ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCEL BRELOT

La théorie moderne du potentiel

Annales de l'institut Fourier, tome 4 (1952), p. 113-140
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1952__4__113_0>

LA THÉORIE MODERNE DU POTENTIEL *

par M. BRELOT

I. — Introduction.

1. Tout le monde connaît dans l'espace à 3 dimensions, les principes d'*électrostatique* et la formule fondamentale $Q = CV$. La physique élémentaire nous apprend que sur un conducteur une charge électrique Q peut être distribuée, d'une manière unique, de façon que le potentiel V soit constant sur ce conducteur. Alors pour Q variable, $\frac{Q}{V}$ reste le même, dépend seulement du conducteur et définit sa *capacité*. Les physiciens savent de plus que cette distribution de Q donne un état d'équilibre et correspond à un minimum de l'énergie $\frac{1}{2}\int V\,dq$. Les mathématiciens négligent le facteur $1/2$.

2. Les idées de Gauss. — Ces notions déjà abordées par Poisson se trouvent développées dans une *étude théorique de Gauss* en 1840 [0]. Plus généralement Gauss considère sur une surface conductrice Σ les diverses distributions dq d'une charge $Q > 0$, le potentiel correspondant U^q et une fonction finie continue f donnée. Il introduit l'intégrale $\int (U^q - 2f)\,dq$ mais en fait seulement pour des distributions possédant une densité sur la surface ; et il cherche à réaliser un minimum. Si $f = C^{te}$, c'est la recherche du minimum de l'énergie $\int U^q\,dq$.

* Ce bref exposé correspond à des conférences plus détaillées dont les plus récentes ont été faites en juin-juillet 1953 (Congrès de Ann Arbor et autres Universités des USA) et en septembre 1953 (Congrès de Mayence et Oberwolfach). Sur un sujet aussi vaste il ne s'agit ici que des *grandes lignes et d'une bibliographie sommaire*.

Les numéros entre crochets renvoient à des notes bibliographiques à la fin de l'article

Gauss considère comme évident que le minimum est atteint pour une certaine distribution ; il montre que le potentiel correspondant est égal à f sur Σ, à une constante près, qu'un tel potentiel de charges ou masses positives de total Q donné est *unique*, et par suite également toute distribution correspondante et la distribution minimisante.

a) Pour $f = C^{te}$, nous obtenons ainsi des masses > 0 sur Σ, dont le potentiel est constant sur Σ ; ainsi est résolu le problème dit *problème d'équilibre* ; et la solution est unique quand le total des masses > 0 ou quand la valeur constante > 0 du potentiel sur Σ sont données.

b) Si f est la valeur sur Σ du potentiel V de certaines masses de signe quelconque, situées soit à l'intérieur soit à l'extérieur du conducteur, la méthode donne des masses > 0 sur Σ dont le potentiel est le même sur Σ, à une constante près. En ajoutant ou retranchant des masses données par le problème d'équilibre, nous obtenons des masses sur Σ dont le potentiel sur Σ est exactement V. Ce nouveau potentiel sera égal à V à l'extérieur de Σ si les masses données sont intérieures, et à l'intérieur si les masses données sont extérieures. De telles nouvelles masses sont directement fournies en physique par le phénomène d'influence électrostatique.

Cette question importante, soulignée par Gauss, est appelée maintenant le *problème du balayage*. On remarquera qu'une distribution uniforme de masses sur une sphère autour du conducteur Σ a un potentiel constant à l'intérieur ; par suite le balayage de ces masses pour l'extérieur de Σ résout le problème d'équilibre, qui apparaît ainsi comme un cas particulier du balayage.

c) Gauss remarque aussi qu'en se servant encore de la solution du problème d'équilibre, on peut trouver pour un f donné, une distribution de masses sur Σ (de signes quelconques) dont le potentiel est égal à f sur Σ. Ce potentiel résout le *problème de Dirichlet* pour l'intérieur, et aussi pour l'extérieur avec valeur zéro à l'infini.

Ainsi Gauss a résolu, d'une façon satisfaisante pour son époque, à côté de bien d'autres résultats, *trois problèmes qui sont encore les plus importants en théorie du potentiel : problème d'équilibre, balayage, problème de Dirichlet*. En outre, la méthode de Gauss reste essentielle dans les recherches modernes.

3. Mais si l'on peut dire que tout est dans l'œuvre de Gauss, il apparut bientôt que la *rigueur* était insuffisante. D'abord Gauss

admettait que le minimum de l'intégrale est réalisé pour une distribution de masses; et comme il ne considérait que les distributions pourvues de densité, cela ne pouvait être vrai sans restrictions sur la surface. De plus, nous savons aussi maintenant que sans de telles restrictions, le problème d'équilibre n'est pas exactement résoluble. Pour surmonter ces difficultés et parvenir à des résultats généraux il fallut attendre près de cent ans et arriver à la thèse de Frostmann (1935) [1].

Pendant cette période [2], Dirichlet et Riemann donnèrent leur fameux principe pour résoudre le problème de Dirichlet, mais les difficultés de rigueur ne furent résolues que par Hilbert vers 1900. Rappelons aussi au siècle dernier les travaux de Neumann, Schwarz, Harnark et la célèbre méthode du balayage de Poincaré. Vers 1900 et peu après apparurent la théorie de Fredholm et ses applications aux problèmes de Dirichlet et Neumann, les travaux de Zaremba; l'intégrale de Lebesgue s'illustra dans l'étude par Fatou de l'intégrale de Poisson (voir [3 *b*]) et G. C. Evans introduisit l'intégrale de Radon en théorie du potentiel [3 *a*]. Il y a 30 ans se fit un vrai renouveau : on s'occupa des singularités des fonctions harmoniques [4], Perron [5] et Wiener [6] renouvelèrent le problème de Dirichlet qui allait beaucoup se développer par la suite, F. Riesz [7] introduisit les fonctions sousharmoniques [8] et montra qu'elles sont localement des potentiels de masses négatives à une fonction harmonique près. Vers 1930, De la Vallée Poussin [9] reprit la méthode du balayage pour étudier les masses balayées, négligées par Poincaré. Mais sauf pour le problème de Dirichlet dont je parlerai plus loin, la théorie moderne du potentiel commence son grand développement avec la thèse de Frostman.

II. — Théorie moderne du potentiel : équilibre, capacité, balayage, convergence.

4. **Première période. La thèse de Frostman.** — Nous allons voir comment apparaissent dans ce travail la plupart des principes et outils modernes. Nous supposerons $n \geqslant 3$ dimensions; il y aurait quelque adaptation à faire dans le plan.

Comme outils modernes, Frostman utilise, après Evans et F. Riesz, l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes-Radon et une notion de convergence des mesures introduite par F. Riesz : elle équivaut pour une mesure

$\mu_n \geqslant 0$ sur un compact, à la condition $\int f\,d\mu_n \to \int f\,d\mu$ pour toute f finie continue. Cette forme de convergence faible est plus connue maintenant sous le nom de convergence vague (H. Cartan). D'après F. Riesz, de toute suite bornée de $\mu_n \geqslant 0$ sur un compact, on peut extraire une suite vaguement convergente.

Afin de séparer les difficultés, Frostman étudie d'abord le problème d'équilibre pour une frontière un peu régulière. Il montre grâce à l'extraction précédente que pour toutes les mesures positives de total donné sur la frontière, le minimum de l'énergie est atteint (ce qui serait valable par une frontière quelconque); mais pour établir l'unicité de la distribution minimisante et voir qu'elle résout le problème d'équilibre, il utilise deux principes fondamentaux généraux :

Principe de l'énergie. — L'énergie de masses quelconques (mesure de Radon) est $\geqslant 0$ et nulle seulement s'il n'y a pas de masses (mesure identiquement nulle).

Principe du maximum. — (qu'il donne un peu plus loin sous la forme générale suivante) :

Si un potentiel de masses $\geqslant 0$ est $\leqslant k$ sur le noyau fermé des masses, ce potentiel est partout $\leqslant k$.

Puis afin de traiter le cas général des frontières quelconques, Frostman, qui procède par approximation à partir du cas précédent, doit *affaiblir* le problème d'équilibre, en tolérant des points exceptionnels relativement à la valeur constante du potentiel. Afin de préciser la nature d'un tel ensemble de points, il emploie la notion générale de *capacité* introduite par Wiener [6, a] et étudiée par De La Vallée Poussin [9] et Evans [10].

Si sur un compact, toute mesure > 0 possède un potentiel non borné, cet ensemble est dit de capacité nulle. (Notion dont l'importance sous une forme équivalente avait été particulièrement soulignée par Bouligand [28]).

Nous dirons « à peu près partout » dans le sens de « sauf sur un ensemble dont tout sous ensemble compact est de capacité nulle ». Alors le problème d'équilibre peut se résoudre comme suit : sur un compact donné K, non de capacité nulle, il existe une mesure unique, de total donné $Q > 0$ et telle que le potentiel soit 1) à peu près partout sur K, égal à une certaine constante V, 2) partout dans l'espace. $\leqslant V$.

Alors Q/V indépendant de Q est la capacité de K (d'ailleurs introduite autrement par Wiener). Cette μ est encore l'unique mesure $>$ o de total Q minimisant l'énergie et la capacité est identique au diamètre transfini de Fekete-Polya-Szegö [11]. Je ne puis que mentionner les développements analogues de Frostman sur le balayage, et diverses améliorations de De La Vallée Poussin [12], M. Riesz [13], C. Evans [14]. Je soulignerai cependant au sujet du balayage que, pour des masses données $>$ o hors d'un compact K, de potentiel V, il est préférable de minimiser $\int (U^q - 2V)\, dq$ sans fixer le total des masses positives dq ; la distribution $>$ o minimisante fournit directement un potentiel égal à V à peu près partout sur K.

Laissant de côté aussi l'examen de diverses définitions équivalentes de la capacité, je dois indiquer quelques notions connexes introduites un peu plus tard [15]. Pour *tout* ensemble, la capacité intérieure est la borne supérieure des capacités des compacts contenus ; la capacité extérieure est la borne inférieure des capacités intérieures des ouverts contenants. Lorsque les capacités intérieure et extérieure sont égales, la valeur commune est dite capacité ; c'est le cas des ensembles ouverts ou fermés. La capacité n'est pas additive comme une mesure, mais seulement convexe.

Notons maintenant que « à peu près partout » signifie « sauf sur un ensemble de capacité intérieure nulle » ; si nous remplaçons « intérieure » par « extérieure », nous obtenons la notion plus utile de « quasi-partout » ; et nous dirons quasi sous ou surharmonique pour qualifier une fonction quasi-partout égale à une fonction sous ou surharmonique. D'ailleurs dans diverses questions, l'importance apparut d'ensembles où quelque potentiel de masses $>$ o vaut $+\infty$ (au moins sur ces ensembles). Ces ensembles que j'ai appelés polaires [16] sont justement, comme H. Cartan le montra plus tard [19 c] identiques aux ensembles de capacité extérieure nulle.

Et dans les résultats de Frostman « à peu près partout » peut être remplacé par « quasi partout ».

5. A côté de cette méthode où l'on minimise l'intégrale de Gauss, une autre idée permit de retrouver les théorèmes d'existence et apporta des résultats d'unicité généraux (Brelot [17]).

Soit v un potentiel de masses $>$ o dans un domaine borné ω. On peut voir directement qu'il existe un potentiel unique V de masses $>$ o sur la frontière tel qu'il soit partout $\leqslant v$ et à peu près partout égal à v hors ω ; et il est alors quasi partout égal à v hors ω. V est aussi la plus petite fonction surharmonique égale à v quasi-partout ou seulement à peu près partout hors ω.

Diverses propriétés de ce genre définissent complètement le nouveau potentiel et l'on obtient les masses correspondantes ou masses balayées, par le théorème de Riesz sur la représentation potentielle des fonctions surharmoniques. Dans cette méthode au lieu de travailler sur les mesures avec toutes les ressources de la théorie de l'intégrale, on opère sur les potentiels comme fonctions surharmoniques et on passe aux masses à la fin.

La même idée peut être employée pour des masses > 0 données sur un compact, et c'est plus simple que pour un ouvert [18]. Soit μ une telle mesure > 0 sur le compact K ; il existe une plus petite fonction surharmonique, égale au potentiel donné *partout* hors K ; et c'est un potentiel.

Ainsi apparaissent deux méthodes, l'une minimisant une intégrale, l'autre minimisant un potentiel.

6. Deuxième période. Les travaux de H. Cartan. — Cette première période de la théorie moderne du potentiel comporte d'autres travaux qui vont apparaître comme des précurseurs pour la *seconde période* commençant vers 1940 et caractérisée par les travaux de H. Cartan [19].

Par exemple Frostman et M. Riesz [13] ont développé une théorie du potentiel dans l'espace euclidien mais avec un noyau $r^{\alpha-n}$ ($\alpha \leqslant 2$, $n \geqslant 3$) au lieu du noyau newtonien r^{2-n}. Il était facile de voir que bien des points de la théorie générale ne dépendent guère de l'espace euclidien, si le principe d'énergie est satisfait ; le noyau $\overline{\mathrm{MP}}^{2-n}$ peut alors être remplacé par quelque fonction symétrique $\varphi(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ dans certains espaces topologiques généraux ; bien des développements de ce genre se trouvent dans des périodiques japonais [20]. Mais il était difficile de définir des cas généraux où le principe d'énergie est vérifié. H. Cartan y réussit dans un groupe topologique localement compact avec certains noyaux très généraux, dépendant d'un paramètre comme celui de M. Riesz. Mais, ce qui était nouveau et très important, H. Cartan étudie alors pour un tel noyau fixé l'espace vectoriel des mesures μ sur des compacts quelconques et possédant une énergie finie $\int \mathrm{U}^\mu d\mu$ (U^μ potentiel de μ). Avec le produit scalaire $\int \mathrm{U}^{\mu_1} d\mu_2$ ou $\int \mathrm{U}^{\mu_2} d\mu_1$ et la norme-énergie $\|\mu\| = \sqrt{\int \mathrm{U}^\mu d\mu}$, c'est un espace « préhilbertien ». L'ensemble de tels $\mu > 0$ sur un compact fixé est évidemment convexe, mais aussi *complet*, ce qui est fondamental.

Soit alors μ_0 une mesure > 0 d'énergie finie sur un compact et considérons toutes les mesures positives μ sur un compact donné K L'intégrale de Gauss $\int (U^{\mu} - 2U^{\mu_0})d\mu$ où U^{μ_0} remplace la fonction de Gauss donnée sur la frontière est égale à

$$\int (U^{\mu} - U^{\mu_0})(d\mu - d\mu_0) - \int U^{\mu_0} d\mu_0.$$

Si nous voulons un minimum, nous devons minimiser la première intégrale, c'est-à-dire $||\mu - \mu_0||^2$. Or il y a justement une μ minimisante unique grâce à la complétion de l'ensemble des μ d'après un théorème simple et classique de F. Riesz. Le balayage apparaît, dans le cas de norme finie, comme une projection dans un espace préhilbertien.

Mais pour obtenir ensuite, pour le nouveau potentiel, les propriétés du cas newtonien, il faut supposer vérifié un principe de maximum, un peu plus fort que celui de Frostman.

Dans le cas particulier euclidien avec noyau newtonien, où ce principe est vérifié, Cartan peut aller beaucoup plus loin [19 *c*]. Il considère dans tout l'espace les mesures d'énergie finie et leur espace préhilbertien correspondant. Parmi ces mesures, les mesures positives forment un ensemble *complet*.

De là, Cartan déduit une forme définitive du théorème de convergence pour les fonctions surharmoniques. Il est évident qu'une suite croissante de telles fonctions tend vers $+\infty$ ou vers une fonction surharmonique. Pour une suite décroissante de tels $u_n > 0$ la limite u diffère d'une fonction surharmonique sur un ensemble E. On avait montré d'abord (Spilzrajn-Radò [8]) que E a une mesure de Lebesgue nulle et j'avais pu établir [21] grâce au théorème d'équilibre de Frostman, que sa capacité *intérieure* est nulle. Cartan montre que la capacité *extérieure* est nulle, c'est-à-dire que u est quasi-surharmonique. De plus, au lieu d'une suite considérons une famille quelconque de fonctions surharmoniques > 0 ; l'enveloppe inférieure est encore quasi-surharmonique.

Ce puissant théorème de Cartan est la clef de la théorie du potentiel newtonien et j'ai pu aisément alors étendre la théorie du balayage, comme méthode minimisante sur les fonctions, à des ensembles quelconques et non plus seulement ouverts ou fermés [22]. Peu après, Cartan étudiait directement ce balayage général, sans son théorème de convergence, d'abord pour des mesures d'énergie finie, puis dans le cas général grâce à une certaine continuité [19 *d*].

Si l'on veut caractériser cette seconde phase de la théorie moderne du potentiel on peut dire que les difficultés sont résolues directement, sans approximation, grâce à de nouveaux outils : ce sont des *convergences et topologies sur les ensembles de mesures*. Frostman ne disposait que de la convergence vague. Avec des espaces de Hilbert et *l'énergie* apparaissent les convergences forte et faible et même en plus une certaine convergence « fine ».

7. Troisième période ; distributions de Schwartz et thèse de Deny. — Nous arrivons à une troisième période avec les distributions de Schwartz (1945) [23] et la thèse de Deny (1950) [24]. Cartan avait remarqué que l'espace préhilbertien des mesures d'énergie finie dans le cas newtonien n'est pas complet ; Deny essaya d'interpréter les nouveaux éléments donnés par la complétion. Le meilleur moyen est dans l'emploi des distributions de Schwartz qui avaient été déjà utiles en théorie du potentiel.

Rappelons qu'une distribution de Schwartz est une fonctionnelle linéaire $T(\varphi)$ sur l'ensemble de toutes les fonctions φ de classe C^∞ dans l'espace euclidien R^n, égales à o hors d'un compact dépendant de φ. On suppose seulement que $T(\varphi)$ satisfait à la condition de continuité suivante : si φ_n est nulle hors d'un compact fixe, si $\varphi_n \to 0$ uniformément et si chaque dérivée tend vers o uniformément, $T(\varphi_n)$ doit tendre vers o.

Le support d'une φ est le complémentaire de l'ensemble où $\varphi = 0$. On dit que T est nulle dans un ouvert ω si $T(\varphi) = 0$ quand le support de φ est contenu dans ω. Le support de T est le complémentaire du plus grand ouvert où $T = 0$.

Comme distributions particulières rappelons :

1° $T(\varphi) = \int f\varphi\, dv$ (dv mesure-volume dans R^n) où φ est localement sommable.

On dit alors que la distribution est la fonction f.

2° $T(\varphi) = \int \varphi\, d\mu$ où μ est une mesure de Radon.

On dit que T est la mesure μ.

Lorsque $T(\varphi) \geqslant 0$ pour toute $\varphi \geqslant 0$, T est une mesure positive de Radon. Rappelons aussi quelques définitions :

1° Dérivée : T'_x est définie par $T'_x(\varphi) = -T(\varphi'_x)$.

2° Produit de composition. Si S, T sont deux distributions (dans le même espace) dont l'une au moins est de support compact, on pose :

$$(S * T)(\varphi) = S_u[T_v(\varphi(u+v))] \quad \text{égal à} \quad T_v(S_u(\varphi(u+v))).$$

La dérivation apparaît comme un produit de composition : si ε est la « distribution de Dirac » c'est-à-dire la mesure définie par la masse $+1$ à l'origine, $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} = T * \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}$.

Toute fonction localement sommable considérée comme une distribution (donc définie seulement à un changement près sur un ensemble de mesure nulle) possède une dérivée qui est une distribution et le produit de composition est un outil très commode. Aussi les distributions permettent souvent de faire pour des fonctions non dérivables le même calcul formel que pour les fonctions différentiables en évitant ainsi des approximations.

En théorie du potentiel, considérons d'abord l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ au sens des distributions. Les solutions sont seulement les fonctions harmoniques dans tout l'espace mais on peut donner aussi une interprétation locale : si T satisfait à l'équation dans un ouvert ω, il existe une fonction harmonique h dans ω telle que $T(\varphi) = \int h\varphi\, dv$ pour toute φ dont le support est dans ω.

Remarquons maintenant essentiellement que le potentiel newtonien classique de masses avec densité f (localement sommable et nulle hors d'un compact) est le *produit de composition* $\dfrac{1}{r} * f$ au sens classique ordinaire. On pourrait faire une remarque analogue avec une mesure au lieu d'une densité.

Alors Schwartz définit le potentiel newtonien (dans R^3 par exemple) de toute distribution T à support compact comme la distribution $U^T = \dfrac{1}{r} * T$ et il est aisé de voir que $\Delta U^T = -4\pi . T$. De plus la condition (sur les distributions) $\Delta u \geqslant 0$ c'est-à-dire $(\Delta u)(\varphi) \geqslant 0$ pour $\varphi \geqslant 0$, exprime que u est une *fonction* presque sousharmonique (c'est-à-dire sousharmonique à un changement près sur un ensemble de mesure nulle) et l'on peut donner encore une interprétation locale. Enfin le raisonnement élémentaire donnant la décomposition de Riesz pour des fonctions à dérivées secondes continues s'applique avec les distributions pour traiter le cas général.

8. A côté de l'introduction du produit de composition, *une autre* *idée* nouvelle en théorie ancienne est l'expression suivante de l'énergie, qui est la base de la thèse de Deny.

Considérons le potentiel newtonien classique V de masses pourvues d'une densité $f(M)$, nulle hors d'un compact et par exemple de classe C^∞. L'énergie $\int Vf\,dv$ est égale à $\int \frac{|\mathcal{T}|^2}{r^2}\,dv$ à un facteur constant près, où $\mathcal{T}$ est la transformée de Fourier de f, et $1/r^2$ d'ailleurs la transformée de Fourier de $1/r$.

Deny obtient une telle forme de l'énergie pour une classe générale de distributions (au lieu de masses avec densité ou même de mesures) et pour des noyaux plus généraux que le noyau newtonien $1/r$, mais tout cela dans l'espace euclidien. Précisons. Introduisons les distributions « tempérées » de Schwartz. Elles satisfont à une condition de continuité plus forte. Considérons une suite quelconque φ_n de nos φ, mais sans compact fixé contenant les supports, avec les conditions,

$$\left.\begin{matrix}\varphi_n \\ \text{toute dérivée} \\ \text{fixée}\end{matrix}\right\} \times \text{ tout polynôme fixé} \to 0 \text{ uniformément } (n \to \infty).$$

La nouvelle condition de continuité est $T(\varphi_n) \to 0$.

On peut alors aisément, par un passage à la limite, définir $T(\psi)$ pour des ψ plus générales que nos φ. Au lieu d'être nulles hors d'un compact, ces ψ satisfont à

$$\left.\begin{matrix}\psi \\ \text{toute dérivée fixée}\end{matrix}\right\} \times \text{ tout polynôme fixé} \to 0 \ (OM \to \infty).$$

Alors la transformation de Fourier $v(y) = \int u(x)e^{-2i\pi x \cdot y}\,dx$ pour les fonctions dans l'espace euclidien ne présente pas de difficultés pour ces fonctions ψ. Et la définition de la transformation de Fourier pour des distributions tempérées U est donnée comme suit : la distribution transformée est la distribution tempérée V telle que $V(\psi) = U(\psi_1)$ où ψ_1 est la transformée de Fourier de ψ.

Alors Deny introduit des noyaux N, qui sont certaines distributions tempérées dont chacune admet comme transformée de Fourier une fonction $\mathfrak{N}$; et il se sert de *toutes* les distributions tempérées T dont les transformées sont des fonctions notées $\mathcal{T}$.

Le potentiel d'une telle distribution T pour un noyau N est *par définition* la distribution $N * T$ et son énergie $\int \mathfrak{N}|\mathcal{T}|^2\,dv$. L'espace

vectoriel des distributions T *d'énergie finie* est alors pourvu d'un produit scalaire $\int \mathcal{N}\mathcal{T}_1\overline{\mathcal{T}_2}\,dv$ et de la norme $\sqrt{\int \mathcal{N}|\mathcal{T}|^2\,dv}$.
Mais cet espace est maintenant *complet;* c'est un espace de Hilbert. Deny étudie essentiellement ces potentiels généraux d'énergie finie et fait des extensions de la théorie de Cartan. Il étudie surtout le noyau quand c'est une mesure positive parce que le potentiel est alors une fonction.

Le cas newtonien est approfondi et je souligne que les potentiels correspondants $\frac{1}{r} * T$ sont justement les fonctions de Beppo Levi-Nikodym, à une constante additive près, ce qui fournit de nouvelles propriétés de ces fonctions.

Deny donne enfin une interprétation de ces potentiels newtoniens qui ne sont pas potentiels d'une mesure; ce sont toutes les autres limites de tels potentiels, selon la norme-énergie; ils généralisent les doublets de la théorie classique du magnétisme ainsi intégrée en théorie du potentiel.

Résumons sans plus de détails cette nouvelle étape de la théorie du potentiel: nous sommes dans l'espace euclidien mais nous utilisons des distributions de Schwartz au lieu de mesures; les potentiels sont des distributions définies comme produit de composition, avec des noyaux qui peuvent être des distributions; mais l'on n'étudie que le cas d'énergie finie, et l'on se sert essentiellement de la transformation de Fourier-Schwartz.

9. Dans les travaux ultérieurs de Cartan et Deny [25], on n'utilise plus de distributions de Schwartz mais seulement des mesures. Un potentiel est le produit de composition d'une mesure fixe (le noyau) et d'une mesure variable, dans l'espace euclidien. Dans le cas d'énergie finie, où le potentiel est alors une fonction, on cherche si l'équilibre ou le balayage sur un compact sont possibles pour un noyau donné. Un critère est la validité du principe de maximum de Cartan. On recherche des classes de noyaux qui y satisfont.

10. **Quatrième période.** — Les derniers travaux de Deny [26] marquent le début d'une nouvelle phase. Plus de distributions et plus d'énergie. Le potentiel est un produit de composition de deux mesures dans un groupe topologique abélien localement compact.

Laissant de côté la norme-énergie de Cartan, nous revenons au fond à la seconde idée directrice où les potentiels étaient directement étudiés et minimisés, mais au lieu de fonctions ce sont maintenant des mesures. De cette étude qui ne suppose rien de connu dans l'énorme bibliographie antérieure, extrayons le nouvel aspect du problème du balayage :

Soit N une certaine mesure positive fixée dite noyau. Pour toute mesure positive μ de support compact et tout ouvert borné ω, on cherche s'il existe une mesure positive μ' sur l'adhérence $\bar{\omega}$ telle que

$$N * \mu' \leqslant N * \mu \quad \text{(inégalité entre mesures dans tout l'espace)}$$
$$N * \mu' = N * \mu \quad \text{dans } \omega.$$

Deny indique des classes générales de noyaux pour lesquels le problème est résoluble, sans s'occuper de l'unicité.

Pour cela, il introduit d'ailleurs des familles générales de mesures σ généralisant la distribution uniforme élémentaire de masses sur les surfaces sphériques. Une mesure réelle U est dite surharmonique si $U * \sigma \leqslant U$ pour tout σ.

Et Deny donne un théorème de décomposition analogue à celui de F. Riesz pour les fonctions surharmoniques.

Je résume : le mot potentiel a en fait disparu ; la théorie du potentiel est devenue un chapitre de l'étude des produits de composition de mesures.

11. La capacité selon Choquet. — A tous ces travaux il faut adjoindre l'ébauche d'une théorie considérable de Choquet, publiée dans de courtes notes de résultats [27].

J'ai souligné dans le cas newtonien la différence entre les capacités intérieure et extérieure et le progrès décisif du passage de l' « à peu près partout » au « quasi-partout ». La différence était grande parce que nous ne savions pas si pour les ensembles boréliens, les deux capacités sont égales.

Or, il y a quelques années Choquet réussit à démontrer cette égalité, même pour les ensembles analytiques.

Choquet remarque d'abord que la capacité newtonienne d'un compact K est une fonctionnelle $f(K)$, croissante, continue à droite, et « fortement convexe » c'est-à-dire telle que

$$f(K_1 \cup K_2) + f(K_1 \cap K_2) \leqslant f(K_1) + f(K_2).$$

Introduisons pour des compacts X, A_1, A_2 ... A_n ...

$$\Delta_1(X, A_1) = f(X \cup A_1) - f(X)$$
$$\Delta_2(X, A_1, A_2) = \Delta_1(X \cup A_2, A_1) - \Delta_1(X, A_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_n(X, A_1, \ldots A_n) = \Delta_{n-1}(X \cup A_n, A_1, \ldots A_{n-1}) - \Delta_{n-1}(X, A_1, \ldots A_{n-1})$$

Remarquons que la condition de croissance peut s'écrire : $\Delta_1 \geqslant 0$ et celle de convexité forte : $\Delta_2 \leqslant 0$.

Or pour notre capacité newtonienne, les Δ_n sont *tous* alternativement $\geqslant 0$ et $\leqslant 0$.

Choquet développe alors une vaste théorie des fonctionnelles de compacts en espace topologique séparé, lorsqu'elles sont supposées croissantes, continues à droite et satisfont à des conditions sur les Δ_n, en particulier celle du signe indéfiniment alterné. Il y a dans ce cas une grande analogie avec les fonctions complètement monotones et des applications au calcul des probabilités. De plus, les capacités généralisées intérieure et extérieure déduites de notre $f(K)$ sont alors égales pour les images continues de tout ensemble K-borélien (défini par intersection et réunion dénombrable à partir des compacts).

III. — Questions connexes sur les fonctions harmoniques. Problème et principe de Dirichlet.

12. Le problème de Dirichlet [28]. — Mais on fait d'ordinaire entrer dans la théorie du potentiel d'autres questions importantes d'ailleurs étroitement liées aux précédentes et qui restent à examiner. La théorie des fonctions harmoniques a été étudiée en détail dans le cercle il y a quelques dizaines d'années (voir [3 *b*]) et cela suggère pour des domaines quelconques bien des recherches encore en cours.

Parlons d'abord du renouveau du problème de Dirichlet. On sait que les diverses solutions du siècle dernier n'épuisaient pas un sujet qui restait l'objet de la 20ᵉ question de Hilbert au Congrès de 1900. On faisait sur la frontière des restrictions dont Zaremba et Lebesgue montrèrent la nécessité vers 1910-1913. C'est seulement en 1923 que Wiener [6] introduisit nettement dans le cas général d'une donnée finie continue sur une frontière quelconque une « solution généralisée » égale à la solution classique quand celle-ci existe, et qu'on étudie à la frontière.

Utilisant une méthode de Perron [5], il en donna ensuite une définition équivalente conduisant à l'exposé moderne que voici :

Soit Ω un domaine borné euclidien, f une fonction réelle sur la frontière. Nous considérons dans Ω les fonctions égales à $-\infty$ ou sousharmoniques mais chacune bornée supérieurement, avec la condition frontière que la plus grande limite en tout point-frontière P est $\leqslant f(P)$. Alors l'enveloppe supérieure $\underline{H}_f$ est $-\infty$, $+\infty$ ou harmonique.

On définit de manière analogue $\overline{H}_f$ d'ailleurs égale à $-\underline{H}_{(-f)}$. Si f est finie continue, on a l'égalité de Wiener $\underline{H}_f = \overline{H}_f$ et la valeur commune $H_f(M)$ est pour chaque M, une fonctionnelle de f qui définit une mesure de Radon μ^M sur la frontière. C'est la mesure harmonique, d'ailleurs obtenue aussi par balayage de Ω contenant la masse 1 en M (De La Vallée Poussin) ce qui s'exprime encore de la façon suivante :

Introduisons la fonction de Green $G_P(M)$, qui est la plus petite fonction surharmonique > 0 dans Ω dont les masses associées se réduisent à ε_P (masse 1 en P) (et d'ailleurs symétrique en M et P dans Ω). Son prolongement par 0 est « quasi sousharmonique » hors P et les masses associées sont celles du balayage de ε_P c'est-à-dire la mesure harmonique en P.

Maintenant pour tout f, $\underline{H}_f$ et $\overline{H}_f$ ne sont égales et finies que si f est sommable relativement à la mesure harmonique (ce qui ne dépend pas de M). Et la valeur commune $H_f(M)$ vaut $\int f d\mu^M$. En démontrant ce « théorème de résolutivité » en 1939 [29], j'utilisais certains résultats de la théorie moderne du potentiel, mais j'ai pu récemment [30] faire un raisonnement très simple qui n'utilise plus l'allure des $\underline{H}_f \overline{H}_f$ à la frontière mais seulement des propriétés élémentaires des fonctions sousharmoniques et de l'intégrale de Poisson.

Quant à *l'étude* de H_f *à la frontière*, elle demande l'appui de la théorie du potentiel qui permet maintenant de traiter aisément cette question d'abord difficile. On peut définir les points réguliers de la frontière par la condition que H_f, pour toute f finie continue, tende vers $f(P)$ en un tel point P. Et alors pour f quelconque bornée supérieurement, $\limsup\limits_{M \to P} \overline{H}_f \leqslant \limsup\limits_{Q \in \dot{\Omega},\ Q \to P} f(Q)$.

Il avait fallu presque dix ans pour arriver au résultat capital (Kellog-Evans, 1933 [31]) que les points irréguliers forment un ensemble polaire.

Or disons qu'un ensemble E est effilé en O (Brelot [15]) s'il existe une fonction sousharmonique dont la plus grande limite en O prise sur E hors O est plus petite que la valeur en O. Le grand théorème de convergence de Cartan montre [32] que les points d'un ensemble où il est effilé forment un ensemble polaire ; c'est justement le cas des points irréguliers dont la définition équivaut à l'effilement du complémentaire de Ω et dont l'étude fort développée [33] et dominée par le critère de Lebesgue-Bouligand et le célèbre critère de Wiener [6 *b*], rentre donc dans la théorie de l'effilement [15, 22, 32] qui en est issue.

Soulignons que les complémentaires, augmentés du point O, des ensembles effilés en O constituent pour tout O les voisinages dans la topologie la moins fine rendant continues les fonctions sousharmoniques. Cette topologie « fine » de H. Cartan permet d'exprimer commodément d'importants résultats sur l'allure à la frontière de H_f et en général des fonctions harmoniques ou sousharmoniques [34].

Enfin, une étude approfondie des fonctions sousharmoniques au voisinage du point à l'infini de R^n [35], ce qui n'est pas trivial si $n \geqslant 3$, permet, en leur donnant une valeur en ce point, de conserver les propriétés essentielles et définitions antérieures dans tout domaine de l'espace $\overline{R}^n$ rendu compact par adjonction de ce point à l'infini. Le problème de Dirichlet se traite de même pour un tel domaine Ω pourvu que le complémentaire soit non polaire. On a aussi étudié dans $\overline{R}^n$ un problème un peu analogue pour compacts, qui est lié à l'approximation par des fonctions harmoniques d'une fonction finie continue sur la frontière d'un compact (voir [17 *b*, 18, 36]).

13. Surfaces de Riemann et espaces $\mathcal{E}$. Espaces de Green. — La nature locale de la plupart des difficultés devait amener des recherches d'extension pour des variétés plus générales. On a beaucoup étudié ces dernières années la théorie du potentiel sur les surfaces de Riemann [37] et envisagé un peu des variétés analogues à 3 dimensions [38]. Ces cas sont inclus dans les espaces $\mathcal{E}$ récemment introduits [30] comme suit : espaces topologiques séparés connexes tels qu'à chaque point P sont associés un voisinage ouvert $\mathcal{V}_P$ et un homéomorphisme de $\mathcal{V}_P$ sur un ouvert de $\overline{R}^\tau$ (τ fixé) avec la propriété suivante : si $\mathcal{V}_{P_1} \cap \mathcal{V}_{P_2}$ est non vide, la correspondance en évidence de ses deux images dans $\overline{R}^\tau$ est supposée isométrique ou bien encore dans le cas $\tau = 2$ seulement conforme. Cette correspondance peut d'ailleurs être directe ou inverse.

Un tel espace $\mathcal{E}$ est métrisable et réunion dénombrable de compacts. Dans le cas de structure conforme, on peut choisir une métrique engendrée par un ds^2 qui est localement le ds^2 euclidien à un facteur près de classe C^∞.

Les « points à l'infini » (c'est-à-dire d'image venant au point à l'infini de $\overline{R^\tau}$) sont dénombrables. On les évite dans le cas de structure conforme.

Lorsqu'il existe une fonction surharmonique > 0 non constante, il y a en particulier une fonction de Green définie encore comme plus haut et l'espace est dit espace de Green. Tout domaine de $\mathcal{E}$ constituant seul un espace de Green est dit domaine de Green.

14. Extension du problème de Dirichlet. Axiomatique. Cas particuliers [30]. — Dans un domaine de Green Ω d'un espace $\mathcal{E}$ on étend d'abord la théorie de plus haut comme suit : on introduit un espace $\mathcal{E}'$, identique à $\mathcal{E}$ si $\mathcal{E}$ est compact, sinon déduit de $\mathcal{E}$ par adjonction d'un point d'Alexandroff.

Avec la topologie de $\mathcal{E}'$ on peut alors pour Ω et sa frontière adapter la théorie. C'est le problème de Dirichlet « ordinaire ».

Mais les conditions-frontière n'en sont pas assez raffinées. Aussi en espace euclidien Perkins [39] et De la Vallée Poussin [12] avaient introduit des conditions correspondant à des limites le long de lignes aboutissant aux points-frontière accessibles et groupées en classes d'équivalence. Les problèmes correspondants et d'autres analogues plus ou moins développés ont conduit récemment à l'*axiomatique* que voici [30].

On choisit dans un espace de Green $\mathcal{E}$ une structure uniforme (compatible avec la topologie) dont la complétion donne l'espace $\widehat{\mathcal{E}}$ et la frontière $\widehat{\mathcal{E}} - \mathcal{E}$. On suppose dans $\mathcal{E}$ l'existence de filtres $\mathcal{F}$ convergeant vers des points-frontière et satisfaisant aux deux axiomes :

A. (principe de maximum). Si u sousharmonique bornée supérieurement admet une lim. sup $\leqslant 0$ selon chaque $\mathcal{F}$, alors $u \leqslant 0$.

B. (condition locale inspirée de la « barrière » de Lebesgue). Pour chaque $\mathcal{F}$, il existe un voisinage ouvert du point de convergence Q, soit w_Q, tel que sur $w_Q \cap \mathcal{E}$ une fonction surharmonique $v > 0$ tende vers 0 selon $\mathcal{F}$ et admette une borne inférieure > 0 hors de tout voisinage de Q.

Cela suffit pour l'adaptation de la théorie « ordinaire », avec une mesure harmonique généralisée et un théorème de résolutivité.

On peut comparer les mesures harmoniques relatives à deux espaces $\widehat{\mathcal{E}}$ dérivant d'un même $\mathcal{E}$ pourvu de deux structures comparables.

Cas particuliers. — Reprenons $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et un domaine de Green Ω dans $\mathcal{E}$. En prenant dans Ω la structure uniforme du compact $\mathcal{E}'$ on retrouve le problème ordinaire. Prenons-y la métrique de Whyburn-Mazurkiewicz dérivant d'une métrique compatible avec cette structure de $\mathcal{E}'$: la distance de M_1M_2 y est la borne inférieure des diamètres des arcs joignant M_1M_2 sur Ω. On obtient ainsi le problème dit « ramifié » contenant les recherches de Perkins-De la Vallée Poussin. En remplaçant le diamètre par la longueur de l'arc calculée au moyen du ds^2 local (dans le cas d'un Ω dont l'adhérence est compacte et ne possède pas de points à l'infini), on obtient le problème « géodésique ».

Dans le cas d'un domaine plan simplement connexe, les mesures harmoniques ramifiée et géodésique coïncident à peu près avec la « mesure conforme » [34 *a*].

15. Fonctions harmoniques positives et topologie de Martin. — On sait depuis longtemps (Voir [3 *b*]) que les fonctions harmoniques positives dans le cercle sont représentéees par l'intégrale de Poisson-Stieltjes. Afin d'en faire une extension à tout domaine borné euclidien, et ce sera la même théorie pour un espace de Green Ω, R. S. Martin introduisit il y a une douzaine d'années [40] une nouvelle frontière qui forme avec Ω un compact, de telle sorte que toute fonction harmonique positive s'exprime $u(P) = \int K(M, P)\, d\mu^M$; μ est une mesure de Radon > 0 sur la nouvelle frontière, $K(M, P)$ un noyau indépendant de u, généralisant le noyau de Poisson, avec $K(M, P_0) = 1$. Cette représentation est unique si μ ne charge que l'ensemble de la frontière de Martin pour lequel les $K(M, P)$ sont les éléments extrémaux de l'ensemble des fonctions harmoniques positives égales à 1 en P_0 fixé. Il serait intéressant de développer davantage la théorie des points extrémaux pour éviter les difficultés techniques de Martin.

La théorie de Martin a eu quelques applications, comme une forme générale du principe des singularités positives de Bouligand [41]. Elle est sans doute liée étroitement à la théorie qui suit:

16. Les lignes de Green. — L'importance des limites radiales dans la théorie des fonctions harmoniques, sousharmoniques, holomorphes dans le cercle et la transposition dans un domaine simplement connexe ([3 *b*], [12 *c*]) attirait l'attention sur le cas général des trajectoires orthogonales des lignes ou surfaces de niveau de la fonction de Green (appelées sphères de Green Σ_P^λ définies par $G_P = \lambda$) [30]. Prenons un espace de Green $\mathcal{E}$ et fixons le pôle P de la fonction de Green. Appelons lignes de Green les arcs maximaux de telles trajectoires. D'abord *au voisinage de pôle* P, (par exemple non à l'infini), les lignes convergent vers P pour $G \to \infty$ et admettent une tangente en P. Pour toute direction issue de P, il y a une seule ligne qui lui est tangente. Si l'on considère une petite Σ_P^λ, il y a un homéomorphisme par les lignes de Green entre les points de Σ_P^λ et les directions issues de P. On choisit sur l'ensemble $\mathcal{L}$ des lignes issues de P une *topologie* définie par la topologie sur une petite Σ_P^λ. De plus, on y définit une *mesure* par la mesure angulaire des tangentes en P (réduite à 1 pour le total) ; c'est aussi la mesure harmonique en P de l'ensemble correspondant sur un Σ_P^λ (relativement au domaine D_P^λ, $G > \lambda$), ou encore le flux, à un facteur près, du faisceau de lignes ; on l'appelle *mesure de Green* notée *dg*.

Etudions les lignes issues de P et coupant un Σ_P^λ quelconque donné. Elles forment sur $\mathcal{L}$ un ouvert et correspondent aux traces sur Σ_P^λ dans un homéomorphisme égalisant la mesure de Green et la mesure harmonique relative au domaine D_P^λ dans $\mathcal{E}$. Mais *presque toutes* les lignes issues de P coupent Σ_P^λ, Appelons *régulières* les lignes sur lesquelles la borne inférieure de G_P est nulle. Alors presque toutes les lignes issues de P sont régulières.

On peut attribuer aux lignes une longueur généralisée et voir que presque toutes sont de longueur finie. D'où des propriétés de convergence. Lorsque les lignes régulières convergent presque toutes dans un espace $\widehat{\mathcal{E}}$, la mesure harmonique peut se comparer à la mesure de Green qui apparaît comme un outil plus puissant dans les applications.

17. Radiale et principe de maximum [42]. — D'importantes applications utilisent la notion de *radiale*. Soit v une fonction borélienne dans $\mathcal{E}$, $v_\lambda(l)$ sa valeur sur la ligne régulière l au point où $G = \lambda$.

Si $\overline{\int} |v_\lambda(l) - \varphi(l)|\, dg \to 0$ pour $\lambda \to 0$, $\varphi(l)$ est dite *radiale* de v.

Si $\int^* [v_\lambda(l) - \varphi(l)]^+ dg \to 0$, φ est dite *majorante radiale* (on suppose φ finie presque partout $-dg$)

Alors : soit u sousharmonique ; on la suppose bornée supérieurement ou bien possédant une intégrale de Dirichlet finie ; alors si o est majorante radiale, $u \leqslant 0$.

Un énoncé réduit plus simple est que si u sousharmonique bornée supérieurement admet le long de presque toutes les lignes régulières une lim sup $\leqslant 0$, alors $u \leqslant 0$.

Cela suggère de poser un problème de Dirichlet où les conditions-frontières s'exprimeraient au moyen de limites le long des lignes de Green, même seulement en moyenne. On peut encore comparer les enveloppes mais celles-ci ne coïncident pas dans des cas simples ; on le voit sur des exemples faciles à former avec une surface de Riemann possédant une fonction de Green mais où toute fonction harmonique bornée est constante (pour une telle surface voir [43]).

18. Le principe de Dirichlet. — Une des applications les plus importantes des lignes de Green concerne une nouvelle manière bien plus générale de formuler le principe de Dirichlet qui était resté presque au même stade depuis longtemps [44]. Appelons norme $\|f\|$ d'une fonction f la racine carrée de son intégrale de Dirichlet. On sait depuis très longtemps que pour un domaine euclidien borné Ω de frontière assez régulière et une fonction f assez régulière sur cette frontière, il y a parmi les fonctions finies continues dans $\overline{\Omega}$, continûment différentiable dans Ω et de norme finie, une et une seule de norme minima, prenant les valeurs de f à la frontière. C'est la solution du problème de Dirichlet pour la donnée f et c'est aussi la seule fonction harmonique (à une constante près) de norme finie, qui minimise $\|u - F\|$, où F est un prolongement assez régulier de f.

Zaremba, Nikodym [45] séparèrent cette recherche du minimum de $\|u - F\|$ pour des fonctions F plus générales. Récemment Bochner [46] alla plus loin dans le cas particulier d'un domaine euclidien Ω borné limité par quelques sphères. Il montre que pour toute fonction F dans Ω, continûment différentiable par morceaux et de norme finie (sans restriction à la frontière), il y a pour chaque sphère limitante une fonction-limite en moyenne quadratique, calculée au moyen de sphères concentriques voisines. Parmi les fonctions analogues à F, la fonction harmonique minimisant $\|u - F\|$ est la seule qui a les mêmes fonctions-limites et la plus petite norme. C'est cela qui m'a conduit à l'idée de fonction radiale. Nous allons adapter l'idée de Bochner dans le cas général, en remplaçant les sphères concentriques par des sphères de Green. et la moyenne quadratique par une moyenne simple [42 *a*].

Nous prenons naturellement un espace de Green Ω et des fonctions sur Ω meilleures que celles précédemment utilisées ; dans sa thèse Deny [24 *a*] étudie des fonctions plus précises que les fonctions (BL) de Beppo Levi-Nikodym et qu'on peut définir directement comme suit : ce sont des fonctions définies et finies quasi partout (hors des points à l'infini), limites quasi-partout, et aussi selon la norme d'une suite u_n de fonctions continûment différentiables (ou même de classe C^∞), de norme finie. Ces fonctions que j'appelerai (BLD) forment, lorsqu'on les considère à un facteur près et qu'on introduit un produit scalaire $\int (\text{grad}\, \partial_1, \text{grad}\, \partial_2)\, dv$ un espace de Hilbert. Elles admettent une radiale pour tout pôle. Alors on montre d'abord, comme avant, que pour une fonction ∂(BLD), il existe une fonction harmonique de norme finie, unique à une constante près, qui minimise $\|u - \partial\|$. Considérons un domaine Ω_n relativement compact tendant en croissant vers Ω, ou bien les domaines $D_P^\lambda (\lambda \to 0)$ et les données-frontières égales à ∂, La solution du problème de Dirichlet correspondant existe et a une limite U ; et cette limite est la fonction minimisante qui précède. C'est aussi la seule fonction (BLD) de même radiale que ∂ et qui soit harmonique ou bien de norme minima.

Ainsi toute fonction (BLD) est décomposée de façon unique en une (BLD) de radiale nulle, et une (BLD) harmonique (donc de même radiale). Ces deux types de fonctions forment d'ailleurs deux sous-espaces fermés orthogonaux complémentaires, et le premier est aussi celui des fonctions, limites quasi-partout et en norme, des (BLD) nulles hors d'un compact.

On retrouve ainsi une décomposition obtenue par Deny [24 *a*] dans R^n avec l'aide des distributions de Schwartz et sans l'interprétation de la radiale nulle.

Signalons enfin la possibilité de développements analogues en remplaçant les sphères de Green par les surfaces de niveau de fonctions harmoniques plus générales.

19. Conclusion. — J'ai laissé de côté sur les sujets précédents bien des travaux non sans importance, mais il resterait surtout à examiner sur les fonctions harmoniques d'autres questions un peu en marge de ce qu'on appelle la théorie du potentiel. comme les surfaces minima [44], les systèmes orthogonaux de fonctions harmoniques et le noyau résultant associé de Bergmann étroitement lié aux fonctions de Green et Neumann [47]. Je me contenterai d'ajouter quelques mots sur les *applications et la portée des théories* examinées plus haut. C'est l'étude des modules des fonctions holomorphes $f(z)$ qui a fait isoler par F. Riesz [7 *a*] la notion de fonction sousharmonique dont $|f(z)|$ est un cas particulier. En retour, la théorie du potentiel est aujourd'hui constamment utilisée pour les fonctions d'une [48] ou de plusieurs variables complexes [49], et pour approfondir la classification des surfaces de Riemann [37]. De même si, comme on l'a vu, la théorie du potentiel doit beaucoup aux idées modernes, il faut savoir que c'est à l'occasion d'un critère de polyharmonicité [50] qu'a pris naissance la théorie des distributions de Schwartz. On a vu aussi un échange analogue à propos des recherches de Choquet sur les fonctions croissantes d'ensemble et il faut encore signaler l'influence sur la théorie des équations aux dérivées partielles du type elliptique [51] et les liens divers avec la théorie des probabilités [52]. Enfin, si je n'ai guère examiné que les grandes vues théoriques, il faut mentionner des efforts de calcul numérique et surtout les nombreuses inégalités sur la capacité comparée à d'autres paramètres géométriques, obtenues par des voies souvent élémentaires mais ingénieuses, et récemment groupées dans un ouvrage (Polya-Szëgo [53]).

Ainsi ne se ralentit pas la fécondité d'une théorie qui, après avoir compté tant de noms illustres reste un centre dans l'analyse contemporaine.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

(sous forme de notes auxquelles il est renvoyé dans le texte par les numéros entre crochets)

[0] C. F. Gauss. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im Verkehrten Verhältnisse des *Quadrats der Entfernungwirkenden* Anziehungs und Abstossungskräfte, *Gauss Werke. t. 5. pp.* 197-242.

[1] Frostman. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles (*Medd. Lunds Un. Math. Sem.*, 3, 1935).

[2] Pour la bibiographie ancienne, voir :
O. D. Kellog. Foundations of Potential Theory (*Grundl. der Math. Wiss.*, B^d 31, Berlin, Springer, 1929).

[3] G. C. Evans. *a*) Fundamental points of potential theory (*Rice Inst.*, Pamphlet, VII, 1920, pp. 252-329).
b) The logarithmic potential, discontinuous Dirichlet and Neumann problems (*Am. Math. Soc. Coll. public.*, VI, 1927).

[4] Voir une bibliographie dans :
M. Brelot. Über die Singularitäten der Potentialfunktionen und der Integrale der differentialgleichungen vom elliptischen Typus (*Sitz. der Berliner Math. Gesells.*, 31, 1932, pp. 46-54).

[5] O. Perron. Eine Neue Behandlung der ersten Randwertaufgaben für $\Delta u = 0$ (*Math. Zeits.*, 18, 1923, pp. 42-54).

[6] N. Wiener. *a*) Certain notions in potential theory (*Mass. Inst. of Techn.*, II, n° 70, 1924, pp. 24-51 et *J. de Math. and Phys.*, III, n° 1, 1924).
b) The Dirichlet problem (*M. I. T.*, 1924 et *J. Math. Phys.*, III, n° 3, 1924)
c) Note on a paper of O. Perron (*M. I. T.*, n° 85, 1925 et *J. Math. Phys.*, IV, n° 1, 1925).

[7] F. Riesz. *a*) Über die subharmonische Funktionen und ihre Rolle in der Funktionentheorie und in der Potentialtheorie (*Acta Szeged*, vol. II, fasc. 2, 1925, pp. 87-100).
b) Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel (*Acta Math.*, t. 48, 1926, pp. 329-343 et t. 54, 1930, pp. 321-360).
Signalons des précurseurs comme Poincaré et Hartogs.

[8] On trouvera un exposé détaillé de la théorie dans :
T. Radó. Subharmonic functions (*Erg. der Math.*, B^d 5, Heft 1, Berlin, Springer, 1937).

Cela contient en particulier la plupart des résultats du petit fascicule de M. Brelot (Act. sc. et ind., n° 139, 1934).

Voir des compléments ultérieurs dans :

M. Brelot. *a*) Fonctions sousharmoniques, presque sousharmoniques ou sous médianes (*Ann. Un. Grenoble Math. Phys.*, t. 21, 1945, pp. 78-90).

b) Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point singulier (*Ann. Inst. Fourier.*, t. 1, 1949, pp. 121-156), avec une remarque de Pfluger dans le tome suivant.

Voir en langue russe :

Privaloff. Fonctions sousharmoniques (Moscou, 1937).

Cette théorie se prolonge par celle de :

P. Lelong. Les fonctions plurisousharmoniques (*Ann. E. N. S.* 62, pp. 301-338).

[9] De La Vallée Poussin Extention de la méthode du balayage et problème de Dirichlet (*Ann. Inst., H. Poincaré*, 1932).

[10] G. C. Evans Potentials of positive mass (*Trans. Am. Math. Soc.*, 37, 1935, pp. 226-253) et vol. 38, pp. 201-236).

[11] Polya-szegö. Über die transfiniten Durchmesser (Kapazitäts Konstante) von ebenen und raümlichen Punktmengen (*J. für die reine u. ang. Math.*, 165, 1931, pp. 4-49).

On trouvera des extensions et d'intéressants développements connexes dans de nombreux articles de Leja vers 1936-39 et 1950, dans des revues polonaises, en particulier les *Annales de la Soc. pol. de Math.*

[12] De La Vallée Poussin. *a*) Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet (*Act. Sc. et Ind.*, n° 578, Paris, Hermann, 1937).

b) Potentiel et problème généralisé de Dirichlet (*Math. Gazette*, 22, 1938, pp. 17-36).

Avec la même technique, voir un ouvrage d'ensemble tardivement publié :

c) Le potentiel logarithmique, balayage et représentation conforme (Paris, Gauthier-Villars et Louvain, Librairie Univ. 1949).,

[13] M. Riesz. Intégrales de Riemann-Liouville et Potentiels (*Acta Szeged*, IX, 1938, pp. 1-42). — (Rectification et compléments, t. X, p. 116.)

O. Frostman. Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire (*Arkiv für Math. astr. fysik*, 26 A, n° 16, 1939).

[14] G. C. Evans. Modern méthods of Analysis in potential theory (*Bull. Am. Math. Soc.*, 1937, pp. 481-502).

[15] La capacité intérieure a été seule utilisée longtemps sous le nom de capacité, les ensembles de capacité intérieure nulle étant les ensembles impropres de Bouligand-Vasilesco. Pour la bibliographie correspondante, voir :

Vasilesco. La notion de capacité (*Act. Sc. et Ind.*, n° 571, 1937).

La capacité extérieure a été introduite à peu près en même temps et indépendamment par Beurling, Brelot, Monna, vers 1939 :

A. Beurling. Ensembles exceptionnels. (*Acta Math.*, t. 72, 1940, pp. 1-13).

M. Brelot. Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel (*J. de Math.*, t. 19, 1940, pp. 319-337) et antérieurement une note des *C. R. Ac. Sc.*, t. 209, 1939, p. 828.

A. F. Monna. Sur la capacité des ensembles (*Proc. Ac. Sc.*, Hollande, 43, 1940, n° 1).

[16] M. Brelot. Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques (*Bull. Sc. Math.*, 65, 1941, pp. 78-98).

[17] M Brelot. *a*) Fonctions sousharmoniques et balayage (*Bull. Ac. Royale de Belgique*, 24, 1938, pp. 301-312 et 421-443).
b) Problème de Dirichlet et majorantes harmoniques (*Bull. Sc. Math.*, mars-avril 1939).

A (*a*) se rattache un travail important à divers points de vue :

De La Vallée Poussin. Points irréguliers, détermination des masses par les potentiels (*Bull. Ac. Royale de Belgique*, nov. 1938, n° 11, pp. 368-384 et 671-689).

[18] M. Brelot. Critères de régularité et de stabilité (*Bull. Ac. Royale de Belgique*, t. 25, 1939, pp. 125-137).

[19] H. Cartan *a*) Sur les fondements de la théorie du potentiel (*Bull. Soc. Math. de France*, 69, 1941, pp. 71-96).
b) La théorie générale du potentiel dans les espaces homogènes (*Bull. Sc. Math*, 66, 1942).
c) Théorie du potentiel newtonien, énergie, capacité, suites de potentiels (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 73, 1945, pp. 74-106).
d) Théorie générale du balayage en potentiel newtonien (*Ann. Un. Grenoble, Math. Phys.*, t. 22, 1946, pp. 221-280).

[20] Travaux de Kametani, Kunugui, Ninomya, etc... faits dans l'isolement dû à la guerre. Voir une bibliographie dans :

Kunugui. Étude sur la théorie du potentiel généralisé (*Osaka Math. J.*, Vol. 2, 1950, pp. 63-103).

[21] M. Brelot. Sur le potentiel et les suites de fonctions sousharmoniques (*C. R. Ac. Sc.*, t. 207, 1938, p. 1157).

[22] M. Brelot. Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités (*J. de Math.*, t. 24, pp. 1-32).
Compléments dans les *C. R.*, t. 227, 1948, p. 19.

[23] L. Schwartz. *a*) Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques (*Annales Un. Grenoble*, section *Math. Phys.*, t. 21, 1945, pp. 57-74).
b) Théorie des distributions (*Act. Sc. et Ind.*, n° 1091 et 1122, Paris, Hermann, 1950 et 1951).

[24] J. Deny. *a*) Les potentiels d'énergie finie (*Acta. Math.*, t. 82, 1950, pp. 107-183), thèse, complétée dans (*b*) :

b) Sur la définition de l'énergie en théorie du potentiel (*Ann. Inst. Fourier*, t. II, 1950, pp. 83-99).

[25] H. Cartan et J. Deny. Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique (*Acta. Szeged*, t. XII, 1950, pp. 81-100).

[26] J. Deny. *a*) Le balayage (Communications du *Séminaire Math.* de l'Université de Lund, tome spécial jubilaire de M. Riesz (1952), pp. 47-61).

b) Famille fondamentales, noyaux associés (*Annales Inst. Fourier*, t. 3, 1951, pp. 73-101).

[27] G. Choquet. 1. Les capacités, fonctions alternées d'ensemble (*C. R. Ac. Sc.*, t. 233, 1951, p. 904).

2. Capacités. Premières définitions (*C. R. Ac. Sc.* t. 234, 1952, p. 35).

3. Extension et restriction d'une capacité (*C. R. Ac. Sc.* t. 234, 1952, p. 383).

4. Propriétés fonctionnelles des capacités alternées ou monotones (*C. R. Ac. Sc.*, t. 234, 1952, p. 498).

5. Capacitabilité. Théorèmes fondamentaux (*C. R. Ac. Sc* , t. 234, 1952, p. 784).

[28] Pour la bibliographie déjà ancienne voir [2], [3 *b*] et

Bouligand. Fonctions harmoniques, principes de Picard et de Dirichlet (*Mémorial Sc. Math.*, XI, Paris, Gauthier-Villars, 1926).

M. Brelot. Le problème de Dirichlet sous sa forme moderne (*Mathematica*, VII, 1933, pp. 147-166).

F. Vasilesco. *a*) Le problème généralisé de Dirichlet (mémoire couronné par l'*Ac. Royale de Belgique*, classe des sciences, t. 16, 1937).

b) La notion de point irrégulier dans le problème de Dirichlet (*Act. Sc. et Ind.*, n° 660, 1938).

[29] M. Brelot. Familles de Perron et problème de Dirichlet (*Acta. Szeged.*, IX, 1939, pp. 133-153).

[30] M. Brelot et G. Choquet. Espaces et lignes de Green (*Annales Institut Fourier*, t. 3, 1951, pp. 199-263).

Il faut y rectifier la définition des espaces $\mathcal{E}$ (p. 204) en supposant vérifié l'axiome de séparation de Hausdorff.

[31] G. C. Evans. Applications of Poincaré's sweeping out process (*Proceed. Nat. Ac. of Sciences.*, 19, 1933, pp. 457-461).

[32] M. Brelot. Sur les ensembles effilés (*Bull. Sc. Math.*, t. 68, 1944, pp. 12-36).

[33] Voir la bibliographie jusqu'en 1938 dans Vasilesco [28 *b*] et voir :

Frostman. Les points irréguliers dans la théorie du potentiel et le critère de Wiener (*Kungl. Fys. Sällsk. Lund. Förhand.*, 9, 1939).

Ultérieurement voir la théorie de l'effilement [15, 22, 32], et la notion générale équivalente de régularité par Cartan [19 *d*] généralisant celle de De La Vallée Poussin [17].

[34] Voir [32] [19 *d*] et

BRELOT. *a*) Le problème de Dirichlet ramifié (*Annales Un. Grenoble, Math. Phys.*, t. 22, 1946, pp. 167-200).

b) Étude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier (*Ann. Un. Grenoble, Math. Phys.*, t. 22, 1946, pp. 205-249).

c) Sur l'allure des fonctions harmoniques et sousharmoniques à la frontière (*Math. Nachrichten*, 4, 1950, pp. 298-307).

A cette question se rattachent entre autres :

DENY et LELONG. Étude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 19, pp. 89-112).

M[me] LELONG-FERRAND. Étude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace (*Ann. E. N. S.*, 66, pp. 125-159).

[35] M. BRELOT. Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques (*Annales E. N. S.*, 61, 1944, pp. 301-332).

[36] KELDYCH et LAVRENTIEFF. Sur le problème de Dirichlet (*C. R.*, 204, 1937, p. 1788).

KELDYCH. Sur la résolubilité et la stabilité du problème de Dirichlet [*C. R. Ac. Sc., URSS*, t. 18, 1938, n° 6 (en français); et *Isv. Akad. Nauk. C. C. C. P.*, 8, 1941, pp. 171-231 (en russe)].

BRELOT. Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes (*Bull. Soc. Math.*, France, t. 73, 1945, p. 55) suivi d'un complément par Deny.

J. DENY. Systèmes totaux de fonctions harmoniques (*Annales Inst. Fourier*, t. 1, 1949, pp. 103-113), complété par un article de Brelot dans le même volume.

LANDKOFF. Approximation des fonctions continues par des fonctions harmoniques (en russe) (*Math. Svornik*, 25 (67), 1949, pp. 95-106).

Antérieurement et pour l'approximation analogue par des fonctions de variable complexe, voir l'ouvrage de Walsh, vol. XX, des Colloq. publ. de l'*Am. Math. Soc.*

[37] Voir une importante bibliographie dans la thèse de Parreau :

PARREAU. Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann (*Ann. Inst. Fourier*, t. 3, 1951, pp. 103-197).

Parmi les nombreux travaux sur ce sujet, (Bader, Ohtsuka, Royden...) signalons le nouvel instrument qu'est le procédé alterné de Sario, applicable d'ailleurs dans l'espace :

SARIO. A linear operator method on arbitrary Riemann surfaces (*Trans. Am. Math. Soc.*, 72, 1952, p. 281-295) (indiqué déjà dans les *C. R.*, 229, 1949, p. 1293).

[38] G. C. EVANS. Multiple valued harmonic functions in space (*Un. of Calif. Public.*, vol. 1, n° 8, 1951, pp. 281-340).

[39] E. W. PERKINS. The Dirichlet problem for domains with multiple boundary points (*Trans. Am. Math. Soc.*, 38, 1935, pp. 106-144).

[40] R. S. Martin. Minimal positive harmonic functions (*Trans. Am. Math. Soc.*, t. 49, 1941, pp. 137-172).

Quelque simplification est apportée par Heins, (*Ann. of Math.*, 52, 1950). Voir aussi un complément dans Parreau [37].

[41] J. Deny. Le principe des singularités positives de Bouligand et la représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine (*Revue Scientifique*, 15 août 1947, 85e année, fasc. 14, pp. 896-872).

M. Brelot. Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin (*Annales Un. Grenoble, Math. Phys.*, 23, 1948, pp. 119-138).

[42] M. Brelot. *a*) Principe et problème de Dirichlet dans les espaces de Green (*C. R.*, t. 235, 1952, p. 598).

b) Lignes de Green et problème de Dirichlet (*C. R.*, t. 235, 1952, p. 1595).

Dans le dernier énoncé de cette note des restrictions sur Ω sont nécessaires ; on pourra supposer par exemple la connexion finie.

[43] Tôki. On the classification of open Riemann surfaces (*Osaka Math. J.*, 4, 1952, pp. 191-201).

[44] Voir une bibliographie récente dans :

Courant. Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, (*Pure and applied math. III, Interscience publishers*, New-York, 1950).

[45] Zaremba. Sur un problème toujours possible comprenant à titre de cas particuliers le problème de Dirichlet et celui de Neumann (*J. Math.*, 6, 1927, pp. 127-163).

Nikodym. Sur un théorème de M. Zaremba concernant les fonctions harmoniques (*J. de Math.*, 12, 1933, pp. 95-108).

[46] Bochner. Dirichlet problem for domains bounded by spheres (*Annals of Math. Studies*, n° 25, pp. 24-25, Princeton, 1950).

[47] St. Bergman. The kernel function and conformal mapping (*Math. Surveys V, published by Am. Math. Soc.*, 1950).

[48] Après [7 *a*] la bibliographie est considérable.

Voir outre [8] des ouvrages comme ceux de Nevanlinna :

Nevanlinna. Eindeutige analytische Funktionen (*Grundl. der Wiss*, t. 46, 1936).

Travaux de Privaloff dans son ouvrage [8] ou ses nombreux articles à l'*Ac. des Sc. URSS* ou *Recueil de Moscou*, vers 1935, par ex. :

Privaloff. Sur certaines questions de la théorie des fonctions sousharmoniques et des fonctions analytiques (en russe) *Math. Sbornik.*, t. 41, 1935, P. 520-550).

Parmi d'autres applications caractéristiques, voir ultérieurement [34 *a*] et d'abord :

M. Brelot. Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de Dirichlet (*Bull. Ac. Royale de Liège*, 1939, pp. 385-391.)

Nombreux articles de Monna, Bolder, à l'*Ac. des Sc. d'Amsterdam*, (1942-1945), en particulier :

A. F. Monna. Sur quelques inégalités de la théorie des fonctions et leurs généralisations spatiales (vol. 45, 1942, n^{os} 1 et 2).

Bolder. Sur le théorème de déformation de Koebe (vol. 45, n° 6).

Travaux importants et voisins entre eux de Beurling [15] et

Dufresnoy. Sur les fonctions méromorphes et univalentes dans le cercle-unité (*Bull. Sc. Math.*, 69, 1945, pp. 21-36, rectification, pp. 117-121).

[49] Voir par exemple les travaux de Lelong dans [8] et

P. Lelong. *a*) Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes (*Annales EN.*, 58, pp. 83-177).

b) Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation (*Ann. EN.*, 67, pp. 393-419).

[50] Choquet et Deny. Sur quelques propriétés de moyenne, caractéristiques des fonctions harmoniques et polyharmoniques (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 72, 1944, pp. 118-140).

L. Schwartz. Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues (*Bull. Soc. Math.* t. 72, 1944, pp. 141-145).

[51] On trouvera dans Brelot [28] quelques références sur les extensions vers 1930 des premiers travaux modernes sur le problème de Dirichlet. Voir une axiomatique récente étendant l'idée des enveloppes de Perron dans

Tautz. *a*) Zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen (*Math. Ann.*, 118, 1942, pp. 733-770).

b) Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe (*Math. Nach.*, 2, 1949, pp. 279-303).

[52] Outre les travaux en cours de Choquet voir un point de départ important dans un article de Courant, Friedrichs, Lewy (*Math. Ann.*, 100, 1928, spécial., p. 42), des articles de Kakutani et collaborateurs dans les *Proc. Tokyo* 21 (1945), les *Acta Szeged* (t. 12 B, 1950, pp. 75-81) et surtout :

Kakutani, Two dimensional brownian motion and harmonic functions (*Proc. Imp. Ac. Tokyo*, 20, 1944, pp. 706-714).

[53] Polya-Szegö. Isoperimetric inequalities in mathematical physics (*Annals of Math. Studies*, n° 27, Princeton, 1951).

(Parvenu aux Annales le 18 octobre 1953.)