E_+, E)$ ). Les espaces  $L_c(E^*)$  et  $L_c(E_+^*)$  sont alors isomorphes en tant qu'espaces ordonnés et la conclusion résulte du théorème précédent.

**11. Problème.** — On pourrait affaiblir les hypothèses de certains de nos énoncés, par exemple le théorème 9, si l'on pouvait répondre positivement au problème suivant, du moins dans le cas où  $E_+^*$  est biréticulé :

*Problème.* — Soit  $E$  un espace vectoriel ordonné, inter-complet et séparé par  $E_+^*$ . Est-ce que  $E$  est isomorphe à  $L_c(E_+^*)$  ?

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Espaces Vectoriels Topologiques*, Chap. 1 et 2. Paris, Hermann, 1966 (A.S.I. 1189).

- [2] A. GOULLET de RUGY, La théorie des cônes biréticulés, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), 21, 4 (1971), 1-64.
- [3] A. GOULLET de RUGY, Un théorème du genre Andô-Edwards pour les Fréchet ordonnés, *Pac. J. of Math.*, 46,1 (1973), 155-166.
- [4] G. JAMESON, Ordered linear spaces, Berlin, Springer-Verlag 1970, (*Lectures notes in mathematics* 141).
- [5] KELLEY-NAMIOKA, Linear Topological Spaces, Princeton, Van Nostrand, 1963.

Manuscrit reçu le 7 septembre 1973

accepté par G. Choquet.

Alain GOULLET de RUGY,  
Equipe d'Analyse et Théorie du Potentiel  
Université de Paris VI  
75005 – Paris.