ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANCIS HIRSCH

Intégrales de résolvantes et calcul symbolique

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 4 (1972), p. 239-264

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_4_239_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 4 (1972), 239-264.

INTÉGRALES DE RÉSOLVANTES ET CALCUL SYMBOLIQUE

par Francis HIRSCH

Introduction.

Le but de ce travail est d'étendre un certain nombre de résultats de calcul symbolique (cf. par exemple [1], [2], [4], [6]), tout en unifiant leur démonstration. L'outil fondamental est la transformation de Stieltjes (cf. par exemple [7]) qui permet d'étudier un calcul opérationnel sur les familles résolvantes.

Après un premier paragraphe où nous donnons quelques résultats sur la transformation de Stieltjes, nous étudions les familles $((a_\lambda, \mu_\lambda))_{\lambda>0}$ (où $(a_\lambda)_{\lambda>0}$ est une famille de nombres réels positifs ou nuls et $(\mu_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de mesures positives sur l'ensemble $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs) qui opèrent, en un sens qui sera précisé, sur les familles résolvantes bornées. Enfin, nous appliquons les résultats obtenus au calcul symbolique sur certaines classes d'opérateurs et notamment sur la classe des générateurs infinitésimaux, sur celle des potentiels abstraits (au sens de K. Yosida [8]), et sur celle des noyaux de Hunt.

Une partie de ce travail a été annoncée dans [5].

1. Transformation de Stieltjes.

DÉFINITION. — *On appelle transformée de Stieltjes une fonction f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ telle qu'il existe un nombre réel positif a et une mesure μ positive sur $\mathbf{R}_+$ tels que*

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = a + \int \frac{1}{x+t}\, d\mu\,(t).$$

Notation. — On désigne S l'ensemble des transformées de Stieltjes et par S^* l'ensemble des transformées de Stieltjes non nulles.

Remarque. — Si f appartient à S, le couple (a, μ) associé est parfaitement déterminé. En particulier,

$$a = f(\infty)$$

où $f(\infty)$ désigne la limite de $f(x)$ quand x tend vers $(+\infty)$.

Proposition 1. — *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de* S *convergeant simplement sur $\mathbf{R}_+^*$, quand n tend vers l'infini, vers une fonction g. Alors g appartient à* S.

Si on note (a_n, μ_n) le couple associé à f_n et (a, μ) le couple associé à g, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$$

au sens de la convergence vague sur $\mathbf{R}_+$.

Si en outre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} [(1+t)^{-1}\, d\mu_n(t)] = [(1+t)^{-1}\, d\mu(t)]$$

au sens de la convergence étroite sur $\mathbf{R}_+$.

En effet, sous les hypothèses ci-dessus, la suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ est vaguement bornée. Il existe donc une mesure positive μ sur $\mathbf{R}_+$ qui soit une valeur d'adhérence vague de $(\mu_n)_{n\geq 0}$.

On en déduit que la mesure $[(1+t)^{-1}\, d\mu\,(t)]$ est bornée et qu'il existe une suite extraite $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que $[(1+t)^{-1}\, d\mu_{n_k}(t)]$ converge faiblement vers $[(1+t)^{-1}\, d\mu\,(t)]$ quand k tend vers l'infini. Il en résulte que la suite $(f'_{n_k}(x))_{k\geq 0}$ converge, pour tout x de $\mathbf{R}_+^*$, vers

$$\int \frac{-1}{(x+t)^2}\, d\mu\,(t)$$

et donc que g est de la forme

$$g(x) = a + \int \frac{1}{x+t}\, d\mu\,(t).$$

Par conséquent g appartient à $\mathbf{S}$ et, d'après l'unicité de la représentation,

$$\lim_{n\to\infty} \text{vague}\ \mu_n = \mu.$$

La fin de la proposition en résulte aussitôt.

PROPOSITION 2. — *Soit f une fonction de* $\mathbf{S}$, *alors, pour tout* λ *appartenant à* $\mathbf{R}_+$, *la fonction*

$$f(\lambda f + 1)^{-1}$$

appartient à $\mathbf{S}$.

D'après la proposition 1, il suffit de démontrer la propriété lorsque f est de la forme :

$$f(x) = a + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x + t_i},$$

avec les a_i et les t_i appartenant à $\mathbf{R}_+^*$.

$f(\lambda f + 1)^{-1}$ est alors une fraction rationnelle. En raisonnant sur sa décomposition en éléments simples, on voit qu'il existe $(a_i')_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(t_i')_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que

$$f(x)[\lambda f(x) + 1]^{-1} = \frac{a}{\lambda a + 1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i'}{x + t_i'},$$

ce qui démontre le résultat cherché.

2. Intégrales de résolvantes.

Nous allons d'abord préciser la terminologie et les notations.

• Si X est un espace de Banach (la norme étant désignée par $\|.\|$), nous dirons que $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ est une famille résolvante sur X, si $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ est une famille d'endomorphismes de X $((R_\lambda)_{\lambda>0} \subset L(X))$ telle que

$$\forall \lambda,\ \mu > 0, \qquad R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu.$$

• M étant un réel supérieur ou égal à 1, la famille $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ est dite M-bornée si

$$\forall \lambda > 0, \qquad \|\lambda R_\lambda\| \leqslant M.$$

• Une famille résolvante est dite bornée si elle est M-bornée pour un certain M.

• I désigne l'endomorphisme identique.

• Le terme « semi-groupe M-borné » désignera toujours un semi-groupe $(P_t)_{t \geqslant 0}$ d'opérateurs, fortement continu, tel que

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \|P_t\| \leqslant M.$$

• Nous appellerons « système » une famille $((a_\lambda, \mu_\lambda))_{\lambda > 0}$ où $(a_\lambda)_{\lambda > 0}$ est une famille de réels positifs ou nuls et $(\mu_\lambda)_{\lambda > 0}$ une famille de mesures positives sur $\mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\forall \lambda > 0, \qquad \int \frac{d\mu_\lambda(t)}{t} < \infty.$$

• Nous dirons que le système $((a_\lambda, \mu_\lambda))_{\lambda > 0}$ « opère » si, pour tout espace de Banach X et pour toute famille résolvante bornée, $(R_\lambda)_{\lambda > 0}$, sur X, la famille d'opérateurs $(S_\lambda)_{\lambda > 0}$ sur X définie par

$$\forall \lambda > 0, \qquad S_\lambda = a_\lambda I + \int R_s \, d\mu_\lambda(s),$$

est une famille résolvante sur X.

Le théorème suivant montre qu'il y a bijection entre **S** et l'ensemble des systèmes qui opèrent, si on exclut le système $\left(\left(\frac{1}{\lambda}, 0\right)\right)_{\lambda > 0}$.

Théorème 1. — *Si f est un élément de* **S**, *il existe un unique système $((a_\lambda, \mu_\lambda))_{\lambda > 0}$ tel que*

$$\forall x > 0, \qquad \forall \lambda > 0,$$
$$f(x)(\lambda f(x) + 1)^{-1} = a_\lambda + \int_{\mathbf{R}_+^*} \frac{1}{x + t} \, d\mu_\lambda(t),$$

et ce système opère.

Réciproquement, tout système qui opère, autre que le système $\left(\left(\frac{1}{\lambda}, 0\right)\right)_{\lambda > 0}$, est obtenu de la façon précédente à partir d'un élément de **S** *uniquement déterminé.*

Soit f un élément de **S**. Alors, d'après la proposition 2 de 1., il existe une unique famille $(a_\lambda, \tilde{\mu}_\lambda)_{\lambda > 0}$, où $(a_\lambda)_{\lambda > 0}$ est une famille de réels positifs et $(\tilde{\mu}_\lambda)_{\lambda > 0}$ est une famille de mesures positives sur $\mathbf{R}_+$, telle que

$$\forall x > 0, \qquad \forall \lambda > 0,$$
$$f(x)[\lambda f(x) + 1]^{-1} = a_\lambda + \int \frac{1}{x+t}\, d\tilde{\mu}_\lambda(t).$$

Faisant tendre x vers 0, notant

$$f(0) = \lim_{x \to 0_+} f(x) \leqslant +\infty, \qquad \text{et} \qquad a = \lim_{x \to \infty} f(x),$$

on obtient

$$\text{(1)} \qquad \int \frac{1}{t}\, d\tilde{\mu}_\lambda(t) + a_\lambda = f(0)[\lambda f(0) + 1]^{-1}$$

$\left(\text{avec la convention } \dfrac{1}{0} = \infty \text{ et } \dfrac{\infty}{\lambda\,\infty + 1} = \dfrac{1}{\lambda}\right).$

Par conséquent

$$\tilde{\mu}_\lambda(\{0\}) = 0$$

et en notant

$$\mu_\lambda = \tilde{\mu}_\lambda | \mathbf{R}_+^* \quad (\text{où } | \text{ désigne la restriction}),$$

on voit que $((a_\lambda, \mu_\lambda))_{\lambda > 0}$ est un système vérifiant

$$\text{(2)} \qquad \forall \lambda > 0, \qquad \forall x > 0,$$
$$f(x)[\lambda f(x) + 1]^{-1} = a_\lambda + \int \frac{1}{x+t}\, d\mu_\lambda(t),$$

et

$$\text{(3)} \qquad \forall \lambda > 0, \qquad a_\lambda = a(\lambda a + 1)^{-1}.$$

Lemme 1. — *Soit* E *l'espace des fonctions* φ *de* $\mathbf{R}_+^*$ *dans* $\mathbf{C}$, *continûment dérivables, telles que*

$$\sup_{t>0} t|\varphi(t)| + \sup_{t>0} t^2|\varphi'(t)| < \infty$$

muni de la norme

$$|||\varphi||| = \sup_{t>0} t|\varphi(t)| + \sup_{t>0} t^2|\varphi'(t)|.$$

Pour tout φ *appartenant à* E, *on note* Φ *la fonction de* $(\mathbf{R}_+^*)^2$ *dans* $\mathbf{C}$ *définie par*

$$\Phi(t, s) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t \to s} & \text{si } t \neq s \\ \varphi'(t) & \text{si } t = s. \end{cases}$$

Alors la forme linéaire sur E *définie par*

$$\mathrm{L}(\varphi) = \left[\iint \Phi(t,\ s)\, d\mu_\lambda(t)\, d\mu_{\lambda'}(s)\right](\lambda - \lambda') \\ - \left[\int \varphi(t)\, d\mu_\lambda(t)\right]\frac{a\lambda + 1}{a\lambda' + 1} + \left[\int \varphi(s)\, d\mu_{\lambda'}(s)\right]\frac{a\lambda' + 1}{a\lambda + 1}$$

est continue sur E.

Si, pour tout x *strictement positif, on note* u_x *la fonction*

$$u_x(t) = \frac{1}{x + t}$$

alors

$$\{u_x;\ x > 0\} \subset \mathrm{E} \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0, \quad \mathrm{L}(u_x) = 0.$$

La première partie du lemme découle facilement du théorème des accroissements finis et la seconde partie d'un calcul algébrique (compte tenu des formules (2) et (3)).

Lemme 2. — *Pour toute fonction* ψ *appartenant à l'espace* $\mathcal{S}$ *des fonctions indéfiniment dérivables sur* **R** *à décroissance rapide,*

$$\mathrm{L}(\psi|\mathbf{R}_+^*) = 0$$

(où | *désigne la restriction).*

Soit T la distribution tempérée sur **R**, à support dans $\mathbf{R}_+$ définie par

$$\mathrm{T}(\psi) = \mathrm{L}(\psi|\mathbf{R}_+^*).$$

Notons h sa transformée de Laplace (définie sur $\mathbf{R}_+^*$).

Pour tout x strictement positif, on a

$$\forall t,\ s > 0, \qquad t \neq s \quad \frac{e^{-tx} - e^{-sx}}{t - s} < 0.$$

On en déduit donc, d'après le théorème de Fubini-Tonelli, que

$$\forall x > 0, \qquad \int_0^\infty e^{-tx}|h(t)|\, dt < \infty$$

et

$$\int_0^\infty e^{-tx}h(t)\, dt = \mathrm{L}(u_x) = 0.$$

Donc $h(t)$ est nul pour tout t positif et donc, par unicité de la transformation de Laplace, T est nulle.

LEMME 3. — *Pour toute fonction* φ *de* $\mathbf{R}_+^*$ *dans* $\mathbf{C}$, *continûment dérivable, telle que* $\lim\limits_{t\to 0} t\varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0} t^2\varphi'(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to\infty} t\varphi(t) = -\lim\limits_{t\to\infty} t^2\varphi'(t)$, *on a*

$$\mathrm{L}(\varphi) = 0.$$

L'adhérence dans E de l'espace $\mathcal{D}(\mathbf{R}_+^*)$ est l'ensemble des fonctions φ de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{C}$, continûment dérivables et vérifiant

$$(4) \quad \lim_{t\to 0} t\varphi(t) = \lim_{t\to 0} t^2\varphi'(t) = \lim_{t\to\infty} t\varphi(t) = \lim_{t\to\infty} t^2\varphi'(t) = 0.$$

(Se démontre aisément par troncature.)

Donc, d'après le lemme 2, pour toute fonction vérifiant les propriétés (4) on a

$$\mathrm{L}(\varphi) = 0.$$

Si maintenant φ vérifie les hypothèses du lemme 3 et si

$$\alpha = \lim_{t\to\infty} t\varphi(t),$$

alors la fonction $(\varphi - \alpha u_1)$ vérifie les propriétés (4) et comme $\mathrm{L}(u_1)$ est nul d'après le lemme 1, on a

$$\mathrm{L}(\varphi) = 0.$$

LEMME 4. — *Si* $(\mathrm{R}_\lambda)_{\lambda>0}$ *est une famille résolvante bornée sur un espace de Banach* X *et si*

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \lim_{\lambda\to 0} \lambda \mathrm{R}_\lambda x = 0 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\mathrm{R}_\lambda x = x$$

la famille $(\mathrm{S}_\lambda)_{\lambda>0}$ *définie par*

$$\mathrm{S}_\lambda = a_\lambda \mathrm{I} + \int \mathrm{R}_s\, d\mu_\lambda(s)$$

est une famille résolvante.

Considérons la fonction

$$\varphi(t) = \langle \mathrm{R}_t x,\ x^*\rangle$$

où x est un élément de X, x^* un élément du dual topologique X^*.

φ est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et

$$\varphi'(t) = -\langle \mathrm{R}_t^2 x,\ x^*\rangle.$$

L'hypothèse sur $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ implique que

$$\lim_{t\to 0} t\varphi(t) = \lim_{t\to 0} t^2\varphi'(t) = 0$$

et

$$\lim_{t\to\infty} t\varphi(t) = -\lim_{t\to 0} t^2\varphi'(t) = \langle x, x^*\rangle.$$

Donc, d'après le lemme 3,

$$L(\varphi) = 0.$$

On obtient donc, en utilisant l'équation résolvante :

$$\langle[(\lambda' - \lambda)S_\lambda S_{\lambda'}x - S_\lambda x + S_{\lambda'}x], x^*\rangle = L(\varphi) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tous x et x^*, on voit donc que $(S_\lambda)_{\lambda>0}$ est une famille résolvante.

Lemme 5. — *Si* $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ *est une famille résolvante* M-*bornée sur un espace de Banach* X, *la famille* $(R_\lambda^{(n)})_{\lambda>0}$ *définie (pour* $n > 0$) *par*

$$R_\lambda^{(n)} = \frac{nI}{\lambda n + n^2 + 1} + \frac{n^4}{(\lambda n + n^2 + 1)^2} R_{\frac{\lambda n^2 + n}{\lambda n + n^2 + 1}}$$

est une famille résolvante M-*bornée telle que*

$$\forall x \in X, \quad \forall n > 0, \quad \lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda^{(n)}x = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda^{(n)}x = x$$

et

$$\forall\lambda > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} R_\lambda^{(n)} = R_\lambda \quad \textit{dans } L(X).$$

Ce lemme se démontre sans difficulté.

Ceci étant, si $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ est une famille résolvante M-bornée quelconque, la famille $(R_\lambda^{(n)})_{\lambda>0}$ vérifie les hypothèses du lemme 4.

La famille $(S_\lambda^{(n)})_{\lambda>0}$ définie par

$$S_\lambda^{(n)} = a_\lambda I + \int R_s^{(n)}\, d\mu_\lambda(s)$$

est donc une famille résolvante et, d'après le théorème de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} S_\lambda^{(n)} = S_\lambda \qquad \text{dans} \qquad L(X)$$

avec

$$S_\lambda = a_\lambda I + \int R_s \, d\mu_\lambda(s).$$

$(S_\lambda)_{\lambda>0}$ est donc une famille résolvante, ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème 1.

Nous allons maintenant démontrer la réciproque.

Soit $((a_\lambda, \mu_\lambda))_{\lambda>0}$ un système qui opère, alors il opère sur les familles résolvantes de $\mathbf{R}$.

Or il est facile de voir que les familles résolvantes sur $\mathbf{R}$ sont de la forme $\left(\frac{\beta}{\lambda\beta + 1}\right)_{\lambda>0}$, où β appartient à $[0, \infty]$ $\left(\text{avec la convention } \frac{\infty}{\lambda\infty + 1} = \frac{1}{\lambda}\right)$.

Il existe donc une fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$, à valeurs dans $[0, \infty]$, telle que

$$\forall x > 0, \qquad f(x)[\lambda f(x) + 1]^{-1} = a_\lambda + \int \frac{1}{x+t} d\mu_\lambda(t).$$

Si il existe un x_0 strictement positif tel que

$$f(x_0) = \infty,$$

d'après la décroissance de f, on aurait alors

$$f(x) = \infty \qquad \text{sur} \quad]0, x_0].$$

Donc

$$a_\lambda + \int \frac{1}{x+t} d\mu_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{sur} \quad]0, x_0]$$

et, par analyticité,

$$\forall x > 0 \quad a_\lambda + \int \frac{1}{x+t} d\mu_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ce qui montre (il suffit de faire tendre x vers ∞) que $a_\lambda = \frac{1}{\lambda}$ et donc $\mu_\lambda = 0$.

Supposons maintenant que f soit à valeurs finies, alors

$$f(x) = \lim_{\lambda \to 0} \left(a_\lambda + \int \frac{1}{x+t} d\mu_\lambda(t)\right)$$

ce qui prouve, d'après la proposition 1 de 1., que f appartient à $\mathbf{S}$.

Notations. — Soit f un élément de $\mathbf{S}$. On lui associe, par le théorème 1, un système $((a_\lambda, \mu_\lambda))_{\lambda>0}$ qui opère.

Si $R = (R_\lambda)_{\lambda>0}$ est une famille résolvante bornée sur un espace de Banach X, nous désignerons par $F_f(R)$ la famille résolvante définie par

$$[F_f(R)]_\lambda = a_\lambda I + \int R_s \, d\mu_\lambda(s).$$

• Si R est une famille résolvante sur X, on note $\tilde{R}$ la famille résolvante

$$\tilde{R}_\lambda = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda} R_{\frac{1}{\lambda}}\right).$$

L'opération $\sim$ réalise une bijection réciproque de l'ensemble des familles résolvantes sur lui-même (c.f. [4], proposition I-3-1).

• Si f appartient à $\mathbf{S}^*$, nous noterons $\tilde{f}$ la fonction sur $\mathbf{R}_+^*$ définie par

$$\forall x > 0 \quad \tilde{f}(x) = [f(x^{-1})]^{-1}.$$

Théorème 2. — *Si f appartient à $\mathbf{S}^*$, alors la fonction $\tilde{f}$ appartient aussi à $\mathbf{S}^*$. En outre, si X est un espace de Banach et R une famille résolvante bornée sur X, on a*

$$\widetilde{F_f(R)} = F_{\tilde{f}}(\tilde{R}).$$

Soit f une fonction de $\mathbf{S}^*$ et $((a_\lambda, \mu_\lambda))_{\lambda>0}$ le système qui lui est associé par le théorème 1.

Soit R une famille résolvante bornée sur X et S la famille $F_f(R)$. On a

$$\begin{aligned}\forall \lambda > 0 \quad S_\lambda &= a_\lambda I + \int R_s \, d\mu_\lambda(s)\\ &= \frac{a}{\lambda a + 1} I + \int R_s \, d\mu_\lambda(s)\end{aligned}$$

où a représente $f(\infty)$.

Notons b le nombre $[f(0)]^{-1} = \tilde{f}(\infty)$ qui est fini puisque f est non nulle. On voit facilement, à partir de (1), que

$$I = \frac{\lambda b}{\lambda b + 1} I + \frac{a}{a + \lambda} I + \int I \frac{1}{\lambda} \frac{d\mu_{\frac{1}{\lambda}}(s)}{s},$$

ce qui permet d'écrire

$$\tilde{S}_\lambda = \frac{bI}{\lambda b + 1} + \int \tilde{R}_{\frac{1}{s}} \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\mu_{\frac{1}{\lambda}}(s)}{s^2}.$$

Notons alors ν_λ l'image de la mesure $\left[\frac{s^{-2}}{\lambda^2} d\mu_{\frac{1}{\lambda}}(s)\right]$ sur $\mathbf{R}_+^*$ par l'application de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$:

$$s \to \frac{1}{s}.$$

On a

$$\int \frac{1}{s} \lambda\, d\nu_\lambda(s) = \int \frac{s^{-1}}{\lambda} d\mu_{\frac{1}{\lambda}}(s) < \infty.$$

Donc $\left(\left(\frac{b}{\lambda b + 1}, \nu_\lambda\right)\right)_{\lambda > 0}$ est un système et

$$\forall \lambda > 0 \quad \tilde{S}_\lambda = \frac{b}{\lambda b + 1} I + \int \tilde{R}_s\, d\nu_\lambda(s).$$

Ceci étant vrai pour toute famille résolvante R, on voit que le système $\left(\left(\frac{b}{\lambda b + 1}, \nu_\lambda\right)\right)_{\lambda > 0}$ opère et est donc associé, d'après le théorème 1, à une fonction g élément de $\mathbf{S}$.

$$g(x) = \lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{b}{\lambda b + 1} + \int \frac{1}{x + s} d\nu_\lambda(s)\right)$$
$$= b + \lim_{\lambda \to 0} \int \frac{1}{(1 + xs)s} \frac{1}{\lambda^2} d\mu_{\frac{1}{\lambda}}(s).$$

Or

$$\int \frac{1}{(1 + xs)s} \frac{1}{\lambda^2} d\mu_{\frac{1}{\lambda}}(s)$$
$$= \int \frac{s^{-1}}{\lambda^2} d\mu_{\frac{1}{\lambda}}(s) - \int \frac{1}{\frac{1}{x} + s} \frac{1}{\lambda^2} d\mu_{\frac{1}{\lambda}}(s)$$
$$= -\frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 + \lambda \bar{f}(x)} + \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 + \lambda b} = \frac{\bar{f}(x) - b}{(1 + \lambda \bar{f}(x))(1 + \lambda b)}.$$

Il en résulte que g est la fonction $\bar{f}$, ce qui achève la démonstration.

Notations. — Si R est une famille résolvante bornée sur X, nous noterons R_0 l'opérateur de domaine

$$D(R_0) = \left\{x; \lim_{\lambda \to 0} R_\lambda x \text{ existe}\right\},$$

et défini sur ce domaine par

$$R_0 x = \lim_{\lambda \to 0} R_\lambda x.$$

• Il est facile de voir que, avec les hypothèses précédentes,

$$D(R_0) = \left\{x; \text{w} - \lim_{\lambda \to 0} R_\lambda x \text{ existe}\right\}$$

où w — désigne la limite faible.

• Rappelons enfin (c.f. [4]) qu'une famille résolvante bornée R sur X est dite être une L_0^- (resp. L_∞^-) famille résolvante si

$$\forall x \quad \lim_{\lambda \to 0} \lambda R_\lambda x = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda x = x\right),$$

ce qui est équivalent à

$$\overline{D(R_0)} = X \quad (\text{resp. } \overline{D(\tilde{R}_0)} = X).$$

Nous allons maintenant donner des résultats de stabilité.

Proposition 1. — *Soit* f *un élément de* S *défini par:*

$$\forall\, x > 0 \quad f(x) = a + \int \frac{1}{x+t}\, d\mu(t).$$

Soit R *une famille résolvante* M-*bornée sur un Banach* X. *Alors*

1) $F_f(R)$ *est une famille résolvante* M-*bornée.*

2) $D([F_f(R)]_0) \supset D(R_0)$.

3) $\forall x \in D(R_0)$ $[F_f(R)]_0 x = ax + \int R_s x \, d\mu(s)$.

4) *Si* R *est une* L_0-*famille résolvante, il en est de même de* $F_f(R)$.

Démontrons d'abord le premier point.

$$\begin{aligned}\|\lambda[F_f(R)]_\lambda\| &\leqslant \frac{\lambda a}{\lambda a + 1} + \int \|sR_s\| \frac{\lambda\, d\mu_\lambda(s)}{s} \\ &\leqslant M\left(\frac{\lambda a}{\lambda a + 1} + \int \frac{\lambda\, d\mu_\lambda(s)}{s}\right)\end{aligned}$$

car M est supposé plus grand que 1.

Il suffit alors d'appliquer l'égalité (1).

Nous allons, ensuite, démontrer 2) et 3).

Considérons les mesures μ_λ comme des mesures sur $\mathbf{R}_+$ ne chargeant pas $\{0\}$. Alors, d'après la proposition 1 de 1., $[(1+t)^{-1}\,d\mu_\lambda(t)]$ converge étroitement, quand λ tend vers 0, vers $[(1+t)^{-1}\,d\mu(t)]$.

Soit x un élément de $D(R_0)$ et x^* un élément de X^*.

$$\langle [F_f(R)]_\lambda x, x^*\rangle = \frac{a}{\lambda a + 1}\langle x, x^*\rangle + \int \langle (1+s)R_s x, x^*\rangle (1+s)^{-1}\,d\mu_\lambda(s).$$

Or la fonction :

$$s \in [0, \infty[\to \langle (1+s)R_s x, x^*\rangle$$

est continue et bornée.

Donc

$$\lim_{\lambda\to 0} \langle [F_f(R)]_\lambda x, x^*\rangle = a\langle x, x^*\rangle + \int \langle R_s x, x^*\rangle\,d\mu(s).$$

Or,

$$\int \|R_s x\|\,d\mu(s) < \infty.$$

On a donc

$$\forall x \in D(R_0) \quad \mathrm{w} - \lim_{\lambda\to 0}[F_f(R)]_\lambda x = ax + \int R_s x\,d\mu(s).$$

Enfin, 4) découle aussitôt de 2).

Proposition 2. — *Soit* f *un élément de* $\mathbf{S}^*$ *et* R *une famille résolvante bornée sur* X. *Alors*

1) $$\sup_{\lambda>0}\|\lambda[\widetilde{F_f(R)}]_\lambda\| \leqslant \sup_{\lambda>0}\|\lambda\tilde{R}_\lambda\|.$$

2) $$D([\widetilde{F_f(R)}]_0) \supset D(\tilde{R}_0).$$

3) *Si* R *est une* L_∞*-famille résolvante, il en est de même de* $F_f(R)$.

Ceci découle aussitôt du théorème 2 et de la proposition 1 de 2., après avoir remarqué que, pour que R soit une L_∞-famille, il faut et il suffit que $\tilde{R}$ soit une L_0-famille.

Proposition 3. — *Soit* f *un élément de* $\mathbf{S}^*$. *Alors, si* R (resp $\tilde{R}$) *est la résolvante d'un semi-groupe* **M***-borné sur* X, *il en est de même de* $F_f(R)$ (resp. $\widetilde{F_f(R)}$) *et le domaine du générateur infinitésimal associé à* $F_f(R)$ (resp. $\widetilde{F_f(R)}$) *contient le domaine du générateur infinitésimal associé à* R (resp. $\tilde{R}$).

Il suffit, en vertu du théorème 2 de 2., de faire la démonstration dans l'un des cas.

Supposons que R soit la résolvante d'un semi-groupe $(P_t)_{t\geqslant 0}$ M-borné sur X. Alors

$$\forall\lambda > 0, \qquad \forall x \in X, \qquad R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t x \, dt.$$

Il en résulte immédiatement, d'après le théorème de Fubini :

$$\forall\lambda > 0, \quad \forall x \in X \qquad [F_f(R)]_\lambda x = \frac{a}{\lambda a + 1} + \int P_t x \left[\int_0^\infty e^{-st}\, d\mu_\lambda(s)\right] dt.$$

D'autre part, d'après la proposition précédente, $F_f(R)$ est une L_∞-famille, donc (c.f. [4], théorème II-2.1) il existe un opérateur B fermé de domaine dense tel que

$$\forall\lambda > 0 \quad [F_f(R)]_\lambda = (\lambda I - B)^{-1},$$

B n'étant autre que $-\,[\widetilde{F_f(R)}]_0$.

Il en résulte que, d'après le théorème de Hille-Yosida, tout sera démontré si on démontre que

$$\forall\lambda > 0 \quad \forall n \in N \quad \|\lambda^n [F_f(R)]_\lambda^n\| \leqslant M.$$

Or, si nous posons

$$\varepsilon_\lambda = \frac{a}{\lambda a + 1}\,\delta + \left(\int_0^\infty e^{-st} d\mu_\lambda(s)\right) dt,$$

où δ est la masse de Dirac à l'origine, ε_λ est une mesure sur R_+ vérifiant (d'après (1))

$$\forall\lambda > 0 \quad \int \lambda \, d\varepsilon_\lambda(t) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \lambda[F_f(R)]_\lambda x = \int P_t x \;\lambda\; d\varepsilon_\lambda(t).$$

On a donc

$$\forall\lambda > 0 \quad \forall n \in N \quad \lambda^n [F_f(R)]_\lambda^n x = \iint \cdots \int P_{t_1+t_2+\cdots+t_n} x \;\lambda^n \, d\varepsilon_\lambda(t_1) \ldots d\varepsilon_\lambda(t_n),$$

ce qui démontre le résultat.

Nous donnons enfin une proposition concernant l'adhérence des images.

Proposition 4. — *Soit f un élément de* $\mathbf{S}^*$, R *une famille résolvante bornée sur* X *et* S *la famille* $F_f(R)$. *Alors, notant* Im S (resp. Im R) *l'image de* S_λ (resp. R_λ) *pour* λ *strictement positif arbitraire, et* Im (I — S) (resp. Im (I — R)) *l'image de* $(I - \lambda S_\lambda)$ (resp. $(I - \lambda R_\lambda)$) *pour* λ *strictement positif arbitraire, on a*

1) $\overline{\operatorname{Im} S} \supset \overline{\operatorname{Im} R}$ *et* $\overline{\operatorname{Im}(I - S)} \supset \overline{\operatorname{Im}(I - R)}$.

2) *Si* $f(\infty)$ *égale* 0,

$$\overline{\operatorname{Im} S} = \overline{\operatorname{Im} R}.$$

3) *Si* $f(0)$ *est infini,*

$$\overline{\operatorname{Im}(I - S)} = \overline{\operatorname{Im}(I - R)}.$$

Il suffit évidemment, en vertu du théorème 2 de 2., de démontrer les propriétés concernant Im S et Im R.

Il est évident que, si $f(\infty)$ est nul,

$$S_\lambda = \int R_s \, d\mu_\lambda(s)$$

et donc $$\overline{\operatorname{Im} S_\lambda} \subset \overline{\operatorname{Im} R}.$$

Lemme. — *Soit* $(\chi_\lambda)_{\lambda>0}$ *la famille de mesures sur* $[0, \infty]$ *définie par :*

$$\chi_\lambda | \,]0, \infty[\, = \lambda s^{-1} \, d\mu_\lambda(s) \qquad \chi_\lambda(\{0\}) = 0 \qquad \chi_\lambda(\{\infty\}) = \frac{\lambda a}{\lambda a + 1}.$$

Alors

$$\lim_{\lambda \to \infty} \text{vague } \chi_\lambda = \delta_\infty$$

où δ_∞ *désigne la mesure de Dirac à* ∞.

$(\chi_\lambda)_{\lambda>0}$ désigne une famille de mesures positives sur $[0, \infty]$ avec

$$\forall \lambda > 0 \quad \int d\chi_\lambda(t) \leqslant 1.$$

Considérons $(s_\lambda)_{\lambda>0}$ la famille de fonction sur $[0, \infty[$ définie par :

$$s_\lambda(0) = \lambda f(0) \, [\lambda f(0) + 1]^{-1},$$

$$\forall x > 0 \quad s_\lambda(x) = \int e^{-tx} t^{-1} \lambda \, d\mu_\lambda(t).$$

On a

$$\lim_{\lambda\to\infty} s_\lambda(0) = 1.$$

Il suffit donc de démontrer que

$$\forall x > 0 \quad \lim_{\lambda\to\infty} s_\lambda(x) = 0.$$

Or, en reprenant les notations de la démonstration du théorème 2 de 2., on voit que

$$\forall x > 0 \quad \lambda s_\lambda(x) = \int \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}x} d\nu_{\frac{1}{\lambda}}(t).$$

Or on a vu que $\left[(1+t)^{-1} d\nu_{\frac{1}{\lambda}}(t)\right]$ convergeait étroitement sur $[0, \infty[$ quand λ tend vers l'infini. Donc

$$\forall x > 0 \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda s_\lambda(x) \text{ existe}$$

et par conséquent le résultat est démontré.

Ceci étant, si x est un élément de $\overline{\operatorname{Im} R}$,

$$\lim_{s\to\infty} sR_s x = x.$$

Soit x un élément de $\overline{\operatorname{Im} R}$ et x^* un élément du dual X^*.

Soit φ la fonction

$$s \in [0, \infty] \to \langle sR_s x, x^* \rangle, \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \varphi(\infty) &= \langle x, x^* \rangle \\ \varphi(0) &= 0. \end{aligned}$$

φ est bornée et continue sur $[0, \infty]$. D'après le lemme

$$\langle \lambda S_\lambda x, x^* \rangle = \int \varphi(s)\, d\chi_\lambda(s) \text{ tend vers } \langle x, x^* \rangle.$$

Il en résulte que x appartient à $\overline{\operatorname{Im} S}$.

3. Calcul symbolique.

Dans tout ce paragraphe, X désigne un espace de Banach, f un élément de S^* défini par

$$\forall x > 0 \quad f(x) = a + \int \frac{1}{x+t} d\mu(t),$$

et V un opérateur fermé sur X, le domaine D(V) dense, tel que son ensemble résolvant $\rho(V)$ contienne $\mathbf{R}_-^*$ (ensemble des réels strictement négatifs) et vérifiant

$$\sup_{\lambda>0} \|(I + \lambda V)^{-1}\| < \infty.$$

PROPOSITION 1. — *Pour tout* x *de* D(V),

$$\int \|V(I + \lambda V)^{-1}x\| \, d\mu(\lambda) < \infty,$$

et l'opérateur W, *de domaine* D(V), *défini par*

$$\forall x \in D(V) \quad Wx = ax + \int V(I + \lambda V)^{-1}x \, d\mu(\lambda)$$

est préfermé.

Soit R la L_0-famille résolvante bornée définie par

$$R_\lambda = V(I + \lambda V)^{-1}.$$

Notons S la famille résolvante $F_f(R)$.

Il découle de la proposition 1 de 2. que

$$\forall x \in D(V) \quad \int \|R_s x\| \, d\mu(s) < \infty$$

et $$W \subset [F_f(R)]_0$$

(où $\subset$ désigne la relation de prolongement).

$[F_f(R)]_0$ étant fermé, la proposition est démontrée.

Notations. — Nous noterons $H_f(z)$ la fonction définie sur l'ensemble $(\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-^*) \cup \{\infty\}$ à valeurs dans ce même ensemble, tel que

$$\forall z \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-^* \quad H_f(z) = a + \int \frac{z}{1 + \lambda z} \, d\mu(\lambda)$$

et
$$\begin{aligned} H_f(\infty) &= a + \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda} \quad \text{si} \quad \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda} < \infty \\ &= \infty \quad \text{si} \quad \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda} = \infty. \end{aligned}$$

$\Big($où la fonction $\dfrac{1}{\lambda}$ est supposée prendre la valeur $+\infty$ pour $\lambda = 0\Big)$.

• *Nous noterons* $H_f(V)$ *le plus petit prolongement fermé de l'opérateur* W *défini à la proposition* 1.

Proposition 2. — *Soit* R *la famille résolvante bornée sur* X

$$R_\lambda = V(I + \lambda V)^{-1}.$$

Alors

$$H_f(V) = [F_f(R)]_0.$$

Nous avons déjà vu que

$$H_f(V) \subset [F_f(R)]_0.$$

Notons S la famille $F_f(R)$, on a donc :

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall x \in D(V) \quad (I - \lambda S_\lambda)(I + \lambda H_f(V))x = x.$$

Soit x appartenant à $D(V)$

$$S_\lambda x = \frac{a}{\lambda a + 1}\, x + \int R_s x \, d\mu_\lambda(x)$$

et $$\forall s > 0 \quad R_s x = (I + sV)^{-1} Vx \in D(V),$$
$$VR_s x = R_s Vx.$$

Il en résulte que

$$\int \|VR_s x\| \, d\mu_\lambda(s) < \infty$$

et, V étant fermé, on en déduit que $S_\lambda x$ appartient à $D(V)$ et

$$VS_\lambda x = S_\lambda Vx.$$

D'autre part

$$\forall \lambda,\, s > 0 \quad \forall x \quad S_\lambda R_s x = R_s S_\lambda x.$$

Par conséquent

$$\forall \lambda > 0 \ \forall x \in D(V) \ S_\lambda x \in D(V) \text{ et } H_f(V) S_\lambda x = S_\lambda H_f(V) x$$

et donc

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall x \in D(V) \quad (I + \lambda H_f(V))(I - \lambda S_\lambda)x = x.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Im}(I + \lambda H_f(V)) \supset D(V),$$

ce qui implique

$$\overline{\operatorname{Im}[I + \lambda H_f(V)]} = X.$$

$H_f(V)$ étant M-codissipatif (pour un certain M) et fermé, il résulte alors facilement des propriétés de ces opérateurs (c.f. [4]) que

$$H_f(V) = [F_f(R)]_0.$$

THÉORÈME 1. — $H_f[\sigma^e(V)] = \sigma^e[H_f(V)]$ *(où σ^e désigne le spectre étendu).*

(En particulier

$$\rho[H_f(V)] \supset \mathbf{R}^*_-.)$$

- $\sup_{\lambda>0} \|[I + \lambda H_f(V)]^{-1}\| \leqslant \sup_{\lambda>0} \|(I + \lambda V)^{-1}\|$
- $\sup_{\lambda>0} \|\lambda H_f(V)[I + \lambda H_f(V)]^{-1}\| \leqslant \sup_{\lambda>0} \|\lambda V(I + \lambda V)^{-1}\|$
- $\overline{\operatorname{Im} H_f(V)} \supset \overline{\operatorname{Im} V}$ *et, si* $f(\infty)$ *est nul,* $\overline{\operatorname{Im} H_f(V)} = \overline{\operatorname{Im} V}$.

Soit R la famille résolvante

$$R_\lambda = V(I + \lambda V)^{-1}.$$

Alors on a vu (Proposition 2 de 3.) que

$$H_f(V) = [F_f(R)]_0.$$

Si nous notons S la famille $F_f(R)$, d'après [4], théorème II-2-1,

$$\rho(H_f(V)) \supset \mathbf{R}^*_- \quad \text{et} \quad \forall\lambda > 0 \quad S_\lambda = H_f(V)[I + \lambda H_f(V)]^{-1}.$$

D'autre part, d'après le 1) de la Proposition 1 de 2. et le 1) de la Proposition 2 de 2., on a les deux ingéalités cherchées.

Enfin, le dernier point du théorème est alors une conséquence immédiate de la Proposition 4 de 2.

Montrons maintenant l'égalité spectrale.

Utilisant une méthode employée par divers auteurs (c.f. par exemple [1], [2], [3]) nous allons considérer $\mathfrak{U}$ le bicommutant dans L(X) de $\{R_\lambda; \lambda > 0\}$.

Du fait que

$$\forall\lambda > 0, \qquad S_\lambda = \frac{a}{\lambda a + 1}\, I + \int R_s\, d\mu_\lambda(s),$$

$\{S_\lambda, \lambda > 0\}$ est inclus dans $\mathfrak{U}$.

D'autre part $\mathfrak{U}$ est évidemment une algèbre de Banach commutative et unitaire. Si Ω est le spectre de l'algèbre $\mathfrak{U}$, il existe une fonction $\hat{V}$ de Ω dans $\overline{\mathbf{C}}$ tel que

$$\forall \omega \varepsilon \Omega, \quad \forall s > 0 \quad \omega(\mathrm{R}_s) = \frac{\hat{\mathrm{V}}(\omega)}{s\hat{\mathrm{V}}(\omega) + 1}$$

$\left(\text{avec la convention } \dfrac{\infty}{s\,\infty + 1} = \dfrac{1}{s}\right)$ (se voit facilement à partir de l'équation résolvante).

Lemme. — $\sigma^e(\mathrm{V}) = \{\hat{\mathrm{V}}(\omega) ; \omega \in \Omega\}$.

• S'il existe ω tel que $\hat{\mathrm{V}}(\omega)$ soit infini, $\omega(\mathrm{I} - s\mathrm{R}_s) = 0$.

Donc, d'après la théorie de Gelfand, $(\mathrm{I} - s\mathrm{R}_s)$ est non inversible, c'est-à-dire $(\mathrm{I} + s\mathrm{V})$ est non borné, ou V non borné.

La réciproque est vraie aussi, par un raisonnement analogue.

• Soit ω dans Ω avec $\hat{\mathrm{V}}(\omega)$ fini.

Si $\hat{\mathrm{V}}(\omega) - \mathrm{V}$ était inversible, il existerait B dans $\mathfrak{U}$ tel que

$$\mathrm{B}[\hat{\mathrm{V}}(\omega)(\mathrm{I} - s\mathrm{R}_s) - \mathrm{R}_s] = (\mathrm{I} - s\mathrm{R}_s).$$

Soit $\omega(\mathrm{B}).0 = 1 - s\omega(\mathrm{R}_s)$, ou $\omega(\mathrm{R}_s) = \dfrac{1}{s}$, ce qui est contradictoire.

• Soit enfin α appartenant à $\sigma(\mathrm{V})$.

Si, pour tout ω de Ω, on a

$$\alpha \neq \frac{\hat{\mathrm{V}}(\omega)}{s\hat{\mathrm{V}}(\omega) + 1},$$

alors

$$\forall \omega \in \Omega \quad \alpha(1 - s\omega(\mathrm{R}_s)) - \omega(\mathrm{R}_s) \neq 0$$

et donc, d'après la théorie de Gelfand,

$$\alpha(\mathrm{I} - s\mathrm{R}_s) - \mathrm{R}_s$$

serait inversible, soit

$$(\alpha \mathrm{I} - \mathrm{V})(\mathrm{I} + s\mathrm{V})^{-1}$$

serait inversible.

Il en résulterait que α serait dans l'ensemble résolvant de V ce qui est contradictoire.

Ceci étant

$$\forall \omega \in \Omega \quad \forall \lambda > 0 \quad \omega(\mathrm{S}_\lambda) = \frac{a}{\lambda a + 1} + \int \frac{\hat{\mathrm{V}}(\omega)}{s\hat{\mathrm{V}}(\omega) + 1} d\mu_\lambda(s).$$

C'est-à-dire, avec les conventions faites et d'après la définition de $((a_\lambda, \mu_\lambda))_{\lambda>0}$

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad \omega(\mathrm{S}_\lambda) = \mathrm{H}_f(\hat{\mathrm{V}}(\omega))[\lambda \mathrm{H}_f(\hat{\mathrm{V}}(\omega)) + 1]^{-1}.$$

Or, puisque

$$\mathrm{I} + \lambda \mathrm{H}_f(\mathrm{V}) = (\mathrm{I} - \lambda \mathrm{S}_\lambda)^{-1},$$

$$\begin{aligned} \sigma^e(\mathrm{H}_f(\mathrm{V})) &= \sigma^e\left(\frac{(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{S}_\lambda)^{-1} - \mathrm{I}}{\lambda}\right) \\ &= \left\{\frac{z}{1 - \lambda z};\ z \in \sigma(\mathrm{S}_\lambda)\right\} \\ &= \{\omega(\mathrm{S}_\lambda)[1 - \lambda\omega(\mathrm{S}_\lambda)]^{-1};\ \omega \in \Omega\} \\ &= \{\mathrm{H}_f(\hat{\mathrm{V}}(\omega));\ \omega \in \Omega\} \\ &= \mathrm{H}_f[\sigma^e(\mathrm{V})]. \end{aligned}$$

THÉORÈME 2. — • *Si* $(-\mathrm{V})$ *est générateur infinitésimal d'un semi groupe* M-*borné,* $[-\mathrm{H}_f(\mathrm{V})]$ *est générateur infinitésimal d'un semi groupe* M-*borné.*

• *Si* V *est injectif et si* $-\mathrm{V}^{-1}$ *est générateur infinitésimal d'un semi groupe* M-*borné,* $\mathrm{H}_f(\mathrm{V})$ *est injectif et* $(-[\mathrm{H}_f(\mathrm{V})]^{-1})$ *est générateur infinitésimal d'un semi groupe* M-*borné.*

On a, en outre, dans ce cas

$$[\mathrm{H}_f(\mathrm{V})]^{-1} = \mathrm{H}_{\tilde{f}}(\mathrm{V}^{-1}).$$

• *En particulier, si* V *est un potentiel abstrait,* $\mathrm{H}_f(\mathrm{V})$ *est un potentiel abstrait.*

Nous reprenons les notations de la démonstration du théorème précédent. Dire que $(-\mathrm{V})$ (resp. $-\mathrm{H}_f(\mathrm{V})$) est générateur infinitésimal d'un semi-groupe M-borné, c'est dire que $\check{\mathrm{R}}$ (resp. $\check{\mathrm{S}}$) est la résolvante d'un semi-groupe M-borné. Le premier point résulte alors de la Proposition 3 de 2.

Dire que V (resp. $\mathrm{H}_f(\mathrm{V})$) est injectif et que $-\mathrm{V}^{-1}$ (resp. $(-[\mathrm{H}_f(\mathrm{V})]^{-1})$) est générateur infinitésimal d'un semi-groupe M-borné, c'est dire que $\check{\mathrm{R}}$ (resp. S) est la résolvante d'un semi-groupe M-borné. En outre, dans ce cas :

$$[\mathrm{H}_f(\mathrm{V})]^{-1} = \tilde{\mathrm{S}}_0 \quad \text{et} \quad \mathrm{V}^{-1} = \tilde{\mathrm{R}}_0.$$

Le deuxième point résulte alors de la Proposition 3 de 2., du théorème 2 de 2. et de la proposition 2 de 3.

Enfin le dernier point est un cas particulier du précédent (c'est, par définition, le cas $M = 1$).

Remarques.

1) On voit, par les méthodes précédentes, que l'on a aussi le résultat suivant : Si V est d'image dense, alors V est injectif, $H_f(V)$ est injectif et d'image dense et

$$[H_f(V)]^{-1} = H_{\tilde{f}}(V^{-1}),$$

ce qui montre en particulier que

$$\operatorname{Im} H_f(V) \supset \operatorname{Im} V.$$

2) Le principal intérêt du théorème 2 réside dans le fait que, $\mathbf{S}$ étant un cône convexe, on peut associer à un potentiel abstrait V, tout un cône *convexe* [1] de potentiels abstraits (alors qu'en général, la somme de deux potentiels n'a aucune propriété particulière).

Exemples.

1) Soit un réel α avec

$$0 < \alpha < 1.$$

La fonction f définie par

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x^{-\alpha}$$

appartient à $\mathbf{S}^*$.

$$H_f(z) = z^{\alpha}$$

et on retrouve alors les puissances fractionnaires d'un opérateur telles qu'elles ont été définies dans [1].

2) Soit ν une mesure positive non nulle sur $[0, 1]$.

[1] En fait, on démontre que si f_1 et f_2 appartiennent à S^* et si λ_1 et λ_2 sont deux réels strictement positifs, $H\lambda_{1f_1} + \lambda_{2f_2}$ (V) est le plus petit prolongement fermé de l'opérateur $\lambda_1 H_{f_1}(V) + \lambda_2 H_{f_2}(V)$. Ceci découle du lemme suivant : $(x \varepsilon D[H_f(V)]) \Longleftrightarrow (\lim\limits_{\lambda \to 0} H_f(V)(I - \lambda R_\lambda)x$ existe)

La fonction f définie par

$$\forall x > 0 \quad f(x) = \int x^{-\alpha}\, d\nu\,(\alpha) \text{ appartient à } \mathbf{S}^*$$

et

$$H_f(z) = \int z^{\alpha}\, d\nu\,(\alpha).$$

On retrouve alors des résultats de [4].

Nous allons maintenant montrer la stabilité de $\{H_f;\, f \in \mathbf{S}^*\}$ par composition :

THÉORÈME 3. — *Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathbf{S}^*$ et g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par*

$$g = f_2 \circ \frac{1}{f_1}.$$

Alors

1) $g \in \mathbf{S}^*$.
2) $H_g = H_{f_2} \circ H_{f_1}$.
3) $H_g(V) = H_{f_2}[H_{f_1}(V)]$.

$$g(x) = a_2 + \int \frac{1}{t + \dfrac{1}{f_1(x)}}\, d\mu_2(t)$$

(où (a_2, μ_2) est défini par

$$\forall x > 0 \quad f_2(x) = a_2 + \int \frac{1}{t+x}\, d\mu_2(t)\Big),$$

soit

$$\forall x > 0 \quad g(x) = a_2 + \int \frac{f_1(x)}{tf_1(x) + 1}\, d\mu_2(t).$$

Or, d'après la proposition 2 de 1.,

$$\forall t \geqslant 0 \quad f_1[tf_1 + 1]^{-1} \in \mathbf{S}.$$

Donc, d'après la proposition 1 de 1., g appartient à $\mathbf{S}^*$.

$$\begin{aligned}\forall x > 0 \quad H_g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) &= f_2(\tilde{f}_1(x)) \\ &= H_{f_2}[f_1(x^{-1})] = H_{f_2} \circ H_{f_1}(x).\end{aligned}$$

Par analyticité et continuité on en déduit 2).

Soit $\left(\left(\frac{a_1}{\lambda a_1 + 1}, \mu^1_\lambda\right)\right)_{\lambda>0}$ le système qui opère associé à f_1.

$$g(x) = a_2 + \int \frac{a_1}{ta_1 + 1} d\mu_2(t) + \int \left[\int \frac{1}{x+\lambda} d\mu^1(\lambda)\right] d\mu_2(t)$$
$$= f_2(a_1) + \int \frac{1}{x+\lambda} d\left[\int \mu^1_t(\lambda)\, d\mu_2(t)\right].$$

Notons

$$a = f_2(a_1) \qquad \text{et} \qquad \chi = \int \mu^1_t \, d\mu_2(t) \quad \text{(intégrale faible).}$$

Alors

$$g(x) = a + \int \frac{1}{x+t} d\chi(t).$$

Si x est maintenant un élément de $D(V)$,

$$H_g(V).x = ax + \int V(I + sV)^{-1} x \, d\chi(t).$$

Soit

$$R_s = V(I + sV)^{-1} \qquad \text{et} \qquad S_s = H_{f_1}(V)[I + sH_{f_1}(V)]^{-1}$$
$$H_{f_2}[H_{f_1}(V)].x = a_2 x + \int S_t x \, d\mu_2(t)$$
$$= ax + \int \left[\int R_s x \, d\mu^1_t(s)\right] d\mu_2(t).$$

On en déduit aisément que

$$\forall x \in D(V) \quad H_{f_2}[H_{f_1}(V)].x = H_g(V).x.$$

Il en résulte que

$$H_{f_2}[H_{f_1}(V)] \supset H_g(V).$$

Or $H_g(V)$ étant un cogénérateur est, pour un certain M, M-codissipatif maximal (c.f. [4]) et donc on a l'égalité.

Nous allons terminer par une application aux noyaux de Hunt (bien que l'on puisse obtenir ce résultat plus directement à partir de [4], théorème VIII-4-1).

Définition. — Soit Ω un espace localement compact, $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}_+$) l'ensemble des fonctions continues à support compact à valeurs réelles (resp. à valeurs positives) sur Ω, et $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur Ω tendant vers 0 à l'infini.

$\| \quad \|$ désigne la norme sup. sur $\mathcal{C}^0$ et X désigne désormais l'espace de Banach $\mathcal{C}^0$ muni de cette norme. On appelle noyau de Hunt sur Ω un opérateur W sur X avec

$$D(W) = \mathcal{K}$$

et tel qu'il existe un semi-groupe fortement continu, 1-borné $(P_t)_{t\geqslant 0}$ sur X vérifiant

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \forall f \in \mathcal{K}_+ \qquad P_t f \geqslant 0$$

et

$$\forall x \in \Omega \qquad \forall f \in \mathcal{K}_+ \qquad Wf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt.$$

Les noyaux de Hunt sont aussi les opérateurs positifs sur X, de domaine $\mathcal{K}$, d'image dense et vérifiant le principe complet du maximum (théorème de Hunt).

Théorème 3. — *Soit* W *un noyau de Hunt sur* Ω, *associé à un semi-groupe* $(P_t)_{t\geqslant 0}$. *Soit* h *une fonction complètement monotone sur* $\mathbf{R}_+^*$, *intégrable sur* $]0, 1]$, *et non nulle.*

Alors

1) $$\forall \psi \in \mathcal{K} \qquad \forall x \in \Omega \qquad \int_0^\infty |P_t\psi(x)h(t)\, dt < \infty,$$

et

$$\forall \psi \in \mathcal{K} \left(x \in \Omega \to \int_0^\infty P_t\psi(x)h(t)\, dt\right) \in X.$$

2) *L'opérateur* W_h, *de domaine* $\mathcal{K}$ *défini par*

$$W_h\varphi(x) = \int_0^\infty P_t\varphi(x)h(t)\, dt$$

est un noyau de Hunt.

D'après les hypothèses sur h, la fonction

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-tx}h(t)\, dt$$

est un élément de $\mathbf{S}^*$, associé à $(0, \mu)$ où μ est la mesure dont h est la transformée de Laplace. D'autre part, le plus petit prolongement fermé $\hat{W}$ de W est un potentiel abstrait sur X.

Soit ψ un élément de $\mathcal{K}_+$

$$H_f(\hat{W})\psi = \int R_s\psi\, d\mu(s)$$

(où $(R_s)_{s>0}$ est la résolvante du semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$). Donc, d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\forall x \in \Omega \quad H_f(\hat{W})\psi(x) = \int \left[\int e^{-st} P_t \psi(x)\, dt\right] d\mu(s)$$
$$= \int P_t \psi(x) h(t)\, dt.$$

On en déduit le 1) et le fait que

$$H_f(\hat{W})|\mathcal{K} = W_h.$$

La famille résolvante associée à $H_f(\hat{W})$ étant formée d'opérateurs positifs, le semi-groupe associé est lui aussi formé d'opérateurs positifs, de norme inférieure ou égale à 1, ce qui montre que W_h est un noyau de Hunt.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. BALAKRISHNAN, Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, *Pacific J. Math.*, t. 10, 419-437, 1960.

[2] J. FARAUT, Semi-groupes de mesures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. 20, 1970, Fasc. 1.

[3] E. HILLE and R. S. PHILLIPS, Functional Analysis and Semi-groups, *Colloq. Publ. Amer. Math. Soc.*, Vol. XXXI, 1957.

[4] F. HIRSCH, Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. 22, 1972, Fasc. 1.

[5] F. HIRSCH, Intégrales de résolvantes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1972, Série A, pp. 303-306.

[6] M. ITO, Sur les sommes de noyaux de Dirichlet, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, 1970, Série A, pp. 937-940.

[7] D. V. WIDDER, The Laplace Transform, Princeton University Press. Princeton, 1946.

[8] K. YOSIDA, Functional analysis, Third Printing. Springer-Verlag. Berlin, (1971).

Manuscrit reçu le 30 mars 1972
accepté par G. Choquet

Francis HIRSCH,
E.N.S.E.T.
61, avenue du Président Wilson
94-Cachan.