ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NGUYEN HUU VINH

Approximation par des séries ponctuellement convergentes

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 1 (1973), p. 197-202

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_1_197_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23,1 (1973), pp. 197-202

APPROXIMATION PAR DES SÉRIES PONCTUELLEMENT CONVERGENTES

par NGUYEN HUU VINH

Le but de cette note est de démontrer le

THEOREME. – *Soit* $x_0(t)$ *une fonction continue sur* R *telle que* $\operatorname{Sup}_t |x_0(t)| = \|x_0\| = F > 0$ *fini ou infini, et* S *une constante réelle telle que* $S < F$. *Sous ces hypothèses, il existe une suite de fonctions continues* $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, *telles que*

1) *Pour toute série ponctuellement convergente* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu x_\nu(t)$ *de somme continue on a*

$$\operatorname{Sup}_t |x_0(t) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu x_\nu(t)| = \|x_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu x_\nu\| \geqslant S.$$

2) *Par contre, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe une série ponctuellement convergente de somme discontinue* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu x_\nu(t)$ *telle que*

$$\operatorname{Sup}_t |x_0(t) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu x_\nu(t)| = \|x_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu x_\nu\| \leqslant \varepsilon.$$

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le lemme suivant qu'on utilise pour répondre à d'autres questions concernant l'approximation par des séries ponctuellement convergentes.

LEMME. – *Etant donné deux constantes réelles positives* K *et* C (*avec* $C < 1$), *alors il existe une suite de fonctions* $y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots$ *appartenant à* $c(\alpha, \beta)$ $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$ *et possédant les deux propriétés suivantes :*

1) $\sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu(t) = 0$ *où la série converge ponctuellement.*

2) *Si la série* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu y_\nu(t)$ *est ponctuellement convergente (de somme non nécessaire continue), avec* $1 > \lambda_1 > C > 0$, *et*

$$\operatorname*{Sup}_t |\sum_\nu \lambda_\nu y_\nu(t)| = \|\sum_\nu \lambda_\nu y_\nu\| \leqslant K.$$

alors on a $\operatorname*{Inf}_\nu \{\lambda_\nu\} > 0$.

Preuve. – Construction des fonctions y_ν. Pour fixer les idées, supposons que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Toutes les fonctions y_ν sont linéaires par morceaux, passent par les 2 points (0,0) et (1,0), et sont définies par induction de façon suivante :

– y_1 passe en plus par les deux points

$$\left(\frac{1}{4}, -P\right) \text{ et } \left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

– une fois que les fonctions $y_1, \ldots, y_{h-1}$ sont déjà construites, on définit y_h de telle manière que l'on ait

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_h = s_h$$

où s_h est parfaitement définie par les cinq points

$(0,0)$, $(1 - 2^{1-h}, 0)$, $(1 - 3.2^{-h-1}, -P^h)$, $(1 - 2^{-h}, 0)$ et $(1,0)$

où P est une constante convenablement choisie.

Maintenant supposons que $\lambda_1 > C$. Puisque $y_\nu\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ pour $\nu \geqslant 3$ on a

$$\|\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu y_\nu\| \leqslant K \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu y_\nu \left(\frac{1}{4}\right) \geqslant -K \Rightarrow \lambda_2 \geqslant \lambda_1 - \frac{K}{P}.$$

De même on a

$$\lambda_3 - \lambda_2 \geqslant -\frac{K}{P^2}, \ldots \lambda_{i+1} - \lambda_i \geqslant \frac{K}{P^i}$$

$$\lambda_{i+1} \geqslant \lambda_1 - \frac{K}{P} - \frac{K}{P^2} - \cdots - \frac{K}{P^i} \geqslant C - \frac{K}{P-1}.$$

En choisissant P suffisamment grand on a $\operatorname{Inf}\{\lambda_i\} > 0$.

Démonstration du théorème. – Soit S_1 un réel tel que $S < S_1 < F$. Il est clair qu'il existe un intervalle I′ tel que

$$\operatorname*{Sup}_{t \in I'} |x_0(t)| = \|x_0\|_{I'} \geqslant S_1 .$$

Posons $r = \dfrac{S_1 - S}{S_1}\cdot$ Soit Q positif tel que $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{Q^i} = r$. Soient $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ et J $(1 \leqslant n < \infty)$ des intervalles disjoints entre eux et disjoints de I′. Soit $H = \operatorname*{Sup}_{t \in I} |x_0(t)| = \|x_0\|_I$.

Construction des fonctions z_{nt}. Les z_{ni} sont des fonctions ayant des supports disjoints inclus dans J. Il est facile de voir qu'il est possible de construire les z_{ni} telles que la somme ponctuelle de la série $\sum_i \lambda_{ni} z_{ni}$ n'est continue que si $\lim_{i \to \infty} \lambda_{ni} = 0$. De plus les z_{ni} sont choisies telles que $\|z_{ni}\| = \varepsilon_n \searrow 0$. Ensuite on pose $\sum_i z_{ni} = z_n$ (discontinue).

Construction des y_{ni}. D'après le lemme, pour tout n il existe une suite $y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{ni}, \ldots$ de fonctions continues portées par I_n et telles que

1) $\sum_{i=1}^{\infty} y_{ni}(t) = 0$ où la série converge ponctuellement.

2) Si $\lambda_{n1} > \dfrac{1}{Q^n}$ et si $\left\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} y_{ni}\right\|_{I_n} \leqslant M + S$, alors on a $\inf_i \{\lambda_{ni}\} > 0$.

Construction des fonctions x_ν. La convention qu'on utilise ci-dessous paraît compliquée, mais elle simplifie bien le raisonnement et évite toute confusion possible.

Si ν admet deux facteurs premiers différents, on prend $x_\nu = 0$.

Si $\nu = p^i$ où p est un nombre premier, on écrit $x_\nu = x_{ni}$, où

n est l'ordre du nombre premier p dans la suite des nombres premiers $2, 3, 5 \ldots$ On définit ensuite les x_ν de la façon suivante.

Si $\nu = p$ (premier) alors $x_\nu = x_0 + y_{n1} + z_{n1}$.

Si $\nu = p^i$ $(i \neq 1)$ alors $x_\nu = y_{n0} + z_{ni}$.

La suite x_ν est construite, il est clair que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} : n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} x_{ni} - x_0 \Big\| = \| z_n \| = \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Montrons maintenant qu'il est impossible d'approcher la fonction x_0 à moins de S par une série $\sum_\nu \lambda_\nu x_\nu$ ponctuellement convergente et de somme continue. En effet, soit $x = \Sigma\, \lambda_\nu x_\nu$. En dehors des intervalles I_n et J la fonction x est égale à $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1}\right) x_0$. Distinguons les trois cas suivants :

1) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1} \leqslant r$ alors sur l'intervalle I$'$ on a

$$x_0 - x = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1}\right) x_0$$

$$\| x_0 - x \|_{\mathrm{I}'} = | 1 - \Sigma\, \lambda_{n1} | \cdot \| x_0 \|_{\mathrm{I}'} \geqslant (1 - r)\ \mathrm{S}_1 =$$

$$= \left(1 - \frac{\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}}{\mathrm{S}_1}\right) \cdot \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}.$$

2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1} \geqslant 2$ alors sur l'intervalle I$'$ on a

$$x - x_0 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1} - 1\right) x_0$$

$$\| x - x_0 \|_{\mathrm{I}'} = (\Sigma\, \lambda_{n1} - 1) \cdot \| x_0 \|_{\mathrm{I}'} \geqslant \| x_0 \|_{\mathrm{I}'} = \mathrm{S}_1 > \mathrm{S}.$$

3) Si $r < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{ni} < 2$ alors dans l'intervalle In on a

$$x - x_0 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1} - 1\right) x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} y_{ni}.$$

Ceci est légitime puisqu'en chaque point de I_n il n'y a qu'un nombre fini d'indice pour lesquels y_{ni} est différent de zéro.

Or

$$\|x - x_0\|_{I_n} \geqslant \|\sum_{i=1} \lambda_{ni} y_{ni}\|_{I_n} - \|\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{ni} - 1\right) x_0\|_{I_n}$$

$$\geqslant \|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} y_{ni}\|_{I_n} - M.$$

Donc, pour que $\|x - x_0\|_{I_n} \leqslant$ il est nécessaire que

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} y_{ni}\|_{I_n} \leqslant S + M.$$

Mais puisque $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{Q^i} = r$, l'inégalité $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1} > r$ entraîne $\exists n : \lambda_{n1} > \frac{1}{Q^n}$ et d'après la construction des y_{ni} on a

$$\lambda_{ni} > \frac{1}{Q^n}, \ \|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} y_{ni}\|_{I_n} \leqslant S + M \Rightarrow \operatorname{Inf}\{\lambda_{ni}\} > 0.$$

Cette dernière inégalité entraîne, d'après la construction des z_{ni}, que la somme de la série ponctuellement convergente $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} z_{ni}$ est discontinue. Il est donc impossible d'approcher x_0 à moins de S par une série $\Sigma\, \lambda_\nu x_\nu$ ponctuellement convergente et de somme continue.

Remarque. – Le théorème précédent répond abondamment à une question que nous nous sommes posés dans la note [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] NGUYEN HUU VINH, Sur le comportement de la suite π_p projection de l'origine sur une variété linéaire M au sens de la norme de Hölder de paramètre *p*. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 265, 688-690.

[2] NGUYEN HUU VINH, Approximation par des séries ponctuellement convergentes. *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 269, 840-843.

Manuscrit reçu le 9 août 1972
accepté par J.P. Kahane

NGUYEN HUU VINH
Département de Mathématiques
Université de Paris-Sud
91405 Orsay