ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE NOVERRAZ

Sur la pseudo-convexité et la convexité polynomiale en dimension infinie

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 1 (1973), p. 113-134
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_1_113_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23,1 (1973), pp. 113-134

SUR LA PSEUDO-CONVEXITÉ ET LA CONVEXITÉ POLYNOMIALE EN DIMENSION INFINIE

par Philippe NOVERRAZ

Introduction.

On sait qu'un problème central de la théorie des fonctions analytiques est, en dimension finie comme en dimension infinie, l'étude des relations entre la notion de domaine d'holomorphie et les diverses convexités (holomorphe, plurisousharmonique ou polynomiale). Le résultat le plus intéressant que l'on ait actuellement en dimension infinie est le théorème de Cartan-Thullen-Oka [4] [9] qui prouve que dans tout espace de Banach séparable possédant la propriété d'approximation projective tout ouvert polynomialement convexe est un ouvert d'holomorphie. De plus Dineen [2] a montré dans les espaces de Banach à base, mais sa démonstration se généralise, que si U est un ouvert de Runge (c'est-à-dire que les polynômes sont denses dans H(U) pour la topologie de la convergence compacte) il existe un ouvert de E polynomialement convexe U_1 contenant U tel que toute fonction analytique sur U se prolonge à U_1 et que l'application de restriction $H(U_1) \to H(U)$ est un isomorphisme pour la topologie de la convergence compacte. Aussi dans un elc où le théorème de Cartan-Thullen-Oka est vérifié on est assuré de "rester" dans E c'est-à-dire qu'il ne s'introduit pas de phénomène d'espace étalé ; par exemple, on peut affirmer que dans un Banach séparable avec P.A.P. tout ouvert de Runge admet une enveloppe d'holomorphie univalente et polynomialement convexe. C'est ce qui fait l'intérêt des techniques basées sur la convexité polynomiale et la propriété de Runge que nous étudions ici.

Ce travail se divise en deux parties. La première partie rassemble divers résultats sur la pseudo-convexité et sur les différentes notions relatives à la convexité plurisousharmonique. En dimension infinie le cas des espaces de Banach a été étudié en [1] et [6] dans le cadre le plus général des espaces étalés. Bien que certains des résultats énoncés soient encore valides pour des espaces étalés [voir 11], nous nous occuperons ici d'ouverts d'un espace localement convexe. Les complications d'écriture inhérentes aux espaces étalés nous font choisir ce cadre plus simple.

Le premier paragraphe montre que dans le cas normé toutes les notions que l'on introduit coïncident. On retrouve l'équivalence 1-2-5 de [1] par une démonstration plus simple. Le cas non-normé est plus intéressant. On montre que les ouverts pseudo-convexes possèdent des propriétés qui permettent parfois de se ramener au cas normé et d'obtenir le théorème de Cartan-Thullen-Oka. Dans un espace non séparé tout ouvert pseudo-convexe provient d'un ouvert pseudo-convexe de l'espace séparé associé. On étudie aussi ce qui se passe lorsque l'on affaiblit la topologie ; par exemple l'intérieur, s'il est non vide, d'un ouvert pseudo-convexe est encore pseudo-convexe. Pour terminer on montre que, dans un elc quelconque, tout ouvert pseudo-convexe est convexe par rapport aux fonctions plurisousharmoniques (et réciproquement). Par contre on ne sait pas, dans le cas non normé, si un tel ouvert est convexe par rapport aux fonctions plurisousharmoniques continues.

Dans la deuxième partie nous introduisons, pour étudier une classe d'espace plus générale que celle des espaces de Banach à base, une propriété d'approximation voisine de celle de Grothendieck ; par exemple, les espaces nucléaires, les espaces $\mathcal{C}(K)$ et les espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ possèdent cette propriété. On peut, dans de tels espaces, étudier la convexité polynomiale et à partir de résultats connus sur les sous-espaces de dimension finie "remonter" à l'espace entier.

Dans un espace normé la propriété d'approximation projective entraîne la propriété d'approximation forte. Lorsque la topologie de E est limite projective de topologies normées avec P.A.F. (ce qui est le cas de trois exemples de classe à espaces cités plus haut) on montre qu'un ouvert est polynomialement convexe si et seulement si il est finiment polynomialement convexe. On montre aussi que toute fonction analytique au voisinage d'un compact polynomialement convexe

K s'approche uniformément sur K par des polynomes (Oka-Weil) ; un corollaire de ce résultat est qu'un ouvert holomorphiquement convexe est de Runge si et seulement si il est polynomialement convexe. Tous ces résultats sont encore valables pour les applications à valeurs dans un espace de Banach.

Dans le cadre plus particulier des espaces de Banach à base, les résultats de la deuxième partie ont été exposés au séminaire P. Lelong et un résumé a paru aux CR. Acad. Sc. t. 272, p. 1564, (1971).

Nous remercions S. Dineen pour les nombreuses discussions épistolaires que nous avons eues pendant l'élaboration de ce travail ; le lecteur trouvera dans [3] des résultats voisins obtenus par d'autres méthodes.

PREMIERE PARTIE : ETUDE DE LA PSEUDO-CONVEXITE

1.1. Préliminaires.

Dans cet article nous ne nous intéresserons qu'aux espaces vectoriels topologiques localement convexes (elc) non nécessairement séparés, bien que les résultats peuvent encore s'énoncer sans condition de convexité locale, sous réserve que le dual ne soit pas nul. U désignera un ouvert d'un elc E ; s'il n'est pas connexe les résultats s'appliqueront à chaque composante connexe. Un sous-ensemble K de U sera dit *compact dans* U (resp. précompact dans U) s'il est compact (resp. précompact) dans E et s'il existe un voisinage V de l'origine tel que $K + V \subset U$.

Si A(U) désigne une famille de fonctions définies sur U à valeurs complexes, l'enveloppe A(U)-convexe d'un sous-ensemble K de U est définie par :

$$\hat{K}_{A(U)} = \{z \in U , |f(z)| \leqslant |f|_K , \forall f \in A(U)\} .$$

On dira qu'un ouvert U est A(U)-convexe si l'enveloppe A(U)-convexe de tout compact de U est précompact dans U.

Notons que si E′ désigne le dual topologique de E, l'enveloppe $(E' \oplus C)$-convexe n'est autre que l'enveloppe convexe équilibrée fermée.

Nous ne considèrerons ici que des familles d'applications (analytiques, polynomiales) à valeurs dans C ; les démonstrations et les résultats sont exactement les mêmes si l'on considère des applications à valeurs dans un espace de Banach.

Comme les fonctions plurisousharmoniques ou analytiques bornées sur un sous-espace sont constantes sur ce sous-espace, toute fonction analytique ou plurisousharmonique dans un espace non séparé se factorise à travers l'espace séparé associé.

On notera P(U), [resp. $P_c(U)$], la famille des fonctions plurisousharmoniques (resp. plurisousharmoniques continues) sur U.

Soit U un ouvert de E, d_U désigne la fonction définie sur $U \times (E - \{0\})$ par $d_U(z, z') = \inf$ des $|\lambda|$ tels que $z + \lambda z' \notin U$.

Un ouvert U sera dit *pseudo-convexe* si la fonction $-\operatorname{Log} d_U$ est plurisousharmonique sur $U \times E - \{0\}$. Pour tout z' de $E - \{0\}$ fixé, la fonction d_U n'est autre que la fonction distance au complémentaire de U dans la direction z'.

LEMME 1. — *Si* E *est un elc et* $U \subset E$, *la fonction* d_U *est semi-continue inférieurement dans* $U \times E - \{0\}$ *pour toute topologie sur* E *telle que* U *soit un ouvert.*

Démonstration. — Soit $(z_0, z'_0) \in U \times E - \{0\}$ tel que

$$d(z_0, z'_0) = c < +\infty .$$

Pour tout $0 < c' < c$ considérons

$$H = \{(z, z') \mid z' = z'_0 , z = z_0 + \lambda z'_0 , |\lambda| \leqslant c'\}$$

qui est un compact de $U \times E - \{0\}$. Il existe donc des voisinages V et W de 0 tels que $W + W \subset V$ et $H + V \times V \subset U \times E - \{0\}$. Pour tout z de $z_0 + W$ et z' de $z'_0 + W$ on a :

$$z + \lambda z' = z - z_0 + (z_0 + \lambda z'_0) + \lambda(z' - z'_0) \in U \times E - \{0\}$$

pour tout $|\lambda| \leqslant c'$ ce qui entraîne que $d(z, z') \geqslant c'$ et prouve la semi-continuité lorsque $c < +\infty$. Lorsque $c = +\infty$ on fait le même raisonnement en remplaçant c' par $M < +\infty$. Remarquons que d_U se prolonge de manière semi-continue à $U \times E$ en posant $d_U = 0$ sur $U \times \{0\}$.

LEMME 2. — *Un ouvert* U *de* E *est pseudo-convexe si et seulement si* $U \cap F$ *est pseudo-convexe pour tout sous-espace* F *de dimension finie de* E. *De plus* U *reste pseudo-convexe pour toute topologie (non nécessairement localement convexe) pour laquelle* U *est ouvert.*

En effet, pour tout sous-espace F de dimension finie, la fonction $d_{U \cap F}$ définie sur $U \cap [F \times F - \{0\}]$ n'est autre que la restriction de d_U à $[U \times E - \{0\}] \cap F \times F$ et on sait, par le lemme 1, que $-\operatorname{Log} d_U$ est scs. Le lemme 2 est alors, une conséquence du fait qu'une fonction scs est plurisousharmonique si, et seulement si, ses restrictions aux sous-espaces de dimension finie sont plurisousharmoniques (ou éventuellement $-\infty$).

DEFINITION. — *Soit* P *une propriété, on dira qu'un ensemble* U *possède finiment* ("finitely" en anglais) *la propriété* P *si, pour tout sous-espace* F *de dimension finie,* $U \cap F$ *possède la propriété* P.

D'après le lemme 2, un ouvert U est pseudo-convexe si et seulement si il est finiment pseudo-convexe.

THEOREME 1. — *Soient* E *et* E_1 *deux elc et* $u : E \to E_1$ *une application linéaire continue surjective et ouverte. Alors, si* U *est un ouvert connexe et pseudo-convexe de* E *contenant un ouvert* $u^{-1}(U_1)$ *non vide, on a :*

1) $U = u^{-1} \circ u\,(U)$

2) $U_1 = u(U)$ *est pseudo-convexe dans* E_1 .

Démonstration. — La fonction $-\operatorname{Log} d_U$ est, par hypothèse, plurisousharmonique dans $U \times E - \{0\}$, donc plurisousharmonique $\not\equiv -\infty$ sur $U \times E_0 - \{0\}$, où l'on a posé $E_0 = u^{-1}(0)$ Pour tout z' de $E_0 - \{0\}$ et z de V, on a $z + \lambda z' \in V \subset U$ pour tout λ de C, ce qui montre que $-\operatorname{Log} d_U$ est identique à $-\infty$ sur $V \times E_0 - \{0\}$, qui est un ouvert dans $U \times E_0 - \{0\}$. La fonction $-\operatorname{Log} d_U$ est donc identique à $-\infty$ sur $U \times E_0 - \{0\}$, ce qui prouve que, pour tout z de U, l'ensemble $z + E_0$ est encore contenu dans l'ouvert U, qui s'écrit alors $U = u^{-1} \circ u(U)$.

Il reste à montrer que $U_1 = u(U)$ est pseudo-convexe dans E_1 , c'est-à-dire que $-\operatorname{Log} d_{U_1}$ est psh dans $U_1 \times E_1 - \{0\}$. Or, pour tout z de U et z' de $E - \{0\}$, la condition $z + \lambda z' \in U$ équivaut à

$$u(z) + \lambda u(z') \in u(\mathrm{U})$$

car $\mathrm{U} = u^{-1} \circ u(\mathrm{U})$, ce qui prouve que d_{U} n'est autre que le composé de d_{U_1} avec $(u\,,u)$, qui est linéaire continue sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$, d'où le résultat.

De ce théorème il découle immédiatement que tout domaine pseudo-convexe d'un elc non séparé provient d'un domaine pseudo-convexe de l'espace séparé associé ; en particulier, tout ouvert pseudo-convexe d'un espace semi-normé E s'écrit $u^{-1}(\mathrm{U})$ où U est un domaine pseudo-convexe de l'espace normé associé et u l'application canonique de E sur son séparé. De plus, pour étudier un domaine pseudo-convexe, on peut toujours se ramener au cas où la topologie de E est définie par une famille de normes. En effet, si U est un ouvert, il contient une p-boule de rayon non nul ; l'application $u_p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}/p^{-1}(0)$ est ouverte et surjective, ce qui entraîne que $\mathrm{U} = u_p^{-1} \circ u_p(\mathrm{U})$ et que $u_p(\mathrm{U})$ est pseudo-convexe dans E_p, qui est un espace dont la topologie est définie par une famille de normes.

1.2. Cas d'un elc semi-normé.

Soit p la semi-norme continue sur E. On peut introduire la p-distance à la frontière définie par $d(z) = \inf\limits_{y \notin \mathrm{U}} p(z-y)$. Cette fonction est continue, strictement positive sur U, nulle sur $\mathrm{E} - \mathrm{U}$, et possède de plus les deux propriétés suivantes :

a) $|d(z) - d(z')| \leqslant p(z - z')$ pour tout z et z' de E

b) $d(z) = \inf\limits_{p(z')=1} d_{\mathrm{U}}(z\,,z')$

Un sous-ensemble B de U sera dit U-borné s'il est borné dans E et si $d(\mathrm{B}\,,\complement\mathrm{U}) > 0$ où l'on a noté $d(\mathrm{A}\,,\mathrm{B}) = \inf\limits_{\substack{x \in \mathrm{A} \\ y \in \mathrm{B}}} p(x-y)$.

$\mathrm{P}_b(\mathrm{U})$ (resp. $\mathrm{P}_{bc}(\mathrm{U})$) désignera la famille des fonctions plurisousharmoniques (resp. psh et continues) dans U, bornées sur les ensembles U-bornés.

Les définitions relatives à la pseudo-convexité et aux convexités par rapport aux diverses classes de fonctions plurisousharmoniques sont équivalentes dans un espace semi-normé, comme le montre le théorème suivant qui prouve, de plus, grâce à la condition 7 que ces notions ne dépendent pas de la semi-norme choisie.

THEOREME 2. – *Si* U *est un ouvert d'un espace semi-normé* E, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $-\log d$ *est plurisousharmonique continue dans* U.

2) $-\log d_{\mathrm{U}}$ *est plurisousharmonique dans* $\mathrm{U} \times \mathrm{E} - \{0\}$.

3) U *est finiment pseudo-convexe.*

4) *Pour tout compact* K *de* U, $d(\hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{P}_c(\mathrm{U})}, \complement\,\mathrm{U}) > 0$.

5) *Pour tout compact* K *de* U, $d(\hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{P}(\mathrm{U})}, \complement\,\mathrm{U}) > 0$.

6) *Pour tout* U-*borné,* B *de* U, $d(\hat{\mathrm{B}}_{\mathrm{P}_b(\mathrm{U})}, \complement\,\mathrm{U}) > 0$.

7) $\mathrm{U} = \cup\, \mathrm{U}_i$, $\mathrm{U}_i \subset \mathrm{U}_{i+1}$, $\mathrm{U}_i = \{v_i < 0\}$ *où* v_i *est une fonction plurisousharmonique dans un voisinage de* $\overline{\mathrm{U}}_i$.

La démonstration se fait suivant le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 7 \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
6 \arrow[ddr, Rightarrow] & 1 \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & 2 \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & 3 \\
 & 4 \arrow[d, Rightarrow] & & \\
 & 5 \arrow[uurr, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

$2 \Leftrightarrow 3$ par le lemme 2.

$2 \Rightarrow 1$ car $-\operatorname{Log} d = \sup\limits_{\|z'\|=1} - \operatorname{Log} d_{\mathrm{U}}(z, z')$; donc, si $-\operatorname{Log} d_{\mathrm{U}}$ est une fonction psh de z, pour tout z', il en est de même du sup (qui est scs).

$1 \Rightarrow 7$ il suffit de prendre $v_n = -\operatorname{Log} d - n$.

$7 \Rightarrow 3$ il suffit de considérer, pour tout sous-espace F de dimension finie, la restriction des v_i à F et d'appliquer le résultat connu en dimension finie.

$5 \Rightarrow 3$ il suffit de considérer des compacts de dimension finie.

$4 \Rightarrow 5$ car $\mathrm{P}_c(\mathrm{U}) \subset \mathrm{P}(\mathrm{U})$, donc $\hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{P}_c(\mathrm{U})} \supset \hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{P}(\mathrm{U})}$.

$6 \Rightarrow 5$ car tout compact de U est borné et $\mathrm{P}_b(\mathrm{U}) \subset \mathrm{P}(\mathrm{U})$, donc $\hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{P}_b(\mathrm{U})} \supset \hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{P}(\mathrm{U})}$.

$1 \Rightarrow 4$ et $1 \Rightarrow 6$ se démontrent exactement de la même manière. Par exemple, pour $1 \Rightarrow 6$, soit B un ensemble U-borné, pour tout

z de $\hat{B}_{P_b(U)}$ on a $-\operatorname{Log} d(z) \leqslant \sup - \operatorname{Log} d$ car la fonction $-\operatorname{Log} d$ appartient à $P_b(U)$, il s'ensuit que $d(z) \geqslant \sup_B d$ pour tout z de $\hat{B}$, c'est-à-dire que $d(\hat{B}, \complement U) \geqslant d(B, \complement U) > 0$.

Remarque 1. – Lorsque l'espace E est séparé et complet, c'est-à-dire un espace de Banach, on peut remplacer la condition 4), [resp. 5)], par : $\hat{K}_{P_c(U)}$ est compact, [resp. $\hat{K}_P(U)$ est relativement compact], dans U. En effet ils sont contenus dans l'enveloppe convexe fermée de K qui est compacte (resp. relativement compacte) dans E.

Remarque 2. – Lorsque l'espace est séparable on peut construire explicitement une fonction plurisousharmonique continue dans U, non bornée au voisinage de tout point de ∂U. On part de la condition 6′ équivalente à 6 on a remplacé P_b par P_{bc}. Soit (x_n) une suite dense dans U telle que chaque terme apparaisse une infinité de fois. Posons $U_n = \left\{ z \in U \ , \ d(z, U) > \frac{1}{n} \ , \ \|z\| < n \right\}$; les U_n forment une suite croissante et exhaustive d'ouverts U-bornés. Pour tout n il existe v_n dans $P_{bc}(U)$ et z_n dans U tels que :

i) $z_n \in U - \hat{U}_n \ , \ d(z_n, x_n) \leqslant \frac{1}{n}$.

ii) $v_n(z_n) > \sup_{U_n} v_n$.

On peut supposer que $v_n(z_n) = n$ et que $\sup_{U_n} v_n \leqslant 0$.

Posons $u_n = \sup\left(v_n, -\frac{1}{n^2}\right)$ et $S(z) = \sum_{n \geqslant 1} u_n(z)$. En prenant les suites partielles on voit que S est la limite localement uniforme d'une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques continues. $S \not\equiv -\infty$ car sur U_1 on a

$$S(z) = \sum u_n(z) \geqslant - \frac{1}{n^2} > -\infty .$$

La fonction S est plurisousharmonique continue dans U et

$$S(z_n) \geqslant n - \sum \frac{1}{k^2} \to +\infty \quad \text{avec } n,$$

d'où le résultat.

1.2. Cas d'un elc non semi-normé.

On se trouve en présence de deux notions à priori distinctes : la pseudo-convexité et la convexité par rapport aux fonctions plurisousharmoniques. Nous allons voir que dans ce cas encore elles coïncident, mais que, par contre nous ne savons pas si les convexités par rapport aux fonctions plurisousharmoniques et par rapport aux fonctions plurisousharmoniques continues sont les mêmes.

Si p est une semi-norme continue sur E, on notera par (E, p) l'espace E muni de la topologie engendrée par la seule semi-norme p et par $E_p = (E, p)/p^{-1}(0)$ l'espace normé associé. Un ouvert de E sera dit *uniformément ouvert* (ou p-ouvert) s'il est ouvert dans (E, p).

Avant d'étudier le cas général, montrons qu'on peut se ramener au cas semi-normé dans une classe d'espaces introduits par Nachbin [8]. Cette classe généralise la notion de produit d'espaces semi-normés.

DEFINITION 2. — *On dit qu'un elc possède la propriété* (C) *(ou est un espace* N-*projectif) si sa topologie est définie par une famille* Γ *filtrante de semi-normes continues telle que, pour tout* p *de* Γ, *l'application* $E \to E_p$ *soit ouverte, ce qui équivaut à dire que la topologie initiale de* E *et la topologie engendrée par la semi-norme* p *induisent des topologies équivalentes sur* $E/p^{-1}(0)$, *ceci pour tout* p *de* Γ.

Exemples de tels espaces :

a) $E = \prod_{i \in I} E_i$ où les E_i sont des espaces semi-normés.

b) $E = \mathcal{C}(X ; L)$, espace des applications continues sur X complètement régulier à valeurs dans un espace normé L et muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de K.

c) $E = L^p_{loc}(X, \mu, L)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, espace des applications à valeurs dans un espace normé L de p-ième puissance localement μ-intégrables sur X localement compact avec une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ et munis de la convergence en μ-moyenne d'ordre p (avec l'interprétation habituelle pour $p = +\infty$).

d) tout elc E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Proposition 1. — *Si* E *est un elc possédant la propriété* (C), *tout domaine pseudo-convexe de* E *est uniformément ouvert.*

Cette proposition est une conséquence du théorème 1 car alors $E/p^{-1}(0) \sim E_p$. Dans de tels espaces, la proposition permet de se ramener au cas normé pour étudier la pseudo-convexité et, alors, les conditions 2), 3), 4), 5) et 7) du théorème 2. sont équivalentes. En particulier dans un elc avec propriété (C), la pseudo-convexité équivaut à la $P_c(U)$-convexité. Cette proposition entraîne [9], que dans une limite N-projective d'espaces normés avec P.A.P. et séparable, tout domaine polynomialement convexe est le domaine d'existence d'une fonction analytique (théorème de Cartan-Thullen-Oka).

Remarquons que la proposition 1 ne peut pas se généraliser à n'importe quel espace. Nachbin [8] donne l'exemple d'une fonction non uniformément holomorphe sur E espace des fonctions entières d'une variable complexe muni de la topologie de la convergence compacte [qui est un espace de Fréchet nucléaire ne possédant pas la propriété (C)]. Cette fonction f est définie par $f(\varphi) = \varphi \circ \varphi(0)$ pour tout φ de E. Alors si nous considérons l'ouvert U de E défini par $U = \{z, f(z) \neq 0\}$, il est pseudo-convexe car domaine d'existence de $\frac{1}{f}$ mais il n'est pas uniformément ouvert.

Venons-en au cas général et considérons un elc E dont la topologie est définie par une famille de normes et U un ouvert de E. Pour toute semi-norme continue p sur E on notera U_p l'intérieur de U dans (E, p).

Lemme 3. — *Soit U un ensemble p-ouvert dans un elc* E, *alors* U *est* P(U)*-convexe si et seulement si il est* $P_p(U)$*-convexe.*

Rappelons que $P_p(U)$ désigne l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques et p-continues dans U.

Démonstration. — $P_p(U) \subset P(U)$ donc $\hat{K}_{P_p(U)} \supset \hat{K}_{P(U)}$. Réciproquement si U est P(U)-convexe, il est pseudo-convexe et le reste lorsque l'on considère U comme un ouvert de (E, p). C'est donc un ouvert P(U)-convexe car on est dans le cas normé.

Soit maintenant p une norme (ou une semi-norme) continue sur E, on définit la p-distance à un ensemble A par $d_p(z, A) = \inf_{y \in A} p(z - y)$.

Cette distance satisfait à $|d_p(z, A) - d_p(z', A)| \leqslant p(z - z')$; de plus $d_p(z, A) = 0$ si et seulement si z est dans l'adhérence de A dans (E, p).

PROPOSITION 2. – *Soit* U *un ouvert d'un elc* E *et* p *une semi-norme continue telle que l'intérieur* U_p *de* U *dans* (E, p) *ne soit pas vide. Alors :*

a) *pour tout* z *de* E *on a* $d_p(z, \complement U) = d_p(z, \complement U_p)$.

b) *si* U *est pseudo-convexe il en est de même de* U_p.

Démonstration. – a) Comme $U_p \subset U$ il suffit de montrer que $d_p(z, \complement U) \leqslant d_p(z, \complement U_p)$ pour tout z de U_p. L'ensemble $U - U_p$ est d'intérieur vide dans (E, p) donc pour tout y' de $U - U_p$ et tout $\varepsilon > 0$ $B_p(y', \varepsilon) \cap \complement U \neq \Phi$ où $B_p(y', \varepsilon) = \{x \in E, p(x - y') < \varepsilon\}$. Soit donc y dans $U - U_p$ et $\varepsilon > 0$ il existe y' dans $\complement U$ avec $p(y - y') \leqslant \varepsilon$ d'où $p(x - y') \leqslant p(x - y) + \varepsilon$ pour tout x de U_p. Or $y' \in \complement U$ donc $p(x - y') \geqslant d_p(x, \complement U)$ et $d_p(x, \complement U) \leqslant p(x - y) + \varepsilon$. Ceci ayant lieu pour tout $\varepsilon > 0$, puis pour tout y de $U - U_p$ donc de $\complement U_p$ on en déduit que $d_p(x, \complement U) \leqslant d_p(x, \complement U_p)$. Dans $\complement U$ les deux fonctions sont identiquement nulles.

b) Par hypothèse $-\log d$ est plurisousharmonique dans $U \times E - \{0\}$ où d est définie par $d(z, z') = \inf |\lambda|$ tels que $z + \lambda z' \notin U$. Considérons $\inf\limits_{p(z')=1} d(z, z')$, c'est une fonction qui n'est autre que $d_p(z, \complement U)$ pour tout z de U_p et zéro dans $U - U_p$. Or d'après a)

$$d_p(z, \complement U) = d_p(z, \complement U_p)$$

et est une fonction p-continue ; la fonction $-\log d_p(z, \complement U_p)$ est donc plurisousharmonique dans U_p comme fonction p-continue et borne supérieure d'une famille de fonctions sous-médianes. Ceci prouve que U_p est pseudo-convexe.

THEOREME 3. – *Dans un elc tout domaine pseudo-convexe est convexe par rapport aux fonctions plurisousharmoniques.*

COROLLAIRE. – *Pour un domaine* U *d'un elc les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $U \cap F$ *est pseudo-convexe pour tout sev* F *de dimension finie.*

b) $-\log d_U$ *est plurisousharmonique dans* $U \times E - \{0\}$.

c) U *est convexe par rapport aux fonctions plurisousharmoniques.*

Démonstration. — Soit K un compact de U, il existe une semi-norme p continue sur E telle que $K + B_p(0, 1) \subset U$. Le compact K est donc compact dans U_p qui est un ouvert pseudo-convexe de (E, p). De plus $d_p(K, \complement U_p) \geqslant 1$ d'après la proposition précédente. Posons $\hat{K} = \hat{K}_{P(U)}$ et soit z_0 dans $\hat{K} - K$; pour tout z' de $E - \{0\}$ la fonction $z \to -\log d_U(z, z')$ est plurisousharmonique dans U donc

$$-\log d_U(z_0, z') \leqslant \sup_{z \in K} -\log d_U(z, z')$$

d'où en prenant le sup des deux membres de l'inégalité sur l'ensemble des z' tels que $p(z') = 1$ et en se rappelant que

$$\inf_{p(z')=1} d_U(z, z') = d_p(z, \complement U) = d_p(z, \complement U_p)$$

on obtient : $\qquad d_p(z_0, \complement U) \geqslant d_p(K, \complement U_p) \geqslant 1.$

Ceci entraîne d'abord que z_0 n'appartient pas à l'adhérence dans (E, p) de U, c'est-à-dire $\complement U_p$, et que $d_p(z_0, U_p) \geqslant 1$; l'inégalité étant vraie pour tout z_0 de $\hat{K}$ on en déduit que $\hat{K} + B_p(0, 1)$ est contenu dans U_p. D'où le résultat puisque K est contenu dans l'enveloppe convexe fermée de K.

Le corollaire du théorème 3 entraîne en regardant les restrictions aux sous-espaces de dimension finie que la réunion d'une famille filtrante croissante d'ouverts P(U)-convexe l'est encore et qu'un ouvert U est P(U)-convexe si et seulement si il est localement P(U)-convexe.

Par contre on ne sait pas si, en général, la P(U)-convexité et la $P_c(U)$-convexité sont identiques. On sait seulement que tout ouvert P(U)-convexe est réunion d'une famille filtrante d'ouverts U_p qui sont $P_c(U_p)$-convexes.

Remarquons, pour terminer ce chapitre, que les théorèmes 2 et 3 ont une généralisation lorsqu'on se place dans le cadre des espaces étalés. Nous ne donnerons pas ici le détail des démonstrations que le lecteur trouvera en [11]. On peut montrer, par exemple, que si (X, u, E) est un espace connexe étalé (surface de Riemann) au-dessus d'un elc E séquentiellement complet, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $-\operatorname{Log} d(z, z')$ est une fonction plurisousharmonique sur $X \times E - \{0\}$.

2) X est finiment pseudo-convexe.

3) X satisfait à un "Continuitätsatz".

4) Pour tout K compact, il existe une semi-norme continue p sur E telle que $d_p(\hat{K}_{P(X)}) > 0$.

Si le domaine est tel que les fibres de u soient finies, on peut remplacer la dernière condition par la condition équivalente suivante : "Pour tout compact K de X, l'enveloppe $K_{p(X)}$ est relativement compacte dans X".

Si E est normé on peut ajouter la condition équivalente : "1') $-\operatorname{Log} d$ est une fonction plurisousharmonique continue sur X".

DEUXIEME PARTIE : ETUDE DE LA CONVEXITE POLYNOMIALE

2.1. Propriété d'approximation forte.

Rappelons quelques définitions : Un ouvert U d'un elcs E est dit de *Runge* si l'ensemble π_E des polynômes continus sur E est dense dans H(U) pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de U.

Un ouvert U d'un elcs E est dit *polynomialement convexe* si, pour tout compact K de U, l'ensemble $\hat{K}_\pi = \{x \in U, |f(x)| \leqslant |f|_K$ pour tout f de $\pi_E\}$ est précompact dans U. L'enveloppe $\hat{K}_\pi$ est toujours contenue dans l'enveloppe convexe fermée de K.

Un ouvert U sera dite *finiment de Runge* (resp. finiment polynomialement convexe) si, pour tout sous-espace F de dimension finie de E, l'ouvert $U \cap F$ est de Runge (resp. polynomialement convexe).

Nous ne considérons ici que les polynômes continus.

DEFINITION. — *On dira qu'un elcs* E *possède la propriété d'approximation forte (P.A.F.) s'il existe une famille* $\mathfrak{F}_E$ *de projections continues de rang fini,* $(u(E))_{u \in \mathfrak{F}}$ *étant filtrante croissante pour l'inclusion, qui possède la propriété suivante :*

"*Pour tout compact* K *de* E *et tout voisinage* V *de* 0, *il existe* u *dans* $\mathfrak{F}_E$ *tel que* $u(x) - x \in V$ *pour tout* x *de* K".

Cette propriété d'approximation est plus restrictive que celle de Grothendieck [5] qui ne suppose pas que les éléments de $\mathfrak{F}$ sont des projections ni que la famille des images est filtrante.

Donnons quelques exemples d'espaces avec P.A.F. :

1) Les espaces de Banach $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues sur un compact K à valeurs complexes (ou plus généralement dans un espace normé) muni de la norme sup. Les éléments de $\mathfrak{F}_E$ sont alors les applications $\varphi \to u(\varphi) = \sum_{i \in I} \varphi(\xi_i)\,\alpha_i$, pour toute partition finie $(\alpha_i\,,\,\xi_i)_{i \in I}$ pointée de K (i.e. $(\alpha_i)_{i \in I}$ est une partition finie de K et ξ_i un point fixé de $\operatorname{supp} \alpha_i - \bigcup_{j \neq i} (\operatorname{supp} \alpha_j)$. Notons que $\|u\| \leqslant 1$ pour tout u de $\mathfrak{F}_E$.

2) Les espaces $L^p(X\,,\mu\,,F)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, des classes de fonction de puissance p-ième μ-intégrables (μ mesure de Radon positive sur un espace X localement compact) à valeurs dans un espace normé F (avec la convention habituelle pour $p = +\infty$). On munit ces espaces de la convergence en μ-moyenne d'ordre p.

Si $p = +\infty$; $L^\infty(X\,,\mu\,,F)$ est alors isomorphe à un $\mathcal{C}(K)$. Supposons donc que $1 \leqslant p < +\infty$. Pour toute décomposition

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_n \cup H$$

par des ensembles 2 à 2 disjoints, les X_i étant relativement compacts et $\mu(K_i) > 0$, on considère la famille $\mathfrak{F}$ des applications

$$f \to u(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\int f \varphi_i \, d\mu}{\mu(X_i)}\, \varphi_i$$

où φ_i désigne la fonction caractéristique de X_i. Ici encore, on a $\|u\|_{L^p} \leqslant 1$.

3) Les espaces à base de Schauder.

4) Tout espace E dont la topologie est définie par un système fondamental de semi-normes p telles que $E_p = (E, p)/p^{-1}(0)$ possède la PAF. Exemples de tels espaces :

a) les espaces nucléaires, car alors les espaces E_p étant préhilbertiens, on prend pour $\mathcal{F}$ la famille des projecteurs de rang fini.

b) tout produit (plus généralement, tout espace muni d'une topologie limite projective) d'espaces normés avec PAF, comme C^I ; $\mathcal{C}(X)$ espace des fonctions continues sur X complètement régulier muni de la convergence uniforme sur les parties compactes de E ; $L^p_{loc}(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, espaces des fonctions localement de puissance p-ième intégrable sur X localement compact, μ mesure de Radon positive et muni de la topologie de la convergence en moyenne sur les parties compactes de X ; tout de E muni de sa topologie faible $\sigma(E, E')$.

5) Les espaces normés ayant la propriété d'approximation projective étudiée dans [9].

La propriété d'approximation forte nous intéresse pour la raison suivante : pour tout u de la famille des projections intervenant dans la définition, on peut associer à $u(E)$ un supplémentaire topologique bien déterminé, à savoir $u^{-1}(0)$.

2.2. Convexité polynomiale.

Dans un elc avec PAF, on posera pour tout u de $\mathcal{F}_E$, $E_u = \mathrm{Im}\, u$ et $E^u = \ker u$, ce qui donne une décomposition $E = E_u \oplus E^u$ (somme directe topologique) ; l'application identique dans E est adhérente à $\mathcal{F}$ pour la topologie de la convergence compacte. Si A est une famille de fonctions définies sur un ouvert U de E, on notera $A_u(U \cap E_u)$ l'ensemble des fonctions f définies sur $(U \cap E_u) \oplus E^u$ par $f = f \circ u$, où f est un élément de $A(U \cap E_u)$. Tout élément f de $A(U)$ induit un élément $\widetilde{f}$ de $A_u(U \cap E_u)$ par $\widetilde{f} = (f|_{u(E)}) \circ u$, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

On peut alors approcher uniformément sur tout compact les fonctions continues par des fonctions ne dépendant que d'un sous-espace de dimension finie. De façon plus précise :

PROPOSITION 3. — *Si* E *est un elc avec P.A.F. et* $f : \mathrm{U} \subset \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ *une fonction continue* (i.e. $f \in \mathcal{C}(\mathrm{U})$), *il existe, pour tout compact* K *de* U *et* $\varepsilon > 0$, *un élément* u *de* $\mathcal{F}_{\mathrm{E}}$ *tel que* $f \circ u \in \mathcal{C}_u(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}_u)$ *et* $|f(x) - f \circ u(x)| < \varepsilon$ *pour tout* x *de* K. *De plus, si* f *est analytique, polynomiale ou plurisousharmonique, il en est de même de* $f \circ u$.

En effet, f est continue au voisinage de K donc uniformément continue sur K. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de 0 tel que $\mathrm{K} + \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ et $x - x' \in \mathrm{V}$, x et x' dans $\mathrm{K} + \mathrm{V}$ entraîne $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. L'espace E étant avec P.A.F., il existe u dans $\mathcal{F}$ tel que $u(x) - x \in \mathrm{V}$ pour tout x de K, ce qui entraîne

$$|f \circ u(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pour tout x de K.

COROLLAIRE. — a) *L'espace* $\bigcup_{u \in \mathcal{F}} \pi_u$ *est dense dans* π_{E} *pour la topologie de la convergence compacte.*

b) *Pour tout compact* K *de* U, *on a* $\hat{\mathrm{K}}_\pi = \bigcap \hat{\mathrm{K}}_{\pi_u}$, *l'intersection étant filtrante décroissante.*

Ce corollaire est la conséquence du fait que π_u est l'ensemble des éléments de la forme $\varphi \circ u$, où φ est un polynome sur E_u.

LEMME 4. — *Soit* K *un compact de* U. *Pour tout* u *de* $\mathcal{F}$ *tel que* $u(\mathrm{K}) \subset \mathrm{U}$, *on a :*

$$\hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{A}_u(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}_u)} = \widehat{u(\mathrm{K})}_{\mathrm{A}(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}_u)} \oplus \mathrm{E}^u .$$

Autrement dit, $\hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{A}_u(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}_u)}$ est de la forme $\mathrm{K}_0 \oplus \mathrm{E}^u$ et

$$u[\hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{A}_u(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}_u)}] = \widehat{u(\mathrm{K})}_{\mathrm{A}(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}_u)} .$$

Démonstration. — $z \in u[\hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{A}_u(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}_u)}]$

$\Leftrightarrow$ il existe Z dans $\hat{\mathrm{K}}_{\mathrm{A}_u(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}_u)}$ tel que $u(\mathrm{Z}) = z$

$\Leftrightarrow$ $\forall f \in \mathrm{A}_u(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}_u)$ on a $|f(\mathrm{Z})| \leqslant |f|_{\mathrm{K}} = |f|_{u(\mathrm{K}) \oplus \mathrm{E}^u}$

$\Leftrightarrow$ $\forall \tilde{f} \in \mathrm{A}(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}_u)$ on a $|\tilde{f}(z)| = |f(\mathrm{Z})| \leqslant |\tilde{f}|_{u(\mathrm{K})}$

$\Leftrightarrow$ $z \in \widehat{u(\mathrm{K})}_{\mathrm{A}(\mathrm{U} \cap \mathrm{E}_u)}$

LEMME 5. — *Si* K *est un compact de* U, *on a, pour toute famille* A(U) *de fonctions continues sur* U :

$$\hat{K}_{A(U)} \supset \bigcap_{\substack{u \in \mathcal{F} \\ u(K) \subset U}} \widehat{K}_{A_u(U \cap E_u)} .$$

Soit $x_0 \notin \hat{K}_{A(U)}$. Il existe f dans A(U) telle que $|f(x_0)| > |f|_K$; posons $a = |f(x_0)| - |f|_K$ et $K' = K \cup \{x_0\}$. Par la proposition 3, il existe u dans $\mathcal{F}$ tel que $u(K') \subset U$ et $|f \circ u(x) - f(x)| \leqslant \frac{a}{3}$ pour tout x de K'. On en déduit que :

$$|f \circ u(x_0)| > |f(x_0)| + \frac{a}{3} = |f|_K + \frac{2a}{3} \geqslant |f \circ u|_K + \frac{a}{3} ,$$

qui montre que $x_0 \notin \hat{K}_{A_u(U \cap E_u)}$.

On peut alors démontrer :

THEOREME 4. — *Si* U *est un ouvert finiment de Runge d'un elc avec P.A.F., les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) U *est* $P_c(U)$*-convexe.*

2) U *est* H(U)*-convexe.*

3) U *est* π*-convexe.*

COROLLAIRE 1. — *Si* U *est finiment* π*-convexe dans un elc avec P.A.F., alors* $\hat{K}_\pi = \hat{K}_{H(U)} = \hat{K}_{P_c(U)}$ *pour tout compact de* U.

COROLLAIRE 2. — *Si* U *est* $P_c(U)$*-convexe dans un elc avec P.A.F., les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) U *est finiment de Runge.*

2) U *est finiment* π*-convexe.*

3) U *est* π*-convexe.*

Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que, si U est $P_c(U)$-convexe, on a $\hat{K} = \hat{K}_{P_c(U)}$. Pour tout sous-espace F de dimension finie, $U \cap F$ est pseudo-convexe et de Runge, donc polynomialement convexe et le théorème de Runge en dimension finie entraîne que $\hat{K}_{\pi_F} = \hat{K}_{P_c(U \cap F)}$ pour tout compact K de $U \cap F$.

Il s'ensuit, grâce aux lemmes 4 et 5, que :

$$\hat{K}_{P_c(U)} \supset \cap \hat{K}_{P_{c,u}(U \cap E_u)} = \cap \hat{K}_{\pi_u} = \hat{K}_\pi .$$

Exemples d'ouverts finiment de Runge :

1) Tout ouvert équilibré par rapport à l'un de ses points.

2) Tout ouvert de la forme $\{x \in E, v(x) < 0\}$ où v est une fonction plurisousharmonique dans E tout entier (plus généralement, dans un ouvert convexe ou polynomialement convexe). Toute limite d'une famille filtrante croissante de tels ouverts.

Dans un espace normé avec P.A.F., tout ouvert finiment π-convexe est pseudo-convexe et donc $P_c(U)$-convexe, ce qui entraîne l'équivalence des conditions 2 et 3 du Corollaire 2. Ceci peut se généraliser au cas non normé :

THEOREME 5. — *Soit* E *un elcs possédant un système fondamental de semi-normes p telles que* $E_p = (E, p)/p^{-1}(0)$ *possèdent la P.A.F. Un ouvert connexe* U *de* E *est polynomialement convexe si et seulement si il est finiment polynomialement convexe.*

Ce théorème s'applique principalement aux espaces normés avec P.A.F. ainsi qu'aux espaces nucléaires.

Il suffit de montrer que si U est finiment π-convexe il est aussi π-convexe car la réciproque est évidente si l'on remarque que la condition : "U est finiment π-convexe" équivaut à : "pour tout compact K de dimension finie de U, $\hat{K}_\pi$ est compact dans U".

Si U est finiment π-convexe, il est pseudo-convexe ; soit donc p une semi-norme telle que U contienne une p-boule de rayon non nul, on considère l'application $u_p : E \to E/p^{-1}(0)$, qui est surjective et ouverte. Par le théorème 1, U s'écrit $U = u_p^{-1} \circ u_p(U)$ et il n'est pas difficile de voir qu'alors $u_p(U)$ est aussi finiment π-convexe. On peut donc, dans la démonstration, supposer que la topologie de E est définie par une famille de normes ; aussi d'après la remarque faite plus haut, n'y-a-t-il que le cas non normé à démontrer. On notera U_p l'intérieur de U dans (E, p). Si K est un compact de dimension finie de U, il existe une norme p et $a > 0$ tels que $K + B_p(0, a) \subset U_p$.

Pour tout sous-espace F de dimension finie contenant K, on a :

$$K + B_p(0, a) \cap F \subset U_p \cap F \subset U \cap F .$$

L'ouvert $U \cap F$ est, par hypothèse, polynomialement convexe et p induit une norme sur E ; il s'ensuit que : $\hat{K}_\pi + B_p(0, a) \cap F \subset U \cap F$ car, en dimension finie, le passage à l'enveloppe polynomiale ne diminue pas la p-distance à la frontière. L'inclusion précédente ayant lieu pour tout sous-espace F de dimension finie contenant K, il s'ensuit que $\hat{K} + B_p(0, a) \subset U$ donc, aussi, $\hat{K} + B_p(0, a) \subset U_p$, qui prouve que U_p est finiment π-convexe donc π-convexe dans (E, p), et aussi dans E.

Le théorème s'en déduit puisque U est réunion filtrante croissante des U_p et qu'une réunion filtrante croissante d'ouverts polynomialement convexes est encore polynomialement convexe.

Dans la démonstration nous avons prouvé le résultat suivant :

PROPOSITION 4. – *Soit* E *un elc quelconque,* T *sa topologie et* T' *une topologie sur* E *plus faible que* T. *Alors l'intérieur pour* T' *de tout ensemble* T-*ouvert et finiment polynomialement convexe est, s'il n'est pas vide, finiment polynomialement convexe. De plus, si l'espace* E *satisfait à l'hypothèse du théorème 5, l'intérieur, s'il n'est pas vide de tout ensemble finiment polynomialement convexe, est polynomialement convexe.*

2.3. Approximation polynomiale.

Nous allons maintenant prouver des théorèmes reliant la convexité polynomiale à la propriété de Runge.

PROPOSITION 5. – (Runge). *Un ouvert* U *holomorphiquement convexe dans un elcs* E *avec P.A.F. est polynomialement convexe si et seulement si il est de Runge.*

Si U est de Runge, on a pour tout compact K de U : $\hat{K}_\pi = \hat{K}_{H(U)}$. Réciproquement, si U est polynomialement convexe, soient K compact de U et $\varepsilon > 0$; il existe un voisinage V de 0, avec $K + V \subset U$, tel que $x - y \in V$ et $x, y \in K + V$ entraînant $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $u \in \mathfrak{F}$ tel que $u(x) - x \in V$ pour tout x de K, $u(K)$ est compact dans $U \cap E_u$

qui est polynomialement convexe et il existe par le théorème de Runge en dimension finie, un polynome P sur E_u, tel que pour tout x de K, $|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ·

Posons $\widetilde{P} = P \circ u$. On obtient

$$|f(x) - \widetilde{P}(x)| \leqslant |f(x) - f \circ u(x)| + |f \circ u(x) - P \circ u(x)|$$

pour tout x de K ; par choix de u, le premier terme est plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$ et le second, plus petit que $\sup\limits_{u(K)} |f(y) - P(y)|$ qui aussi plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$ ·

On aurait aussi pu montrer, en appliquant la proposition 1, que, dans un espace avec la propriété PAF, la condition "pour tout F de dimension finie, les polynômes sur F sont denses dans $H(U \cap F)$" entraîne : "les polynômes sur E sont denses dans H(U) pour la topologie de la convergence compacte".

Pour terminer, nous allons démontrer un théorème appelé théorème d'Oka-Weil, en dimension finie. Le théorème de Runge en est un corollaire.

THEOREME 6. – (Oka-Weil). *Soit* E *un elc possédant la PAF et* K *un compact polynomialement convexe* ($K = \hat{K}_\pi$). *Alors, toute fonction analytique au voisinage de* K *s'approche uniformément sur* K *par des polynômes.*

Démonstration. – Soient fixés K, $\varepsilon > 0$, V un voisinage de 0 et f une fonction analytique dans K + V. Montrons qu'il existe un polynôme P tel que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ uniformément sur K.

On peut trouver $u_0 \in \mathcal{F}$ tel que $u_0(K) \subset K + V$ et

$$|f(x) - f \circ u_0(x)| < \varepsilon$$

pour tout x de K. On ne peut pas appliquer le théorème déjà connu en dimension finie, car il n'y a aucune raison pour que $u_0(K)$ soit polynomialement convexe. On peut alors utiliser le lemme suivant :

LEMME 6. – *u_0 étant fixé, on a* $u_0(K) = \bigcap\limits_{u \in \mathcal{F}} u_0[\hat{K}_{\pi_u}]$.

Pour simplifier l'écriture, notons $\hat{K}_u$ pour $\hat{K}_{\pi_u}$.

Par hypothèse, $\hat{K} = \cap \hat{K}_u$, donc, $u_0(K) \subset \cap\, u_0(\hat{K}_u)$. Réciproquement, soit $x \in \cap\, u_0(\hat{K}_u)$. Pour tout u de F, il existe $X_u \in \hat{K}_u$, tel que $x = u_0(X_u)$; notons u' la projection sur E^u parallèlement à E_u, c'est-à-dire $u' = \mathrm{Id}_E - u$. Pour tout u de $\mathcal{F}$, $u'(K)$ est un compact de E^u. Notons pour tout $u > u_0$:

$$K'_u = \hat{K}_u \cap \left[\bigcap_{u_0 < v < u} E_v \oplus v'(K) \right] .$$

La famille (K'_u) est une famille filtrante décroissante de compacts de E dont l'intersection est égale à K ; de plus $u_0(\hat{K}_u) = u_0(K'_u)$ pour tout $u > u_0$. Pour tout u de $\mathcal{F}$, il existe un point X_u de K'_u tel que $u_0(X_u) = x$. L'intersection des compacts étant décroissante, on peut extraire une sous-famille, notée encore (X_u), adhérente à un point X_0 de K. Comme la fonction u_0 est continue, il s'ensuit que la famille $u_0(X_u)$ est adhérente à $u_0(X_0)$, ce qui entraîne que le point x est égal à $u_0(X_0)$ et prouve bien que x appartient à $u_0(K)$.

Suite de la démonstration du théorème. – u_0 est choisi et fixé tel que $u_0(K) \subset K + V$ et $u_0(\hat{K}_u)$ est une famille filtrante décroissante de compacts (c'est-à-dire, $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{F}$, il existe $u \in \mathcal{F}$, tel que $u_0(K_u) \subset u_0(K_{u_i})$ pour $i = 1, 2$) dont l'intersection est égale à $u_0(\hat{K})$. Il existe donc un u tel que $u_0(\hat{K}_u) \subset K + V$; u peut toujours être supposé tel que $E_{u_0} \subset E_u$. Soit $\tilde{f}$ la fonction égale à la restriction de $f \circ u_0$ à E_u, c'est-à-dire qui coïncide avec f sur $E_{v_0} \cap (K + V)$ et qui est constante sur les fibres $x + (E_u - E_{u_0})$ pour tout x de $E_{u_0} \cap (K + V)$. Elle est définie et analytique au voisinage de

$$u(\hat{K}_u) = \widehat{u(K)}_{\pi_u}$$

qui est un compact polynomialement convexe de E_u, il existe donc un polynôme $\tilde{P}$ sur E_u, tel que $|\tilde{P}(x) - \tilde{f}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout x de $u(\hat{K}_{\pi_u})$, ce qui peut s'écrire $|P(x) - \tilde{f}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout x de $\hat{K}_{\pi_u}$, où l'on a posé $P = \tilde{P} \circ u$. Ce polynôme P est le polynôme cherché, en effet :

$$|f(x) - P(x)| \leqslant |f(x) - \tilde{f}(x)| + |\tilde{f}(x) - P(x)|$$

et pour tout x de K, $|f(x) - \tilde{f}(x)| = |f(x) - f \circ u(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et

$$|\tilde{f}(x) - P(x)| \leqslant \sup_{\hat{K}_u} |\tilde{f}(x) - P(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. COEURÉ, Thèse. *Ann. Inst. Fourier,* t. 20, (1970), 361-432.

[2] S. DINEEN, Runge domains in Banach spaces, *Proc. Irish Acad.* t. 71, (1971).

[3] S. DINEEN, Holomorphic functions on locally convex vector spaces, à paraître aux Ann. Inst. Fourier.

[4] S. DINEEN et A. HIRSCHOWITZ, Sur le théorème de Levi banachique, *CR. Acad. Sc.* t. 272, p. 1245, 1971.

[5] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels et espaces nucléaires, Mem. AMS 16 (1955) et séminaire SCHWARTZ (1953-54).

[6] A. HIRSCHOWITZ, Prolongement analytique en dimension infinie. *Ann. Inst. Fourier,* t. 22, (1972), 255-292.

[7] P. LELONG, Fonctionnelles analytiques et fonctions entières, Publications de l'Université de Montréal (1968).

[8] L. NACHBIN, Uniformité d'holomorphie et type exponentiel, Sem. LELONG (1969/70), Springer Lecture notes n° 205.

[9] Ph. NOVERRAZ, Sur le théorème de Cartan-Thullen-Oka en dimension infinie, à paraître Ann. Acad. Bras. Ciencias.

[10] Ph. NOVERRAZ, Sur la convexité fonctionnelle en dimension infinie *CR. Acad. Sc.* t. 274, p. 313, 1972.

[11] Ph. NOVERRAZ, Pseudo-convexité, convexité polynomiale et domaines d'holomorphie, Cours IMPA (Rio) Avril-Septembre 1971, à paraître chez North-Holland.

Manuscrit reçu le 20 mai 1972
accepté par M. Brelot

Philippe NOVERRAZ
Département de Mathématiques
Université de Nancy I
Case officielle 140
54 037 NANCY