ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE BOULICAUT

Fonctions de Young et continuité des trajectoires d'une fonction aléatoire

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 2 (1974), p. 27-47

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_2_27_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 2 (1974), 27-47.

FONCTIONS DE YOUNG ET CONTINUITÉ DES TRAJECTOIRES D'UNE FONCTION ALÉATOIRE

par Pierre BOULICAUT.

Ce travail est consacré à l'étude de l'existence d'une version à trajectoires continues d'une fonction aléatoire sur un espace métrique compact T à valeurs dans un espace métrique complet séparable, et à la détermination d'un module de continuité uniforme pour les trajectoires d'une telle version. Jusqu'à présent, cette étude a fait l'objet de nombreux travaux principalement dans le cas d'une fonction aléatoire réelle gaussienne, le cas général que nous considérons ayant été relativement peu abordé (voir [1], [3], [4] notamment). Les conditions suffisantes que nous donnons utilisent l'entropie métrique de T et une fonction de Young dont le choix dépend de la fonction aléatoire. Nous donnons diverses applications; tout d'abord, pour un choix convenable de cette fonction de Young, nous retrouvons les résultats classiques sur les fonctions aléatoires réelles gaussiennes; puis nous montrons que nous pouvons appliquer nos résultats à d'autres fonctions aléatoires réelles que les fonctions aléatoires réelles gaussiennes; enfin, nous étudions le cas du mouvement brownien à valeurs dans un espace de Banach.

1. Notations.

Nous appelons *fonction de Young* une fonction

$$\Phi : [0, +\infty[\longmapsto [0, +\infty[$$

définie par $\Phi(u) = \int_0^u \varphi(\tau)\, d\tau$, où $\varphi : [0, +\infty[\longmapsto [0, +\infty[$ est une fonction croissante, continue à gauche, telle que, pour tout $\tau \in]0, +\infty[$, $\varphi(\tau) > 0$; une fonction de Young Φ est continue, strictement croissante, convexe et vérifie $\Phi(0) = 0$, $\lim_{u \to +\infty} \Phi(u) = +\infty$; en particulier, elle admet une fonction réciproque

$$\Phi^{-1} : [0, +\infty[\longmapsto [0, +\infty[.$$

La fonction conjuguée d'une fonction de Young Φ est la fonction $\Psi : [0, +\infty[\longmapsto [0, +\infty[$ définie par

$$\Psi(v) = \int_0^v \psi(\tau)\, d\tau,$$

où $\psi(\tau) = \sup \{u \in [0, +\infty[;\ \varphi(u) < \tau\}$. Il est bien connu que pour $u, v \in [0, +\infty[$,

$$uv \leqslant \Phi(u) + \Psi(v).$$

l'égalité ayant lieu si, et seulement si, $v \in [\varphi(u), \varphi(u + 0)]$ (cf [13], chapitre IX).

Soient (E, δ) un espace métrique séparable et $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace de probabilité; $\mathscr{B}$ désignant la tribu borélienne de E, $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ est l'ensemble des fonctions $(\mathscr{F}, \mathscr{B})$-mesurables de Ω dans E, et $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ est l'ensemble quotient de $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ par la relation d'égalité P-presque sûre; la classe de $\xi \in \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ est notée $\dot{\xi}$ et est appelée une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ à valeurs dans E. $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ est muni de la structure uniforme de la convergence en probabilité.

Remarque. — L'hypothèse que E est séparable sert à affirmer que la tribu borélienne $\mathscr{B}_{E \times E}$ de $E \times E$ est le produit $\mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$; alors, pour $\xi, \eta \in \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$, la fonction $\omega \rightsquigarrow (\xi(\omega), \eta(\omega))$ est $(\mathscr{F}, \mathscr{B}_{E \times E})$-mesurable, ce qui, en particulier, assure la mesurabilité de la fonction

$$\omega \rightsquigarrow \delta(\xi(\omega), \eta(\omega)).$$

Nous pouvons supprimer cette hypothèse de séparabilité en prenant pour $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ l'ensemble des fonctions ξ de Ω dans E, $(\mathscr{F}, \mathscr{B})$-mesurables, telles que $\xi(\Omega)$ soit contenu dans une partie séparable de E; avec cette définition, pour $\xi, \eta \in \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$, la fonction $\omega \rightsquigarrow (\xi(\omega), \eta(\omega))$ est $(\mathscr{F}, \mathscr{B}_{E\times E})$-mesurable.

Étant donnée une fonction de Young Φ, δ_Φ définie par

$$\delta_\Phi(\xi, \eta) = \inf\left\{a \in]0, +\infty[;\ \int_\Omega \Phi\left[\frac{\delta(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})}{a}\right] dP \leqslant 1\right\}$$

(avec la convention habituelle : $\inf A = +\infty$ si A est la partie vide de $]0, +\infty[$) est un écart séparé, en général non fini sur $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ (cf. [2] § 1); la structure uniforme sur $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ définie par δ_Φ est plus fine que la structure uniforme de la convergence en probabilité.

Lorsque E est un espace vectoriel métrisable séparable, $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ est un espace vectoriel; la topologie de E peut être définie par une F-norme $|.|$ (cf. [11], § 15, 11), la distance δ correspondante étant définie par

$$\delta(x, y) = |x - y|;$$

le sous-ensemble $\mathbf{L}^\Phi(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ composé des variables aléatoires $\tilde{\xi} \in \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$, pour lesquelles il existe $a \in]0, +\infty[$ tel que $\int_\Omega \Phi\left(\frac{|\tilde{\xi}|}{a}\right) dP < +\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$. Pour $\tilde{\xi} \in \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$, posons

$$|\tilde{\xi}|_\Phi = \inf\left\{a > 0;\ \int_\Omega \Phi\left(\frac{|\tilde{\xi}|}{a}\right) dP \leqslant 1\right\};$$

alors, pour $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$.

$$\delta_\Phi(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = |\tilde{\xi} - \tilde{\eta}|_\Phi,$$

$\mathbf{L}^\Phi(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ est l'ensemble des $\tilde{\xi} \in \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ telles que $|\tilde{\xi}|_\Phi < +\infty$, et la restriction de $|.|_\Phi$ à $\mathbf{L}^\Phi(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ est une F-norme. Si $|.|$ est une norme sur E, alors $|.|_\Phi$ est une norme sur $\mathbf{L}^\Phi(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$. Lorsque $E = \mathbf{R}$, $\mathbf{L}^\Phi(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ est l'espace d'Orlicz usuel $\mathbf{L}^\Phi(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Nous appelons *module* une fonction ϖ définie sur un intervalle $[0, a_\varpi]$ $(a_\varpi > 0)$, à valeurs dans $[0, +\infty[$, croissante, continue à droite en tout point de $[0, a_\varpi[$ et telle que $\varpi(0) = 0$;

nous désignons par w_- la régularisée continue à gauche de w, c'est-à-dire la fonction sur $[0, a_w]$ par

$$w_-(0) = 0, \ w_-(\tau) = w(\tau - 0) \quad \text{pour} \quad \tau \in]0, a_w].$$

Étant donnée une application uniformément continue f d'un espace métrique (T, d) dans un espace uniforme T_1 dont la structure uniforme est définie par un écart d_1, un module w est appelé module de continuité uniforme pour f s'il existe $c \in [0, +\infty[$ telle que, pour $(t, t') \in \mathrm{T} \times \mathrm{T}$, $d(t, t') \leqslant a_w$, nous ayons

$$d_1(f(t), f(t')) \leqslant cw\,[d(t, t')].$$

Remarque. — Un module de continuité uniforme pour f peut être construit de la façon suivante. Soit $a \in]0, +\infty[$ tel que, pour $t, t' \in \mathrm{T}$, $d(t, t') \leqslant a$, nous ayons

$$d_1(f(t), f(t')) \leqslant 1;$$

alors w défini sur $[0, a]$ par :

$$w(\tau) = \sup \{d_1(f(t), f(t'));\ (t, t') \in \mathrm{T} \times \mathrm{T}, d(t, t') \leqslant \tau\}$$

est un module de continuité uniforme pour f; dans ce cas, la fonction w_- est donnée par

$$w_-(\tau) = \sup \{d_1(f(t), f(t'));\ (t, t') \in \mathrm{T} \times \mathrm{T}, d(t, t') < \tau\}$$

Soit (T, d) un espace métrique compact, soit $\tau > 0$; un *τ-réseau* pour T est une partie A de T telle que les boules ouvertes de rayon τ, de centres appartenant à A, forment un recouvrement de T. Nous posons :

$\mathrm{N_T}(\tau) = \min \{n \in \mathbf{N};\ n = \operatorname{card} \mathrm{A}, \mathrm{A}$ est un τ-réseau pour $\mathrm{T}\}$; un τ-réseau A pour T est dit minimal si

$$\operatorname{card} \mathrm{A} = \mathrm{N_T}(\tau).$$

La fonction $\tau \rightsquigarrow \mathrm{H_T}(\tau) = \operatorname{Log} \mathrm{N_T}(\tau)$ est appelée l'entropie métrique de T.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité. Une fonction aléatoire sur un ensemble T à valeurs dans un espace métrique séparable E est une application $\tilde{\mathrm{X}}$ de T dans $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P}; \mathrm{E})$; une version de $\tilde{\mathrm{X}}$ est une application X de T dans

$\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ telle que, pour tout $t \in T$, $\tilde{X}(t)$ soit la classe d'équivalence de $X(t)$ pour la relation d'égalité P-presque sûre.

2. Existence d'une version à trajectoires continues.

Soient (T, d) un espace métrique compact, (E, δ) un espace métrique complet séparable et $\tilde{X} : T \longmapsto \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ une fonction aléatoire sur T à valeurs dans E.

Nous supposons qu'il existe une fonction de Young Φ telle que :

(2.1) $\tilde{X}$ est continue de (T, d) dans $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ muni de l'écart δ_Φ.

(Comme (T, d) est compact, $\tilde{X}$ est uniformément continue et nous désignons par ρ un module de continuité uniforme de cette application, c'est-à-dire un module ρ défini sur un intervalle $[0, a]$ $(a > 0)$ pour lequel il existe

$$c_0 \in [0, +\infty[$$

satisfaisant à :

(2.2) pour $(s, t) \in T \times T$ tel que $d(s, t) \leqslant a$,

$$\delta_\Phi(\tilde{X}(s), \tilde{X}(t)) \leqslant c_0 \rho(d(s, t)).$$

Remarque. — Pour $(s, t) \in T \times T$ tel que $d(s, t) \leqslant a$, $\delta_\Phi(\tilde{X}(s), \tilde{X}(t))$ est fini. Lorsque T est connexe, pour tout $(s, t) \in T \times T$, $\delta_\Phi(\tilde{X}(s), \tilde{X}(t))$ est fini puisque, étant donné $s \in T$, $\{t \in T;\ \delta_\Phi(\tilde{X}(s), \tilde{X}(t)) < +\infty\}$ est une partie ouverte et fermée de T contenant s et est égale à T.

Enfin, pour $\tau > 0$, posons, lorsque T est une partie compacte convexe d'un espace vectoriel normé de dimension finie k, $g(\tau) = \tau^{-k}$, et, dans le cas général, $g(\tau) = N_T(\tau)^2$.

Théorème 1. — *Avec les notations ci-dessus, s'il existe une suite décroissante* $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *de nombres réels* > 0, *convergeant vers* $0 (\alpha_0 \leqslant a)$, *et* $c_1 \in]0, +\infty[$ *telles que la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \rho_-(\alpha_n) \Phi^{-1}[c_1 g(\alpha_{n+1})]$ *soit convergente, alors* $\tilde{X}$ *admet une version à trajectoires continues.*

Démonstration. — A la suite $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, nous associons :

— un α_n-réseau minimal A_n pour T,

— $B_n = \{(s,\ t) \in A_n \times A_{n+1};$ il existe $(s',\ t') \in T \times T,$ $d(s,\ s') < \alpha_n,\ d(t',\ t) < \alpha_n,\ d(s',\ t') < \alpha_n\}$,

— $C_n = \{(\tilde{X}(s),\ \tilde{X}(t));\ (s,\ t) \in B_n\}$,

— $N_n = \operatorname{card} B_n$, $\delta_n = \sup\{\delta_\Phi(\tilde{\xi},\ \tilde{\eta});\ (\tilde{\xi},\ \tilde{\eta}) \in C_n\}$.

Pour chaque $\tilde{\xi} \in \tilde{X}(T)$, nous choisissons un représentant $L\tilde{\xi}$ de $\tilde{\xi}$; pour $(\tilde{\xi},\ \tilde{\eta}) \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n$, nous avons

$$\delta_\Phi(\tilde{\xi},\ \tilde{\eta}) \leqslant c_0\rho(\alpha_0) < +\infty,$$

et nous posons, pour $\omega \in \Omega$,

$$\Delta(\tilde{\xi},\ \tilde{\eta};\ \omega) = \frac{\delta[L\tilde{\xi}(\omega),\ L\tilde{\eta}(\omega)]}{\delta_\Phi(\tilde{\xi},\ \tilde{\eta})} \quad \text{si} \quad \tilde{\xi} \neq \tilde{\eta}$$

$$\Delta(\tilde{\xi},\ \tilde{\eta};\ \omega) = 0 \quad \text{si} \quad \tilde{\xi} = \tilde{\eta},$$

$$Y_n(\omega) = \sup\{\Delta(\tilde{\xi},\ \tilde{\eta};\ \omega);\quad (\tilde{\xi},\ \tilde{\eta}) \in C_n\},$$

de sorte que, pour $(s,\ t) \in B_n$, pour $\omega \in \Omega$, nous avons :

$$\delta[L\tilde{X}(s;\ \omega),\ L\tilde{X}(t;\ \omega)] = \delta_\Phi(\tilde{X}(s),\ \tilde{X}(t))\,\Delta(\tilde{X}(s),\ \tilde{X}(t);\ \omega) \leqslant \delta_n Y_n(\omega).$$

Pour établir le théorème 1, nous utilisons les deux lemmes suivants.

LEMME 1. — *Si la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n Y_n$ *converge* P-*presque sûrement, alors* $\tilde{X}$ *admet une version à trajectoires continues.*

Démonstration. — A chaque $s \in T$, nous faisons correspondre une suite $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ dans T telle que, pour tout n, $s_n \in A_n$ et $d(s,\ s_n) < \alpha_n$; la suite $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers s et, pour tout n, $(s_n,\ s_{n+1})$ appartient à B_n de sorte que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta[L\tilde{X}(s_n;\ \omega),\ L\tilde{X}(s_{n+1};\ \omega)] \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n Y_n(\omega).$$

Si nous posons $\Omega_0 = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n Y_n < +\infty\right]$, alors, pour

$\omega \in \Omega_0$, la suite $\{L\tilde{X}(s_n; \omega)\}_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans E; comme E est supposé complet, elle converge; désignons par $X(s; \omega)$ sa limite; convenons de poser $X(S; \omega) = x_0$ lorsque ω n'appartient pas à Ω_0, où x_0 est un élément fixé de E. Puisque, par hypothèse, Ω_0 a pour probabilité 1, la suite $\{L\tilde{X}(s_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge P-presque sûrement vers $X(s)$, donc converge en probabilité vers $X(s)$ or, en vertu de la continuité de l'application $\tilde{X}$ de T dans $L^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$, la suite $\{\tilde{X}(s_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge en probabilité vers $\tilde{X}(s)$; par suite, $X(s)$ appartient à $\tilde{X}(s)$, ce qui prouve que l'application $X : s \rightsquigarrow X(s)$ est une version de $\tilde{X}$.

Montrons maintenant que les trajectoires de X sont continues. Pour $\omega \notin \Omega_0$, la continuité de l'application

$$s \rightsquigarrow X(s; \omega) = x_0$$

est triviale. Supposons donc que $\omega \in \Omega_0$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{j=n}^{+\infty} \delta_j Y_j(\omega) < \varepsilon/2$; soient s, $t \in T$ tels que $d(s, t) < \alpha_n$; si $\{s_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ et $\{t_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ sont les suites correspondant respectivement à s et t, alors (s_n, t_{n+1}) appartient à B_n, de sorte que

$$\begin{aligned}\delta[X(s; \omega), X(t; \omega)] \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} \delta[L\tilde{X}(s_j; \omega), L\tilde{X}(s_{j+1}; \omega)] \\ + \delta[L\tilde{X}(s_n; \omega), L\tilde{X}(t_{n+1}; \omega)] \\ + \sum_{j=n+1}^{+\infty} \delta[L\tilde{X}(t_j; \omega), L\tilde{X}(t_{j+1}; \omega)]\end{aligned}$$

d'où :

$$\delta[X(s; \omega), X(t; \omega)] \leqslant 2 \sum_{j=n}^{\infty} \delta_j Y_j(\omega); \tag{2.3}$$

Cela suffit à prouver la continuité de la trajectoire $s \rightsquigarrow X(s; \omega)$ et la démonstration du lemme 1 est achevée.

Lemme 2. — *S'il existe $c_2 \in]0, +\infty[$ telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n \Phi^{-1}(c_2 N_n)$ soit convergente, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n Y_n$ converge P-presque sûrement.*

Démonstration. — pour $n \in \mathbf{N}$, posons

$$\lambda_n = \delta_n[\varphi \circ \Phi^{-1}(c_2 N_n)]^{-1};$$

Ψ désignant la fonction conjuguée de Φ, nous avons :

$$c_2 \lambda_n N_n + \lambda_n \Psi(\lambda_n^{-1}\, \delta_n) = \delta_n \Phi^{-1}(c_2 N_n),$$

et les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n N_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \Psi(\lambda_n^{-1}\, \delta_n)$ sont convergentes. Par définition de δ_Φ, nous avons, pour $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta} \in C_n$,

$$\int_\Omega \Phi[\Delta(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})]\, dP \leqslant 1$$

de sorte que :

$$\int_\Omega \Phi(Y_n)\, dP \leqslant \sum_{(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in C_n} \int_\Omega \Phi[\Delta(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})]\, dP \leqslant N_n;$$

par suite, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \int_\Omega \Phi(Y_n)\, dP$ converge et la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \Phi(Y_n)$ converge P-presque sûrement; le lemme résulte alors de l'inégalité suivante :

$$\delta_n Y_n(\omega) \leqslant \lambda_n \Phi[Y_n(\omega)] + \lambda_n \Psi(\lambda_n^{-1}\, \delta_n)$$

Pour achever la démonstration du théorème 1, il suffit de remarquer que dans le cas général, $\delta_n \leqslant 3c_0\rho_-(\alpha_n)$ et que $N_n \leqslant N_T(\alpha_{n+1})^2$. Toutefois, dans le cas où T est une partie convexe compacte d'un espace vectoriel normé de dimension finie k, le théorème (XXII, 1; 2) de [3] donne une meilleure approximation de N_n : il existe une constante $c_3 \in]0, +\infty[$ telle que, pour tout n, $N_n \leqslant c_3 \alpha_{n+1}^{-k}$; il suffit alors d'appliquer le lemme 2 avec $c_2 = c_3^{-1} c_1$.

Théorème 2. — *S'il existe une constante* $c_1 \in]0, +\infty[$ *telle que l'intégrale* $\int_{[0,a]} \Phi^{-1}[c_1 g(\tau)]\, d\rho_-(\tau)$ *soit finie, alors* $\tilde{X}$ *admet une version à trajectoires continues.*

Démonstration. — Supposons que, pour tout $u \in]0, a]$, $\rho(u) > 0$. Alors la fonction ρ^{-1} définie sur $[0, \rho(a)]$ par

$$\rho^{-1}(0) = 0,\ \rho^{-1}(\tau) = \sup\{u \geqslant 0;\ \rho(u) < \tau\}$$

est à valeurs dans $[0, a]$, croissante, continue en O et nous avons, pour $\tau \in]0, a]$,

$$\{u \geqslant 0;\ \rho(u) < \tau\} = [0, \rho^{-1}(\tau)[$$

Si nous munissons $[0, \rho(a)]$ de la mesure de Lebesgue, la fonction de répartition de ρ^{-1} est la fonction ρ_-. La suite $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\alpha_n = \rho^{-1}[2^{-n}\rho(a)]$$

est une suite décroissante de nombres réels > 0 convergeant vers O et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\rho(\alpha_n) \geqslant 2^{-n}\rho(a) \geqslant \rho_-(\alpha_n).$$

Pour toute fonction décroissante positive G sur $[0, a]$, pour tout $n \in \mathrm{N}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{+\infty} \rho_-(\alpha_j)\mathrm{G}(\alpha_{j+1}) &\leqslant \sum_{j=n}^{\infty} 2^{-j}\rho(a)\mathrm{G}(\alpha_{j+1})\\ &\leqslant 4 \sum_{j=n}^{+\infty} [2^{-j-1}\rho(a) - 2^{-j-2}\rho(a)]\mathrm{G}[\rho^{-1}(2^{-j-1}\rho(a))]\\ &\leqslant 4 \sum_{j=n}^{+\infty} \int_{]2^{-j-2}\rho(a),\, 2^{-j-1}\rho(a)]} \mathrm{G}[\rho^{-1}(\tau)]\, d\tau\\ &\leqslant 4 \int_{[0,\, 2^{-n-1}\rho(a)]} \mathrm{G}[\rho^{-1}(\tau)]\, d\tau\\ &\leqslant 4 \int_{[0,\, \rho(\alpha_{n+1})]} \mathrm{G}[\rho^{-1}(\tau)]\, d\tau = 4 \int_{[0,\, \alpha_{n+1}]} \mathrm{G}(\tau)\, d\rho_-(\tau)\end{aligned}$$

Le théorème 2 se déduit alors du théorème 1 en prenant $\mathrm{G}(\tau) = \Phi^{-1}[c_1 g(\tau)]$. Supposons maintenant qu'il existe $u_0 \in]0, a]$ tel que $\rho(u_0) = 0$. Si nous posons $\alpha_n = 2^{-n} u_0$, nous avons :

$$\int_{[0,\, \alpha_{n+1}]} \Phi^{-1}[c_1 g(\tau)]\, d\rho_-(\tau) = 0 = \sum_{j=n}^{\infty} \rho_-(\alpha_j)\Phi^{-1}[c_1 g(\alpha_{n+1})],$$

et, dans ce cas, le théorème 2 se déduit encore du théorème 1.

3. Modules de continuité uniforme.

Comme dans le paragraphe précédent, soient (T, d) un espace métrique compact, (E, δ) un espace métrique complet séparable et $\tilde{\mathrm{X}} : \mathrm{T} \longmapsto \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P};\, \mathrm{E})$ une fonction aléatoire sur T à valeurs dans E; nous supposons qu'il existe une fonction de Young Φ possédant les propriétés suivantes :

(3-1) Ψ désignant la fonction conjuguée de Φ, il existe $b \in]1, +\infty[$ et $B \in]0, +\infty[$ tels que, pour tout $\tau \in [0, +\infty[$,

$$\Psi(b\tau) \leqslant B\Psi(\tau),$$

(3-2) $\tilde{X}$ est une application continue de (T, d) dans $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ muni de l'écart δ_Φ.

Nous posons $\gamma = \operatorname{Log} B (\operatorname{Log} b)^{-1}$ et nous désignons par ρ un module de continuité uniforme pour $\tilde{X}$ satisfaisant à (2.2). Comme $b < B$, alors $\gamma > 1$.

Comme en général la fonction conjuguée Ψ de Φ n'est pas explicitement connue, nous remplaçons la condition (3.1) par la condition suivante :

(3-3) il existe $c \in]1, +\infty[$ et $C \in]0, +\infty[$ tels que, pour tout $\tau \in [0, +\infty[$ $c\varphi(\tau) \leqslant \varphi(C\tau)$.

Cette condition (3-3) est équivalente à la condition (3-1) en vertu du lemme IX. 1.1. de [13]; plus précisément, nous avons :

Lemme 3. — *Si* (3.3) *est vérifiée, alors* (3.1) *est vérifiée avec* $b = c$, $B = cC$ et $\gamma = 1 + \operatorname{Log} C (\operatorname{Log} c)^{-1}$.

Démonstration. — Pour $\tau \in [0, +\infty[$,

$$\psi(c\tau) = \sup\{u \geqslant 0;\ \varphi(u) < c\tau\} \leqslant \sup\{u \geqslant 0;\ \varphi(C^{-1}u) < \tau\}$$
$$\psi(c\tau) \leqslant C \sup\{u \geqslant 0;\ \varphi(u) < \tau\} = C\psi(\tau),$$

et, par intégration, $\Psi(c\tau) < cC\Psi(\tau)$.

Lemme 4. — *Si la condition* (3.1) *est vérifiée, alors pour tout* $\tau \in]0, +\infty]$ *pour tout* $r \in [0, +\infty[$, *nous avons* :

$$\Psi(r\tau) < \max(1, Br^\gamma)\Psi(\tau).$$

Démonstration. — Si $r \leqslant 1$,

$$\Psi(r\tau) \leqslant \Psi(\tau) \leqslant \max(1, Br^\gamma)\Psi(\tau);$$

si $r > 1$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $b^n < r \leqslant b^{n+1}$, et nous avons :

$$\Psi(r\tau) \leqslant \Psi(b^{n+1}\tau) \leqslant B^{n+1}\Psi(\tau);$$

comme $n < \operatorname{Log} r \, (\operatorname{Log} b)^{-1}$, $B^n < \exp\left(\operatorname{Log} r \dfrac{\operatorname{Log} B}{\operatorname{Log} b}\right) = r^\gamma$ de sorte que : $\Psi(r\tau) \leqslant Br^\gamma \Psi(\tau) \leqslant \max(1, Br^\gamma)\Psi(\tau)$.

Définition. — X *étant une version à trajectoires continues de* $\tilde{X}$, *un module* ϖ *est appelé un module de continuité uniforme pour* X *si l'ensemble des* $\omega \in \Omega$ *pour lesquels* ϖ *n'est pas un module de continuité uniforme pour la trajectoire*

$$s \rightsquigarrow X(s;\,\omega)$$

est P-*négligeable.*

Remarque. — Si X_1 et X_2 sont deux versions à trajectoires continues de $\tilde{X}$, $\bigcap_{s \in T} [X_1(s) = X_2(s)]$ est une partie mesurable de Ω, de probabilité 1, de sorte que les modules de continuité uniforme pour X_1 sont les mêmes que les modules de continuité uniforme pour X_2.

Théorème 3. — *Soit* Φ *une fonction de Young vérifiant* (3.1) *et* (3.2); *s'il existe une suite décroissante* $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *de nombres réels* > 0 $(\alpha_0 < a)$, *convergeant vers* 0 *et* $c_1 \in]0, +\infty[$ *tels que la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \rho_-(\alpha_n)\Phi^{-1}[c_1 g(\alpha_{n+1})]$ *soit convergente, alors la fonction* ϖ *définie par* $\varpi(0) = 0$,

$$\varpi(\tau) = \left\{ \sum_{j=n}^{+\infty} \rho_-(\alpha_j)\Phi^{-1}[c_1 g(\alpha_{n+1})] \right\}^{1/\gamma} \quad pour \ \tau \in [\alpha_{n+1}, \alpha_n[,$$

est un module de continuité uniforme pour toute version à trajectoires continues de la fonction aléatoire $\tilde{X}$.

Démonstration. — Il suffit de le prouver pour la version X de $\tilde{X}$ construite dans la démonstration du théorème 1; avec les mêmes notations, pour $\omega \in \Omega_0$, pour $(s, t) \in T \times T$ tel que $d(s, t) < \alpha_n$, nous avons, d'après (2.3),

$$\delta[X(s;\,\omega), X(t;\,\omega)] \leqslant 2 \sum_{j=n}^{+\infty} \delta_j Y_j(\omega),$$

donc, pour $b > 0$,

$$\delta[X(s;\,\omega), X(t;\,\omega)] \leqslant 2b \left\{ \sum_{j=n}^{+\infty} \lambda_j \Phi[Y_j(\omega)] + \sum_{j=n}^{+\infty} \lambda_j \Psi(\lambda_j^{-1} b^{-1} \delta_j) \right\}$$

Si nous posons $b_n = \left\{ \sum_{j=n}^{+\infty} \delta_j \Phi^{-1}(c_2 N_j) \right\}^{1/\gamma}$, nous avons :

$$\sum_{j=n}^{+\infty} \lambda_j \Psi(b_n^{-1}\lambda_j^{-1}\,\delta_j) \leqslant \max(1, B b_n^{-\gamma}) \sum_{j=n}^{+\infty} \lambda_j \Psi(\lambda_j^{-1}\,\delta_j)$$
$$\leqslant \max(1, B b_n^{-\gamma}) \sum_{j=n}^{+\infty} \delta_j \Phi^{-1}(c_2 N_j) \leqslant \max(b_0^{\gamma}, B).$$

Par suite, il existe, pour $\omega \in \Omega_0$, une constante

$$K(\omega) \in [0, +\infty[$$
$$K(\omega) = 2 \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j \Phi[Y_j(\omega)] + \max(b_0^{\gamma}, B) \right\}$$

telle que, pour tout $n \in N$, pour $(s, t) \in T \times T$ tel que $d(s, t) < \alpha_n$,

$$\delta[X(s;\omega), X(t;\omega)] \leqslant K(\omega) \left\{ \sum_{j=n}^{+\infty} \delta_j \Phi^{-1}(c_2 N_j) \right\}^{1/\gamma},$$

et la démonstration de ce théorème s'achève de la même façon que celle du théorème 1.

THÉORÈME 4. — *Soit* Φ *une fonction de Young vérifiant* (3.1) *et* (3.2); *s'il existe* $c_1 \in]0, +\infty[$ *telle que l'intégrale* $\int_{[0, a]} \Phi^{-1}[c_1 g(\tau)]\, d\rho_-(\tau)$ *soit finie, alors la fonction* ϖ *définie par*

$$\varpi(\tau) = \left\{ \int_{[0, \tau]} \Phi^{-1}[c_1 g(u)]\, d\rho_-(u) \right\}^{1/\gamma}$$

est un module de continuité uniforme pour toute version à trajectoires continues de la fonction aléatoire $\tilde{X}$.

Démonstration. — Comme dans la démonstration du théorème 2, nous construisons une suite décroissante $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels > 0, convergeant vers 0, telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{j=n}^{+\infty} \rho_-(\alpha_j)\Phi^{-1}[c_1 g(\alpha_{j+1})] \leqslant 4 \int_{[0, \alpha_{n+1}]} \Phi^{-1}[c_1 g(\tau)]\, d\rho_-(\tau)$$

de sorte que, pour $(s, t) \in T \times T$ tel que $\alpha_{n+1} \leqslant d(s, t) < \alpha_n$,

$$\sum_{j=n}^{+\infty} \rho_-(\alpha_j)\Phi^{-1}[c_1 g(\alpha_{j+1})] \leqslant 4 \int_{[0, d(s, t)]} \Phi^{-1}[c_1 g(\tau)]\, d\rho_-(\tau)$$

et il suffit d'appliquer le théorème 3 pour achever la démonstration.

Dans le paragraphe suivant, nous appliquerons ces théorèmes en prenant pour fonction de Young Φ la fonction $\tau \rightsquigarrow \exp(\tau^2) - 1$; cette fonction vérifie la condition (3.1) avec $B = b^2 > 1$ et $\gamma = 2$; les théorèmes 3 et 4 correspondant à cette fonction de Young ne fournissent pas les « meilleurs » modules de continuité uniforme. En effet, dans ce cas particulier, nous avons

Théorème 5. — *Si la fonction de Young Φ est la fonction $\tau \rightsquigarrow \exp(\tau^2) - 1$, les assertions obtenues en remplaçant γ par 1 dans les énoncés des théorèmes 3 et 4 sont vraies.*

Démonstration. — Avec les notations déjà employées, il suffit de montrer que P-presque sûrement

$$K = \sup\{[\Phi^{-1}(c_2 N_n)]^{-1} Y_n;\ n \in \mathbf{N}\}$$

est finie puisqu'alors P-presque sûrement

$$\sum_{j=n}^{+\infty} \delta_j Y_j(\omega) \leqslant K(\omega) \sum_{j=n}^{+\infty} \delta_j \Phi^{-1}(c_2 N_j)$$

et les démonstrations se terminent de façon identique à celles des théorèmes 3 et 4. Or, pour $r > \sqrt{2}$, nous avons :

$$\Phi[r\Phi^{-1}(c_2 N_j)] = (c_2 N_j + 1)^{r^2} - 1 \geqslant (c_2 N_j)^{r^2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} P[Y_j > r\Phi^{-1}(c_2 N_j)] &\leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{(\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in C_j)} P[\Phi(\Delta(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})) > (c_2 N_j)^{r^2}] \\ &\leqslant (c_2)^{-r^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{N_j}\right)^{r^2-1} \\ &\leqslant (c_2)^{-r^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^{r^2-1} < +\infty \end{aligned}$$

car, pour chaque j, N_j est un entier $\geqslant 1$. En vertu du lemme de Borel-Cantelli, P-presque sûrement

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{Y_n}{\Phi^{-1}(c_2 N_n)} \leqslant r, \text{ donc } \sup\left\{\frac{Y_n}{\Phi^{-1}(c_2 N_n)};\ n \in \mathrm{N}\right\}$$

est fini P-presque sûrement.

4. Applications.

Dans ce paragraphe, nous donnons trois exemples d'applications des théorèmes que nous avons obtenus. Tout d'abord, nous envisageons le cas classique d'une fonction aléatoire gaussienne centrée et nous retrouvons alors des résultats connus. Le deuxième exemple concernant les fonctions aléatoires symétriques stables d'exposant $\alpha \in]1, 2[$ illustre le fait que les théorèmes obtenus s'appliquent à des fonctions aléatoires réelles autres que les fonctions aléatoires réelles gaussiennes. Enfin, le dernier exemple, traitant le cas du mouvement brownien à valeurs dans un espace de Banach, prouve que nous pouvons obtenir des résultats intéressants dans le cas de fonctions aléatoires non nécessairement réelles.

4.1. *Cas des fonctions aléatoires réelles gaussiennes centrées.*

Soit $\tilde{X} : T \longmapsto \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$ une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée sur un espace métrique compact (T, d). Nous supposons que $\tilde{X}$ est une application continue de T dans $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$; soient un module ρ défini sur $[0, a]$ et $c_0 \in [0, +\infty[$ tels que, pour $(s, t) \in T \times T$, $d(s, t) \leqslant a$, nous ayons

$$\left\{ \int_\Omega |\tilde{X}(s) - \tilde{X}(t)|^2 \, dP \right\}^{1/2} \leqslant c_0 \rho [d(s, t)]$$

Le choix de la fonction de Young est déterminé par :

Lemme 5. — *Si* Φ *est la fonction de Young*

$$\tau \rightsquigarrow \exp(\tau^2) - 1,$$

toute variable aléatoire $\xi \in \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *gaussienne, centrée, de variance* σ^2, *appartient à* $\mathbf{L}^\Phi(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *et* $|\xi|_\Phi = \sqrt{\frac{8}{3}}\,\sigma$.

Les théorèmes obtenus dans les paragraphes 2 et 3 s'énoncent alors sous la forme suivante et sont connus.

THÉORÈME 6. — (Fernique [7], Kono [12]). — *Si* T *est une partie compacte convexe de* $\mathbf{R}^k$ *telle que*

$$\int_0^a \frac{\rho(u)}{\sqrt{\left|\operatorname{Log}\frac{1}{u}\right|}}\frac{du}{u} < +\infty,$$

alors $\tilde{X}$ *admet une version à trajectoires continues. Pour* $c_4, c_5 \in]0, +\infty[$ *la fonction* w *définie par*

$$w(\tau) = c_4\rho(\tau)\sqrt{\left|\operatorname{Log}\frac{1}{\tau}\right|} + c_5\int_0^\tau \frac{\rho(u)}{\sqrt{|\operatorname{Log} u|}}\frac{du}{u}$$

est un module de continuité uniforme pour toute version de $\tilde{X}$ *à trajectoires continues.*

Démonstration. — Nous avons $\Phi^{-1}[c_1 g(\tau)] \sim \sqrt{k \operatorname{Log}\frac{1}{\tau}}$ quand $\tau \to 0$ et, pour $\tau \in]0, \min(1, a)[$,

$$\int_{[0,\tau]} \sqrt{\operatorname{Log}\frac{1}{u}}\, d\rho_-(u) = \rho(\tau)\sqrt{\operatorname{Log}\frac{1}{\tau}} + \frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{\rho(u)}{\sqrt{\operatorname{Log} 1/u}}\frac{du}{u}.$$

THÉORÈME 7. — (Chevet [3]). — *Si la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\sqrt{H_T\left[\rho^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right]}$$

est convergente, alors $\tilde{X}$ *admet une version à trajectoires continues.*

Démonstration. — C'est le théorème 1 énoncé pour la suite $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ construite dans la démonstration du théorème 2.

THÉORÈME 8 (Dudley [6]). — *Si* T *est une partie compacte d'un espace de Hilbert* H *telle que* $\int_0^1 \sqrt{H_T(\tau)}\, d\tau < +\infty$, *alors la restriction à* T *de toute fonction aléatoire réelle gaussienne canonique sur* H *admet une version à trajectoires continues et* $w : \tau \rightsquigarrow \int_0^\tau \sqrt{H_T(u)}\, du$ *est un module de continuité uniforme pour toute version à trajectoires continues de* $\tilde{X}$.

Démonstration. — Une fonction aléatoire réelle gaussienne $\tilde{X} : H \longmapsto \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$ est dite canonique si $\tilde{X}$ est une isométrie de H dans $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$; nous pouvons donc prendre pour ρ la fonction $\tau \rightsquigarrow \rho(\tau) = \tau$.

Les hypothèses que nous avons faites sont semblables à celles utilisées dans le théorème suivant dû à Preston [14] :

Soit $\rho : [0, a] \longmapsto [0, +\infty[$ une fonction croissante continue telle que $\rho(0) = 0$; soit Φ une fonction de Young telle que, si $\xi \in \mathbf{L}^0(\Phi, \mathscr{F}, P)$ est une variable aléatoire réelle gaussienne centrée de variance 1, $\int_\Omega \Phi(|\xi|) \operatorname{Log}^+ \Phi(|\xi|)\, dP$ soit fini; soit μ une probabilité sur un espace métrique compact (T, d) telle que le support de μ soit T et que l'intégrale

$$\int_{[0,a]} \Phi^{-1}\left[\frac{1}{m(u/2)^2}\right] d\bar{\rho}(u)$$

soit finie, où $\bar{\rho}(u) = \rho(2u)$, $m(u) = \inf\,\{\mu[B_u(t)]\,;\ t \in T\}$ et où $B_u(t)$ est la boule ouverte de centre t de rayon $u > 0$. Alors toute fonction aléatoire réelle $\tilde{X} : T \longmapsto \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$, gaussienne centrée telle que, pour $(s, t) \in T \times T$, $d(s, t) \leqslant a$,

$$\left\{\int_\Omega |\tilde{X}(s) - \tilde{X}(t)|^2\, dP\right\}^{1/2} \leqslant \rho[d(s, t)]$$

admet une version X à trajectoires continues et il existe une fonction mesurable B sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, P-presque sûrement finie, telle que, pour $(s, t) \in T \times T$, $d(s, t) \leqslant a$, pour $\omega \in \Omega$,

$$|X(s\,;\omega) - X(t\,;\omega)| \leqslant 10 \int_{[0,\,d(s,t)]} \Phi^{-1}\left[\frac{B(\omega)}{m(u/2)^2}\right] d\bar{\rho}(u)$$

Nous pouvons choisir μ telle que :

$$m(u) \geqslant \left[\prod_{j=1}^{\gamma(u)+2} N_T(2^{-j}a)\right]^{-1},$$

où $\gamma(u)$ est la partie entière de $(\operatorname{Log} a/u)\,(\operatorname{Log} 2)^{-1}$.

Indiquons brièvement en quoi les démonstrations diffèrent. Preston considère la probabilité $\nu = \mu \otimes \mu$ sur $T \times T$; pour toute version mesurable X de $\tilde{X}$,

$$\Omega_0 = \left\{\omega\,;\int_{T\times T} \Phi\left(\frac{|X(s\,;\omega) - X(t\,;\omega)|}{\rho[d(s, t)]}\right) d\nu(s, t) < +\infty\right\}$$

a pour probabilité 1, et, si $\int_{[0,a]} \Phi^{-1}\left[\frac{1}{m(u/2)^2}\right] d\bar{\rho}(u) < +\infty$, alors, pour

$$\omega \in \Omega_0, \ X'(s; \omega) = \lim_{r \searrow 0} \{\mu[B_r(s)]\}^{-1} \int_{B_r(s)} X(t; \omega)\, d\mu(t)$$

existe et définit une fonction continue $s \rightsquigarrow X'(s, \omega)$ sur T telle que $\mu\{s; X'(s; \omega) \neq X(s; \omega)\} = 0$; il s'agit alors de prouver que X' est une version de X, ce qui est obtenu par l'utilisation du développement de Karhunen-Loève de $\tilde{X}$. Au lieu de la mesure $\nu = \mu \otimes \mu$ sur $T \times T$, nous avons utilisé une mesure discrète de la forme

$$\nu = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \sum_{(s,t) \in B_n} \delta_{(s,t)},$$

où $\delta_{(s,t)}$ est la mesure de Dirac au point (s, t) et, nous avons prouvé que, sous une hypothèse de même nature, pour $\omega \in \Omega_0$, $X'(s, \omega) = \lim_{n \to \infty} X(s_n, \omega)$ existait et définissait une fonction continue $s \rightsquigarrow X'(s; \omega)$ sur T; le fait que X' soit une version de $\tilde{X}$ résulte alors seulement de la continuité de $\tilde{X}$ et ne nécessite plus l'utilisation du développement de Karhunen-Loève.

4.2. *Fonctions aléatoires réelles stables symétriques d'exposant* $\alpha \in]1, 2[$.

Rappelons qu'une probabilité μ sur $\mathbf{R}^k$ est une loi stable symétrique d'exposant α si sa transformée de Fourier $\mathcal{F}\mu$ est donnée par

$$\operatorname{Log} \mathcal{F}\mu(u) = -\int_{S_k} |\langle u, v\rangle|^\alpha\, d\pi(v), \quad u \in \mathbf{R}^k$$

où π est une mesure symétrique finie sur la sphère unité $S_k = \left\{u \in R^k; \sum_{j=1}^{k} u_j^2 = 1\right\}$ de $\mathbf{R}^k$. Si un vecteur aléatoire $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbf{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbf{R}^k)$ suit une loi stable symétrique d'exposant α, toute combinaison linéaire des variables aléatoires $\xi_j (j = 1, \ldots. k)$ suit une loi stable symétrique d'exposant α.

Une fonction aléatoire réelle $\tilde{X} : T \longmapsto \mathbf{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur un ensemble T est appelée une fonction aléatoire réelle stable symétrique d'exposant α si, pour toute partie finie S de T, $\{\tilde{X}(s)\}_{s \in S}$ suit une loi stable symétrique d'exposant α.

Le choix de la fonction de Young est déterminé par :

LEMME 6. — *Soit* $\beta \in]1, \alpha[$; *alors toute variable aléatoire* $\tilde{\xi} \in \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ *suivant une loi stable symétrique d'exposant* α *appartient à* $\mathbf{L}^\beta(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ *et il existe une constante* $c(\alpha, \beta)$ *telle que*

$$|\tilde{\xi}|_\beta = c(\alpha, \beta) \left\{ - \mathrm{Log} \int_\Omega \exp\,(i\tilde{\xi})\, d\mathrm{P} \right\}^{1/\alpha}.$$

La fonction $\tau \rightsquigarrow \tau^\beta$ est une fonction de Young vérifiant la condition (3.1) pour $\mathrm{B} = b^{\beta'}$ et $\gamma = \beta'$ si β' est l'exposant conjugué de β défini par $\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\beta'} = 1$.

Soit $\tilde{X} : \mathrm{T} \longmapsto \mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ une fonction aléatoire réelle stable symétrique d'exposant α sur un espace métrique compact (T, d), continue de T dans l'espace $\mathbf{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ muni de la topologie de la convergence en probabilité. Soit ρ un module défini sur $[0, a]$ tel que, pour $(s, t) \in \mathrm{T} \times \mathrm{T}$, $d(s, t) \leqslant a$, nous ayons :

$$\left\{ - \mathrm{Log} \int_\Omega \exp\,[i(\tilde{X}(s) - \tilde{X}(t))]\, d\mathrm{P} \right\}^{1/\alpha} < \rho\,[d(s, t)]$$

(l'existence d'un tel module est assuré par la continuité de $\tilde{X}$). Alors, nous avons :

THÉORÈME 9. — *S'il existe* $\beta \in]1, \alpha[$ *tel que l'intégrale* $\int_{[0, a]} \mathrm{N_T}(\tau)^{2/\beta}\, d\rho_-(\tau)$ *soit finie, alors* $\tilde{X}$ *admet une version à trajectoires continues et* $w : \tau \rightsquigarrow \left\{ \int_{[0, 2]} \mathrm{N_T}(u)^{2/\beta}\, d\rho_-(u) \right\}^{1/\beta'}$ *est un module de continuité uniforme pour toute version à trajectoires continues de* $\tilde{X}$.

THÉORÈME 10. — *Supposons que* T *est une partie compacte convexe de* $\mathbf{R}^k$. *S'il existe* $\beta \in]1, \alpha[$ *tel que l'intégrale* $\int_0^a \dfrac{p(u)}{u^{k/\beta}} \dfrac{du}{u}$ *soit finie, alors* $\tilde{X}$ *admet une version à trajectoires continues; et, pour* $c_4, c_5 \in]0, +\infty[$, *la fonction* w *définie par :*

$$w(\tau) = \left\{ c_4 \tau^{-k/\beta} \rho(\tau) + c_5 \int_0^\tau \frac{\rho(u)}{u^{k/\beta}} \frac{du}{u} \right\}^{1/\beta'}$$

est un module de continuité uniforme pour toute version à trajectoires continues de $\tilde{X}$.

Démonstration. — Si Φ est la fonction de Young $\tau \rightsquigarrow \tau^{\beta}$, alors la condition (2.1) est satisfaite et ρ vérifie la condition (2.2). Comme pour $\tau \in]0, a]$

$$\int_{[0,\,\tau]} u^{-k/\beta}\, d\rho_{-}(u) = \tau^{-k/\beta}\rho(\tau) + \int_{0}^{\tau} \frac{\rho(u)}{u^{k/\beta}}\frac{du}{u},$$

ces théorèmes se déduisent immédiatement des théorèmes 2 et 4.

4.3. *Mouvement brownien à valeurs dans un espace de Banach.*

Soient H un espace de Hilbert, E un espace de Banach séparable et u une application linéaire continue de H dans E. Nous supposons que, si γ est la mesure cylindrique gaussienne canonique sur H, $u(\gamma)$ est une probabilité de Radon sur E. Pour $t \in [0, +\infty[$, γ_t désigne la mesure cylindrique gaussienne sur H de covariance $(x, y) \rightsquigarrow t\langle x, y\rangle$; en particulier, γ_1 est la mesure cylindrique γ; alors $\mu_t = \mu(\gamma_t)$ est une probabilité de Radon sur E et la famille $\{\mu_t\}_{t\in[0,\,+\infty[}$ vérifie :

$$\text{pour } s, t \in [0, +\infty[,\ \mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t \quad \text{(cf. [10])}$$

il existe alors une application $\tilde{X} : [0, +\infty[\longmapsto L^{0}(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ telle que

i) pour tout t, $\tilde{X}(t)$ a pour loi μ_t,

ii) $\tilde{X}$ est à accroissements indépendants et stationnaires.

Cette application $\tilde{X}$ est, par définition, la fonction aléatoire du mouvement brownien à valeurs dans E.

Pour appliquer nos théorèmes, nous avons besoin du résultat suivant dû à Fernique [8] :

LEMME 7. — *Pour toute probabilité de Radon gaussienne* μ *sur un espace de Banach* E, *il existe* $a \in]0, +\infty[$ *tel que*

$$\int_{E} \exp(a|x|^2)\, d\mu(x) < +\infty.$$

THÉORÈME 11. — *Pour toute partie compacte de* $[0, +\infty[$, *la restriction* $\tilde{X}_T$ *de* $\tilde{X}$ *à* T *admet une version à trajectoires* *continues et* $w : \tau \rightsquigarrow \sqrt{\tau \operatorname{Log} \frac{1}{\tau}}$ *est un module de continuité uniforme pour toute version à trajectoires continues de* $\tilde{X}_T$.

Démonstration. — Nous prenons pour fonction de Young Φ la fonction $\tau \rightsquigarrow \exp(\tau^2) - 1$; en vertu du lemme 7, $\tilde{X}(1)$ appartient à $L^\Phi(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$; pour $t \in [0, +\infty[$,

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|\tilde{X}(t)|}{a}\right) dP = \int_E \Phi\left(\frac{|x|}{a}\right) d\mu_t(x) = \int_E \Phi\left(\frac{\sqrt{t}|x|}{a}\right) d\mu_1(x)$$

de sorte que $\tilde{X}(t) \in L^\Phi(\Omega, \mathscr{F}, P; E)$ et $|\tilde{X}(t)|_\Phi = \sqrt{t}|\tilde{X}(1)|_\Phi$; pour $s, t \in [0, +\infty[$, $t < s$, nous avons :

$$|\tilde{X}(s) - \tilde{X}(t)|_\Phi = |\tilde{X}(s-t)|_\Phi = \sqrt{s-t}|\tilde{X}(1)|_\Phi$$

La condition (2.1) est satisfaite et nous pouvons prendre pour module ρ vérifiant (2.2) la fonction $\tau \rightsquigarrow \sqrt{\tau}$; le théorème 11 résulte des théorèmes 2 et 5 puisque, quand $\tau \to 0$,

$$\int_0^\tau \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{u}} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2 \int_{\sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{\tau}}}^{+\infty} v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \sim 2\sqrt{\tau \operatorname{Log} \frac{1}{\tau}}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Bernard, Quelques propriétés des trajectoires des fonctions aléatoires stables sur R^k, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. VI nº 2 (1970), 131-151.

[2] Bourbaki, Topologie générale, Livre III, chap. 9, Paris: Hermann (1958).

[3] S. Chevet, Conditions suffisantes d'existence de versions uniformément continues et applications aux fonctions aléatoires gaussiennes, In *Séminaire d'Analyse de l'École Polytechnique de Paris*, 1969-1970.

[4] S. Chevet, A. Badrikian, P. Bernard, Application de la notion d'entropie à la recherche de conditions d'existence de modifications continues de fonctions aléatoires, In *Colloque C.N.R.S. nº 186* « Probabilités sur les structures algébriques » (1969).

[5] R. Dudley, Sample functions of the gaussian process, *The Annals of probability*, 1, nº 1 (1973), 66-103.

[6] R. Dudley, The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of gaussian processes, *J. Funct. Anal.*, I, nº 3 (1969), 290-330.

[7] X. FERNIQUE, Continuité des processus gaussiens, *Cr. Acad. Sci. Paris*, 258 (1964), 6058-6060.
[8] X. FERNIQUE, Régularité de processus gaussiens, *Inventiones Math.*, 12 (1971), 304-320.
[9] A. M. GARSIA, E. RODEMICH, H. RUMSEY Jr., A real variable lemma and the continuity of paths of some gaussian processes, *Indiana Univ. Math. J.* 20 (1970), 565-578.
[10] L. GROSS, Abstract Wiener measure and infinite dimensional potential theory, In Lectures in Modern Analysis and Applications II; *Lecture notes in Mathematics 140*, Berlin-Heidelberg, New York: Springer, 1970.
[11] G. KÖTHE, Topological vector spaces I, Berlin-Heidelberg, New York: Springer, 1969.
[12] N. KONO, On the modulus of continuity of sample functions of gaussian processes, *J. Math. Kyoto Univ.* 10 (1970), 493-536.
[13] J. NEVEU, Martingales à temps discret, Paris, Dunod (1972).
[14] C. PRESTON, Continuity properties of some gaussian processes. *Ann. Math. Stat.* 43 (1972), 285-292.

Pierre BOULICAUT,

Complexe Scientifique des Céseaux,
Département de Mathématiques Appliquées,
B. P. 45, 63170 Aubière.