ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES CHAZARAIN

Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 1 (1974), p. 173-202

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_1_173_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,1 (1974), 173-202

OPÉRATEURS HYPERBOLIQUES A CARACTÉRISTIQUES DE MULTIPLICITÉ CONSTANTE

par Jacques CHAZARAIN

SOMMAIRE

Introduction.

On considère un opérateur différentiel $P(x , D)$ à partie principale hyperbolique et à caractéristiques de multiplicité constante. Il est connu que, pour de tels opérateurs, le problème de Cauchy est en général mal posé dans les fonctions C^∞ à moins que les termes d'ordre inférieur vérifient une certaine condition (Lévi [15], A. Lax [13], Yamaguti [24], Mizohata-Ohya [18], Strang [23], Flaschka-Strang [8], Hamada [9], Ohya [22], Petkov [20]), que l'on appellera suivant Mizohata-Ohya : "condition de Lévi (L)".

Ce travail est consacré à l'étude du problème de Cauchy pour P, la condition de Lévi étant supposée satisfaite ; mais au lieu d'utiliser la technique des inégalités d'énergie, on se propose de construire les noyaux des opérateurs qui résolvent le problème de Cauchy. Cette construction sera faite au moyen des opérateurs intégraux de Fourier et est basée sur le point crucial suivant : on démontre que la condition de Lévi implique que les équations de transport se réduisent à des équations différentielles le long des bicaractéristiques avec pour degré la multiplicité de la caractéristique considérée.

Cette méthode à l'avantage de permettre de préciser les résultats pour la résolution du problème de Cauchy dans C^∞, de plus on établit les résultats correspondant pour les espaces de Sobolev ; enfin cela donne des renseignements globaux sur la propagation des singularités et du spectre singulier des solutions pour ce type d'opérateur à caractéristiques multiples. On établit également l'équivalence de diverses formulations de la condition de Lévi, formulations qui sont utiles pour des problèmes voisins (Chazarain [3]).

Une première version de ces résultats a été annoncée dans une note [2] et l'on trouvera un résumé de ce travail dans [3].

1. Notations et énoncé du théorème principal.

Soit X' une variété C^∞ connexe compacte sans bord de dimension $n - 1$, on note $X = \mathbf{R} \times X'$ la variété produit et $x = (x_0 , x')$ le point générique de X et $\xi = (\xi_0 , \xi')$ un vecteur de l'espace cotangent. On utilisera sans les rappeler les notations de Hörmander [12] pour les opérateurs pseudo-différentiels et les opérateurs intégraux de Fourier. On indique par la lettre minuscule le symbole principal d'un opérateur pseudo-différentiel (on supposera toujours que l'on a un développement asymptotique à symboles homogènes) noté par une majuscule.

On dit qu'un opérateur différentiel $P(x, D)$, à coefficient C^∞ sur X et à partie principale p réelle, vérifie l'hypothèse (H) si :

(H)
- les hypersurfaces $X_{t_0} = \{x \,; x_0 = t_0\}$ ne sont pas caractéristiques pour P.
- les racines en ξ_0 de l'équation $p(x, \xi_0, \xi') = 0$ sont réelles et de multiplicité constante pour $(x_0, x', \xi') \in \mathbf{R} \times (T^*(X')\backslash 0)$.

Notons $\lambda_\alpha(x, \xi')$ $(\alpha = 1, \ldots, \overline{\alpha})$ les racines distinctes deux à deux et r_α les multiplicites associées avec $r_1 + \cdots + r_{\overline{\alpha}} = m =$ degré de P.

On supposera dans la suite que le terme en D_0^m dans P a pour coefficient 1. On formule le problème de Cauchy de la façon suivante

(*)
Etant données des fonctions $f \in C^\infty(X)$, $g_j \in C^\infty(X')$

$j = 0, \ldots, m-1$.

trouver $u \in C^\infty(X)$ solution de

$$Pu = f \quad \text{et} \quad D_0^j u_{|x_0 = t_0} = g_j \qquad j = 0, \ldots, m-1$$

En général ce problème est mal posé pour P à moins de se placer dans le cadre des fonctions analytiques (Bony-Schapira [1]) ou dans certaines classes de Gevrey (Leray-Ohya [14]). Diverses formes de conditions nécessaires ont été démontrées dans certains cas particuliers ($n = 1$, ou multiplicité au plus double, ou coefficients constants) on retiendra la formulation introduite par Flaschka-Strang [8] dont on a de bonnes raisons de penser qu'elle fournit une condition nécessaire et suffisante sous l'hypothèse (H).

Nous reviendrons sur la question de la nécessité dans un prochain travail. Avant de formuler cette condition, il est commode d'introduire la

DEFINITION 1.1. – *Une fonction $\varphi(x)$ est dite une caractéristique de multiplicité r_α de p en $x^0 \in X$ si φ est solution de*

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi - \lambda_\alpha(x\,,\,d_{x'}\varphi) = 0 \tag{1.1}$$

au voisinage de x^0 *et* $d\varphi(x^0) \neq 0$.

Ceci posé, la condition de Lévi s'énonce ainsi :

(L) *Pour tout* α, *tout* $x^0 \in \mathrm{X}$, *toute fonction* φ *caractéristique de multiplicité* r_α *en* x^0 *on a*

$$e^{-it\varphi}\,\mathrm{P}(ae^{it\varphi}) = 0(t^{m-r_\alpha}) \qquad t \to +\infty \tag{1.2}$$

pour tout $a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{X})$ *avec* $d\varphi \neq 0$ *sur support de* a.

On peut alors énoncer le principal résultat de ce travail :

THEOREME 1.2. – *Soit* P *un opérateur différentiel de degré* m *vérifiant les conditions* (H) *et* (L). *Alors pour* $\mu = \alpha\,,\ldots,m-1$ *il existe des opérateurs intégraux de Fourier* $\mathrm{E}_\mu \in \mathrm{I}^{\overline{m}_\mu - \frac{1}{4}}(\mathrm{X}\,,\mathrm{X}'\,;\mathrm{C})$ *tels que*

$$\begin{cases} \mathrm{PE}_\mu \equiv 0 \\ \gamma_j\,\mathrm{E}_\mu \equiv \delta_{j,\mu}\cdot \mathrm{I} \qquad j\,,\mu = 0\,,\ldots,m-1 \end{cases} \tag{1.3}$$

pour une relation canonique convenable C *et* $\overline{m}_\mu = r - 1 - \mu$ *avec* $r = \max\limits_\alpha r_\alpha$. *Le signe* $\equiv$ *signifie égalité des opérateurs modulo un opérateur à noyau* C^∞ *et* γ_j *l'opérateur de trace sur* X_{t_0} *de la dérivée* D_0^j *pour* t_0 *fixé (on a identifié* X' *et* X_{t_0}).

2. Construction du noyau du problème de Cauchy.

La construction des opérateurs E_μ se fera selon la même présentation que dans le cas strictement hyperbolique (Hörmander [11], Duistermaat [6]) aussi on mettra surtout l'accent sur l'aspect nouveau introduit par la multiplicité des caractéristiques.

1. *Relations canoniques.*

Le symbole principal se factorise sous la forme

$$p = \prod_{\alpha=1}^{\overline{\alpha}} q_\alpha^{r_\alpha} \quad \text{avec} \quad q_\alpha(x\,,\xi) = \xi_0 - \lambda_\alpha(x\,,\xi')\,. \tag{2.1}$$

Au facteur q_α on associe la relation C_α dite relation bicaractéristique définie par

$$C_\alpha = \{((x , \xi) , (y , \eta) \in N_\alpha \times N_\alpha \; ; \tag{2.2}$$

(x , ξ) et (y , η) sont sur la même bande bicaractéristique de $q_\alpha\}$.

avec $\qquad N_\alpha = \{(x , \xi) \in T^*(X)\backslash 0 \; ; \; q_\alpha(x , \xi) = 0\}$.

D'après l'hypothèse (H) il est clair que la variété X est pseudo convexe pour q_α et par conséquent on sait, d'après Duistermaat-Hörmander [5], que C_α est une relation canonique homogène dans $T^*(X)\backslash 0 \times T^*(X)\backslash 0$.

Rappelons maintenant la définition de la relation canonique R_{t_0} associée à l'opérateur de restriction à la sous-variété X_{t_0} de X (cf. Duistermaat [6]) :

$$R(t_0) = \{(y' , \eta' , x , \xi) \; ; \; x' = y' \; , \; x_0 = t_0 \; , \; \eta' = \xi'|_{T_{y'}(X_{t_0})}\} \, .$$

Par composition (ce qui est loisible car X_{t_0} n'est pas caractéristique pour q_α) on définit de nouvelles relations canoniques :

$$C_\alpha(t_0) = C_\alpha \circ R_s(t_0) \quad \text{dans} \quad T^*(X)\backslash 0 \times T^*(X')\backslash 0$$

$$C_\alpha(t_0 , y_0) = R(y_0) \circ C_\alpha \circ R_s(t_0) \quad \text{dans} \quad T^*(X')\backslash 0 \times T^*(X')\backslash 0$$

où $R_s(t_0)$ désigne la transportée de $R(t_0)$ par l'isomorphisme

$$T^*(X')\backslash 0 \times T^*(X)\backslash 0 \xrightarrow{s} T^*(X)\backslash 0 \times T^*(X')\backslash 0$$

et où l'on a identifié X_{t_0} à X'. Ainsi en explicitant :

$$C_\alpha(t_0) = \{(x , \xi , y' , \eta') \; ; \; (x , \xi) \text{ appartient à la bande caractéristique de } q_\alpha \text{ issue de } (t_0 , y' , \eta_0 , \eta') \text{ avec } \eta_0 = \lambda_\alpha(t_0 , y' , \eta')\} \, . \tag{2.3}$$

Il est utile pour la suite de disposer d'une carte locale de $C_\alpha(t_0)$ au moyen d'une fonction de phase. Tout d'abord on se place dans une carte locale de X' et on note $(x_1 , \ldots , x_{n-1} , \eta_1 , \ldots , \eta_{n-1})$ les coordonnées d'un point $(x' , \eta') \in T^*(X')$.

LEMME 2.1. – *Soit $\varphi(x , \eta')$ la solution définie dans un voisinage conique Γ d'un point $(x^0 , \eta'^0) \in \mathbf{R} \times T^*(X')\backslash 0$, de l'équation*

$$q_\alpha(x\,,d_x\varphi)=0 \quad et \quad \varphi(x)|_{x_0=t_0}=\sum_1^{n-1} x_j\cdot\eta_j\,. \tag{2.4}$$

Alors l'application

$$(x\,,\eta')\in\Gamma \to (x\,,d_x\varphi\,,d_\eta\,,\varphi\,,\eta')$$

réalise un difféomorphisme local de Γ *sur* $\mathrm{C}_\alpha(t_0)$.

Démonstration. – La théorie de l'intégration de l'équation (2.4) montre que φ est constante sur les courbes bicaractéristiques solutions de

$$\begin{aligned}\frac{dx_j}{dx_0}&=-\frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial\xi_j}(x_0\,,x'\,,\xi') \quad x_j|_{x_0=t_0}=y_j\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j=1\,,\dots,n-1\\ \frac{d\xi_j}{dx_0}&=\frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial x_j}(x_0\,,x'\,,\xi') \quad \xi_j|_{x_0=t_0}=\eta_j\end{aligned} \tag{2.5}$$

Désignons par $x'(x_0\,,y'\,,\eta')$ la solution de l'équation

$$\frac{dx_j}{dx_0}=-\frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial\xi_j}(x\,,d_{x'}\varphi(x_0\,,x'\,,\eta')) \quad x_j|_{x_0=t_0}=y_j \quad j=1\,,\dots,n-1$$

et $\xi'(x_0\,,y'\,,\eta')$ la solution de

$$\frac{d\xi_j}{dx_0}=\frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial x_j}(x_0\,,x'(x_0\,,y'\,,\eta')\,,\eta') \quad \xi_j|_{x_0=t_0}=\eta_j \quad j=1\,,\dots,n-1$$

et on pose $\xi_0(x_0\,,y'\,,\eta')=\lambda_\alpha(x_0\,,x'(x_0\,,y'\,,\eta'),\xi'(x_0\,,y'\,,\eta'))$.

Alors on vérifie directement par un calcul simple (cf. Nirenberg-Trèves p. 490-91 [19]) que la fonction

$$x_0 \to (x_0\,,x'(x_0\,,y'\,,\eta'),\xi(x_0\,,y'\,,\eta'))$$

est la solution de (2.6) qui joint les points

$$(x\,,d_x\varphi(x\,,\eta'))=(x\,,\xi)$$

et $(t_0\,,d_{\eta'}\varphi(x\,,\eta')\,,\eta_0\,,\eta')=(y\,,\eta)$ où $\eta_0=\lambda_\alpha(y\,,\eta')$. Par conséquent si on définit la phase

$$\Phi(x\,,y'\,,\eta')=\varphi(x\,,\eta')-\langle y'\,,\eta'\rangle$$

alors on trouve que $C_\alpha(t_0)$ est localement de la forme

$$\Lambda_\Phi = \{x \,,\, d_x \Phi \,,\, y' \,,\, d_{y'} \Phi\} \quad \text{pour} \quad (x \,,\, y' \,,\, \eta')$$

vérifiant

$$\Phi'_{\eta'}(x \,,\, y' \,,\, \eta') = 0 \;.$$

Ce qui démontre le lemme.

Remarque 2.3. – L'ensemble $\underset{\alpha}{\cup}\, C_\alpha(t_0)$ est une relation canonique homogène puisque c'est une réunion disjointe dans

$$T^*(X)\backslash 0 \times T^*(X')\backslash 0 \;.$$

Remarque 2.4. – Du lemme 2.1 on déduit que la relation $C_\alpha(t_0 \,,\, x_0)$ est localement le graphe d'une transformation canonique dans $T^*(X')\backslash 0$, il suffit de considérer la transformation canonique locale engendrée par la fonction génératrice

$$(x' \,,\, \eta') \to \varphi(x_0 \,,\, x' \,,\, \eta')$$

à savoir l'application

$$(x' \,,\, d_{x'} \varphi) \to (d_{\eta'} \varphi \,,\, \eta')$$

ce qui est licite car on a localement $\det(\varphi''_{x'\eta'}) \neq 0$.

2. *Condition de Lévi.*

On se propose, dans ce paragraphe, de donner des formulations plus maniables de la condition de Lévi (L) et également d'étendre cette étude à une classe un peu plus générale d'opérateurs.

DEFINITION 2.5. – *Soit* X *une variété* C^∞ *connexe de dimension n. On dira qu'un opérateur* $P \in L_1^m(X)$ *est à multiplicité constante si* P *a son symbole principal homogène p qui se factorise sous la forme*

$$p = \prod_{\beta=1}^{\bar\beta} q_\beta^{r_\beta}$$

où q_j *est un symbole* C^∞ *sur* $T^*(X)\backslash 0$ *à valeurs réelles, homogène en* ξ, *de type principal et les ensembles* $q_j^{-1}(0)$ *sont supposés deux à deux disjoints.*

Remarque 2.6. – Matsuura a démontré [17] que tout opérateur différentiel vérifiant (H) satisfait également à la définition 2.5 et que l'on peut prendre pour facteurs q_j des opérateurs différentiels strictement hyperboliques.

Pour les opérateurs satisfaisant la définition 2.5 la condition de Lévi s'énonce ainsi

pour tout $x^0 \in X$, *tout* β *et toute fonction caractéristique* φ *de* q_β *au voisinage de* x^0 *on a*

$$\text{(L)} \qquad e^{-it\varphi} P(ae^{it\varphi}) = 0(t^{m-r_\beta}) \quad t \to +\infty$$

pour tout $a \in C_0^\infty(X)$ *et* $d\varphi \neq 0$ *sur le support de* a *et dont voici une autre formulation.*

PROPOSITION 2.7. — *Soit* P *un opérateur à multiplicité constante et vérifiant la condition* (L). *Alors pour tout* x^0, *tout* β, *toute fonction de phase* $\varphi(x, \xi)$ *homogène de degré 1 en* $\xi \in \mathbf{R}^N \backslash 0$ *et solution de* $q_\beta(x, d_x\varphi) = 0$ *au voisinage de* x^0, *on a*

$$e^{-i\varphi} P(ae^{i\varphi}) \in S^{m+l-r_\beta}(X \times \mathbf{R}^N) \tag{2.6}$$

pour tout symbole $a \in S^l(X \times \mathbf{R}^N)$ *avec* $d_x\varphi \neq 0$ *sur support conique de* a.

Démonstration. — On sait que dans ces conditions on a

$$b(x, \varphi) = e^{-i\varphi} P(ae^{i\varphi}) \in S^{m+l}(X \times \mathbf{R}^N) \tag{2.7}$$

il suffit donc de vérifier que le premier terme non identiquement nul dans le développement asymptotique de b est de degré $\leqslant m + l - r_\beta$.

Pour cela on précise la structure du développement de b, tout d'abord on a l'expression suivante

$$b \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} P^{(\alpha)}(x, d\varphi) D_z^\alpha(ae^{i\psi})_{|z=x} \tag{2.8}$$

où $\quad \psi(x, z, \xi) = \varphi(z, \xi) - \varphi(x, \xi) - \langle d_x\varphi(x, \xi), z - x \rangle$,

ce développement peut encore s'ordonner sous la forme

$$b \sim \sigma_0(P, \varphi)a + \sigma_1(P, \varphi)a + \cdots + \sigma_j(P, \varphi)a + \cdots \tag{2.9}$$

où $\sigma_j(P, \varphi)$ est un opérateur différentiel de degré j qui dépend de P et φ et tel que $\sigma_j(P, t\varphi) = t^{m-j}\sigma_j(P, \varphi)$. En identifiant avec (2.8) on trouve que la partie principale de $\sigma_j(P, \varphi)$ est donnée par

$$(x, \eta) \to \sigma_j(\mathrm{P}, \varphi)(x, \eta) = \sum_{|\alpha|=j} p^{(\alpha)}(x, d\varphi) \frac{\eta^\alpha}{\alpha!},$$

ainsi, par exemple, on a

$$\sigma_0(\mathrm{P}, \varphi) a = p(x, d\varphi) \cdot a$$

$$\sigma_1(\mathrm{P}, \varphi) a = \sum_{j=1}^{n} p^{(j)}(x, d\varphi) \mathrm{D}_j a + \Bigg[p_{m-1}(x, d\varphi) + \\ + i \sum_{|\alpha|=2} p^{(\alpha)}(x, d\varphi) \frac{\mathrm{D}^\alpha \varphi}{\alpha!} \Bigg] \cdot a$$

où p_{m-1} est la composante de degré $m - 1$ dans le symbole de P.

En utilisant le développement (2.9) pour expliciter la condition (L) il vient

$$e^{-it\varphi} \mathrm{P}(a e^{it\varphi}) \sim t^m \sigma_0(\mathrm{P}, \varphi) a + \cdots + t^{m-j} \sigma_j(\mathrm{P}, \varphi) a + \cdots \quad (2.10)$$

la condition de Lévi est donc équivalente au fait que si φ est caractéristique de q_β alors les opérateurs différentiels $\sigma_j(\mathrm{P}, \varphi)$ sont identiquement nuls pour $0 \leqslant j < r_\beta$. Par conséquent, on trouve que la partie principale de b est donnée par

$$\sigma_{r_\beta}(\mathrm{P}, \varphi) a \in \mathrm{S}^{m+l-r_\beta}.$$

Indiquons au passage l'influence de la transposition sur la condition de Lévi, c'est la

PROPOSITION 2.8. — *Soit* P *un opérateur à multiplicité constante sur une variété* X *supposée équipée d'une forme volume. Alors si* P *vérifie la condition de Lévi* (L) *il en est de même pour son adjoint formel* P*.

Démonstration. — Tout d'abord, il est clair que P* est à multiplicité constante car il possède les mêmes caractéristiques que P. Soit alors φ une caractéristique de q_β et supposons qu'en un point x^0 on ait $\sigma_j(\mathrm{P}^*, \varphi) \not\equiv 0$ pour un certain $j < r_\beta$, alors en prenant $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{X})$ à support voisin de x^0 et tel que la fonction $\mathrm{C}(x) = \sigma_j(\mathrm{P}^*, \varphi) u(x)$ vérifie $\mathrm{C}(x^0) \neq 0$, on a

$$e^{-it\varphi} \mathrm{P}^*(u e^{it\varphi}) = \mathrm{C} t^{m-j} + \cdots$$

il vient en prenant $v = C \in C_0^\infty(X)$

$$(e^{-it\varphi} P(ve^{it\varphi}) , u) = (v , e^{-it\varphi} P^*(ue^{it\varphi})) \sim ct^{m-j} \quad \text{avec} \quad c > 0$$

ce qui est impossible car $e^{-it\varphi} P(ve^{it\varphi}) = 0(t^{m-r_\beta})$, donc P^* vérifie bien la condition de Lévi.

Pour étudier la structure des opérateurs $\sigma_j(P , \varphi)$ on va donner une autre formulation de la condition de Lévi au moyen d'une définition introduite par De Paris [4].

DEFINITION 2.9. – *On dit qu'un opérateur à multiplicité constante est décomposable par rapport au facteur q_β de p si on peut écrire*

$$P = \sum_{j=0}^{r_\beta} B_j Q_\beta^j \tag{2.11}$$

pour certains opérateurs propres $B_j \in L^{m-r_\beta}(X)$ *et où* Q_β *désigne un opérateur propre de symbole principal* $q_\beta(x , \xi)$.

Avec cette définition on a le

THEOREME 2.10. – *Soit* P *un opérateur à multiplicité constante. Alors* P *satisfait à la condition* (L) *pour le facteur* q_β *si et seulement si* P *est bien décomposable pour le facteur* q_β.

La démonstration va découler d'une suite de lemmes.

LEMME 2.11. – *On se donne des opérateurs propres* $B \in L^d(X)$ *et* $Q \in L^s(X)$, *un symbole* $a \in S^k(X \times \mathbf{R}^N)$ *et une phase* $\varphi(x , \xi)$ *solution de* $q(x , d_x\varphi) = 0$ *avec* $d\varphi \neq 0$ *sur* supp *conique de* a. *Alors*

$$e^{-i\varphi}(B \cdot Q^r)(ae^{i\varphi}) \in S^{d+k+r(s-1)}(X \times \mathbf{R}^N)$$

pour tout entier r.

Démonstration. – On sait a priori que

$$h = e^{-i\varphi} BQ^r(ae^{i\varphi}) \in S^{d+k+rs}(X \times \mathbf{R}^N) ,$$

déterminons le terme principal du développement de h.

Comme $q(x , d\varphi) = 0$ il vient

$$e^{-i\varphi} Q(ae^{i\varphi}) - \sigma_1(Q , \varphi)a \in S^{k+s-2} , \tag{2.12}$$

d'autre part, on a vu que l'opérateur $\sigma_1(\mathrm{Q}, \varphi)$ est de la forme $\mathrm{L} + c$ où L est l'opérateur de dérivation $\sum_{j=1}^{n} q^{(j)}(x, d\varphi)\, \mathrm{D}_j$ et c une fonction C^∞, par conséquent il vient

$$e^{-i\varphi}\, \mathrm{Q}^r(ae^{i\varphi}) - (\mathrm{L} + c)^r\, a \in \mathrm{S}^{k+r(s-1)-1}$$

et finalement

$$h - b(x, d\varphi)\, (\mathrm{L} + c)^r\, a \in \mathrm{S}^{d+k+r(s-1)-1} \tag{2.13}$$

d'où le lemme.

Lemme 2.12. — *Soit* P *un opérateur de* $\mathrm{L}^m(\mathrm{X})$ *et soit une fonction* $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{X} \times \mathbf{R}^{\mathrm{N}} \backslash 0)$ *homogène degré* 1 *en* ξ *et réelle et telle que*

$$e^{-i\varphi}\, \mathrm{P}(ae^{i\varphi}) \in \mathrm{S}^{m-r}(\mathrm{X} \times \mathbf{R}^{\mathrm{N}})$$

pour tout $a \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X} \times \mathbf{R}^{\mathrm{N}})$ *avec* $d\varphi \neq 0$ *sur* supp *conique de a. Alors on a*

$$p^{(\alpha)}(x, d\varphi) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad |\alpha| < r .$$

Démonstration. — D'après le développement (2.9) on déduit que les opérateurs $\sigma_j(\mathrm{P}, \varphi)$ sont identiquement nuls pour $j < r$, or on a vu que le symbole principal de σ_j est donné par

$$(x, \eta) \to \sum_{|\alpha|=j} p^{(\alpha)}(x, d\varphi)\, \frac{\eta^\alpha}{\alpha!}$$

on a donc nécessairement $p^{(\alpha)}(x, d\varphi) = 0$ pour $|\alpha| < r$.

Lemme 2.13. — *Soient p et q des fonctions réelles de* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X} \times \mathbf{R}^n \backslash 0)$ *homogène en* ξ *et de plus on suppose q de type principal. On suppose que pour toute solution* $\varphi(x)$ *de* $q(x, d\varphi) = 0$ *on ait* $p^{(\alpha)}(x, d\varphi) = 0$, $|\alpha| < r$ *; alors il existe* $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{X} \times \mathbf{R}^n \backslash 0)$ *tel que* $p = b \cdot q^r$.

Démonstration. — Comme q est de type principal, on peut trouver $\lambda \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{X} \times \mathbf{R}^{n-1} \backslash 0)$ homogène tel que dans un voisinage conique d'un point x^0, ξ^0 on ait $q(x, \xi) = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = \lambda(x, \xi')$.

Donc localement φ est solution de $q(x, d\varphi) = 0$ si et seulement si $\partial_0 \varphi = \lambda(x, d_{x'}\varphi)$ et d'après la théorie de cette équation on sait que l'on peut trouver une solution φ en se donnant $d_{x'}\varphi = \xi'$ arbitraire en x^0; ainsi tout point $(\lambda(x, \xi'), \xi')$ est de la forme $d\varphi$ pour φ convenable. Alors la formule de Taylor appliquée à p s'écrit

$$p(x, \xi_1, \xi') = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\partial^j p}{\partial \xi_1^j}(x, \lambda, \xi') \frac{(\xi_1 - \lambda)^j}{j!} + (\xi_1 - \lambda)^r \mathrm{R}(x, \xi)$$

soit donc $$p(x, \xi) = (\xi_1 - \lambda)^r \cdot \mathrm{R}(x, \xi) .$$

D'autre part, la formule de Taylor appliquée à q au 1$^{\text{er}}$ ordre s'écrit

$$q(x, \xi) = (\xi_1 - \lambda(x, \xi'))\, \mathrm{S}(x, \xi)$$

et comme q est de type principal, on a $\mathrm{S}(x, \xi) \neq 0$, d'où finalement

$$p = bq^r \quad \text{avec} \quad \mathrm{R} \cdot \mathrm{S}^{-r} = b .$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2.10. On commence par la condition nécessaire. Notons provisoirement q le facteur q_β et r sa multiplicité, ainsi le symbole principal de P s'écrit

$$p = b \cdot q^r \quad \text{où} \quad b = \prod_{\alpha \neq \beta} q_\alpha ,$$

b homogène de degré $m - r$.

On définit l'opérateur P_1 par

$$\mathrm{P}_1(x, \mathrm{D}) = \mathrm{P}(x, \mathrm{D}) - \mathrm{B}(x, \mathrm{D})\,(\mathrm{Q}(x, \mathrm{D}))^r$$

où B et Q sont des opérateurs propres de symbole principal b et q, on a donc $\mathrm{P}_1 \in \mathrm{L}^{m_1}(\mathrm{X})$ avec $m_1 < m$, si $m_1 \leqslant m - r$ c'est fini, sinon on pose $s_1 = m_1 - (m - r)$ ainsi $0 < s_1 < r$. Soit φ une solution de $q(x, d\varphi) = 0$ et soit $a \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X} \times \mathbf{R}^{\mathrm{N}})$ tel que $d\varphi \neq 0$ sur support de a, alors le lemme 2.11 implique $e^{-i\varphi}\, \mathrm{P}_1(a e^{i\varphi}) \in \mathrm{S}^{m-r} = \mathrm{S}^{m_1 - s_1}$,
alors le lemme 2.12 montre que $p_1^{(\alpha)}(x, d\varphi) = 0 \quad |\alpha| < s_1$
et enfin on déduit du lemme 2.13 que l'on peut écrire

$$p_1 = b_1 \cdot q^{s_1} \quad \text{avec} \quad b_1 \text{ de degré } m_1 - s_1 = m - r .$$

On définit ensuite l'opérateur P_2 par

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_1 - \mathrm{B}_1 \mathrm{Q}^{s_1}$$

on a donc $\mathrm{P}_2 \in \mathrm{L}^{m_2}$ avec $m_2 < m_1$ et ainsi de suite jusqu'à ce que $m_l \leqslant m - r$.

D'où finalement la décomposition

$$P = BQ^{r} + B_1 Q^{s_1} + B_2 Q^{s_2} + \cdots + B_l$$

ce qui prouve que P est décomposable par rapport à q.

Démonstration de la condition suffisante.

Soit q_β un facteur de p et φ une solution de $q_\beta(x\,,\,d\varphi) = 0$. Par hypothèse P se décompose sous la forme

$$P = B_0 Q_\beta^{r_\beta} + B_1 Q_\beta^{r_\beta - 1} + \cdots + B_{r_\beta}$$

avec degré $B_j \leqslant m - r_\beta$. Alors pour $a \in C_0^\infty(X)$, avec $d\varphi \neq 0$ sur support de a, on trouve grâce au lemme 2.11

$$e^{-it\varphi}\, P(a e^{it\varphi}) \in S^{m - r_\beta}(\mathbf{R}^+)$$

ce qui est précisément la condition de Lévi (L).

Appliquons maintenant ce théorème à l'étude du développement (2.9).

COROLLAIRE 2.14. – *Soit* P *un opérateur à multiplicité constante et satisfaisant à la condition de Lévi pour le facteur* q_β *et soit* φ *une solution de* $q_\beta(x\,,\,d\varphi) = 0$ *au voisinage de* x^0. *Alors on peut écrire au voisinage de* x^0.

$$\sigma_{r_\beta}(P\,,\,\varphi) = \sum_{j=0}^{r_\beta} \gamma_j \cdot L^j \tag{2.14}$$

avec $\gamma_j \in C^\infty$, $\gamma_{r_\beta}(x^0) \neq 0$ *et* $L = \sum_{j=1}^{n} q_\beta^{(j)}(x\,,\,d\varphi)\, D_j$.

Démonstration. – Le développement (2.10) montre que l'opérateur σ_{r_β} apparaît comme le coefficient de $t^{m - r_\beta}$ dans le développement de $e^{-it\varphi}\, P(a e^{it\varphi})$ pour $a \in C_0^\infty$.

Pour le déterminer on utilise la décomposition (2.11) de P relativement à q_β, et d'autre part le lemme 2.11 et (2.13) montrent que

$$e^{-it\varphi}\, B_j Q_\beta^j (a e^{it\varphi}) \sim t^{m - r_\beta}\, b_j(x\,,\,d\varphi)\,(L + c)^j a + \cdots$$

d'où l'expression (2.14) de σ_{r_β}. De plus on trouve que

$$\gamma_{r_\beta}(x) = \prod_{\alpha \neq \beta} (q_\alpha(x\,,\,d\varphi))^{r_\alpha} \quad \text{et par conséquent} \quad \gamma_{r_\beta}(x^0) \neq 0\ .$$

Remarque 2.15. – Ce corollaire permet d'expliciter le composé d'un opérateur à multiplicité constante et d'un opérateur intégral de Fourier relatif à une relation canonique C_α. Ce qui généralise une situation considérée dans [5] par Duistermaat-Hörmander et que l'on développera dans [3]. Cependant un cas typique est explicité dans le théorème du paragraphe suivant.

La propriété fondamentale de l'équation de transport de se ramener à une équation différentielle ordinaire était supposée à priori dans l'article de Ludwig [16].

3. *Equation de transport.*

On se restreint maintenant et jusqu'à la fin de ce travail aux opérateurs vérifiant l'hypothèse (H) sur la variété produit $X = \mathbf{R} \times X'$.

THEOREME 2.15. – *Soit* P *un opérateur d'ordre m vérifiant l'hypothèse* (H) *et la condition de Lévi* (L), *et soit un opérateur intégral de Fourier* $A \in I^d(X'\,,\,X\,;C_\alpha(t_0))$. *Alors le composé*

$$P \cdot A \in I^{m+d-r_\alpha}(X'\,,\,X\,;C_\alpha(t_0))$$

et le symbole principal de PA *est donné par l'expression*

$$(c_0 H_{\tilde{q}_\alpha}^{r_\alpha} + c_1 H_{\tilde{q}_\alpha}^{r_\alpha - 1} + \cdots + c_{r_\alpha})\,\tilde{a} \tag{2.15}$$

où $\tilde{a}$ *est le symbole principal de* A *et* $H_{\tilde{q}_\alpha}$ *le champ hamiltonien associé au symbole* $\tilde{q}_\alpha$ *composé de* q_α *par la projection*

$$T^*(X) \times T^*(X') \to T^*(X)\ .$$

Démonstration. – On sait a priori suivant Hörmander [12] que $PA \in I^{m+d}(X'\,,\,X\,,\,C_\alpha(t_0))$, il suffit donc de montrer que le symbole principal est dans $S^{m+d-r_\alpha+(2n-1)/4}(C_\alpha(t_0)\,,\,\Omega_{1/2} \circ L)$.

Pour cela on se place dans un voisinage conique d'un point de $C_\alpha(t_0)$ que l'on représente par une carte associée à une fonction phase comme au lemme 2.1. Dans ces conditions, il suffit de considérer A sous la forme

$$\mathrm{A}u(x) = (2\pi)^{-n+1} \iint e^{i\varphi(x,\eta') - i\langle y',\eta'\rangle} a(x\,,\eta')\; u(y')\,dy'\,d\eta'$$

où l'on a posé

$$a(x\,,\eta') = \tilde{a}(x\,,d_x\varphi\,,d_{\eta'}\varphi\,,\eta') \in \mathrm{S}^{d+1/4}(\mathrm{X}\times\mathbf{R}^{n-1}) \qquad (2.16)$$

avec $\tilde{a}$ le symbole principal de A, on a encore

$$\mathrm{A}u(x) = (2\pi)^{-n+1} \int e^{i\varphi(x,\eta')}\, a(x\,,\eta')\,\hat{u}(\eta')\,d\eta'\ .$$

En appliquant l'opérateur différentiel P on trouve

$$(\mathrm{PA})\,u(x) = (2\pi)^{-n+1} \int e^{i\varphi}\, b(x\,,\eta')\,\hat{u}(\eta')\,d\eta'$$

avec

$$b = e^{-i\varphi}\,\mathrm{P}(ae^{i\varphi}) \in \mathrm{S}^{m+d-r_\alpha+\frac{1}{4}}(\mathrm{X}\times\mathbf{R}^{n-1})$$

car P vérifie la condition (L), ce qui prouve l'assertion sur le degré de PA.

Donnons maintenant une expression intrinsèque du symbole principal de P.A. L'égalité (2.14) donne pour b l'expression

$$b(x\,,\eta') = \Big(\sum_{j=0}^{r_\alpha} \gamma_j\,\mathrm{L}^j\Big)\,a(x\,,\eta')\ ,$$

et en remplaçant a par son expression (2.16) on est conduit à expliciter

$$\begin{aligned}\mathrm{L}a &= \sum_{j=0}^{n-1} q_\alpha^{(j)}(x\,,d\varphi)\,\mathrm{D}_j\,a\\ &= \sum_j q_\alpha^{(j)}(x\,,d\varphi)\Big(\mathrm{D}_{x_j}\tilde{a} + \frac{1}{i}\sum_0^{n-1}\frac{\partial\tilde{a}}{\partial\xi_k}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial x_j} + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{i}\sum_1^{n-1}\frac{\partial\tilde{a}}{\partial y_k}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_k\,\partial x_j}\Big)\end{aligned}$$

que l'on simplifie en remarquant que les dérivées de $q_\alpha(x\,,d\varphi) = 0$ donnent

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^{(j)}(x\,,d\varphi)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial q}{\partial x_k} = 0$$

et
$$\sum_{k=1}^{n-1} q^{(j)}(x\,,\,d\varphi)\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_k\,\partial x_j} = 0$$
d'où
$$\mathrm{L}a = \frac{1}{i}\sum_{j=0}^{n-1}\left(q_\alpha^{(j)}\cdot\frac{\partial\widetilde{a}}{\partial x_j} - \frac{\partial q}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\widetilde{a}}{\partial\xi_j}\right)$$
soit finalement
$$\mathrm{L}a = \frac{1}{i}\ \mathrm{H}_{\widetilde{q}_\alpha}\cdot\widetilde{a}$$

et l'expression (2.15) découle alors de (2.14).

4. *Construction des noyaux* E_μ.

Pour μ et t_0 fixés on va construire $\mathrm{E}_\mu(t_0)\in \mathrm{I}^{\overline{m}_\mu-\frac{1}{4}}(\mathrm{X}\,,\mathrm{X}'\,;\mathrm{C}(t_0))$ vérifiant (1.13) avec $\mathrm{C}(t_0) = \bigcup_\alpha \mathrm{C}_\alpha(t_0)$ et $\overline{m}_\mu = r - 1 - \mu$ où $r = \max_\alpha r_\alpha$. Dans ce paragraphe on supprime provisoirement l'indication de l'indice μ et de t_0 pour alléger les notations, et l'on va chercher $\mathrm{E}_\mu(t_0) = \mathrm{E}$ sous la forme d'une somme de α opérateurs
$$\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_{\overline{\alpha}} \tag{2.17}$$
avec $\mathrm{F}_\alpha\in \mathrm{I}^{m_\alpha-\frac{1}{4}}(\mathrm{X}\,,\mathrm{X}'\,;\mathrm{C}_\alpha(t_0))$ et $m_\alpha = r_\alpha - 1 - \mu$.

vérifiant
$$\left\{\begin{array}{ll}\mathrm{PF}_\alpha \equiv 0 & \alpha = 1\,,\ldots,\overline{\alpha}\\[2ex] \gamma_j\left(\sum_1^{\overline{\alpha}}\mathrm{F}_\alpha\right)\equiv \delta_{j,\mu}\mathrm{I} & j = 0\,,\ldots,m-1\ .\end{array}\right. \tag{2.18}$$

Les opérateurs F_α seront déterminés, modulo un opérateur à noyau C^∞, par un développement asymptotique $\mathrm{F}_\alpha \sim \sum_{k\geqslant 0}\mathrm{F}_\alpha^{(k)}$ où les composantes $\mathrm{F}_\alpha^{(k)}$ vérifient les conditions
$$\mathrm{PF}_\alpha^{(0)}\in \mathrm{I}^{m+m_\alpha-\frac{1}{4}-r_\alpha-1}(\mathrm{X}'\,,\mathrm{X}\,;\mathrm{C}_\alpha(t_0))\qquad \alpha = 1\,,\ldots,\overline{\alpha} \tag{2.19}$$
$$\gamma_j\Big(\sum_\alpha\ \sum_{k<r_\alpha}\mathrm{F}_\alpha^{(k)}\Big) - \delta_{j,\mu}\mathrm{I}\in \mathrm{L}^{-1+j-\mu}(\mathrm{X}')\qquad j = 0\,,\ldots,m-1 \quad (2.20)_j$$

et plus généralement par

$$\sum_{k \leqslant h} \mathrm{PF}_{\alpha}^{(k)} \in \mathrm{I}^{m+m_\alpha - \frac{1}{4} - r_\alpha - 1 - h}$$

$$\gamma_j\Big(\sum_{\alpha} \sum_{k < r_\alpha + l} \mathrm{F}_\alpha^{(k)}\Big) - \delta_{j,\mu}\mathrm{I} \in \mathrm{L}^{-1-l+j-\mu} \qquad j = 0, \dots, m-1 \tag{2.21}$$

Commençons par étudier la structure des équations (2.19). On désigne par T_α l'opérateur de transport explicité en (2.15), de sorte que (2.19) se traduit par les conditions

$$\mathrm{T}_\alpha \widetilde{a}_{\alpha,0} = 0 \qquad \alpha = 1, \dots, \overline{\alpha} \tag{2.22}$$

où $\widetilde{a}_{\alpha,k}$ désigne le symbole principal de $\mathrm{F}_\alpha^{(k)}$, comme T_α est un opérateur de dérivation de degré r_α dans la direction du champ bicaractéristique associé à $\widetilde{q}_\alpha$ il suffira de connaître les traces jusqu'à l'ordre $r_\alpha - 1$ de $\widetilde{a}_{\alpha,0}$ au-dessus de X_{t_0}. Ces traces seront précisément déterminées par les conditions $(2.20)_j$ que l'on va expliciter en se plaçant dans une carte d'un voisinage conique d'un point de $\mathrm{C}_\alpha(t_0)$. On prend une carte associée à une fonction de phase $\varphi_\alpha(x, \eta')$ comme indiqué au lemme 2.1, dans ces conditions, il suffit de considérer l'opérateur $\mathrm{F}_\alpha^{(k)}$ sous la forme

$$(\mathrm{F}_\alpha^{(k)} u)(x) = (\pi)^{-n+1} \int e^{i\varphi_\alpha(x,\eta')} a_{\alpha,k}(x, \eta')\, \hat{u}(\eta')\, d\eta' \tag{2.23}$$

où $a_{\alpha,k}$ est un symbole de degré $m_\alpha - k = r_\alpha - 1 - \mu - k$.

De la condition $(2.20)_0$ on déduit

$$a_{\alpha,k} = 0 \quad \text{pour} \quad k < r_\alpha - 1 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} a_{\alpha, r_\alpha - 1} = \delta_{0,\mu}$$

puis successivement on déduit de $(2.20)_j$

$$\gamma_j a_{\alpha,k} = 0 \quad j = 0, \dots, r_\alpha - k - 2 \quad (\text{où } \gamma_j a = \mathrm{D}_0^{j_a}|_{x_0 = t_0}) \tag{2.24}$$

et le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_\alpha a_{\alpha, r_\alpha - 1} & = \delta_{0,\mu} \\ \sum_\alpha (\lambda_\alpha a_{\alpha, r_\alpha - 1} + \gamma_0 a_{\alpha, r_\alpha - 2}) & = \delta_{1,\mu} \\ \text{-----------------------------} & \\ \sum_\alpha \Bigg[\sum_{\substack{k=0 \\ k < r_\alpha}} \binom{j}{k} (\lambda_\alpha)^{j-k} \gamma_k a_{\alpha, r_\alpha - 1 - k}\Bigg] & = \delta_{j,\mu} \quad j = 0, \dots, m-1 \\ \text{-----------------------------} & \end{array}\right. \tag{2.25}$$

dont le premier membre s'obtient en calculant le symbole des termes $\sum_k \gamma_j(F_\alpha(k))$, c'est-a-dire compte tenu de (2.23),

$$\sum_k e^{iy'.\eta'} D_0^j(a_{\alpha,k}\, e^{i\varphi_\alpha})|_{x_0=t_0}$$

et en conservant les termes de degré maximum, après les simplifications entraînées par (2.24).

Pour résoudre le système (2.25) on étudie son déterminant Δ, pour cela on explicite Δ sous la forme

$$\Delta = \det \left[V(\lambda_1)\,, \frac{V'}{1\,!}\,(\lambda_1)\,, \ldots, \frac{V^{(r_1-1)}(\lambda_1)}{(r_1-1)\,!}\,; \ldots ; V(\lambda_{\bar\alpha})\,, \ldots, \frac{V^{(r_{\bar\alpha}-1)}(\lambda_{\bar\alpha})}{(r_{\bar\alpha}-1)\,!} \right]$$

où $V(\lambda)$ désigne le vecteur de composantes $(1\,, \lambda\,, \lambda^2\,, \ldots, \lambda^{m-1})$ et $V^{(j)}(\lambda)$ sa dérivée $j^{\text{ième}}$. On vérifie facilement qu'il est non nul en le considérant comme valeur de la dérivée, à l'ordre $r_\alpha - 1$ selon les variables $\lambda_{\alpha,j}$ du déterminant de Van der Monde

$$\det(V(\lambda_{1,1})\,, \ldots, V(\lambda_{1,r_1})\,; \ldots ; V(\lambda_{\bar\alpha,1})\,, \ldots, V(\lambda_{\bar\alpha,r_{\bar\alpha}}))$$

dérivées prises en faisant à la fin $\lambda_{\alpha,j} = \lambda_\alpha \quad j = 1\,, \ldots, r_\alpha$.

On en déduit la valeur de $\gamma_j\, a_{\alpha,0}$ pour $j = 0\,, \ldots, r_\alpha - 1$ ce qui permet de résoudre (2.22), on calcule ensuite $\gamma_j\, a_{\alpha,1}$ $j = 0\,, \ldots, r_\alpha - 1$ en résolvant un système ayant même matrice que (2.25) d'où ensuite les termes $a_{\alpha,1}$ en résolvant des équations du type

$$T_\alpha\, a_{\alpha,1} = b_{\alpha,0}$$

où $b_{\alpha,0}$ est connu. On détermine ainsi successivement les $a_{\alpha,k}$ d'où les $\widetilde{a}_{\alpha,k}$ dans un voisinage conique d'un point de $C_\alpha(t_0)$ et finalement $\widetilde{a}_{\alpha,k}$ globalement.

Ce qui termine la démonstration du théorème 1.2 en posant

$$E_\mu = F_{1,\mu} + \cdots F_{\bar\alpha,\mu}\,.$$

3. Résolution du problème de Cauchy.

1. *Résolution dans les espaces de fonctions* C^∞.

En explicitant les opérateurs à noyaux C^∞ qui apparaissent dans (1.3) ainsi que le paramètre t_0, il vient

$$\begin{cases} PE_\mu(t_0) = R_\mu(t_0) \\ \gamma_j E_\mu(t_0) = \delta_{\mu,j} I + R_{\mu,j} \end{cases} \tag{3.1}$$

(où γ_j désigne la $j^{\text{ième}}$ trace sur X_{t_0}).

où $R_\mu(t_0)$ est un opérateur à noyau C^∞ de $X' \to X$

et $R_{\mu,j}$ est un opérateur à noyau C^∞ de $X' \to X'$.

Le but de ce paragraphe est de déduire du théorème 1.2 le

THEOREME 3.1. – *Soit* P *un opérateur de degré* m *vérifiant les hypothèses* (H) *et* (L), *alors le problème de Cauchy* (*) *admet une solution unique.*

Démonstration. – On commence par modifier les opérateurs E_μ afin d'avoir des données initiales exactes, pour cela on pose

$$E'_\mu = E_\mu - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x_0 - t_0)^j}{j\,!} R_{\mu,j}$$

il vient

$$\begin{cases} PE'_\mu = R'_\mu \\ \gamma_j E'_\mu = \delta_{\mu,j} I \end{cases} \tag{3.2}$$

où R'_μ désigne toujours un opérateur à noyau C^∞.

Construisons maintenant un inverse à droite pour le problème de Cauchy avec second membre et données initiales nulles. On définit l'opérateur G

$$f \in C^\infty(X) \to (Gf)(x) = \int_{t_0}^{x_0} E'_{m-1}(y_0) \cdot f(y_0\,,.)\,dy_0 \tag{3.3}$$

avec des notations évidentes. On a immédiatement

$$\begin{cases} \mathrm{PG}f = f - \mathrm{V}f \\ \gamma_j(\mathrm{G}f) = 0 \qquad\qquad j = 0, \ldots, m-1 \end{cases} \tag{3.4}$$

où V désigne l'opérateur

$$f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{X}) \to (\mathrm{V}f)(x) = -\int_{t_0}^{x_0} \mathrm{R}'_{m-1}(y_0)\, f(y_0, .)\, dy_0 \tag{3.5}$$

soit encore en désignant par $\mathrm{R}(t, x, y')$ le noyau C^∞ de l'opérateur $-\mathrm{R}'_{m-1}(t)$ associé à la donnée d'une densité dy' sur X',

$$\mathrm{V}f(x) = \int_{t_0}^{x_0} \int_{\mathrm{X}'} \mathrm{R}(t, x, y')\, f(t, y')\, dt\, dy' \ . \tag{3.6}$$

Pour résoudre le problème de Cauchy avec second membre on est conduit à inverser l'opérateur $\mathrm{I} - \mathrm{V}$ dans $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X})$ ce qui sera possible car V est un opérateur de Volterra. Pour cela on utilise un lemme abstrait bien connu.

LEMME 3.2. – *Soit* B *un espace de Banach et*

$$t \in \mathbf{R} \to \mathrm{V}(t) \in \mathcal{L}(\mathrm{B}, \mathrm{B})$$

une application continue à valeurs dans l'espace de Banach des applications linéaires continues dans B. *On considère l'opérateur*

$$u \in \mathrm{C}^0([a, b]; \mathrm{B}) \to (\mathrm{V}u)(t) = \int_a^t \mathrm{V}(s)\, u(s)\, ds \in \mathrm{C}^0([a, b]; \mathrm{B}) \ ,$$

alors l'opérateur $\mathrm{I} - \mathrm{V}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. – On vérifie par récurrence que pour certaines constantes C, M

$$\|\mathrm{V}^n u(t)\|_{\mathrm{B}} \leqslant \mathrm{C}\, \frac{(t-a)^n}{n\,!}\, \mathrm{M}^n \cdot \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \|u(t)\|$$

ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{V}^n \ (= (\mathrm{I} - \mathrm{V})^{-1})$.

On applique ce lemme avec $\mathrm{B} = \mathrm{C}^0(\mathrm{X}')$, il en découle que $\mathrm{I} - \mathrm{V}$ est un isomorphisme de $\mathrm{C}^0([0, \mathrm{T}] \times \mathrm{X}')$ pour tout $\mathrm{T} \in \mathbf{R}$.

D'autre part, étant donné $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{X})$ il existe donc

$$f \in \mathrm{C}^0([0, \mathrm{T}] \times \mathrm{X}')$$

telle que $(\mathrm{I} - \mathrm{V}) f = g$ et par conséquent

$$f = \mathrm{V}f + g$$

et on vérifie ensuite aisément par récurrence que ceci implique $f \in \mathrm{C}^\infty([0\ \mathrm{T}] \times \mathrm{X}')$ par conséquent $\mathrm{I} - \mathrm{V}$ est inversible dans $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X})$.

On définit alors l'opérateur G' par

$$\mathrm{G}' = \mathrm{G} \circ (\mathrm{I} - \mathrm{V})^{-1}$$

et l'on a donc

$$\left| \begin{array}{ll} \mathrm{PG}'f = f & \\ \gamma_j \mathrm{G}'f = 0 & j = 0, \ldots, m-1 \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Grâce à (3.4) et (3.7) on peut expliciter une solution u du problème de Cauchy (*) en posant

$$u = \sum_0^{m-1} \mathrm{E}'_\mu \cdot g_\mu + \mathrm{G}' \cdot \left(f - \sum_0^{m-1} \mathrm{R}'_\mu g_\mu \right). \tag{3.8}$$

Démontrons maintenant l'unicité de la solution. Auparavant rappelons que si une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathrm{X})$ vérifie $\mathrm{P}u = 0$ alors u admet des traces $\gamma_j u$ sur la variété X_{t_0} car elle est non caractéristique pour P (cf. Hörmander [12]), de plus la fonction $t \to \gamma_0 u_{|\mathrm{X}_t} \in \mathcal{D}'(\mathrm{X})$ est C^∞. Ceci permet d'établir un résultat d'unicité un peu plus général, c'est la

PROPOSITION 3.3. – *Soit* P *un opérateur de degré m vérifiant les hypothèses* (H) *et* (L). *Soit u une distribution de* $\mathcal{D}'(\mathrm{X})$ *solution de*

$$\mathrm{P}u = 0 \quad et \quad \gamma_j u = 0 \qquad j = 0, \ldots, m-1$$

alors $u = 0$.

Démonstration. – D'après la proposition 2.7 l'opérateur P^* vérifie aussi les hypothèses (H) et (L) par conséquent pour w arbitraire dans $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{X})$ il existe $v \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{X})$ telle que

$$\mathrm{P}^* u = w \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_0^j v_{|x_0 = t_1} = 0 \qquad j = 0, \ldots, m-1$$

soit $\widetilde{u}$ la distribution égale à u pour $x_0 > t_0$ et nulle pour $x_0 \leqslant t_0$ on a $\mathrm{P}\widetilde{u} = 0$ d'après la nullité des traces, d'autre part soit $\widetilde{v}$ la fonction égale à v pour $x_0 < t_1$ et nulle pour $x_0 \geqslant t_1$ on a $P^* \widetilde{v} = 0$; dans ces conditions, on a $0 = (P\widetilde{u}, \widetilde{v}) = (\widetilde{u}, P^*\widetilde{v}) = (\widetilde{u}, \widetilde{w})$ donc $\widetilde{u}$ est nulle sur $]t_0, t_1[$ donc $u = 0$ car t_1 est arbitraire. Bien entendu cette démonstration s'appuie sur la régularité en x_0 de la distribution u.

2. *Résolution dans des espaces de Sobolev.*

Dans ce paragraphe on se fixe un réel T et on se place sur la variété compacte $X = [0, T] \times X'$. Soit s un entier $\geqslant 0$, on désigne par $H_s(X)$ l'espace de Sobolev d'ordre s sur X (cf. Hörmander [10]). Mais pour tenir compte des propriétés particulières de régularité en la variable x_0 il est commode d'utiliser avec Eskin [7] les espaces suivants :

on considère sur $C^\infty(X)$ la norme

$$|[u]|_s = \sum_{k=0}^{s} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant x_0 \leqslant T} \| D_0^k u(x_0, .) \|_{H_{s-k}(X')}$$

et on définit l'espace $B_s(X)$ comme le complété de $C^\infty(X)$ pour la norme $|[\ ]|_s$, on vérifie immédiatement les inclusions

$$H_{s+1}(X) \subset B_s(X) \subset H_s(X) .$$

On peut alors énoncer le

THEOREME 3.4. – *Soit* P *un opérateur de degré* m *vérifiant les hypothèses* (H) *et* (L), *on pose* $X = [0, T] \times X'$ *et* $r = \max_\alpha r_\alpha$ *et soit un entier* $s \geqslant r$. *Alors pour des données* $f \in H_s(X)$, $g_j \in H_{s+m-j-1}(X')$ *il existe une solution unique* $u \in B_{m+s-r}(X)$ *de* $Pu = f$ *et* $\gamma_j u_{|t_0} = g_j$ $j = 0, \ldots, m-1$.

Démonstration. – Il s'agit d'étudier la continuité dans les espaces de Sobolev des opérateurs qui interviennent dans l'expression (3.8) de la solution u du problème de Cauchy, l'unicité étant assurée par la proposition 3.3.

PROPOSITION 3.5. – *L'opérateur* $E_\mu(t_0) \in I^{\overline{m}_\mu - \frac{1}{4}}(X, X', C(t_0))$ *est continu de* $H_{s+m-1-\mu}(X')$ *dans* B_{s+m-r} *pour tout* $s \geqslant r - m$ (*rappelons que* $\overline{m}_\mu = r - 1 - \mu$).

Démonstration. – Soit $g \in C^\infty(X')$ et calculons $|[E_\mu(t_0)g]|_{s+m-r}$. Pour cela on remarque que l'opérateur composé $\gamma_0 \circ D_0^j \circ E_\mu(t_0)$ appartient à $I^{\overline{m}_\mu - \frac{1}{4} + j + \frac{1}{4}}(X', X', C(t_0, x_0))$ si γ_0 désigne l'opérateur intégral de Fourier associé à la trace sur X_{t_0} (cf. Duistermaat [6]). Or d'après la remarque (2.4) la relation canonique $C(t_0, x_0) = \bigcup_\alpha C_\alpha(t_0, x_0)$ est un graphe local, on a donc pour les opérateurs associés les propriétés de continuité H_s démontrées par Hörmander [12]. Il vient, en posant $\| \ \|_{H_s(X')} = \| \ \|_s$,

$$\|\gamma_0 D_0^j E_\mu(t_0)g\|_{s+m-r-j} \leqslant C\|g\|_{s+m-1-\mu} \text{ pour } j = 0, \dots, s+m-r$$

et en prenant le sup en $x_0 \in [0, T]$ on obtient bien

$$|[E_\mu(t_0)g]|_{s+m-r} \leqslant C \|g\|_{s+m-1-\mu}$$

PROPOSITION 3.6. – *Soit s entier $\geqslant r$, alors l'opérateur G défini en* (3.3) *est continu de* $H_s(X)$ *dans* $B_{m+s-r}(X)$ *et de plus* $\gamma_j G|_{t_0} = 0$ *pour* $j = 0, \dots, m-1$.

Démonstration. – Pour alléger on note provisoirement

$$E'_{m-1}(y_0) = E(y_0) .$$

Il s'agit donc d'étudier la continuité de l'opérateur

$$f \to Gf(x) = \int_{t_0}^{x_0} E(y_0)\, f(y_0)\, f(y_0, .)\, dy_0$$

où $E(y_0) \in I^{r-m-\frac{1}{4}}(X, X'; C(y_0))$.

Pour $j \leqslant m-1$ il vient grâce à (3.2)

$$\gamma_j(Gf)_{|x_0} = \int_{t_0}^{x_0} \gamma_0(D_0^j \circ E(y_0)\, f(y_0, .))_{|x_0} \cdot dy_0$$

et en prenant la norme H_s en les variables d'espaces, on trouve pour les mêmes raisons que dans la proposition précédente

$$\|\gamma_j\, Gf_{|x_0}\|_{m+s-r-j} \leqslant C \sum_{k=0}^{j} \int_{t_0}^{x_0} \|D_0^k f(y_0, .)\|_{s-k}\, dy_0$$

soit en appliquant l'inégalité de Schwarz

$$\leqslant CT\, \|f\|_{H_s(X)}$$

puis en prenant le sup en x_0, il vient

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sup_{0 \leqslant x_0 \leqslant T} \| \gamma_j (Gf)_{|x_0} \|_{m+s-r-j} \leqslant C' \| f \|_{H_s(X)} .$$

Pour $j = m$ on trouve

$$\gamma_m (Gf)_{|x_0} = \gamma_0 (D_0^{m-1} E(x_0) f(x_0) f(x_0 , .))_{|x_0} +$$

$$+ \int_{t_0}^{x_0} \gamma_0 (D_0^m E(y_0) f(y_0 , .))_{|x_0} \, dy_0$$

or le premier terme se majore de la façon suivante

$$\| \gamma_0 (D_0^{m-1} E(x_0) f(x_0 , .))_{|x_0} \|_{s-r} \leqslant C \sum_0^m \| D_0^k f(x_0 , .) \|_{s-k-1}$$

soit encore en utilisant le théorème de trace

$$\leqslant C' \| f \|_s$$

Pour le deuxième terme il n'y a pas de différence avec le cas où $j \leqslant m - 1$, ce qui démontre la proposition pour $s = r$ et le cas $s > r$ s'en déduit par les mêmes arguments.

PROPOSITION 3.7. – *Soit s un entier $\geqslant 1$, et* V *l'opérateur défini par l'égalité* (3.5). *Alors l'opérateur* $(I - V)^{-1}$ *se prolonge continûment de* $H_s(X)$ *dans* $H_s(X)$.

Démonstration. – Soit $g \in H_s(X)$ alors la démonstration du théorème de trace (cf. Hörmander [10]) montre facilement que

$$g \in C^j([0\ T] \ ; H^{s-j-\frac{1}{2}}(X')) ,$$

on peut alors appliquer le lemme 3.2 qui prouve l'existence de

$$f \in C^j([0\ T] \ ; H^{s-j-\frac{1}{2}}(X')) \quad j = 0 , \ldots , s - 1$$

solution de $\qquad (I - V) f = g$.

D'autre part, en écrivant $f = Vf + g$ on vérifie qu'en fait $f \in H_s(X)$ car l'expression (3.6) montre que $Vf \in C^s([0\ T] \ ; C^\infty(X'))$.

Finalement la démonstration du théorème 3.4 découle des propositions 3.5 – 3.6 – 3.7 et de l'expression (3.8).

Remarque. – On peut obtenir des résultats avec un indice s réel en séparant régularité spatiale et régularité temporelle (cf. Eskin [7], Piriou [21]). Notons aussi que les inégalités d'énergie découlent immédiatement de la continuité des opérateurs exprimant la solution.

D'autre part on a supposée X' compacte pour avoir des résultats dans des espaces de Sobolev globaux, si X' est seulement connexe les résultats dans C^∞ restent valables avec une hypothèse sur le comportement à l'infini des coefficients de P, par exemple s'ils sont constants d'un compact.

3. *Propagation des singularités.*

On utilise pour la description des singularités d'une distribution u la notion de support essentiel ou "wave front" telle qu'elle est définie par Hörmander dans [12] et que l'on note $WF(u)$.

La propagation des singularités est contenue dans le

THEOREME 3.8. – *Soit* P *un opérateur de degré* m *vérifiant les hypothèses* (H) *et* (L) *et soit* $u \in \mathcal{D}'(X)$ *solution de* $Pu = 0$. *On note* $g = \gamma u_{|t_0}$ *l'ensemble des traces* $(\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)$ *en* t_0, *alors on a*

$$WF(u) \subset C(t_0) \circ WF(g) \tag{3.10}$$

où $C(t_0) = \cup\, C_\alpha(t_0)$ *est la relation bicaractéristique associée à* p *et définie en* 2, § 4.

Démonstration. – De la proposition 3.3 et de l'expression (3.8) on déduit

$$u = \sum_\mu E'_\mu(t_0)\, g_\mu + G' \cdot (-\Sigma\, R'_\mu\, g_\mu)$$

et donc modulo une fonction $C^\infty(x_0 \geqslant t_0)$ on a

$$u \equiv \sum_\mu E_\mu(t_0)\, g_\mu$$

or on a vu que l'opérateur $E_\mu(t_0) \in I^{\overline{m}_\mu - \frac{1}{4}}(X, X'; C(t_0))$, d'où (3.10) qui découle des propriétés générales des opérateurs intégraux de Fourier.

Remarque 3.9. – Ce théorème sera précisé dans un prochain travail (cf.) [3] où l'on montre que le support essentiel W F(u) est invariant par les champs bicaractéristiques H_{q_α}.

Remarque 3.10. – (Propagation du support à vitesse finie). La condition de Lévi (L) est d'après sa définition même invariante par changement de coordonnées. D'autre part, en remarquant qu'un changement de coordonnées "space like" conserve l'hypothèse (H), on en déduit d'après Mizohata-Ohya [18] qu'il y a domaine de dépendance.

4. Remarques sur la condition de Lévi.

Pour terminer on explicite la condition de Lévi dans divers cas particuliers déjà connus.

Cas des caractéristiques de multiplicité au plus double.

Rappelons brièvement la définition du symbole sous-caractéristique c_p d'un opérateur $P \in L^m(X)$ (cf. Duistermaat-Hörmander [5]). Soit P un opérateur de degré m dont le symbole admet un développement asymptotique en composantes homogènes $\left(\sim \sum_{j \leqslant m} p_j\right)$; alors l'expression suivante, définie dans une carte de X,

$$c_p(x\,,\,\xi) = p_{m-1}(x\,,\,\xi) - \frac{1}{2i} \sum_j \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j\, \partial \xi_j} \in S^{m-1} \tag{4.1}$$

est modulo S^{m-2} invariante par les changements de cartes et s'appelle le symbole sous-caractéristique de P.

On a l'équivalence suivante

PROPOSITION 4.1. – *Soit* P *un opérateur vérifiant l'hypothèse* (H) *avec* $r_\alpha \leqslant 2$. *Alors* P *vérifie la condition de Lévi* (L) *si et seulement si le symbole sous-caractéristique de* P *est nul sur les points* $(x\,,\,d_x\varphi)$ *où* φ *est une caractéristique double de* P.

Démonstration. – On sait que la condition de Lévi est équivalente à la nullité de l'opérateur $\sigma_1(P\,,\varphi)$ quand φ est une caractéristique double, or compte tenu de l'expression de σ_1 donnée en II § 2 et des égalités

$$p_m^{(j)}(x\,,d\varphi) = 0 \qquad j = 0\,,\ldots,n-1 \tag{4.2}$$

il vient

$$\sigma_1(\mathrm{P}\,,\varphi) = p_{m-1}(x\,,d\varphi) + i \sum_{|\alpha|=2} p^{(\alpha)}(x\,,d\varphi)\,\frac{\mathrm{D}^\alpha\varphi}{\alpha\,!}\,. \tag{4.3}$$

Mais en dérivant (4.2) on trouve les identités

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_j\,\partial \xi_j}(x\,,d\varphi) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi_k\,\partial \xi_j}(x\,,d\varphi)\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\,\partial x_k} = 0$$

ce qui reporté dans (4.3) donne

$$\sigma_1(\mathrm{P}\,,\varphi) = c_p(x\,,d\varphi) \tag{4.4}$$

ce qui démontre la proposition.

On peut donner une formulation plus algébrique de la condition (L) c'est le

COROLLAIRE 4.2. – *Sous les hypothèses de la proposition précédente, l'opérateur* P *satisfait à la condition de Lévi si et seulement si*

$$c_p(x\,,\lambda_\alpha(x\,,\xi')\,,\xi') = 0 \tag{4.5}$$

pour toute racine λ_α *de multiplicité deux.*

Démonstration. – On a vu à l'occasion du lemme 2.13 que tout point $(x\,,\lambda_\alpha(x\,,\xi')\,,\xi')$ est de la forme $(x\,,d\varphi)$ pour φ caractéristique de q_α, par conséquent le corollaire découle de l'égalité (4.4).

Remarque 4.3. – Ceci est la forme de la condition de Lévi utilisée par Mizohata-Ohya [18].

Cas des coefficients constants.

On a la

PROPOSITION 4.4. – *Soit* P(D) *un opérateur à coefficients constants dans* $\mathbf{R}^n$ *et vérifiant l'hypothèse* (H). *Alors* P *satisfait à la condition de Lévi si et seulement si* P *est hyperbolique au sens de Gärding* (cf. Hörmander [10]).

Démonstration. – La condition est nécessaire : la condition de Lévi implique que le problème de Cauchy est bien posé dans C^∞ et on sait que ceci implique que P est hyperbolique.

La condition est suffisante : L'opérateur P étant hyperbolique, cela entraîne d'après un résultat bien connu de Svensson que p domine P or ceci implique facilement que la condition (L) est satisfaite ; en effet, la formule de Leibniz montre que

$$e^{-it\varphi}\, p(ae^{it\varphi}) = 0(t^{m-r})$$

si φ vérifie $p^{(\alpha)}(d\varphi) = 0 \qquad |\alpha| < r$,

et finalement l'inégalité L^2 de domination implique la condition (L) pour P.

Remarque 4.5. – Il est intéressant de noter que sous l'hypothèse de multiplicité constante l'opérateur localisé de P en ξ noté $P_\xi(D)$ par Hörmander est précisément l'opérateur de transport $\sigma_r(P, \langle \xi, . \rangle)$ si $x \to \langle \xi, x \rangle$ est caractéristique de multiplicité r.

Cas où P *est un opérateur à deux variables* ($n = 1$).

Enfin on a vu en II § 2 que les opérateurs satisfaisant la condition de Lévi (L) sont les opérateurs que De Paris [4] appelle bien décomposables et cet auteur montre l'équivalence de cette notion avec les définitions antérieures introduites par A. Lax [13].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. Bony et P. Schapira, Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, *Lecture Notes in Math.* n° 287, Springer-Verlag.

[2] J. Chazarain, Le problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques non stricts qui satisfont à la condition de Lévi, *C.R.A.S.* p. 1218 (Décembre 1971).

[3] J. Chazarain, Sur une classe d'opérateurs à caractéristiques de multiplicité constante, *Coll. Inter. C.N.R.S.* : Equat. aux Dérivées Partielles, Orsay (1972), *Astérisque* N° 2-3. Voir aussi *Ann. Inst. Fourier,* 24 (1974).

[4] J.C. De Paris, Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples ; lien avec l'hyperbolicité, *J. Math. Pures et Appl.*, 50 (1971).

[5] J.J. Duistermaat et L. Hörmander, Fourier integral operators II, *Acta Math.*, 128 (1972).

[6] J.J. Duistermaat, Applications of Fourier integral operators, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique (1972).

[7] G.I. Eskin, The Cauchy problem for hyperbolic systems in convolutions, *Trad. Math. USSR Sbornik,* Vol. 3 (1967), n° 2.

[8] H. Flaschka et G. Strang, The correctness of the Cauchy problem, *Adv. in Math.*, 6 (1971).

[9] Y. Hamada, On the propagation of singularities of the solution of the Cauchy problem, *Publ. RIMS,* Kyoto University, Vol. 6 (1970).

[10] L. Hörmander, Linear differential operators, Springer, 1963.

[11] L. Hörmander, The calculus of Fourier integral operators, Conference on Prospects in Mathematics, Princeton 1970.

[12] L. Hörmander, Fourier integral operators. I, *Acta Math.*, Vol. 127 (1971).

[13] A. Lax, On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, *Comm. Pure Appl. Math.*, 9 (1956).

[14] J. Leray et Y. Ohya, Systèmes linéaires hyperboliques non stricts, *Colloque de Liège* (1964) *C.N.R.B.*

[15] E.E. Levi, Caratteristiche multiple e problema di Cauchy, *Ann. di Mat.*, 16 (1909).

[16] D. Ludwig, Exact and Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960).

[17] S. Matsuura, On non strict hyperbolicity, *Proc. Conf. Funct. Analysis and Related Topics,* Tokyo (1969).

[18] S. Mizohata et Y. Ohya, Sur la condition de E.E. Lévi concernant des équations hyperboliques, *R.I.M.S.* Vol. 4, n° 2 (1968), Kyoto University.

[18] bis S. Mizohata et Y. Ohya, Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples, II. *Jap. J. of Math.*, Vol. 40 (1971).

[19] L. NIRENBERG et F. TREVES, On local solvability of linear partial differential equation, part II : Sufficient conditions, *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 (1970).

[20] V.M. PETKOV, Condition nécessaire pour que le problème de Cauchy associé à un système hyperbolique à caractéristiques multiples soit correct, *Uspeki*, 4 (166) 1972, p. 221-222.

[21] A. PIRIOU, Le noyau du problème de Cauchy, Séminaire à Nice (1970).

[22] Y. OHYA, On E.E. Levi's Functions for Hyperbolic Equations with Triple Characteristics, *Comm. Pure Appl. Math.*, 25 (1972).

[23] G. STRANG, On multiple characteristics and the Levi-Lax conditions for hyperbolicity, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 33 (1969).

[24] M. YAMAGUTI, Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrales singulières, *Mem. Coll. Sci. Kyoto*, 32 (1959).

Manuscrit reçu le 1er mars 1973
accepté par B. Malgrange.

Jacques CHAZARAIN,
Département de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
06 – Nice