Annales de l'institut Fourier

Albert Badrikian
Simone Chevet

Questions liées à la théorie des espaces de Wiener

Annales de l'institut Fourier, tome 24, n° 2 (1974), p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 2 (1974), 1-25.

QUESTIONS LIÉES A LA THÉORIE DES ESPACES DE WIENER

par Albert BADRIKIAN et Simone CHEVET.

Contrairement à la théorie des applications radonifiantes qui considère les applications linéaires faiblement continues d'un espace vectoriel topologique séparé par son dual dans un autre, transformant toutes les mesures cylindriques d'un type donné en des mesures de Radon, la théorie dite des « espaces de Wiener » s'occupe des applications linéaires faiblement continues d'un espace vectoriel topologique séparé par son dual dans un autre, transformant une mesure cylindrique *donnée* en une mesure de Radon.

A l'origine de la théorie des espaces de Wiener, on cherchait des conditions pour que l'image de la mesure cylindrique normale γ_H sur un Hilbert H par un opérateur linéaire continu u de H dans un Banach E soit de Radon. Ce problème peut se généraliser dans plusieurs directions :

1) d'une part, en s'affranchissant de la condition H Hilbert et E Banach (par exemple en prenant des espaces vectoriels topologiques séparés par leur dual et non nécessairement localement convexes);

2) d'autre part, en considérant le cas où H est un Hilbert mais où γ_H n'est pas la mesure cylindrique gaussienne normale sur H.

On donne ici dans la première partie quelques méthodes générales qui sont utiles dans la résolution de ces problèmes. C'est surtout une mise au point et une systématisation de résultats autrefois épars. Dans la seconde partie, on donnera des méthodes de Sudakov ([1], [2]) et des résultats que le second des auteurs a obtenus dans cette voie.

La plupart des résultats annoncés se trouvent dans le Séminaire Badrikian, Chevet [1] à paraître. Nous ne donnons pas les démonstrations qui s'y trouvent et n'explicitons que celles qui ne sont pas écrites explicitement dans cet ouvrage.

Dans ce qui suit (X, Y) désignera un couple d'espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$ en dualité, μ une mesure cylindrique sur X (relativement à cette dualité), $L : Y \to L^0(\Omega, P)$ un représentant du processus linéaire sur Y associé à μ, $\mathcal{F}_Y$ la famille des sous-espaces vectoriels de Y de dimension finie et $\mathcal{C}_X$ la famille des cylindres de X (toujours par rapport à la dualité entre X et Y). Pour tout $N \in \mathcal{F}_Y$, nous noterons X_N l'espace vectoriel $X/N^\perp$ muni de sa topologie vectorielle séparée, π_N l'application canonique de X sur X_N et μ_N la probabilité $\pi_N(\mu)$. Enfin, si A est une partie de X, $\overline{A}^\sigma$ ou $\overline{A}^{\sigma(X, Y)}$ désignera l'adhérence de A dans $\sigma(X, Y)$.

1. Conditions de concentration cylindrique et applications à la « théorie des espaces de Wiener abstraits ».

1. *Mesure extérieure associée à une mesure cylindrique.*

Définition 1. — *Si* μ *est une mesure cylindrique sur* X, *on appelle mesure extérieure associée à* μ, *la fonction*

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$$

définie comme suit :

$$\mu^*(A) = \inf \{\mu(C);\ C \supset A;\ C \in \mathcal{C}_X\}.$$

μ *est dite cylindriquement concentrée à* ε *près sur* A *si* $\mu^*(A) \geqslant 1 - \varepsilon$;

μ *est dite cylindriquement concentrée sur* A *si, pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe un réel* $\lambda > 0$ *tel que* $\mu^*(\lambda A) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Proposition 1. — *La fonction d'ensembles* $A \to \mu^*(A)$ *a les propriétés suivantes :*

(1) $\mu^*(A) = \mu(A)$, *pour tout* $A \in \mathcal{C}_X$ (*et donc* $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(X) = 1$);

(2) $A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$;

(3) $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B), \forall A, B \subset X$;

(4) *Pour toute famille finie* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *de parties de* X, *on a*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i).$$

Cette proposition est évidente.

Remarque 1. — Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de parties de X, on n'a pas en général $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu^*(A_n)$, comme le montre l'exemple suivant : Soit $X = Y = l^2$, μ la mesure cylindrique gaussienne normale sur X et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des sous-espaces vectoriels de X engendrés par les éléments d'indice $k \leqslant n$ de la base canonique $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de l^2 [il est clair que $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = 1$ et que $\sum_{n\in\mathbf{N}} \mu^*(A_n) = 0$].

Remarque 2. — Même si μ est de Radon sur $\sigma(X, Y)$, on aura soin de ne pas confondre la fonction μ^* de la définition 1 avec la mesure extérieure de Carathéodory associée à μ, comme le montre l'exemple : $X = Y = l^2$; A est l'espace vectoriel (algébrique) engendré par la base canonique de l^2 (donc $A = \mathbf{R}_0^{\mathbf{N}}$) et $\mu = \delta_a$ avec $a \notin A$ [il est clair que $\mu(A) = 0$ et que $\mu^*(A) = 1$].

Par contre (toujours dans le cas où μ est de Radon sur $\sigma(X, Y)$), $\mu^*(A)$ coïncide avec la μ-mesure extérieure de A au sens de Bourbaki :

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(U);\ U \supset A,\ U \text{ ouvert faible}\},$$

comme il est facile de le voir.

Les propriétés suivantes sont également faciles à démontrer :

- Si (X_1, Y_1) est un autre couple d'espaces vectoriels en dualité et u un opérateur linéaire continu de $\sigma(X, Y)$ dans $\sigma(X_1, Y_1)$, on a :

$$\mu^*(u^{-1}(A_1)) \leqslant (u(\mu))^*(A_1), \quad \forall A_1 \subset X_1;$$

- $\mu^*(A) = \inf_{N\in\mathcal{F}_y} \mu^*(\pi_N^{-1}(\pi_N(A))) = \inf_{N\in\mathcal{F}_y} \mu_N^*(\pi_N A), \ \forall A \subset X$;
- $\mu^*(A) = \inf\{\mu(U);\ U \supset A,\ U$ cylindre à base ouverte$\}$;

• Si $\mathcal{T}$ est une topologie vectorielle sur X plus fine que $\sigma(X, Y)$ et si μ est de Radon sur $(X, \mathcal{T})$, alors, si A est μ-mesurable,

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A).$$

On va maintenant chercher à exprimer la condition de concentration cylindrique à ε près sur un ensemble A en prenant, non pas la famille de tous les cylindres contenant A, mais la famille de tous les cylindres à base fermée contenant A. Dans le cas où A est disqué, les conditions de ce type ont été étudiées par De Acosta [1].

2. *Concentration cylindrique et cylindres ayant une base fermée.*

On se pose le problème suivant :

En gardant les notations du début, on suppose que $\mu(C) \geqslant 1 - \varepsilon$ pour tout cylindre C *ayant une base fermée* et contenant A; peut-on en déduire que $\mu^*(A) \geqslant 1 - \varepsilon$?

La réponse est non, même si A est $\sigma(X, Y)$-fermée comme le montre l'exemple suivant :

Supposons que X soit un Banach NON *réflexif*, Y son dual topologique et A la boule unité fermée de X. L'on sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour que X soit non réflexif est qu'il existe $y_0 \in Y$ avec $\|y_0\| = 1$ et $y_0(A) =]-1, +1[$ (la suffisance est triviale, seule la nécessité est difficile). Soit donc y_0 ainsi choisi et soit $z_0 \in X''$ tel que $\|z_0\| = 1$ et $\langle z_0, y_0\rangle = 1$ (donc $z_0 \in X''/X$). Soit aussi μ la mesure cylindrique sur X (relativement à la dualité entre X et Y) définie par la probabilité de Radon $\mu_1 = \delta_{z_0}$ sur $\sigma(X'', Y)$.

On a alors $\mu^*(A) = 0$ puisque $y_0^{-1}(y_0(A))$ est un cylindre de X (à base non fermée !) contenant A et vérifiant

$$\mu(y_0^{-1}(y_0(A))) = \delta_{z_0}\{z; z \in X''; \quad |\langle z, y_0\rangle| < 1\} = 0.$$

D'autre part si A″ désigne la boule unité de X″ et si C est un cylindre de X ayant une base fermée et contenant A, $\overline{C}^{\sigma(X'', X')}$ est alors un cylindre de X″ ayant une base fermée, contenant $A'' = \overline{A}^{\sigma(X'', X')}$ et tel que

$$\mu(C) = \delta_{z_0}(\overline{C}^{\sigma(X'', X')}) = 1;$$

donc $\mu(C) = 1$, pour tout cylindre C de X ayant une base fermée et contenant A.

Tout ce que l'on peut dire dans le cas général est que $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(\overline{A}^\sigma) \leqslant \inf \{\mu(C);\ C \supset A;\ C$ cylindre de X à base fermée$\}$

$$= \inf_{N \in \mathscr{F}_y} \mu_N(\overline{\pi_N A});$$

de plus, dans le cas où A est équilibrée, l'on a aussi

$$\mu^*(A) \leqslant \inf_{\lambda>1} \mu^*(\lambda A) \leqslant \inf_{N \in \mathscr{F}_y} \mu_N(\overline{\pi_N A}).$$

Par contre dans l'exemple ci-dessus on peut vérifier facilement que A est une partie équilibrée de X telle que

$$(*) \qquad \inf_{\lambda>1} \mu^*(\lambda A) = \inf_{N \in \mathscr{F}_y} \mu_N(\overline{\pi_N A}).$$

En fait dans cet exemple cette propriété ne dépend pas du choix de μ mais du choix de A; on est ainsi amené à se poser le problème suivant : Quelles sont les parties équilibrées A de X telles que l'on ait (*) pour toute mesure cylindrique μ sur X (relativement à la dualité entre X et Y)?

DÉFINITION 2. — *Une partie* A *de* X *est dite régulière si* A *est équilibrée et si*

$$\overline{\pi_N(A)} \subset \bigcap_{\lambda>1} \lambda \pi_N(A),$$

pour tout $N \in \mathscr{F}_Y$ [*La notion de partie régulière est donc relative à la dualité entre* X *et* Y].

Tout sous-espace vectoriel de X et toute partie équilibrée faiblement compacte de X sont réguliers.

Toute partie quasi-disquée A de X (c'est-à-dire telle qu'il existe $q \in]0, 1]$ tel que $\lambda A + \mu A \subset A$, pour tous réels λ et μ satisfaisant $|\lambda|^q + |\mu|^q \leqslant 1$) est régulière.

Il est facile de construire des parties équilibrées non régulières (voir remarque 4 ci-dessous).

Remarque 3. — Les résultats de De Acosta sur la concentration cylindrique sur les disqués sont dûs au fait qu'une partie disquée est régulière.

L'intérêt de l'introduction des parties régulières tient à la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Soit* A *une partie régulière de* X; *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\mu^*(\lambda A) \geqslant 1 - \varepsilon$, *pour tout réel* $\lambda > 1$;

2) $\mu(C) \geqslant 1 - \varepsilon$, *pour tout cylindre* C *de* X *à base fermée contenant* A.

On a plus précisément

$$\begin{aligned} \inf \{\mu^*(\lambda A);\ \lambda > 1\} &= \inf \{\mu(C);\ C \supset A;\ C \text{ cylindre de } X \text{ à base fermée}\} \\ &= \inf \{\mu_N(\overline{\pi_N A});\ N \in \mathscr{F}_Y\} \end{aligned}$$

On en déduit que si A est une partie de X équilibrée et faiblement compacte

$$\mu^*(A) = \inf_{\lambda > 1} \mu^*(\lambda A).$$

Remarque 4. — Le résultat est faux si A n'est pas régulière comme le montre l'exemple suivant :

Soit $X = \mathbf{R}^2$ et D le disque unité de $\mathbf{R}^2$. Un diamètre de D est défini par un nombre compris entre zéro et π : son angle polaire relativement à un diamètre origine. Soit $(r_n)_{n \geqslant 1}$ une énumération des rationnels de $[0, \pi[$ et soit, pour tout entier $n \geqslant 1$, I_n l'homothétique du diamètre d'angle polaire r_n dans l'homothétie de centre O et de rapport $1/n$.

Soit A défini comme réunion des I_n, $n \geqslant 1$, et de l'ensemble des diamètres d'angle polaire irrationnel. C'est un ensemble équilibré absorbant et sans point intérieur; il n'est pas régulier car $\overline{A} = D$ et $\bigcap_{\lambda > 1} \lambda A = A$.

Soit alors la probabilité de Radon μ sur X (donc la mesure cylindrique μ sur X) définie comme suit : μ est la mesure qui donne la masse α_n au point du cercle unité d'angle polaire $r_n (\forall n \geqslant 1,\ \alpha_n > 0;\ \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n = 1)$. Alors $\mu(C) = 1$, pour tout cylindre C de X ayant une base fermée et contenant A; d'autre part $\mu^*(\lambda A) = \mu(\lambda A)$, pour tout réel $\lambda > 1$, et

$$\inf_{\lambda > 1} \mu^*(\lambda A) = \mu\left(\bigcap_{\lambda > 1} \lambda A\right) = \mu(A) = \alpha_1 < 1.$$

Dans le cas où A est disquée, on peut préciser la proposition ci-dessus comme suit :

Proposition 3. — (DE ACOSTA). — *Si* A *est disquée* [*resp. si* A *est disquée et si* μ *est scalairement* $\mathfrak{S}$*-concentrée, où* $\mathfrak{S}$ *est une famille de parties équilibrées de* X *telle que la* $\mathfrak{S}$*-topologie associée sur* Y, *soit* $\mathcal{C}$, *soit une topologie vectorielle plus fine que* $\sigma(Y, X)$], *alors*

$$\inf \{\mu^*(\lambda A);\ \lambda > 1\} = \inf \{\mu(S^o);\ S \subset B, \text{card } S < +\infty\},$$

pour toute partie disquée B *de* Y *telle que* $B \subset A^o \subset \bigcap_{\lambda>1} \lambda B$ [resp. *pour toute partie* B *de* A^o $\mathcal{C}$*-partout dense dans* A^o].

L'intérêt de cette dernière proposition apparaît bien dans le lemme suivant.

Lemme 1. — *Soit toujours* X, Y *et* μ *comme ci-dessus; soit* $L : Y \to L^0(\Omega, \mathcal{F}; P)$ *une fonction aléatoire linéaire sur* Y *associée à* μ *et* B *une partie arbitraire de* Y. *Soit* V(B) *la borne supérieure latticielle de la famille* $|L(y)|$, $y \in B$, *dans le lattice complet* $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P, \overline{\mathbf{R}})$. *Alors* :

a) $P\{V(B) \leqslant t\} = \inf \{\mu(tS^o);\ S \subset B;\ \text{card } S < +\infty\}$, *pour tout réel* $t > 0$;

b) *en particulier, si* B *est le polaire d'une partie disquée* A *de* Y,

$$P\{V(B) \leqslant 1\} = \inf \{\mu^*(\lambda A);\ \lambda > 1\}$$

et L(B) *est latticiellement bornée dans* $L^0(\Omega, \mathcal{F}; P)$ *si et seulement si* μ *est cylindriquement concentrée sur* A.

Démonstration. — Compte tenu de la proposition 3 ci-dessus, *b*) est une conséquence immédiate de *a*). Montrons donc *a*).

Il est clair que

$$V(B) = \text{S.U.P.}\ \{V(S);\ S \subset B;\ S \text{ fini}\},$$

où le S.U.P. désigne la borne supérieure latticielle. Et comme il est bien connu qu'il existe une suite croissante $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de parties finies de B telle que $V(B) = \text{S.U.P.}\ \{V(S_n);\ n \in \mathbf{N}\}$, on en déduit facilement que

$$P\{V(B) \leqslant t\} = \inf \{P\{V(S) \leqslant t\};\ S \subset B;\ \text{card } S < +\infty\},$$

pour tout réel $t \geqslant 0$. Mais si t est un réel > 0, on a

$$P\{V(S) \leqslant t\} = P\ \{|L(y)| \leqslant t;\ y \in S\} = \mu(tS^o),$$

pour toute partie finie S de B. D'où a); et le lemme est démontré.

Notons que les propositions 2 et 3 donnent immédiatement de nouveaux énoncés du théorème de Prokhorov que nous n'énoncerons pas.

Avant de donner les applications à la théorie des espaces de Wiener abstraits, nous allons voir que l'on peut redémontrer un théorème de Schwartz [1] à l'aide du lemme ci-dessus.

Théorème 1. — *Soit* (X, Y) *un couple d'espaces vectoriels en dualité sur* $\mathbf{R}$ *et* μ *une mesure cylindrique* ***gaussienne centrée*** *sur* X *(relativement à cette dualité). Alors* μ *est cylindriquement concentrée sur une partie* ***disquée*** A *de* X *si et seulement si il existe un réel* $\rho > 0$ *tel que* $\mu^*(\rho A) > 0$.

Démonstration. — Soit $L : Y \to L^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$ une fonction aléatoire linéaire associée à μ. D'après le lemme ci-dessus, μ est cylindriquement concentrée sur A si et seulement si $L(A^o)$ est latticiellement bornée dans $L^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$. De manière évidente, μ n'est pas cylindriquement concentrée sur A si et seulement si il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A^o telle que

$$P\left\{\sup_n |L(y_n)| < +\infty\right\} < 1.$$

Jusqu'à présent le caractère gaussien de μ n'est pas intervenu; maintenant comme μ est supposée gaussienne, on en déduit, compte tenu d'un résultat de Landau-Shepp [1], que

$$P\left\{\sup_n |L(y_n)| < +\infty\right\} = 0;$$

d'où à fortiori (avec les notations du lemme 1) :

$$P\{V(A^o) \leqslant t\} = 0, \qquad \forall t \in \mathbf{R}_*^+;$$

par conséquent, grâce au lemme ci-dessus,

$$\mu^*(tA) = 0, \qquad \forall t \in \mathbf{R}_*^+.$$

On vient de montrer que, si μ n'est pas cylindriquement concentrée sur A, $\mu^*(tA) = 0$, pour tout réel $t > 0$; ce qui implique immédiatement le théorème.

Remarque 5. — Soit μ une probabilité cylindrique gaussienne centrée sur un espace localement convexe séparé et *quasi-complet*, soit X. D'après le théorème ci-dessus, μ est de Radon sur X si et seulement si il existe un compact (disqué) K de X tel que $\mu^*(K) > 0$.

3. *Applications à la théorie des espaces de Wiener abstraits.*

Les propositions 2 et 3 ci-dessus s'appliquent à la théorie des espaces de Wiener abstraits et permettent de généraliser des résultats de Prokhorov et de Dudley-Feldman-Le Cam [1].

On travaille ici dans le cadre d'espaces vectoriels topologiques X séparés par leur dual Y (espaces non nécessairement localement convexes) et qui sont localement bornés (ou, ce qui revient au même, quasi-normables) ou même pseudo-localement convexes.

Remarquons tout d'abord que si μ est une probabilité de Radon sur un espace vectoriel topologique X séparé par son dual Y, μ vérifie la condition de Prokhorov et à fortiori vérifie chacune des trois conditions suivantes.

(*a*) pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout voisinage V de zéro dans X, il existe une partie compacte K de X telle que $\mu^*(K + V) \geqslant 1 - \varepsilon$;

(*b*) pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout voisinage V de zéro dans X, il existe une partie finie S de X telle que $\mu^*(S + V) \geqslant 1 - \varepsilon$;

(*c*) pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout voisinage V de zéro dans X, il existe un sous-espace vectoriel F de X de dimension finie tel que $\mu^*(F + V) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Trivialement $(a) \Longleftrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$; et on est ainsi amené à introduire les deux définitions suivantes :

Définition 3. — *On dit que* X *vérifie* (P) *si toute mesure cylindrique sur* X *vérifiant* (*c*), *vérifie aussi* (*b*).

Définition 4. — *On dit que* X *est un « bon espace » si toute mesure cylindrique sur* X *vérifiant* (*a*) *est de Radon sur* X.

On a obtenu en particulier les deux résultats suivants :

THÉORÈME 2. — *Les espaces localement convexes séparés, les espaces localement bornés séparés par leur dual et les produits (quelconques) d'espaces localement bornés séparés par leur dual vérifient* (P).

THÉORÈME 3. — *Les Fréchet et les espaces* $l^p (0 < p \leqslant \infty)$ *sont des bons espaces. Tout produit dénombrable de bons espaces est un bon espace.*

Remarque 6. — Nous ignorons si tout quasi-Banach séparé par son dual est un bon espace. Nous ignorons aussi s'il existe des bons espaces ne vérifiant pas (P).

Les deux théorèmes ci-dessus permettent de répondre partiellement au problème suivant :

« Soit donnés X un espace vectoriel topologique séparé par son dual, μ une mesure cylindrique sur X et p une quasi-semi-norme continue sur X; soit $(F, \|.\|)$ le quasi-Banach associé à p et u l'application canonique de X dans F (donc u est linéaire continue, $\|u(x)\| = p(x)$, pour tout $x \in X$, et $u(X)$ est partout dense dans F).

Si F est séparé par son dual [donc u est continue pour les topologies $\sigma(X, X')$ et $\sigma(F, F')$ et l'on peut définir la mesure cylindrique $u(\mu)$ image de μ par u], donner des conditions nécessaires et suffisantes sur p pour que $u(\mu)$ soit de Radon sur F ».

Remarque 7. — Soit X un espace vectoriel topologique séparé par son dual, μ une mesure cylindrique sur X, $(F, \|.\|)$ un quasi-Banach *séparé par son dual* et $u : X \to F$ linéaire continue (u est donc faiblement continue et l'on peut définir $u(\mu)$).

Comme à u on peut associer une quasi-semi-norme continue p sur X telle que $\|u(x)\| = p(x)$, pour tout $x \in X$, l'étude du problème précédent permet de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que $u(\mu)$ soit de Radon sur F dans le cas où $u(X)$ est partout dense dans F [et donc dans le cas où l'adhérence de $u(X)$ dans F est faiblement fermée, ce qui est d'ailleurs toujours vrai si F est un Banach].

Dans l'étude du problème ci-dessus nous avons généralisé la notion de semi-norme μ-mesurable introduite par Dudley, Feldman et Le Cam [1] grâce au lemme suivant (facile à vérifier).

LEMME 2. — *Soit* X *un espace vectoriel séparé par son dual,* μ *une mesure cylindrique sur* X (*relativement à la dualité entre* X *et* X′) *et* J *la jauge sur* X *d'une partie équilibrée de* X. *Supposons* J *finie. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

(1) *pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe* $G_\varepsilon \in \mathscr{F}_X$ *tel que*

$$\mu^*\{x;\ x \in X;\ J(x, G_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\} \geqslant 1 - \varepsilon;$$

(2) *pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe* $G_\varepsilon \in \mathscr{F}_X$ *tel que, pour tout* G′ *de* $\mathscr{F}_{X'}$ *orthogonal à* G_ε, *l'on ait*

$$\mu^*\{x;\ x \in X;\ J(x, G'^{\perp}) \leqslant \varepsilon\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Remarque 8. — Si J est une quasi-norme continue sur X, soit p, et si le quasi-Banach associé à p, soit F, est séparé par son dual, la condition (1) du lemme ci-dessus implique que la mesure cylindrique sur F image de μ par l'application linéaire continue canonique de $\sigma(X, X')$ dans $\sigma(F, F')$, soit ν, vérifie la condition (c) du début de ce numéro.

DÉFINITION 4. — *Etant donnés* X *un espace vectoriel topologique séparé par son dual,* μ *une mesure cylindrique sur* X *et* p *une jauge finie sur* X, *nous dirons que* p *est* μ*-mesurable si* p *satisfait la condition* (2) *du lemme ci-dessus.*

Cela étant, on a alors très facilement le théorème suivant dû à Dudley, Feldman, Le Cam [1] dans le cas convexe.

THÉORÈME 4. — *Soit* X *un espace vectoriel topologique séparé par son dual,* μ *une mesure cylindrique sur* X, p *une quasi-semi-norme continue sur* X, F *le quasi-Banach associé à* p *et* u *l'application linéaire canonique de* X *dans* F. *Supposons* F *séparé par son dual. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *la jauge* p *est* μ*-mesurable*;

(2) *pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie finie* A_ε *de* X *telle que*

$$\mu^*\{x;\ x \in X;\ p(x, A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\} \geqslant 1 - \varepsilon;$$

(3) *pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe un sous-espace vectoriel* G_ε *de* X *de dimension finie et tel que*

$$\mu^*\{x;\ x \in X;\ p(x, G_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Si de plus F *est un bon espace, les trois conditions précédentes sont aussi équivalentes à la condition suivante :*

(4) *la mesure cylindrique image de* μ *par* u *est de Radon sur* F.

4. *Une question relative au support d'une probabilité de Radon.*

Définition 5. — *Soit* (X, Y) *un couple d'espaces vectoriels en dualité et* μ *une mesure cylindrique sur* X *(relativement à cette dualité). On dit que* μ *est* ***cylindriquement équivalente*** *à la mesure de Lebesgue si, pour tout* $N \in \mathscr{F}_Y$, μ_N *est équivalente à une mesure de Haar* > 0 *sur* X_N; *on dit que* μ *est* ***cylindriquement absolument continue*** *par rapport à la mesure de Lebesgue si, pour tout* $N \in \mathscr{F}_Y$, μ_N *est absolument continue par rapport à une mesure de Haar* > 0 *sur* X_N.

Exemple 1. — Trivialement la mesure cylindrique gaussienne normale sur un Hilbert (réel) est cylindriquement équivalente à la mesure de Lebesgue.

Exemple 2. — Soit $(a_n)_n$ une suite de réels > 0 telle que $\sum_n a_n^2$ converge; soit ν la mesure cylindrique sur l^2 image de la mesure cylindrique gaussienne normale sur l^2 par l'opérateur linéaire faiblement continu $u: (x_n)_n \to (a_n x_n)_n$ de l^2 dans l^2; soit U la boule unité fermée de l^2. ν est une probabilité de Radon sur l^2 cylindriquement équivalente à la mesure de Lebesgue et $\mu = 1_U \dfrac{\nu}{\nu(U)}$ est une mesure cylindrique sur l^2 cylindriquement absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (et non cylindriquement équivalente à la mesure de Lebesgue).

Remarque 9. — Si μ est une mesure cylindrique sur X cylindriquement absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on peut améliorer la proposition 2; plus précisément, dans ce cas, on a :

$$\mu^*(A) = \inf \{\mu_N(\overline{\pi_N A});\ N \in \mathscr{F}_Y\},$$

pour toute partie disquée A de X.

On a alors le

THÉORÈME 5. — *Soit* (X, Y) *et* (X_1, Y_1) *deux couples d'espaces vectoriels en dualité*; *soit* $u : X \to X_1$ *linéaire faiblement continue*; *soit* μ *une mesure cylindrique sur* X (relativement à la dualité entre X et Y) *cylindriquement équivalente à la mesure de Lebesgue. Si alors* $u(\mu)$ *est de Radon sur* $\sigma(X_1, Y_1)$, *on a* :

$$\operatorname{supp}(u(\mu)) = \overline{u(X)}.$$

Démonstration. — Posons $S = \operatorname{supp}(u(\mu))$; on sait déjà que S est contenu dans $\overline{u(X)}$; d'autre part, comme S est faiblement fermé, on a donc

$$S = \overline{S} = \bigcap_{N_1 \in \mathscr{F}_{Y_1}} \pi_{N_1}^{-1}(\overline{\pi_{N_1} S}) \tag{1}$$

et

$$1 = u(\mu)(S) = \inf_{N_1 \in \mathscr{F}_{Y_1}} u(\mu)(\pi_{N_1}^{-1}(\overline{\pi_{N_1} S})). \tag{2}$$

Soit alors N_1 arbitraire dans $\mathscr{F}_{Y_1}$; $\pi_{N_1}^{-1}(\overline{\pi_{N_1} S})$ est un cylindre à base fermée; il en est de même de $u^{-1}(\pi_{N_1}^{-1}(\overline{\pi_{N_1} S}))$; et par conséquent il existe $M \in \mathscr{F}_Y$ et F_M fermé dans $X/M^\perp$ tels que

$$\pi_M^{-1}(F_M) = u^{-1}(\pi_{N_1}^{-1}(\overline{\pi_{N_1}(S)})).$$

Donc

$$u(\mu)(\pi_{N_1}^{-1}(\overline{\pi_{N_1} S})) = \mu(\pi_M^{-1}(F_M)) = \pi_M(\mu)(F_M) = 1;$$

Comme $\pi_M(\mu)$ est équivalente à la mesure de « Lebesgue » sur $X/M^\perp$ et que F_M est fermé, on a donc $F_M = X/M^\perp$.

Par conséquent

$$\pi_{N_1}^{-1}(\overline{\pi_{N_1} S}) \supset u(X), \qquad \forall N_1 \in \mathscr{F}_{Y_1};$$

par suite, grâce à (1), $S = \overline{S}$ contient $u(X)$ et donc aussi $\overline{u(X)}$. Et le théorème est démontré.

Remarque 10. — 1) Le résultat est vrai si $X = Y = H$ avec H Hilbert et si μ est la mesure cylindrique gaussienne normale sur H;

2) Soit $\mathcal{T}_1$ une topologie localement convexe sur X_1 compatible avec la dualité entre X_1 et Y_1 et plus fine que $\sigma(X_1, Y_1)$ et supposons que $u(\mu)$ soit une probabilité de Radon sur $(X_1, \mathcal{T}_1)$, soit ν_1; dû au fait que le support d'une probabilité de Radon est une notion topologique, la démonstration ci-dessus ne peut se généraliser car on ne sait pas en général si le support de ν_1 (relativement à $\mathcal{T}_1$) est faiblement fermé; tout ce que l'on peut dire en général c'est que

$$\overline{\operatorname{supp}(\nu_1)}^{\sigma(X_1, Y_1)} = \overline{u(X)}^{\sigma(X_1, Y_1)} = \overline{u(X)}^{\mathcal{T}_1}.$$

Cependant si l'on sait au préalable que le support de ν_1 (relativement à $\mathcal{T}_1$) est convexe, le support de ν_1 est alors faiblement fermé et l'on a encore $\operatorname{supp}(\nu_1) = \overline{u(X)}^{\sigma(X_1, Y_1)}$.

Grâce à la remarque ci-dessus et grâce à un résultat de Zalgaller [1], on peut retrouver le résultat de Kallianpur [1] sur le support d'une mesure de Radon gaussienne (sans utiliser comme cet auteur la notion d'espaces autoreproduisants) :

Corollaire 1. — *Soit* H *un Hilbert réel,* E *un espace localement convexe séparé et* $u : H \to E$ *linéaire faiblement continue; soit* γ_H *la mesure cylindrique gaussienne normale sur* H *et supposons que* $u(\gamma_H) = \nu$ *soit de Radon sur* E. *Alors*

$$\operatorname{supp}(\nu) = \overline{u(H)}.$$

Démonstration. — D'après la remarque ci-dessus, il suffit de montrer que le support de ν est convexe. Pour cela désignons par $\mathscr{V}$ la famille des voisinages disqués fermés de O_E

dans E et montrons que, pour tout $V \in \mathscr{V}$, l'application

$$x \to \operatorname{Log} \nu(x + V)$$

est concave sur $\overline{u(H)}$. Soit donc V arbitraire dans $\mathscr{V}$; on a

$$\operatorname{Log} \nu(x + V) = \inf_{N \in \mathscr{F}_{E'}} \operatorname{Log} \nu_N(\pi_N x + \overline{\pi_N V}), \ \forall x \in E$$

et

$$\pi_N(u(H)) = \pi_N(\overline{u(H)}) = \operatorname{supp}(\nu_N), \ \forall N \in \mathscr{F}_{E'}.$$

Mais, d'après Zalgaller, pour tout entier n, toute probabilité gaussienne centrée γ sur $\mathbf{R}^n$ et pour toute partie disquée fermée B de $\mathbf{R}^n$, $z \to \operatorname{Log} \gamma(z + B)$ est concave sur le support de γ; par suite, pour tout $N \in \mathscr{F}_{E'}$,

$$x \to \operatorname{Log} \nu_N(\pi_N x + \overline{\pi_N V})$$

est concave sur $\overline{u(H)}$; et donc $x \to \operatorname{Log} \nu(x + V)$ est aussi concave sur $\overline{u(H)}$.

Nous en déduisons facilement que $\operatorname{supp}(\nu)$ est convexe : en effet, soit a et b dans $\operatorname{supp}(\nu)$ et α et β deux réels > 0 tels que $\alpha + \beta = 1$; donc

$$\nu(a + V) > 0 \qquad \text{et} \qquad \nu(b + V) > 0, \qquad \forall V \in \mathscr{V};$$

d'où, compte tenu du fait que $\operatorname{supp}(\nu)$ est contenu dans $\overline{u(H)}$,

$$\operatorname{Log} \nu(\alpha a + \beta b + V) \geqslant \alpha \operatorname{Log} \nu(a + V) + \beta \operatorname{Log} \nu(b + V) > -\infty, \ \forall V \in \mathscr{V};$$

et donc $\nu(\alpha a + \beta b + V) > 0$, $\forall V \in \mathscr{V}$. Par conséquent

$$\alpha a + \beta b \in \operatorname{supp}(\nu).$$

Ainsi $\operatorname{supp}(\nu)$ est convexe et le corollaire est démontré.

Remarque 11. — Dans notre livre [1], nous avons donné une autre preuve de ce corollaire.

Remarque 12. — Soit les hypothèses du corollaire 1 (donc $\nu = u(\gamma_H)$ est de Radon sur E). Kuelbs [1] a annoncé que, dans ce cas, $u(H)$ muni de la structure hilbertienne induite par celle de H est un espace d'Hilbert *séparable* (et en a déduit facilement, grâce à un résultat relatif à l'équivalence de deux mesures de Radon gaussiennes, le résultat ci-dessus). Malheureusement sa démonstration nous semble erronée, car elle semble utiliser le fait qu'un espace préhilbertien admet une base orthonormale, ce qui est faux en général (d'après Bourbaki).

2. Mesures cylindriques sur un Hilbert H invariantes par isométries.

Ici, on prend $X = Y = H$ avec H Hilbert et on note γ_H la probabilité cylindrique gaussienne normale sur H; pour tout $N \in \mathscr{F}_H$, $H/N^\perp$ sera supposé muni de la structure hilbertienne induite par celle de H, $\mathscr{B}_N$ désignera la tribu de Borel sur $H/N^\perp$ et m_N la mesure de Lebesgue sur $H/N^\perp$.

DÉFINITION 1. — *Une mesure cylindrique* μ *sur* H *est dite invariante par isométries si*

$$\mu(u(C)) = \mu(C),$$

pour tout cylindre C *de* H *et toute application linéaire isométrique* u *de* H *sur* H.

Il est facile de vérifier qu'on a équivalence des 3 assertions suivantes :

(1) μ *est invariante par isométries*;

(2) *pour tout* $N \in \mathscr{F}_H$, μ_N *est invariante par isométries sur* $H/N^\perp$;

(3) *il existe* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *continue, de type positif, avec* $f(0) = 1$ *et telle que :*

$$\hat{\mu}(x) = f(\|x\|_H),$$

pour tout $x \in H$ ($\hat{\mu}$ *désignant la transformée de Fourier de* μ).

Exemple. — Si $p \in]0, 2]$, la probabilité cylindrique γ_p sur H telle que

$$\gamma_p(x) = \exp(-\|x\|^p), \qquad \forall x \in H,$$

est invariante par isométries. γ_1 est appelée mesure cylindrique de Cauchy normale sur H et est souvent notée aussi par χ_H; cette mesure cylindrique a été étudiée par Sudakov [1].

Remarque 1. — Soit f comme dans (3), c'est-à-dire $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue de type positif avec $f(0) = 1$; en général

$$x \to f(\|x\|_H)$$

n'est pas la transformée de Fourier d'une mesure cylindrique sur H; elle l'est si et seulement si elle est de type positif. Or, d'après Umemura [1] (ou d'après Bretagnolle, Dacunha-Castelle et Krivine [1]), si *dim* $H = +\infty$, $x \to f(\|x\|_H)$ est de type positif si et seulement si il existe une probabilité σ sur $\mathbf{R}^+$ telle que

$$f(t) = \int_{\mathbf{R}^+} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2 u^2\right) \sigma(du), \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Par contre si $\dim H < +\infty$, cette condition n'est plus nécessaire : il suffit de considérer la probabilité μ sur la sphère unité de H, qui est invariante par toutes les isométries linéaires de H et de prendre $f(\|\,.\,\|) = \hat{\mu}$.

Supposons dans toute la suite de ce paragraphe que H soit un Hilbert de dimension *infinie* et que μ soit une mesure cylindrique sur H invariante par isométries; et soit σ la probabilité sur $\mathbf{R}^+$ telle que

$$(*) \quad \hat{\mu}(x) = \int_{\mathbf{R}^+} \exp\left(-\frac{1}{2} \|xu\|^2\right) \sigma(du), \qquad \forall x \in H.$$

Il est facile de vérifier qu'on a alors la

Remarque 2. — Pour tout $N \in \mathcal{F}_H$, on a :

$$\begin{aligned}\mu_N(A_N) &= \int_{]0,\infty[} \pi_N(\gamma_H)\left(\frac{1}{t} A_N\right) \sigma(dt) + \delta_0(A_N)\sigma(\{0\}) \\ &= \int_{A_N} \left[\int_{]0,\infty[} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\|\frac{x}{t}\right\|^2\right) \frac{\sigma(dt)}{(\sqrt{2\pi t})^{\dim N}}\right] m_N(dx) \\ &\quad + \sigma(\{0\})\,\delta_0(A_N),\end{aligned}$$

pour tout borélien A_N de $H/N^\perp$.

Nous déduisons immédiatement de cette remarque le

LEMME 1. — *Soit* μ *invariante par isométries sur* H *avec dim* $\mathrm{H} = +\infty$ *(d'où* $(*)$*). Les assertions suivantes sont alors équivalentes* :

(a) $\sigma(\{0\}) = 0$;

(b) *pour tout* x *non nul dans* H, $\mu(tx) \to 0$, *quand*

$$t \to +\infty;$$

(c) μ *est cylindriquement équivalente à la mesure de Lebesgue*;

(d) μ *est cylindriquement absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Remarque 3. — Si $\dim \mathrm{H} < +\infty$, (b) et (d) ne sont plus équivalentes.

Nous sommes maintenant à même de donner le résultat principal sur les mesures cylindriques invariantes par isométries.

THÉORÈME 1. — *Soit* H *un Hilbert de dimension* ***infinie***, E *un espace localement convexe séparé,* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{E}$ *linéaire faiblement continue et* μ *une mesure cylindrique sur* H *invariante par isométries et cylindriquement absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) $u(\mu)$ *est de Radon sur* E;

(2) $u(\gamma_{\mathrm{H}})$ *est de Radon sur* E.

[En particulier si E est un Banach, $u(\mu)$ est de Radon sur E (resp. sur $\sigma(\mathrm{E}'', \mathrm{E}')$) si et seulement si $u(\gamma_{\mathrm{H}})$ est de Radon sur E (resp. sur $\sigma(\mathrm{E}'', \mathrm{E}')$)].

Ce théorème est une conséquence presque immédiate du lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit les hypothèses du théorème ci-dessus; donc* $\hat{\mu}$ *vérifie* $(*)$. *Posons* $\nu = u(\mu)$ *et* $\lambda = u(\gamma_{\mathrm{H}})$. *Alors, pour toute partie* A *de* E,

$$h_{\mathrm{A}} : t \to \inf \left\{ \lambda_{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{t}\,\overline{\pi_{\mathrm{N}}\mathrm{A}}\right);\ \mathrm{N} \in \mathscr{F}_{\mathrm{E}'} \right\}$$

et

$$g_A : t \to \lambda^*\left(\frac{1}{t} A\right)$$

sont semi-continues inférieurement sur $]0, \infty[$,

$$(**) \qquad \inf_{N \in \mathcal{F}_{E'}} \nu_N(\overline{\pi_N A}) = \int_{]0,\infty[} h_A(t)\sigma(dt).$$

et

$$(***) \qquad \nu^*(A) = \int_{]0,\infty[} \lambda^*\left(\frac{A}{t}\right)\sigma(dt).$$

[La preuve de ce lemme est simple : en effet trivialement

$$(1): \inf_{N\in\mathcal{F}_{E'}} \nu_N(\overline{\pi_N A}) = \inf_{N\in\mathcal{F}_{E'}} \int_{]0,\infty[} \lambda_N\left(\frac{1}{t}\overline{\pi_N A}\right)\sigma(dt);$$

et comme pour tout cylindre C de H, $t \to \gamma_H\left(\frac{1}{t} C\right)$ est continue sur $]0, \infty[$, h_A est semi-continue inférieurement et l'on peut permuter signe intégrale et inf dans (1), grâce au lemme de Dini ; d'où (**) ; on a une preuve analogue pour (***).]

Compte tenu du corollaire 1 du n° 4 du § 1, le théorème ci-dessus implique le

Corollaire 1. — *Soit les hypothèses du théorème* 1 *ci-dessus* ; *supposons que* $u(\mu)$ *soit de Radon sur* E. *Alors*

$$\operatorname{supp}(u(\mu)) = \overline{u(H)}.$$

Démonstration. — Supposons $u(\mu)$ de Radon sur E ; donc $u(\gamma_H)$ est de Radon d'après le théorème ci-dessus et

$$u(\mu)(A) = \int_{]0,\infty[} u(\gamma_H)\left(\frac{A}{t}\right)\sigma(dt),$$

pour tout borélien A de E. Nous en déduisons facilement que :

$$\operatorname{supp}(u(\mu)) \supset \operatorname{supp}(u(\gamma_H)),$$

compte tenu du fait que $\operatorname{supp}(u(\gamma_H))$ est un cône de sommet O ; comme

$$\overline{u(H)} \supset \operatorname{supp}(u(\mu)),$$

[vrai pour toute mesure cylindrique μ' sur H telle que $u(\mu')$ soit de Radon sur E], le corollaire est alors une conséquence immédiate du corollaire 1 du n° 4 du § 1.

3. Mesure cylindrique gaussienne normale γ_H sur un Hilbert H.

Comme dans le § 2 précédent, $X = Y = H$ avec H Hilbert réel; γ_H désignera la mesure cylindrique gaussienne normale sur H et $L: \ H \to L^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$ une fonction aléatoire linéaire sur H associée à γ_H; pour toute partie S de H, nous noterons VL(S) la borne supérieure latticielle de l'ensemble $\{|L(x)|\,; x \in S\}$ dans le lattice complet $L^0(\Omega, \mathscr{F}, P; \overline{\mathbf{R}})$.

Sudakov ([1], [2]) a obtenu des conditions de γ_H-concentration cylindrique sur un disque fermé borné K de H au moyen de *l'épaisseur mixte* de K, soit $h(K)$.

Rappelons que si $K \subset H$ est convexe, compacte et de dimension finie,

$$h(K) = \sqrt{2\pi} \int \mathscr{A}_K(x)\gamma_H\,(dx),$$

où $\mathscr{A}_K$ est la fonction d'appui de K dans H [c'est-à-dire la fonction cylindrique $x \to \sup\{(x|y)\,; y \in K\}$]; et si $K \subset H$ est convexe et faiblement compacte, alors

$$h(K) = \sup\{h(C)\,;\ C \subset K;\ \dim C < \infty;\ C \text{ convexe compact}\}.$$

Donnons d'abord quelques propriétés de l'épaisseur mixte (faciles à vérifier).

(1) Pour toute partie convexe faiblement compacte C de H, $h(C)$ est égal à l'épaisseur mixte de l'ensemble disqué faiblement compact $K = \dfrac{C - C}{2}$;

(2) Pour toute partie disquée faiblement compacte K de H

$$h(K) = \int V(L(K))\,dP\,;$$

il est alors immédiat que, grâce à la remarque 9 et au lemme

1 du § 1, on a :

$$(3) \qquad 1 - \gamma_H^*(\varepsilon K^o) = P\{V(L(K)) > \varepsilon\} \leqslant \frac{h(K)}{\varepsilon};$$

(4) Si K est une partie disquée faiblement compacte de H d'épaisseur mixte *finie*

$$h(K) = \int_0^\infty P\{V(L(K)) > u\}\, du = \int_0^\infty (1 - \gamma_H^*(uK^0))\, du;$$

alors, grâce au théorème de Lebesgue, on obtient

(5) [Sudakov]. — Si K est une partie disquée faiblement compacte de H, d'épaisseur mixte finie,

$$\frac{h(K)}{\pi} = \lim_{t \to 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \frac{1 - \gamma_H^*\left(\frac{u}{t} K^0\right)}{t} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{1 - \chi_H^*[(tK^0)]}{t},$$

où χ_H désigne la mesure cylindrique de Cauchy normale sur H.

D'autre part, nous avons obtenu, grâce à un lemme d'Anderson [1], le lemme suivant :

Lemme 1. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé,* u_1 *et* u_2 *deux opérateurs linéaires faiblement continus de* H *dans* E *tels que les transposés* u_1' *et* u_2' *vérifient :*

$$\|u_1'(x)\| \geqslant \|u_2'(x)\|, \qquad \forall x \in E'.$$

Alors, pour toute partie S *de* E' *et tout réel* $t \geqslant 0$, *on a :*

$$P\{VL(u_1'(S)) > t\} \geqslant P\{VL(u_2'(S)) > t\};$$

et donc

$$h(u_1'(C)) \geqslant h(u_2'(C)),$$

pour toute partie disquée compacte C *de* $\sigma(E', E)$.

Remarque 1. — Grâce à ce lemme, nous avons (si $K \subset H$ est disqué compact) :

1) Si v est un opérateur linéaire continu de H

$$h(v(K)) \leqslant \|v\| h(K);$$

et par conséquent

2) Si P est un projecteur orthogonal de H

$$h(\mathrm{PK}) \leqslant h(\mathrm{K});$$

de plus, si P(H) est un sous-espace vectoriel fermé de H de codimension finie, $h(\mathrm{K})$ est finie si et seulement si $h(\mathrm{PK})$ est finie.

Remarque 2. — Grâce au lemme ci-dessus, nous retrouvons le résultat suivant de Maurey [1]: soit H un Hilbert, E un Banach, $u: \mathrm{H} \to \mathrm{E}$ linéaire continu; si $u(\gamma_{\mathrm{H}})$ est de Radon (d'ordre 1) sur σ (E″, E′), toute probabilité cylindrique *gaussienne* γ *de type* 1 sur H a une image $u(\gamma)$ de Radon d'ordre 1 sur $\sigma(\mathrm{E}'', \mathrm{E}')$ et

$$\|u(\gamma)\|_1 \leqslant \|\gamma\|_1^*(\|\gamma_{\mathrm{H}}\|_1^*)^{-1}\|u(\gamma_{\mathrm{H}})\|_1.$$

Rappelons maintenant le résultat fondamental de Sudakov sur les épaisseurs mixtes : si K est une partie disquée compacte de H, alors :

(6) Pour que γ_{H} soit cylindriquement concentrée sur K^{o}, il est nécessaire et suffisant que l'épaisseur mixte de K soit finie;

(7) Pour que $\gamma_{\mathrm{H}}^*(\alpha\mathrm{K}^{\mathrm{o}})$ soit strictement positif pour tout réel $\alpha > 0$, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une suite croissante (P_n) de projecteurs orthogonaux de H de rang fini convergeant vers Id_{H} et telle que la suite

$$(h(\mathrm{P}_n^{\perp}\mathrm{K}))_n \ [\text{où } \mathrm{P}_n^{\perp} = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}} - \mathrm{P}_n]$$

converge vers zéro.

Remarque 3. — Notons que d'après (3), la suffisance de (6) est triviale; la nécessité de (6) n'est pas évidente; elle résulte du fait qu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $u_0 > 0$ tels que

$$\frac{1}{2} < \mathrm{P}\{\mathrm{VL}(\mathrm{K}) > u_0\} = \int_{\alpha u_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}},$$

ce qui implique, grâce à un résultat de Landau-Shepp [1], que l'on a aussi

$$\mathrm{P}\{\mathrm{VL}(\mathrm{K}) > u\} \leqslant \int_{\alpha u}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \forall u \geqslant u_0.$$

Par contre (7) est très facile à montrer grâce à un résultat de Dudley [2]; en effet d'après cet auteur, on a $\gamma_H^*(\alpha K^o) > 0$ pour tout réel $\alpha > 0$ si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la suite $P\{VL(P_n^\perp K) > \varepsilon\})_n$ converge vers zéro. Alors la condition (7) est suffisante grâce à (3); elle est d'autre part nécessaire grâce au théorème de Lebesgue [qui est applicable puisque

$$0 \leqslant P\{VL(P_n^\perp K) > u\} \leqslant P\{VL(K) > u\},\ \forall u \geqslant 0,\ \forall n]$$

On a appliqué les résultats (6) et (7) de Sudakov au cas des p-ellipsoïdes de l^2; on a alors obtenu le résultat suivant (Chevet [2]) :

Soit $H = l^2$, $(e_n)_n$ la base canonique de l^2, p un nombre dans $]1, \infty[$, V_p la boule unité fermée de l^p et $(a_n)_n$ une suite dans c_0 (avec de plus $(a_n)_n$ dans $l^{2p/(p-2)}$, si $p > 2$); soit, pour tout entier n, P_n le projecteur orthogonal de l^2 dont l'image est l'espace vectoriel engendré par les e_i d'indice $i \leqslant n$, soit E_n. Alors

$$K = \ni_p = \{(a_n x_n)_n;\ (x_n)_n \in V_p\}$$

est une partie disquée de l^2 telle que

$$\Big(\sum_n |a_n|^{p'}\Big)^{1/p'} \leqslant \frac{h(\ni_p)}{2} \leqslant (\sqrt{\pi})^{1/p}\left(\Gamma\left(\frac{1+p'}{2}\right)\right)^{1/p'} \Big(\sum_n |a_n|^{p'}\Big)^{1/p'}$$

$\left(\text{où } \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1\right)$; de plus, si $h(\ni_p)$ est finie,

$$h(P_n^\perp \ni_p) = h(\ni_p \cap E_n^\perp) \to 0, \qquad \text{si} \qquad n \to +\infty.$$

Ce résultat est une conséquence simple du fait que la fonction d'appui de $\ni_p \cap E_n^\perp$ dans l^2 est donnée par

$$\mathscr{A}_{\ni_p \cap E_n^\perp}[(x_n)_n] = \Big(\sum_{i \leqslant n} |a_i x_i|^{p'}\Big)^{1/p'},\ \forall (x_n)_n \in l^2.$$

Du résultat ci-dessus, on déduit qu'on a équivalence des trois conditions suivantes :

(i) $(a_n)_n \in l^{p'}$;

(ii) γ_{l^2} est concentrée sur $\ni_p^o$;

(iii) $\gamma_{l^2}^*(\alpha \ni_p^o) > 0,\quad \forall \alpha > 0$.

Cela donne, en plus parlant, qu'un opérateur compact

$$(x_n)_n \to (a_n x_n)_n$$

de l^2 dans $l^{p'}$ (avec $1 \leqslant p' < \infty$) transforme la mesure cylindrique gaussienne normale sur l^2 en une probabilité de Radon sur $l^{p'}$ (ou sur $\sigma((l^{p'})'', l^p)$) si et seulement si $(a_n)_n$ appartient à $l^{p'}$; ce qui permet de retrouver un résultat de Schwartz [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] De Acosta, On regular extensions of cylinder measures (preprint).

[1] Anderson, The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), 170-176.

[1] Badrikian-Chevet, Séminaire (à paraître in *Lectures Notes in Mathematics*, Springer Verlag).

[1] Bretagnolle, Dacunha-Castelle, Krivine, Lois stables et espaces L^p, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol II, n° 3, (1966), 231-259.

[1] Chevet, voir Badrikian.

[2] Chevet, Épaisseur mixte, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 276, (Janvier 1973), 371-374.

[1] Dudley, Feldman and le Cam, On semi norms and probabilities, and abstract Wiener spaces, *Ann. of Math.*, 93 (1971), 390-408.

[2] Dudley, The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes, *Journal of Functional Analysis*, 1 (1967), 290-330.

[1] Landau-Shepp, On the supremum of a Gaussian process, *Sankhyà* ser. A 32 (1971), 369-378.

[1] Kallianpur, Abstract Wiener processes and their reproducing kernel Hilbert spaces. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw.* Gebiete 17 (1971), 113-123.

[1] Kuelbs, Some results for probability measures on linear topological vector spaces with an application to Strassen's loglog law, *Journal of Functional Analysis* 14 (1973), 28-43.

[1] Maurey, Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973; École Polytechnique de Paris; exposé 7.

[1] Schwartz, Probabilités cylindriques et applications radonifiantes. *Journal of the Faculty of Science*, the University of Tokyo, vol 18, n° 2, (1971), 139-286.

[1] Sudakov, Gaussian random processes and measures of solid angles in Hilbert space. *Dokl. Akad. Nauk* SSSR 197 (1971), 43-45; *Soviet Math. Dokl.*, 12 (1971), 412-415.

[2] Sudakov, A remark on the criterion of continuity of Gaussian sample function, *Lecture Notes* n° 330, (1973), 444-454.

[1] Y. UMEMURA, Measures in infinite dimensional vector spaces. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser.* A 1 (1965), 1-47.

[1] V. A. ZALGALLER, Mixed volumes and the probability of hitting in convex domains for a multidimensional normal distribution, Translated from *Matematicheskie Zametki*, vol. 2, n° 1 (July 1967), 97-104.

[1] RAJPUT, On gaussian measures in certain locally convex spaces. *Journal of multivariate Analysis* 2 (1972), 282-306.

Albert BADRIKIAN,
Simone CHEVET.
Complexe Scientifique des Cézeaux,
Département de Mathématiques Appliquées,
B. P. 45, 63170 Aubière.