ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

VICTOR ANANDAM

Espaces harmoniques sans potentiel positif

Annales de l'institut Fourier, tome 22, n° 4 (1972), p. 97-160

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_4_97_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 4 (1972), 97-160.

ESPACES HARMONIQUES SANS POTENTIEL POSITIF

par Victor ANANDAM

Introduction.

Dans le cadre axiomatique de la théorie du Potentiel, selon M. Brelot [7], [8], on se donne un espace Ω localement compact, non compact, connexe et localement connexe ($\overline{\Omega}$ étant obtenu par la compactification d'Alexandroff, qui adjoint «le point à l'infini» $\mathcal{A}$). Ω est pourvu d'un faisceau de fonctions harmoniques satisfaisant aux axiomes 1, 2, 3 bien connus, qui sont de caractère local, et on suppose, en outre, généralement l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω.

Alors, la théorie ressemble à la théorie classique dans $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 3$), mais ne s'applique pas globalement à $\mathbf{R}^2$ où il n'y a pas de potentiel > 0. On connaît les particularités de la théorie du potentiel dans le plan : allure différente des fonctions harmoniques à l'infini; fonction fondamentale $\log \frac{1}{|x-y|}$ qui n'est pas partout > 0 comme $|x-y|^{2-n}$ ce qui entraîne bien des différences et quelques difficultés.

Le présent travail se propose de développer la théorie axiomatique, sans supposer l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω et donc de chercher à étendre les particularités du cas plan.

L'hypothèse d'une fonction harmonique > 0 permet de se ramener au cas où les constantes sont harmoniques, ce que nous supposerons. Remarquons, dans le cas de non existence d'un potentiel > 0 dans Ω, l'hypothèse que la constante 1 est surharmonique équivaut à ce que 1 est harmonique.

Un espace Ω est dit B.H. si les axiomes 1, 2, 3 sont satisfaits, avec les constantes harmoniques. On dit qu'un espace Ω B.H. est B.P. ou B.S. selon l'existence ou non d'un potentiel > 0 dans Ω.

Dans le chapitre I.

— On rappelle des notions sur le problème de Dirichlet pour un ouvert de Ω, en particulier pour le complémentaire d'un compact dont $\mathcal{A}$ est point-frontière. Aussi on introduit pour les utiliser une exhaustion, c'est-à-dire l'existence d'une suite Ω_n de domaines réguliers ($\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$, $\cup\, \Omega_n = \Omega$) disposant de toute hypothèse de dénombrabilité de Ω, et les compacts e.r. (extérieurement réguliers), c'est-à-dire dont les points-frontières sont réguliers pour le complémentaire, ce qui, vu leur répartition assez dense, évitera l'emploi de compacts quelconques et d'hypothèse supplémentaire sur Ω et le faisceau.

— On donne quelques conditions nécessaires et suffisantes pour que Ω soit B.S.; ainsi, comme il est en somme connu, Ω est B.S. si et seulement si dans le problème de Dirichlet pour l'extérieur d'un compact non-localement polaire, $\mathcal{A}$ *est de mesure harmonique nulle.*

— Après des exemples classiques, on démontre que *dans un espace* Ω B.S., *il existe une fonction harmonique* $H \geqslant 0$ *en dehors d'un compact,* telle que pour toute u harmonique dans Ω, $|H - u|$ est non bornée en dehors d'un compact. C'est un résultat qu'on utilise souvent dans la suite.

— On démontre aussi, de manière nouvelle, dans un espace Ω B.P., un théorème de prolongement d'une fonction harmonique au voisinage de $\mathcal{A}$ selon une fonction harmonique dans Ω, qui n'en diffère que d'une fonction bornée au voisinage de $\mathcal{A}$. Ce résultat que M. Nakai avait obtenu en utilisant la théorie de Riesz-Schauder est une extension en cas axiomatique d'un théorème sur les surfaces de Riemann (voir Sario et autres auteurs). Ici, la démonstration utilise seulement le fait que dans Ω B.P., $\{\mathcal{A}\}$ est de mesure harmonique non nulle pour $(\Omega - K)$, K étant compact non-localement-polaire.

Dans le chapitre II.

— On reprend la théorie de M. Nakai, exposée dans le livre « Principal functions » de Rodin et Sario [16] et qui introduit une notion de flux à l'infini d'une fonction harmonique dans un espace B.S. (Nous la ferons apparaître, d'ailleurs, comme une généralisation de la notion élémentaire dans $\mathbf{R}^2$.) On complètera la théorie de M. Nakai par une nouvelle propriété caractéristique des espaces B.P. et B.S., selon l'allure de la solution $H_u^{\Omega_n}$ pour u harmonique hors d'un compact et Ω_n croissant de limite Ω.

Dans le chapitre III.

On étudie les fonctions surharmoniques dans un espace B.S. On démontre :

— *Un théorème du prolongement* d'une fonction surharmonique dans un ouvert selon une fonction surharmonique dans Ω, la différence étant harmonique dans un ouvert plus petit (voir l'énoncé précis 3.4). On en déduit un *théorème fondamental* : dans un espace Ω B.S., pour tout $x \in \Omega$, il existe une fonction surharmonique dans Ω de support $\{x\}$; sous certaines conditions, elle est déterminée à une constante additive près et un facteur près.

— On introduit *un nouveau flux* (même pour une fonction surharmonique) mais qui vaut en fait à un facteur près le flux de Nakai dans le cas harmonique.

— Un théorème d'existence de *fonction harmonique avec deux singularités données* à un facteur près et bornée à l'infini; et *un théorème de partition* analogue à celui de Mme Hervé dans un espace B.P., mais moins précis.

— *Un théorème d'approximation* des fonctions continues sur un compact par des différences de deux fonctions surharmoniques, *non nécessairement* $\geqslant 0$, continues dans Ω.

— L'existence, pour *un ensemble* e *localement polaire*, d'une fonction surharmonique s dans Ω infini sur e.

— Quelques propriétés caractéristiques d'un domaine ω (*dit du type* B.P.) où il existe un potentiel > 0.

Ensuite, en s'inspirant de l'article de M. Brelot [4] sur l'allure des fonctions harmoniques ou surharmoniques classiques à l'infini, on a été amené à approfondir comme suit la même notion en axiomatique :

— On étudie les fonctions surharmoniques *dites admissibles* qui sont les fonctions surharmoniques admettant une minorante harmonique au voisinage de $\mathcal{A}$ ou encore de flux fini à l'infini. Dans le cas classique de $\mathbf{R}^2$, ce sont les potentiels logarithmiques de masse $\geqslant 0$ à une fonction harmonique près. Elles permettent l'étude d'un balayage.

— On introduit la notion de fonctions harmoniques à l'infini comme fonctions harmoniques et bornées au voisinage de $\mathcal{A}$, ce qui a divers équivalents. Cela conduit à une notion de *dimension harmonique à l'infini* (généralement celle de M. Heins [13] sur les surfaces de Riemann). Une fonction u harmonique $\geqslant 0$ hors d'un compact K e.r., tendant vers 0 sur ∂K, est dite minimale si toute autre analogue minorante lui est proportionnelle. Elle est nulle si le flux à l'infini est nul. Le nombre des fonctions minimales (à un facteur près) autres que 0, est dit *la dimension harmonique à l'infini de* Ω. (Cette dimension est indépendante de K.) Cela fournit d'importants compléments : ainsi, dans le cas de proportionnalité locale (proportionnalité des potentiels de support ponctuel donné), la dimension harmonique 1 entraîne que la fonction fondamentale du théorème 3.6, quand elle est bornée supérieurement au voisinage de $\mathcal{A}$, est unique à un facteur près et une constante additive près, comme dans $\mathbf{R}^2$ avec $\log \frac{1}{|x|}$.

Ma profonde reconnaissance va à Monsieur le Professeur M. Brelot qui m'a proposé ce sujet et m'a aidé tout au long de ce travail avec des suggestions très utiles; et cette rédaction lui est redevable de nombreuses améliorations.

Je tiens à remercier Messieurs les Professeurs C. Constantinescu et A. Cornea pour des discussions très fructueuses que j'ai eues avec eux.

Je remercie également Madame R. M. Hervé pour son aide précieuse dans la préparation de cet article.

CHAPITRE I

ESPACES HARMONIQUES AVEC OU SANS POTENTIEL > 0

1. Axiomes et définitions.

Ω est un espace localement compact, non compact, connexe et localement connexe. On obtient $\overline{\Omega}$ en adjoignant le point d'Alexandroff $\mathcal{A}$. Les notions topologiques sont prises dans $\overline{\Omega}$.

Dans tout ouvert ω est donné un espace vectoriel réel de fonctions finies, continues dites harmoniques satisfaisant aux axiomes 1, 2, 3 bien connus de M. Brelot [7] dont on utilisera la théorie.

Ainsi, on sait définir les fonctions hyperharmoniques, surharmoniques et les potentiels qui sont les fonctions surharmoniques de plus grande minorante harmonique nulle.

On peut supposer en plus qu'il existe une fonction harmonique $H > 0$ dans Ω. Cette hypothèse est plus faible que celle de l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω; en effet, d'après MM. Constantinescu et Cornéa, sans autres hypothèses, l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω implique, grâce aux axiomes 1, 2, 3, l'existence d'une fonction harmonique > 0 dans Ω. Remarquez que l'existence d'une fonction surharmonique $v > 0$ dans Ω n'est pas plus faible que l'hypothèse d'existence d'une fonction harmonique $H > 0$ dans Ω; en effet, si v n'est pas harmonique, il existe un potentiel > 0 dans Ω.

Soit f une fonction harmonique > 0 dans Ω; alors, les quotients par f des fonctions harmoniques forment un nouveau faisceau (de fonctions f-harmoniques) satisfaisant aux mêmes axiomes, et contenant les constantes. Pour bien des problèmes, on peut passer dans Ω des fonctions f-harmoniques aux fonctions harmoniques et inversement; aussi, on fera dans la suite l'hypothèse supplémentaire que la constante 1 est harmonique dans Ω.

Définition 1.1. — *Un espace* Ω *est dit* B.H. *s'il est un espace du type fondamental* (*axiomes* 1, 2, 3) *avec les constantes harmoniques.*

De cette définition, on ne peut pas déduire qu'il existe un potentiel > 0 dans Ω. Si, par exemple, on suppose qu'il y a une fonction surharmonique positive, nonharmonique dans Ω B.H., alors il est clair qu'il existe des potentiels > 0 dans Ω. Plus précisément,

Proposition 1.2. — *Dans un espace* Ω B.H., *l'existence d'un potentiel* > 0 *équivaut à celle d'une fonction surharmonique nonconstante, bornée inférieurement en dehors d'un compact.*

En effet, soit V une fonction surharmonique nonconstante dans Ω, bornée inférieurement en dehors d'un compact X. V étant bornée inférieurement sur X aussi, il existe une constante M telle que $U = V - M > 0$ dans Ω, et U n'est pas constante. Si $u(x_1) > u(x_2)$, soit α un ouvert contenant x_1 où $u > \lambda > u(x_2)$; alors, d'après la notion de réduite [7], on obtient : $\hat{R}^{\alpha}_{\lambda} \leqslant u$ et $\hat{R}^{\alpha}_{\lambda} = \lambda$ dans α.

Puisque $\hat{R}^{\alpha}_{\lambda} \leqslant \lambda$, la fonction surharmonique $\hat{R}^{\alpha}_{\lambda}$ ne peut être harmonique sans être égale partout à son maximum λ dans Ω; mais $\hat{R}^{\alpha}_{\lambda}(x_2) \leqslant u(x_2) > \lambda$. On en déduit l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω.

Inversement, tout potentiel > 0 dans Ω est nonconstant.

Définition 1.3. — *Un espace* Ω B.H. *est dit* B.P. *ou* B.S. *suivant qu'il existe ou non un potentiel* > 0 *dans* Ω.

Si on considère les surfaces de Riemann ouvertes, pourvues des fonctions harmoniques classiques, comme des espaces B.H., la surface hyperbolique sera un B.P. et la surface parabolique sera un B.S. On aurait conservé dans le cas général les mots hyperbolique et parabolique, mais M. Loeb [15] a utilisé ces termes dans le cas axiomatique dans un sens un peu différent. Par exemple, dans le cas où 1 est surharmonique, mais non-harmonique, selon [15], Ω est parabolique ou hyperbolique suivant que la constante 1 est un potentiel ou non.

2. Mesure harmonique du point à l'infini.

Rappelons d'abord quelques propriétés d'un espace Ω B.H. extraits de [7], [11] et [15].

Selon M. Cornéa [11], un espace Ω B.H. est l'union d'une suite croissante de compacts dans Ω.

Principe du Minimum (M. Loeb [15]).

Soit ω un ouvert dans un espace Ω B.H. Si V est une fonction surharmonique dans ω satisfaisant à $\liminf V \geqslant \lambda$ en tout point-frontière (dans $\overline{\Omega}$), alors $V \geqslant \lambda$ dans ω.

Pour ω ouvert dans Ω et f une fonction définie sur $\partial\omega$, l'on note $\overline{H}_f^\omega = \inf V$ où V est hyperharmonique dans ω, et $\liminf\limits_{x \in \omega,\, x \to x_0} V(x) \geqslant \underset{> -\infty}{f(x_0)}$ pour tout $x_0 \in \partial\omega$. C'est une fonction croissante de f. Soit $\underline{H}_f^\omega = -\overline{H}_{(-f)}^\omega$. On sait que $\underline{H}_f^\omega \leqslant \overline{H}_f^\omega$; si ces fonctions sont égales et finies (donc harmoniques), on dit que f *est résolutive pour* ω. (Voir M. Brelot [7]). On sait qu'il en est ainsi si ω est relativement compact dans Ω.

Adoptons quelques définitions de [15] afin d'utiliser son travail. Soit $x_0 \in \partial\omega$. M. Loeb dit que x_0 est régulier pour ω si pour toute fonction f bornée sur $\partial\omega$, $\limsup\limits_{x \in \omega,\, x \to x_0} \overline{H}_f^\omega \leqslant \limsup f$. Notez que cela équivaut à la régularité classique de x_0 pour un ou tout $v \cap \omega$ où v est un voisinage ouvert de x_0, relativement compact dans Ω.

On appelle *barrière pour* ω *au point* x_0, une fonction h harmonique > 0 définie dans l'intersection de ω et d'un voisinage ouvert de x_0 et telle que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$. Alors (d'après [15], p. 181) si $x_0 \in \partial\omega \cap \Omega$ et qu'il existe une barrière pour ω en x_0, x_0 est régulier pour ω (cette définition est plus forte que la forme ordinaire avec h surharmonique, qui suffit à entraîner la régularité, d'après [7], p. 118).

Dans un espace Ω B.H., un compact K est dit *extérieurement-régulier* (e.r.), s'il existe une barrière pour $(\Omega - K)$ en tout point de ∂K.

Lemme 1.4 (Loeb [15]). — *Dans un espace* Ω B.H., *pour un compact* X *et un domaine* $D \supset X$, *il existe toujours un compact* K e.r. *et un domaine* ω *régulier tels que* $X \subset \mathring{K} \subset K \subset \omega \subset \varpi \subset D$.

Exhaustion de Ω (d'après le lemme 1.4 ci-dessus et [11]).

Si Ω est un espace B.H., alors $\Omega = \cup\, \Omega_n$ où $\{\Omega_n\}$ est une suite croissante de domaines réguliers tels que $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ pour tout n, et qui contiendront tout compact X à partir d'un certain rang.

Notation. — Soit K un compact non-localement polaire (voir [7], p. 127), dans un espace Ω B.H. Pour une fonction f définie sur ∂K, soit $\underset{*}{f}$ la fonction égale à f sur ∂K et 0 à $\mathcal{A}$. Si $\underset{*}{f}$ est résolutive par rapport à $(\Omega - K)$, *désignons par* $B_K f$ la fonction égale à $\overline{H}_{\underset{*}{f}}^{(\Omega-K)} = \underline{H}_{\underset{*}{f}}^{(\Omega-K)}$.

Remarquons que les constantes sont résolutives et la somme (ou la différence) de deux fonctions résolutives est résolutive. Par conséquent, pour démontrer qu'une fonction f finie sur $\partial(\Omega - K)$ est résolutive, on se ramènera à l'hypothèse $f(\mathcal{A}) = 0$; alors, tout se déduit des deux cas $f \geqslant 0$, $f \leqslant 0$ dont le second se ramène au premier.

Résolutivité pour un compact e.r.

Soit K *un compact* e.r. *et soit* f *une fonction finie continue sur* ∂K. *Alors,* $B_K f$ *existe dans* $(\Omega - K)$ *et tend vers* f *sur* ∂K.

Ce résultat annoncé, dans le cas le plus général (dans M. Brelot, [8], p. 60) peut être démontré brièvement de la manière suivante :

Supposons $f \geqslant 0$ sur ∂K.

Soit $\{\Omega_n\}$ une exhaustion régulière contenant K. Soit $h_n = H_{f_0}^{(\Omega_n - K)}$ dans $(\Omega_n - K)$, la solution du problème de Dirichlet dans $(\Omega_n - K)$ avec la donnée-frontière

$$f_0 = \begin{cases} f & \text{sur } \partial K \\ 0 & \text{sur } \partial \Omega_n \end{cases}$$

Définissons

$$U_n = \begin{cases} h_n & \text{dans} \quad (\Omega_n - K) \\ 0 & \text{dans} \quad (\Omega - \Omega_n) \end{cases}$$

Alors, pour tout n, U_n est sousharmonique bornée dans $(\Omega - K)$ et $U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \underline{H}^{\Omega-K}_{\underset{*}{f}} \leqslant \sup\limits_{\partial K} f$. Par conséquent, $U = \lim U_n$ est harmonique dans $(\Omega - K)$ et $U \geqslant \overline{H}^{(\Omega-K)}_{\underset{*}{f}}$, ce qui implique que dans $(\Omega - K)$, $U = \overline{H}^{\Omega-K}_{\underset{*}{f}} = \underline{H}^{\Omega-K}_{\underset{*}{f}} = B_K f$.

On démontre dans les théorèmes suivants la résolutivité d'une fonction finie continue sur $\partial(\Omega - K)$, où K est un compact non-localement-polaire.

Proposition 1.5. — *Soit* Ω *un espace* B.S. *et soit* K *un compact non-localement-polaire. Si une fonction* $f = 1$ *sur* K, *alors* f *est résolutive pour* $(\Omega - K)$ *et* $B_K f = 1$.

Démonstration. — Soit $\{\Omega_n\}_{n\geqslant 1}$ une exhaustion régulière de Ω, contenant K.

Supposons

$$U_n = \begin{cases} (\hat{R}^K_1)\Omega_n & \text{dans} \quad \Omega_n \\ 0 & \text{dans} \quad (\Omega - \Omega_n) \end{cases}$$

Alors, dans $(\Omega - K)$, U_n est une fonction sous-harmonique $\geqslant 0$ et pour $n \geqslant 1$ $U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \underline{H}^{\Omega-K}_{\underset{*}{f}} \leqslant 1$.

Ω étant B.S., $\lim U_n = 1$ dans Ω.

Donc, dans $(\Omega - K)$, $1 = \sup U_n \leqslant \underline{H}^{\Omega-K}_{\underset{*}{f}} \leqslant \overline{H}^{\Omega-K}_{\underset{*}{f}} \leqslant 1$.

Ainsi, $\underset{*}{f}$ est résolutive pour $(\Omega - K)$ et $B_K f = 1$.

Corollaire 1.6. — *Soient* Ω *un espace* B.S. *et* K *un compact non-localement-polaire. Si* ω *est une composante connexe de* $(\Omega - K)$ *qui n'est pas relativement compact, il existe une fonction surharmonique* $s > 0$ *dans* ω *tendant vers* ∞ *en* $\mathcal{A}$.

En effet, d'après la proposition 1.5, $\{\mathcal{A}\}$ est de mesure harmonique nulle pour $(\Omega - K)$. Donc, si $x_0 \in \omega$, il existe dans ω une fonction surharmonique $V_n > 0$ pour $n \geqslant 1$, telle que $V_n(x_0) < \dfrac{1}{2^n}$ et $\lim\limits_{x\in\omega} \inf\limits_{x\to\mathcal{A}} V_n(x) \geqslant 1$. Alors, $s = \Sigma V_n$ est surharmonique > 0 dans ω, tendant vers ∞ en $\{\mathcal{A}\}$.

Théorème 1.7. (Constantinescu-Cornéa [10]). — *Soit* Ω *un espace* B.S. *et soit* ω *un domaine dans* Ω. *Si* $(\Omega - \omega)$ *est non localement polaire, il existe un potentiel* > 0 *dans* ω.

Démonstration. — Comme $(\Omega - \omega)$ est non localement polaire, il existe un compact X tel que $K = X \cap (\Omega - \omega)$ est non localement polaire.

Soit ω_0 la composante connexe de $(\Omega - K)$ qui contient ω. Si ω est relativement compact, il existe un domaine régulier $\delta \supset \varpi$ (voir lemme 1.4) et donc il y a des potentiels > 0 dans ω.

Si ω n'est pas relativement compact, d'après le corollaire 1.6, il existe une fonction surharmonique $s > 0$ dans $\omega_0 \supset \omega$, tendant vers ∞ en $\mathcal{A}$. Ainsi, il existe une fonction surharmonique $s > 0$ non-constante dans ω et donc il y a des potentiels > 0 dans ω.

Théorème 1.8. — *Soit* Ω *un espace* B.H. *et soit* K *un compact non localement polaire. Si* f *est une fonction finie continue définie sur* $\partial(\Omega - K)$, f *est résolutive pour* $(\Omega - K)$.

Démonstration. — Comme remarqué en haut, il suffit de considérer la résolutivité de $\underset{*}{f}$ pour $(\Omega - K)$ où f est finie continue $\geqslant 0$ définie sur ∂K.

Cas I. — Ω est B.P.

Soit $\{\Omega_n\}_{n\geqslant 1}$ une exhaustion régulière de Ω contenant K.

Soit p un potentiel > 0 fini continu dans Ω. Alors $\underset{*}{p}$ est résolutive pour $(\Omega - K)$.

En effet, supposons

$$U_n = \begin{cases} (R_p^K)_{\Omega_n} & \text{dans } \Omega_n \\ 0 & \text{dans } (\Omega - \Omega_n) \end{cases}$$

Dans $(\Omega - K)$, U_n est sousharmonique $\geqslant 0$, et pour $n \geqslant 1$, $U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \underline{H}_{\underset{*}{p}}^{(\Omega-K)}$.

Dans $(\Omega - K)$, $\hat{R}_p^K = R_p^K = \inf\limits_{V \in \mathcal{F}} V$ où $\mathcal{F}$ est la famille de fonctions surharmoniques > 0 dans Ω telle que $V \geqslant p$ sur K. Donc, si $V \in \mathcal{F}$, $V \geqslant \overline{H}_{\underset{*}{p}}^{\Omega-K}$; par conséquent, dans $(\Omega - K)$, $R_p^K > \overline{H}_{\underset{*}{p}}^{\Omega-K}$.

Dans Ω, $(R_p^K)_{\Omega_n} \to R_p^K$ (voir M. Brelot [7], p. 122). Donc, dans $(\Omega - K)$,

$$R_p^K = \sup U_n \leqslant \underline{H}_{\underset{*}{p}}^{\Omega-K} \leqslant \overline{H}_{\underset{*}{p}}^{\Omega-K} \leqslant R_p^K.$$

Ainsi, $\underset{*}{p}$ est résolutive pour $(\Omega - K)$ et $B_K p = R_p^K$.

On sait que toute fonction finie continue sur un compact $X \subset \Omega$ peut être approchée uniformément sur X par des différences de deux potentiels finies continues dans Ω (Mme Hervé [14], p. 437). On en déduit que $\underset{*}{f}$ est résolutive pour $(\Omega - K)$.

Cas II. — Ω est B.S.

Soit $0 \leqslant f \leqslant M$ sur ∂K.

Soit V_n la solution du problème de Dirichlet dans $(\Omega_n - K)$, la donnée f sur ∂K et M sur $\partial\Omega_n$; prolongée par M dans $(\Omega - \Omega_n)$, V_n est surharmonique $\geqslant 0$ dans $(\Omega - K)$. $\{V_n\}$ étant une suite décroissante dans $(\Omega - K)$, si $V = \lim V_n$,

$$V \text{ est harmonique dans } (\Omega - K) \quad \text{et} \quad V \geqslant \overline{H}_{\underset{*}{f}}^{\Omega-K} \tag{1}$$

Soit U_n la solution du problème de Dirichlet dans $(\Omega_n - K)$ la donnée f sur ∂K et 0 sur $\partial\Omega_n$; prolongée par 0 dans $(\Omega - \Omega_n)$, U_n est sous-harmonique $\geqslant 0$ dans $(\Omega - K)$. $\{U_n\}$ étant une suite croissante dans $(\Omega - K)$, si $U = \lim U_n$,

$$U \text{ est harmonique dans } (\Omega - K) \quad \text{et} \quad U \leqslant \underline{H}_{\underset{*}{f}}^{\Omega-K} \tag{2}$$

Soient h_n la solution du problème de Dirichlet dans $(\Omega_n - K)$, la donnée 0 sur ∂K et M sur $\partial\Omega_n$; prolongée par M dans $(\Omega - \Omega_n)$, h_n est surharmonique $\geqslant 0$ dans $(\Omega - K)$ et comme dans la proposition 1.5, $\{\mathcal{A}\}$ étant de mesure harmonique nulle pour $(\Omega - K)$,

$$h = \lim h_n = 0 \quad \text{dans} \quad (\Omega - K). \tag{3}$$

Finalement, on remarque que, pour chaque n, $V_n = U_n + h_n$ dans $(\Omega - K)$ et donc pour $n \to \infty$ on a $V = U$ dans $(\Omega - K)$. Par conséquent, d'après (1) et (2), $\underset{*}{f}$ est résolutive pour $(\Omega - K)$ et $B_K f = U = V$ dans $(\Omega - K)$.

Ainsi, dans un espace Ω B.H., si K est un compact non localement polaire, $B_K 1$ existe dans $(\Omega - K)$ et $0 \leqslant B_K 1 \leqslant 1$; dans chaque composante connexe de $(\Omega - K)$, $B_K 1 = 1$ ou $0 < B_K 1 < 1$.

Définition 1.9. — *Dans un espace* Ω B.H., *soit* k *un compact non localement polaire. Une composante connexe de* $(\Omega - k)$ *qui n'est pas relativement compacte est dite* P-*domaine ou* S-*domaine, correspondant à* k, *selon que* $B_K 1$ *y est* < 1 *ou* $= 1$.

Proposition 1.10 [15]. — *Un espace* Ω B.H. *est* B.P. *si et seulement si pour un ou tout compact* k e.r., *il existe au moins un* P-*domaine correspondant*; *ou encore si et seulement si* $\{\mathfrak{A}\}$ *n'est pas de mesure harmonique nulle pour* $(\Omega - k)$.

Démonstration. — Supposons $0 < B_k 1 < 1$ dans une composante connexe de $(\Omega - k)$.

Alors,

$$V = \begin{cases} B_k 1 & \text{dans } (\Omega - k) \\ 1 & \text{dans } k, \end{cases}$$

est surharmonique > 0 et non constante dans Ω. Donc, Ω est un B.P. (Proposition 1.2).

Si Ω est un B.P., il existe un potentiel $p > 0$ dans Ω tel que $\min\limits_{\partial K} p = 1$; donc, $p(x_0) = 1$ pour quelque $x_0 \in \partial k$ et $p \geqslant 1$ sur k.

Si $s = \inf\limits_{\Omega} p$, alors $s < 1$. Par conséquent, il existe un $x_1 \in (\Omega - k)$ tel que $p(x_1) < 1$.

Par définition de l'opérateur B_k (p étant un potentiel dans Ω majorant 1 sur k), on a $B_k 1 \leqslant p$ dans $(\Omega - k)$. Ce qui implique que $B_k 1 < 1$ dans la composante connexe de $(\Omega - k)$ contenant $\{x_1\}$.

Proposition 1.11. — *Soit* Ω *un espace* B.P. *et soit* k *un compact* e.r. *dans* Ω. *Soit* U *la fonction* $B_k 1$ *dans* $(\Omega - k)$, *prolongée par* 1 *dans* k. *Alors, dans* Ω, U *est un potentiel et* $U = R_1^k \, (= \hat{R}_1^k)$.

Démonstration. — $B_k1 \leqslant 1$ et B_k1 tend vers 1 sur ∂k. Par conséquent, U est une fonction continue et surharmonique > 0 dans Ω.

De plus, Ω étant B.P., il existe un potentiel p dans Ω, majorant 1 sur k. Un tel potentiel p étant $\geqslant B_k1$ dans $(\Omega - k)$, on obtient que $p \geqslant U$ dans Ω et donc, U aussi est un potentiel dans Ω.

Nous allons maintenant démontrer que $U = \hat{R}_1^k$. Premièrement, U étant un potentiel égal à 1 dans k, on obtient $U \geqslant R_1^k$. Soit $\mathcal{F}$ la famille de fonctions V surharmoniques > 0 dans Ω majorant 1 sur k. Alors, pour tout $V \in \mathcal{F}$, $V \geqslant B_k1$ dans $(\Omega - K)$ et par conséquent $V \geqslant U$ dans Ω. Donc, $R_1^k = \inf_{\mathcal{F}} V \geqslant U$ dans Ω.

Ainsi, on a démontré que U continue vaut dans Ω, R_1^k (ou $\hat{R}_1^k$).

3. Quelques propriétés caractéristiques d'un espace B.P.

On va s'inspirer des propriétés des espaces de Green [9].

Proposition 1.12. — *Soit k un compact* e.r. *dans un espace* Ω B.P.; *soit* U *harmonique dans* Ω *et valant* B_KU *dans* $(\Omega - k)$. *Alors* $U \equiv 0$.

Démonstration. — Soit λ une constante telle que $-\lambda \leqslant U \leqslant \lambda$ sur k.

Alors, dans $(\Omega - k)$, $U = B_KU$ implique que

$$-\lambda B_K1 \leqslant U \leqslant \lambda B_K1 \quad \text{dans} \quad (\Omega - k).$$

Par conséquent, d'après la proposition 1.11, on obtient que pour le potentiel $\hat{R}_1^k$ dans Ω, $-\lambda\hat{R}_1^k \leqslant U \leqslant \lambda\hat{R}_1^k$ dans Ω, et donc $U \equiv 0$.

Corollaire 1.13. — *Soient h harmonique > 0 dans un espace* Ω B.H. *et k un compact* e.r. *Alors dans* $(\Omega - k)$, B_kh *vaut h ou non selon que* Ω *est* B.S. *ou* B.P.

En effet, si Ω est B.P. et h est harmonique > 0, alors, d'après la proposition 1.12, $B_kh \neq h$ dans $(\Omega - k)$.

Si Ω est B.S., toute fonction surharmonique > 0 dans Ω est une constante (voir proposition 1.2.).

Donc, si Ω est B.S. et h est harmonique > 0 dans Ω, alors h est une constante. De plus, dans ce cas, il n'existe aucun P-domaine correspondant à k (proposition 1.10.). Par conséquent, dans $(\Omega - k)$, $B_k h = h(B_k 1) = h$.

Proposition 1.14 [15]. — *Soient* Ω *un espace* B.S. *et* U *une fonction sousharmonique bornée supérieurement définie dans un ouvert* $\omega\ (\neq \Omega)$. *Si pour tout* $x_0 \in \partial\omega \cap \Omega$, $\limsup_{x \in \omega,\, x \to x_0} U(x) \leqslant 0$, *alors* $U \leqslant 0$ *dans* ω.

En effet, soit

$$V = \begin{cases} 0 & \text{dans } (\Omega - \omega) \\ \sup(U, 0) & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

Alors, V est une fonction sousharmonique bornée supérieurement dans Ω. Et, Ω étant un espace B.S., V est la constante 0 (c'est une conséquence de la proposition 1.2.). Par conséquent, $U \leqslant 0$ dans ω.

Corollaire 1.15. — *Soient* Ω *un espace* B.S. *et* k *un compact* e.r. *Si* U *est une fonction bornée continue dans* $(\Omega - \mathring{k})$ *et harmonique dans* $(\Omega - k)$, *alors* $U = B_k U$ *dans* $(\Omega - k)$; *en particulier, si* U *est harmonique bornée dans* $(\Omega - k)$ *et tend vers* 0 *sur* ∂k, *alors* $U \equiv 0$.

En effet, si U est bornée continue dans $(\Omega - \mathring{k})$ et harmonique dans $(\Omega - k)$, alors $V = (U - B_k U)$ est harmonique bornée dans $(\Omega - k)$ tendant vers 0 sur ∂k. Donc, dans $(\Omega - k)$, $V = 0$ (c'est une conséquence de la proposition 1.14).

Dans chaque domaine relativement compact dans un espace Ω B.H., il existe un potentiel $p > 0$; c'est une conséquence du lemme 1.4, selon lequel un tel domaine est contenu dans un domaine régulier. Soit δ un domaine régulier de Ω et $x_0 \in \delta$. Alors, il existe un potentiel $p > 0$ dans δ à support $\{x_0\}$ [10]. Si ω est un domaine relativement compact contenant δ, il existe un potentiel unique $p_{x_0}^{\omega}$ dans ω, harmonique hors x_0, et tel que $p_{x_0}^{\omega} = p +$ une fonction harmonique dans δ (voir, Mme Hervé [14], p. 458). C'est la plus petite fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans ω de forme indiquée dans δ.

Soit $\mathcal{F}$ la famille de domaines relativement compacts contenant δ. Alors, on voit que $p_{x_0}^{\omega}$ est croissant selon $\mathcal{F}$ et on a :

Proposition 1.16. — Ω *est* B.P. *si et seulement si* $\sup\limits_{\omega \in \mathcal{F}} p_{x_0}^{\omega} \not\equiv \infty$.

En effet, si $V = \sup\limits_{\mathcal{F}} p_{x_0}^{\omega} \not\equiv \infty$, alors dans Ω, V est une fonction surharmonique > 0 qui n'est pas harmonique; donc, Ω est un B.P.

Inversement, si Ω est un B.P., il existe un potentiel unique p_{x_0} dans Ω à support $\{x_0\}$ tel que ($p_{x_0} = p +$ une fonction harmonique) dans δ. Par conséquent, pour chaque $\omega \in \mathcal{F}$, $p_{x_0}^{\omega} \leqslant p_{x_0}$ dans ω et donc $\sup p_{x_0}^{\omega} \not\equiv \infty$.

4. Un exemple dans le cas classique.

Dans $\mathbf{R}^2$, $\log|x|$ est une fonction harmonique dans $|x| > 1$ telle que pour toute U harmonique dans $\mathbf{R}^2$, $(U - \log|x|)$ n'est pas bornée dans le voisinage du point à l'infini (sinon $U \to \infty$ en $\mathcal{A}$ et majore toute constante fixe dans $\mathbf{R}^2$, d'après le principe du minimum).

En revanche, dans $\mathbf{R}^3$, il n'existe pas de fonction jouant le rôle précédent de $\log|x|$; cela résulte de la propriété suivante qui n'a pas d'analogue dans $\mathbf{R}^2$.

Soit U *harmonique définie dans un ouvert* $\omega > \{|x| \geqslant r\}$. *Il existe une fonction harmonique* V *dans* $\mathbf{R}^3$ *telle que* $|V - U|$ *est bornée dans* $\{|x| \geqslant r\}$.

En effet, soient $x \in D = \{z : |z| > r\}$ et $|x| = \rho$. Rappelons des propriétés données par M. Brelot dans [4]. D'abord, dans D :

$$U(x) = k + \frac{\alpha}{\rho} + \sum_{1}^{\infty} \rho^n Y_n(\theta) + \sum_{1}^{\infty} \frac{Y_n'(\theta)}{\rho^{n+1}},$$

où $Y_n(\theta)$ et $Y_n'(\theta)$ sont des fonctions de Laplace d'ordre n du point θ sur la sphère-unité (θ correspond au vecteur-unité de x). Pour $\rho < \lambda$ fini fixé quelconque, les termes du premier Σ sont toujours majorés en module par les termes d'une série numérique convergente; pour $\rho > \lambda$ fixé $> r$ propriété analogue du second Σ.

Soient y un point quelconque dans $\mathbf{R}^3$ et $|y| = \rho_1$. Alors, $V(y) = K + \sum_1^\infty \rho_1^n Y_n(\theta_1)$ (θ_1 correspond à y) est harmonique dans $\mathbf{R}^3$ et $|V - U|$ est bornée dans $\{x : |x| \geqslant r\}$.

On va voir des extensions de ces propriétés dans un B.S. ou un B.P.

5. Extension en cas axiomatique.

Théorème 1.17. — *Soient* Ω *un espace* B.H. *et* K *un compact non localement polaire. Soit* ω *un* S-*domaine correspondant à* K. *Il existe une fonction harmonique* $h > 0$ *non bornée dans* ω. *Si* K *est compact* e.r., *cette fonction* h *dans* ω *tend vers* 0 *sur* ∂K.

Démonstration. — Soient $\{\Omega_n\}$ une exhaustion régulière de Ω contenant K et $x_0 \in \Omega_1 \cap \omega$. Si V_n est la solution du problème de Dirichlet dans $(\Omega_n - K)$ avec la donnée-frontière 1 sur $\partial\Omega_n$ et 0 sur ∂K, soit

$$U_n = \begin{cases} V_n & \text{dans } (\Omega_n - K) \\ 1 & \text{dans } (\Omega - \Omega_n) \end{cases}$$

Alors $U_n > 0$ est surharmonique dans ω et harmonique dans $(\Omega_n - K) \cap \omega$. Posons $h_n(x) = \dfrac{U_n(x)}{U_n(x_0)}$ dans ω. D'après le principe de Harnack [10], on peut extraire une sous-suite $\{h'_n\}$ de $\{h_n\}$ qui converge localement uniformément dans ω vers une fonction harmonique $h \geqslant 0$; $h(x_0) = 1$ implique que $h > 0$ dans ω.

On va démontrer que h est non-bornée dans ω. Supposons, au contraire, pour une constante $\lambda > 0$, on a $h < \lambda$ dans ω.

Soit D un domaine régulier contenant K. La convergence uniforme locale de $\{h'_n\}$ vers h dans ω implique que pour $n \geqslant n_0$, on a $h'_n \leqslant \lambda$ dans $\partial D \cap \omega$. (D'après le théorème 10, p. 85 [7] de M. Brelot) à partir de certain rang de n, h'_n est la solution du problème de Dirichlet dans $(D - K)$ avec la donnée-frontière h'_n dans ∂D et 0 sur ∂K. Par conséquent,

$\lambda(1 - (R_1)_1^K)$ étant harmonique $\geqslant 0$ dans $(D - K)$, tendant vers λ sur ∂D, on a $h'_n \leqslant \lambda(1 - (R_1^K)_D)$ dans $(D - K) \cap \omega$ ce qui implique que $h \leqslant \lambda(1 - (R_1^K)_D)$ dans $(D - K) \cap \omega$.

D étant un domaine arbitraire contenant K, on a (comme dans la démonstration du théorème 1.8) $h \leqslant \lambda(1 - B_K 1)$ dans $(\Omega - K) \cap \omega$. Mais, ω étant un S-domaine (c'est-à-dire $B_K 1 = 1$ dans ω) on en déduit que $h \leqslant 0$; c'est une contradiction.

Ainsi, on a démontré que h est une fonction harmonique > 0 non bornée dans ω.

Dans le cas où K *est* e.r., pour un domaine D fixé contenant K, on a pour $n \geqslant n_0$ par le principe de Harnack dans ω, $\sup\limits_{\partial D} h'_n \leqslant \alpha h'_n(x_0) = \alpha$ pour une constante $\alpha > 0$. Alors, comme en haut, on démontre que $h \leqslant \alpha(1 - (R_1^K)_D)$ dans $(D - K)$. K étant e.r., $(R_1^K)_D$ tend vers 1 sur ∂K. Par conséquent, $h \to 0$ sur ∂K.

THÉORÈME 1.18. — *Soit* Ω *un espace* B.S. *Alors dans* Ω, *il existe une fonction harmonique* U *définie en dehors d'un compact, telle que pour toute* V *harmonique dans* Ω, $|V - U|$ *est non bornée dans* v $\cap \Omega$ *où* v *est un voisinage de* $\{\mathcal{Cl}\}$.

Démonstration. — Soit k un compact e.r. dans Ω, Ω étant B.S., il n'existe aucun P-domaine composant de $(\Omega - K)$ (proposition 1.10). Soit ω un S-domaine composant de $(\Omega - K)$. (D'après la proposition 1.9, Ω étant non-compact, nécessairement il existe au moins un S-domaine composant de $(\Omega - K)$.)

D'après le théorème 1.17, il existe une fonction harmonique $H > 0$ dans ω, non-bornée et tendant vers 0 sur ∂K.

Soit U la fonction dans $(\Omega - K)$ égale à H dans ω, prolongée par 0 ailleurs. Alors, $U \geqslant 0$ est harmonique dans $(\Omega - K)$ et $\limsup\limits_{x \in (\Omega - K),\, x \to \mathcal{Cl}} U(x) = \infty$.

En outre, pour toute V harmonique dans Ω, $|V - U|$ est non-bornée en dehors d'un compact. En effet, supposons au contraire qu'il existe une fonction harmonique V dans Ω telle que $|V - U| < \lambda$ en dehors d'un compact X. On en déduit que V est bornée inférieurement dans $(\Omega - X)$, parce que $U \geqslant 0$; par conséquent, V est constante (proposition 1.2.). C'est une contradiction avec le fait que $|V - U|$ est bornée dans $(\Omega - X)$ et $\limsup_{x \to \mathfrak{A}} U(x) = \infty$.

Voici maintenant, avec une démonstration directe, un théorème de M. Nakai qui généralise un résultat (concernant des fonctions principales des surfaces de Riemann), dû surtout à M. Sario.

Théorème 1.19 [16]. — *Soient* Ω *un espace* B.P. *et* K *un compact* e.r. *Soit* h *une fonction finie continue dans* $(\Omega - \mathring{K})$ *et harmonique dans* $(\Omega - K)$. *Alors, il existe une fonction harmonique* H *dans* Ω *telle que* $H - h = B_K(H - h)$ *dans* $(\Omega - K)$.

Démonstration. — Soit ω un domaine régulier contenant K. Ω étant B.P., $B_K 1 \not\equiv 1$ dans $(\Omega - K)$ (d'après la proposition 1.10). Soit U la fonction dans $(\Omega - \mathring{K})$ égale à $B_K 1$ dans $(\Omega - K)$ prolongée par 1 sur ∂K; alors $V = H_U^\omega < 1$ sur K (parce que ω est un domaine et $U \not\equiv 1$ sur $\partial\omega$). Donc, $(U - V) > 0$ sur ∂K, et par conséquent, on peut choisir λ et μ tels que : $\lambda > 0 > \mu$ et sur ∂K,

$$\lambda(U - V) \geqslant (H_h^\omega - h) \geqslant \mu(U - V). \qquad (1)$$

Aussi, sur $\partial\omega$, $(U - V) = 0 = (H_h^\omega - h)$ et donc,

$$\lambda(U - V) = (H_h^\omega - h) = \mu(U - V) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega \qquad (2)$$

Dans $(\omega - K)$, $(U - V)$ et $(H_h^\omega - h)$ étant harmoniques, on obtient, d'après (1) et (2), que :

$$\lambda(U - V) \geqslant (H_h^\omega - h) \geqslant \mu(U - V) \text{ dans } (\omega - K). \qquad (3)$$

Posons

$$S_a = \begin{cases} aV + H_h^\omega & \text{dans } \omega \\ aU + h & \text{dans } (\Omega - \omega) \end{cases} \quad \text{où} \quad a = \lambda \text{ et } \mu. \qquad (4)$$

Alors, d'après (3), S_λ est une fonction continue surharmonique dans Ω; et S_μ est une fonction continue sousharmonique dans Ω. Aussi, $\lambda > 0 > \mu$ implique que $S_\lambda > S_\mu$ dans Ω.

Soit H une fonction harmonique dans Ω telle que $S_\lambda \geqslant H \geqslant S_\mu$ dans Ω. Alors :

$$\text{dans } (\Omega - \omega) : \quad \lambda U + h \geqslant H \geqslant \mu U + h \quad (\text{d'après } (4)).$$

On en déduit que dans $(\Omega - \omega)$, $|H - h|$ est bornée; en effet, $\lambda > 0 > \mu$ et dans $(\Omega - \omega)$, $U = B1 \leqslant 1$. De plus, $(H - h)$ étant continue dans le compact $(\overline{\omega} - \mathring{k})$, $|H - h|$ est bornée dans $(\overline{\omega} - \mathring{k})$ aussi.

Ainsi, on a démontré que la fonction H harmonique dans Ω est telle que $|H - h|$ est bornée dans $(\Omega - \mathring{K})$. Soit $\sup\limits_{\partial K} |H - h| = M$. Alors, dans $(\Omega - K)$:

$$|B(H - h)| \leqslant M(B1) = MU. \tag{5}$$

Posons, $t = H - h - B(H - h)$ dans $(\Omega - K)$.

Considérons,

$$s = \begin{cases} 0 & \text{sur } K \\ \sup(t, 0) & \text{sur } (\Omega - K). \end{cases}$$

Comme $t \to 0$ sur ∂K, s est une fonction sous-harmonique dans Ω. De plus

dans $(\Omega - K)$:

$$\begin{aligned} t &\leqslant (S_\lambda - h) - B(H - h) && (\text{parce que } S_\lambda \geqslant H). \\ &\leqslant \lambda U - B(H - h) && (\text{d'après } (3)) \\ &\leqslant \lambda U + MU && (\text{d'après } (5)) \\ &= (\lambda + M)\hat{R}_1^K && (\text{proposition } 1.7). \end{aligned}$$

On en déduit que $s \leqslant (\lambda + M)\hat{R}_1^K$ dans Ω.

Rappelant que $\hat{R}_1^K$ est un potentiel (proposition 1.7) et s sous-harmonique dans Ω, on obtient que $s \leqslant 0$ dans Ω et donc $t \leqslant 0$ dans $(\Omega - K)$.

De même façon, on démontre que $t \geqslant 0$ dans $(\Omega - K)$ et donc $t \equiv 0$ dans $(\Omega - K)$; c'est-à-dire dans $(\Omega - K)$, $H - h = B(H - h)$.

Comme conséquence, et sans la théorie de M. Nakai :

Théorème 1.20. M. Nakai [16]. — *Soient Ω un espace B.P. et U une fonction harmonique définie en dehors d'un compact. Alors, il existe une fonction V harmonique dans Ω telle que $|V - U|$ est bornée dans $v \cap \Omega$ où v est un voisinage de $\mathfrak{A}$.*

Démonstration. — Soit U la fonction harmonique définie dans $(\Omega - X)$ où X est un compact. Soit K un compact régulier tel que $X \subset \mathring{K}$ (lemme 1.4). Posons, $h = (U - B_K U)$ dans $(\Omega - K)$. Alors, h est harmonique dans $(\Omega - K)$ et (prolongée par 0 sur ∂K) continue dans $(\Omega - \mathring{K})$.

Donc, d'après le théorème 1.19, il existe une fonction V harmonique dans Ω telle que $V - h = B(V - h)$ dans $(\Omega - K)$.

Alors, dans $(\Omega - K)$:

$$\begin{aligned} V - U &= (V - h) - (h - U) \\ &= B(V - h) + BU. \end{aligned}$$

$(V - h + U)$ étant continue dans $(\Omega - \mathring{K})$, soit $\sup_{\partial K} |V - h + U| = \lambda$. Alors, dans $(\Omega - K)$, $|B(V - h) + BU| \leqslant \lambda$ et donc, $|V - U|$ est bornée dans $(\Omega - K)$.

CHAPITRE II

NOTION DE FLUX. PREMIÈRES CONSÉQUENCES

1. Flux dans le cas classique.

Dans $\mathbf{R}^2$, il existe une fonction U ($= \log|x|$) harmonique définie en dehors d'un compact K, telle que pour toute fonction harmonique V dans $\mathbf{R}^2$, $|V - U|$ est non-bornée dans $\omega \cap \mathbf{R}^2$ où ω est un voisinage de $\mathcal{A}$. Le développement en série comme dans [4] montre que h étant donnée comme harmonique en dehors d'un compact, il existe une fonction H harmonique dans $\mathbf{R}^2$ telle que $|H - h|$ est bornée dans $\omega \cap \mathbf{R}^2$ où ω est un voisinage de $\mathcal{A}$ si et seulement si le flux à l'infini de h est nul; c'est-à-dire $\int_\sigma \frac{dh}{dn}\, ds = 0$ où σ est la frontière d'un disque $\overline{D}_0^r$ avec un r grand.

Interprétation du flux à l'infini.

Selon une suggestion de M. Brelot, on peut interpréter le flux à l'infini d'une fonction U harmonique dans $\mathbf{R}^2$ d'une manière qui nous amène à la définition abstraite de M. Nakai comme suit :

Soit U harmonique définie en dehors d'un compact K dans $\mathbf{R}^2$. Soit $K \subset D_0^r \subset D_0^R$ avec $r < R$ et soient σ_1 et σ_2 les frontières de D_0^r et D_0^R. Définissons $V > 0$ surharmonique dans $|x| > r$ telle que V soit harmonique dans $r < |x| < R$ avec les valeurs 0 sur σ_1 et 1 sur σ_2, prolongée par 1 dans $|x| > R$.

V et U étant harmoniques dans $r < |x| < R$, on obtient par la formule de Green :

$$\int_{\sigma_1}\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) ds = \int_{\sigma_2}\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right) ds,$$

ce qui implique

$$\int_{\sigma_1} \mathrm{U} \frac{d\mathrm{V}}{dn} ds = \int_{\sigma_2} \mathrm{U} \frac{d\mathrm{V}}{dn} ds - \int_{\sigma_2} \frac{d\mathrm{U}}{dn} ds \tag{1}$$

Si BU désigne la fonction harmonique bornée dans $|x| > r$ avec la valeur U sur σ_1, $\int_{\sigma_2} \frac{d}{dn} (\mathrm{BU})\, ds$ étant nulle, on a d'après (1)

$$\int_{\sigma_1} \mathrm{U} \frac{d\mathrm{V}}{dn} ds = \int_{\sigma_2} \mathrm{BU} \frac{d\mathrm{V}}{dn} ds \tag{2}$$

D'après (1) et (2) on a, en prenant la normale extérieure à $\mathrm{D}_0^{\mathrm{R}}$:

$$\text{Flux de U à l'infini} = \int_{\sigma_2} \frac{d\mathrm{U}}{dn} ds = \int_{\sigma_2} (\mathrm{U} - \mathrm{BU}) \frac{d\mathrm{V}}{dn} ds.$$

Notons que dans cette dernière expression, $\frac{d\mathrm{V}}{dn} ds$ est une mesure de Radon sur σ_2 indépendante de U. Cela va nous conduire à une extension axiomatique du flux.

2. Flux à l'infini dans le cas axiomatique.

Dans un espace Ω B.H., soit k un compact e.r.; ω est un domaine régulier tel que $k \subset \omega$.

Opérateur B. — Pour une fonction f finie continue sur ∂k, $\mathrm{B}_{\mathrm{K}} f$ désigne la fonction harmonique dans $(\Omega - \mathrm{K})$ définie plus haut. Quand c'est évident, on écrit $\mathrm{B}f$ au lieu de $\mathrm{B}_{\mathrm{K}} f$.

Opérateur D. — Si g est finie continue sur $\partial\omega$, on notera $\mathrm{D}g$ la solution H_g^ω (du problème de Dirichlet dans ω avec la donnée g sur $\partial\omega$).

Opérateur T. — Pour une fonction f finie continue sur $\partial\omega$, on définit $\mathrm{T}_{k,\omega} = \{\mathrm{B}_k[\mathrm{D}f|\partial k]\}|_{\partial\omega}$. $\mathrm{T}_{k,\omega}$ est un opérateur appliquant $c(\partial\omega)$ dans $c(\partial\omega)$. On écrit brièvement T au lieu de $\mathrm{T}_{k,\omega}$.

Proposition 2.1. — *Soit* φ *une solution de* $\mathrm{T}\varphi = \varphi$, $\varphi \in c(\partial\omega)$. *Les fonctions* $\mathrm{D}\varphi$ *dans* ω *et* $\mathrm{BD}\varphi$ *dans* $(\Omega - \mathrm{K})$

sont égales dans $(\omega - K)$ *et définissent dans* Ω *une fonction* ψ. *Si* Ω *est* B.P., $\psi \equiv 0$; *et si* Ω *est* B.S., ψ *est constante.*

Démonstration. — $D\varphi$ et $BD\varphi$ sont harmoniques bornées dans $(\omega - K)$. Dans $(\omega - K)$, $D\varphi \to \varphi$ $(= T\varphi = BD\varphi)$ sur $\partial\omega$ et $BD\varphi \to D\varphi$ sur ∂K; par conséquent, dans $(\omega - K)$, $(D\varphi - BD\varphi) \to 0$ sur ∂K et sur $\partial\omega$. Donc, $D\varphi = BD\varphi$ dans $(\omega - K)$.

Ainsi, ψ est bien défini dans Ω comme une fonction harmonique telle que $B\psi = \psi$ dans $(\Omega - K)$. Par conséquent,

si Ω est B.P., $\psi \equiv 0$ (proposition 1.12);

si Ω est B.S., $\psi = B\psi$ dans $(\Omega - K)$ implique que dans $(\Omega - K)$, $|\psi| \leqslant \sup_{\partial K} |\psi| < \infty$; donc, ψ est constante (proposition 1.2).

Corollaire 2.2. — *Soit* Ω *un espace* B.H. *Alors, il existe une solution* φ $(\not\equiv 0)$ *de* $T\varphi = \varphi$, $\varphi \in c(\partial\omega)$ *si et seulement si* Ω *est* B.S.

En effet, si Ω est B.P. et φ est une solution de $T\varphi = \varphi$, alors $\varphi \equiv 0$ d'après la proposition 2.1.

Mais, si Ω est B.S., alors $B1 = 1$ dans $(\Omega - K)$ implique que $T1 = B(D1) = B1 = 1$. Par conséquent, 1 et donc toute constante c est une solution de $T\varphi = \varphi$. Remarquons aussi, d'après la proposition 2.1, que dans ce cas, la constante c est la seule solution de $T\varphi = \varphi$, $\varphi \in c(\partial\omega)$.

En utilisant le théorème de Riesz-Schauder (sur les opérateurs), M. Nakai démontre (voir [16]) :

Lemme de M. Nakai. — *Soit* Ω *un espace* B.S. *Alors, il existe sur* $\partial\omega$ *une mesure unitaire* $\nu \geqslant 0$ *(de Radon) unique telle que* $\int \varphi\, d\nu = \int T\varphi\, d\nu$ *pour toute* $\varphi \in c(\partial\omega)$.

De plus, il démontre :

Théorème 2.3. [16]. — *Si* Ω *est* B.P., *il existe pour tout* $f \in c(\partial\omega)$, *un* $g \in c(\partial\omega)$ *tel que* $(1 - T)g = f$; *si* Ω *est* B.S., *il existe un* $g \in c(\partial\omega)$ *tel que* $(1 - T)g = f$ *si et seulement si* $\int f\, d\nu = 0$.

Flux de U *à l'infini dans un* B.S.

Dans un espace Ω B.S., si U est une fonction harmonique dans $(\Omega - K)$ et continue dans $(\Omega - \mathring{K})$, on peut, comme M. Nakai, définir *le flux de* U *à l'infini par* $\int_{\partial\omega} (U - BU)\, d\nu$. *On l'appellera* $N_{K,\omega}$-*flux de* U. En particulier, si U est bornée, ce flux de U est nul (corollaire 1.15).

THÉORÈME 2.4. (Théorème fondamental de Nakai [16]). — *Soit* U *une fonction harmonique définie en dehors d'un compact dans un espace* Ω B.H. *Alors,*

i) *si* Ω *est* B.P., *il existe toujours une fonction harmonique* V *dans* Ω *telle que* $|U - V|$ *est bornée dans* $v \cap \Omega$ *où* v *est un voisinage de* $\mathfrak{A}$ (*théorème* 1.20)

ii) *si* Ω *est* B.S., *une telle fonction* V *existe si et seulement si le* $N_{K,\omega}$-*flux de* U *est nul, ce qui est donc indépendant du choix de* ω *et* K. *(On dira donc* N-*flux nul.)*

Démonstration. — Si les conditions du théorème sont satisfaites, dans les deux cas, pour une paire (K, ω) bien choisie, il existe un $\varphi \in c(\partial\omega)$ tel que $(1 - T)\varphi = (U - BU)|_{\partial\omega}$ (théorème 2.3).

Définissons, comme dans la proposition 2.1, V par $D\varphi$ dans ω et $(U - BU + BD\varphi)$ dans $(\Omega - K)$. C'est une fonction harmonique dans Ω; et $|V - U|$ qui vaut $|BU - BD\varphi|$ dans $(\Omega - K)$ y est bornée.

Autre caractérisation du cas du N-*flux nul.*

THÉORÈME 2.5. — *Dans un espace* Ω B.S., *soit* U *harmonique en dehors d'un compact* K. $\{\Omega_n\}_{n\geq 1}$ *une suite de domaines réguliers telle que* $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$, $K \subset \Omega_n$ *pour tout* n, *et* $\Omega = \cup\, \Omega_n$. *Alors, la suite des* $U_n = H_U^{\Omega_n}$ *est localement bornée dans* Ω, *ou de façon équivalente admet une sous-suite qui converge localement uniformément, si et seulement si le* N-*flux de* U *est nul.*

Démonstration. — Soit k un compact e.r. tel que $K \subset \mathring{k} \subset \Omega_1$. Si le flux U est nul, il existe d'après le théorème 2.4 ii), une fonction V harmonique dans Ω telle que

$|U - V| < \lambda$ dans $(\Omega - k)$. On en déduit que

$$V(x) - \lambda \leqslant U_n(x) \leqslant V(x) + \lambda \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1$$

et donc, $\{U_n\}$ est localement uniformément bornée. Par conséquent, on peut extraire une suite de $\{U_n\}$ qui converge localement uniformément vers une fonction harmonique dans Ω.

Maintenant, supposons qu'il soit possible d'extraire une suite de $\{U_n\}$ qui converge localement uniformément vers une fonction harmonique h dans Ω. Désignons aussi par $\{U_n\}$ la suite extraite et donc $h(x) = \lim U_n(x)$. Nous allons démontrer que $|U - h|$ est bornée dans $(\Omega - k)$.

Si $|U(x) - h(x)|$ n'est pas bornée, pour un nombre N, il existe un $x_0 \in (\Omega - k)$ tel que $|U(x_0) - h(x_0)| > N$. Supposons, par exemple, que

$$U(x_0) + N \leqslant h(x_0) \tag{1}$$

Dans Ω, $h(x) = \lim U_n(x)$ implique que quel que soit $\varepsilon > 0$, nous pourrions trouver un n_0 tel que

$$|U_n(x_0) - h(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_0. \tag{2}$$

D'après (1) et (2) : $U(x_0) + N < U_n(x_0) + \varepsilon$ si $n \geqslant n_0$. $\{U_n(x) - U(x)\}$, qui est harmonique dans $(\Omega_n - k)$, est telle qu'au point $x_0 \in (\Omega_n - k)$ on obtient

$$U_n(x_0) - U(x_0) > N - \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geqslant n_0\,;$$

et, par conséquent, $\max\limits_{(\Omega_n - k)} \{U_n(x) - U(x)\} \geqslant N - \varepsilon$. Mais $\{U_n(x) - U(x)\}$ s'annule sur $\partial\Omega_n$. Il existe donc un $X_n \in \partial k$ tel que

$$U_n(X_n) - U(X_n) \geqslant N - \varepsilon \quad \forall n \geqslant n_0 \tag{3}$$

Comme $\{U_n\}$ converge uniformément sur les compacts, il existe un m_0 tel que

$$|U_n(x) - U_m(x)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n,\ m \geqslant m_0 \ \text{et} \ x \in \partial k \tag{4}$$

Soit

$$M = \max(m_0,\ n_0).$$

D'après (3) :

$$U_M(X_M) - U(X_M) \geqslant N - \varepsilon.$$

D'après (4) :

$$|U_M(X_M) - U_n(X_M)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant M.$$

On obtient, donc, $U_n(X_M) \geqslant U(X_M) + N - 2\varepsilon$ pour $n \geqslant M$. Il s'ensuit que si $U \geqslant \mu$ sur ∂k, $h(X_M) \geqslant N + \mu - 2\varepsilon$ et donc, N étant arbitraire, il y a contradiction.

Théorème 2.6. — *Soient* Ω *un espace* B.P. *et* U *une fonction harmonique définie en dehors d'un compact* X. *Alors, pour toute exhaustion régulière* $\{\Omega_n\}_{n\geqslant 1}$ *de* Ω, $\lim\limits_{n\to\infty} H_U^{\Omega_n}$ *existe.* Pour ce résultat dans le cas classique, voir M. Brelot [5].

Démonstration. — Soit K un compact e.r. tel que $X \subset \mathring{K}$ et on peut supposer $K \subset \Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$. Par hypothèse, U est harmonique dans $(\Omega - X)$.

D'après le théorème 1.19, il existe une fonction V harmonique dans Ω telle que $(V - U) = B(V - U)$ dans $(\Omega - K)$.

Si $\lambda = \sup\limits_{\partial K} |V - U|$, $B(V - U)$ et $B(U - V)$ sont majorées dans $(\Omega - K)$ par $B\lambda$; c'est-à-dire $|B(V - U)| \leqslant \lambda B1 = \lambda R_1^K$ où R_1^K est un potentiel P dans Ω (proposition 1.11).

Donc, $|V - U| \leqslant P$ dans $(\Omega - K)$.

En conséquence, dans $(\Omega - K)$, $V - P \leqslant U \leqslant V + P$; et P étant potentiel, $H_P^{\Omega_n} \to 0$ dans Ω. Donc, dans Ω, $\lim\limits_{n} H_U^{\Omega_n}(x) = V(x)$.

Remarque. — *Dans le théorème* 2.5, $\lim H_U^{\Omega_n}(x)$ *n'existe pas nécessairement. Voici un exemple.*

Soient $\Omega =]-\infty, \infty[$ et les fonctions harmoniques définies localement comme affines.

Définissons,

$$U = \begin{cases} 4 & \text{dans} \quad]-\infty, -1[\\ 0 & \text{dans} \quad]1, \infty[. \end{cases}$$

Alors, U est harmonique dans $(\Omega - K)$ où $K = [-1, 1]$; et, selon la définition dans le cadre axiomatique, le flux de U à l'infini est nul.

a) si $d_n = (-n, n)$, $n \geqslant 2$, alors $\{d_n\}$ est une exhaustion de Ω, et $H_U^{d_n}(x) = -\dfrac{2}{n}x + 2 \to 2$ quand $n \to \infty$;

b) si $\omega_n = (-3n, n)$, $n \geqslant 2$, alors $\{\omega_n\}$ est aussi une exhaustion de Ω et $H_U^{\omega_n}(x) = -\frac{1}{n}x + 1 \to 1$ quand $n \to \infty$.

Par conséquent, à partir de $\{d_n\} \cup \{\omega_n\}$ on peut former une nouvelle exhaustion $\{\Omega_n\}$ pour laquelle $\lim H_U^{\Omega_n}(x)$ n'existe pas.

CHAPITRE III

FONCTIONS SURHARMONIQUES A SUPPORT PONCTUEL DANS UN ESPACE HARMONIQUE SANS POTENTIEL > 0

1. Prolongement surharmonique.

LEMME 3.1. (B. Walsh [17]). — *Soient* K *et* L *deux compacts* e.r. *dans un espace* Ω B.S. *tels que* $K \subset \mathring{L}$. *Soit* $\mathcal{H}_K$ (*resp.* $\mathcal{H}_L$) *la classe de fonctions harmoniques dans* $(\Omega - K)$ (*resp. dans* $(\Omega - L)$) *s'annulant sur* ∂K (*resp. sur* ∂L). *Si* $U \in \mathcal{H}_L$, *il existe* $V \in \mathcal{H}_K$ *tel que* $|V - U|$ *est bornée dans* $(\Omega - L)$.

En effet, soit ω un domaine régulier contenant L. Pour $\varphi \in c(\partial\omega)$ posons $M\varphi = H_{\varphi_0}^{\omega - K}$, solution du problème de Dirichlet dans $(\omega - K)$ avec la donnée-frontière $\varphi_0 = \varphi$ sur $\partial\omega$ et 0 sur ∂K.

Soit B_L l'opérateur, déjà défini plus haut, sur $c(\partial L)$. Ainsi, $B_L\psi = H_{\underset{*}{\psi}}^{\Omega - L}$, $\psi \in c(\partial L)$ avec la donnée $\underset{*}{\psi} = \psi$ sur ∂L et 0 en $\mathcal{A}$.

De la même façon, on définit l'opérateur $B_K U$ dans $(\Omega - K)$ pour $U \in c(\partial K)$.

On définit pour $U \in c(\partial\omega)$, $TU = \{B_L(MU|\partial L)\}|_{\partial\omega}$, $T = B_L M$ est un opérateur linéaire de $c(\partial\omega)$ dans $c(\partial\omega)$. M1 prolongée par 0 sur K est sousharmonique, donc < 1 dans ω. Ainsi, $M1 < 1$ dans $(\omega - K)$ et donc $T1 < 1$ et 1 n'est pas une valeur propre de T.

Supposons maintenant que $T\varphi = \varphi$ pour un $\varphi \in c(\partial\omega)$. Alors, les fonctions définies par $M\varphi$ dans $(\omega - K)$ et $B_L(M\varphi)$ dans $(\Omega - L)$ sont égales dans $(\omega - L)$ (voir la démonstration de la proposition 2.1) et donc définissent une fonction h harmonique bornée dans $(\Omega - K)$ tendant vers 0 sur ∂K. Ω étant B.S., h et donc φ sont nécessairement nulles (corollaire 1.15). Ainsi $T\varphi = \varphi$ implique $\varphi \equiv 0$.

Soit $U \in \mathcal{H}_L$. Il existe un élément unique $\varphi_1 \in c(\partial\omega)$ tel que $(1 - T)\varphi_1 = U$. Définissons V dans $(\Omega - K)$ par les fonctions $M\varphi_1$ dans $(\omega - K)$ et $B_L(M\varphi_1) + U$ dans $(\Omega - L)$, égales dans $(\omega - L)$ (comme dans la proposition 2.1). Alors, $V \in \mathcal{H}_K$ et dans $(\Omega - L)$

$$|V - U| \leqslant \sup_{\partial L} |M\varphi_1| < \infty.$$

Lemme 3.2. — *Dans un espace* Ω B.S., *soit* U *harmonique dans* $v \cap \Omega$ *où* v *est un voisinage de* $\mathfrak{A}$. *Soit* K *un compact non-localement-polaire dans* Ω. *Il existe une fonction* V *harmonique dans* $(\Omega - K)$ *telle que* $|V - U|$ *est bornée en dehors d'un compact.*

En effet, soit L un compact e.r. tel que $K \subset \mathring{L}$ et $(\Omega - \mathring{L}) \subset v$. Soit ω un domaine régulier contenant L. Introduisons, comme dans le lemme 3.1, les opérateurs M, B_L et $T = B_L M$. $(U - B_L U) \in \mathcal{H}_L$ et $|B_L U| \leqslant \sup_{\partial L} |U|$ dans $(\Omega - L)$.

Si l'on démontre que 1 n'est pas une valeur propre de T, le lemme se démontre comme dans le lemme 3.1.

Pour cela, remarquons $M1 < 1$ dans $(\omega - K)$; en effet, soit P un potentiel > 0 continu dans ω tel que $P \leqslant 1$ dans ω et $P = 1$ sur K. Alors, (comme dans le cas 1 de la démonstration du théorème 1.8) on a dans $(\omega - K)$, $M1 = 1 - (R_P^K)_\omega = 1 - (R_1^K)_\omega = 1 - (\hat{R}_1^K)_\omega < 1$. Il s'ensuit que $T1 < 1$ et 1 n'est pas une valeur propre de T.

Remarque. — Dans $(\omega - K)$, $|M\varphi| \leqslant \sup_{\partial\omega} |\varphi|$ où $\varphi \in c(\partial\omega)$. Donc, la fonction harmonique V dans le lemme est bornée dans $(\omega - K)$ par construction.

Lemme 3.3. — *Soient* Ω *un espace* B.S. *et* U *une fonction surharmonique à support compact* X, *non vide, définie dans un domaine* D. *Soient* K *un compact* e.r. *et* ω *un domaine régulier tels que* $X \subset \mathring{K} \subset K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset D$. *Si* T *est* *l'opérateur et* ν *la mesure unitaire associée à* (K, ω), (*voir chap.* II, § 2), *on a* $\int_{\partial\omega} (U - BU)\, d\nu \neq 0$.

En effet, supposons $\int_{\partial\omega} (U - BU)\, d\nu = 0$. D'après le théorème 2.3, il existe un $\varphi \in c(\partial\omega)$ tel que

$$(I - T)\varphi = (U - BU).$$

Les fonctions $(U - D\varphi)$ dans ω et $BU - B(D\varphi)$ dans $(\Omega - K)$ sont égales dans $(\omega - K)$ et définissent (comme dans la proposition 2.1) une fonction s surharmonique dans Ω; s est bornée en dehors d'un compact, ce qui implique (d'après la proposition 1.2) que s et donc U sont harmoniques dans ω. Cela contredit l'hypothèse que U est surharmonique dans ω à support compact non vide.

THÉORÈME 3.4. (Théorème du prolongement surharmonique). — *Dans un espace* Ω *B.S., soit* D *un ouvert. Si* U *est une fonction surharmonique dans* D *à support compact* X, *il existe* V *surharmonique dans* Ω, *de support* X, *telle que* ($V = U +$ *une fonction harmonique*) *dans un voisinage de* X.

Démonstration. — U est surharmonique définie dans D de support compact X. Nous pourrions considérer chaque composante connexe de D qui coupe X et en déduire le théorème. Ainsi, nous supposons que D est un domaine.

Soient K un compact e.r. et ω un domaine régulier, tels que $X \subset \mathring{K} \subset K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset D$. D'après le lemme 3.3, on a $\int_{\partial\omega} (U - BU)\, d\nu \neq 0$.

D'après le théorème 1.18, il existe une fonction harmonique H, définie en dehors d'un compact $A \subset \mathring{K}$ telle que pour toute fonction harmonique s dans Ω, $|s - H|$ est non bornée dans $v \cap \Omega$ où v est un voisinage de $\mathfrak{A}$; c'est-à-dire $N_{K,\omega}$-flux de H est non-nul (d'après le théorème 2.4). Ce qui implique que $\int_{\partial\omega} (H - BH)\, d\nu \neq 0$.

Pour un λ $(-\infty < \lambda < \infty)$, donc, on a

$$\int_{\partial\omega} \{(U + \lambda H) - B(U + \lambda H)\}\, d\nu = 0.$$

En conséquence, d'après le théorème 2.3, il existe un

$\varphi \in c(\partial\omega)$ tel que

$$(1 - T)\varphi = (U + \lambda H) - B(U + \lambda H) \qquad (1)$$

Considérons les fonctions $(U - D\varphi)$ dans ω et $-\lambda H + B(U + \lambda H) - B(D\varphi)$ dans $(\Omega - K)$; elles sont égales dans $(\omega - K)$. En effet, dans $(\omega - K)$, sur $\partial\omega$, $(U - D\varphi)$ tend vers $(U - \varphi)$ ou $-\lambda H + B(U + \lambda H) - T\varphi$ d'après (1); et sur ∂K, $-\lambda H + B(U + \lambda H) - T\varphi$ tend vers $-\lambda H + (U + \lambda H) - (D\varphi)$ qui vaut $(U - D\varphi)$.

Par conséquent, les fonctions harmoniques considérées définissent une fonction V dans Ω. Comme V est harmonique dans $(\Omega - K)$, et surharmonique et égale à $(U - D\varphi)$ dans ω, V est une fonction surharmonique dans Ω de support compact X et ($V = U +$ une fonction harmonique) dans un voisinage de X.

Théorème 3.5. — *Dans un espace* Ω B.S.

a) Soit U *surharmonique définie dans un ouvert* D. *Pour tout ouvert* $\omega \subset \overline{\omega} \subset D$, *il existe une fonction surharmonique* V, *de support compact, dans* Ω *telle que* V *égale* U *à une fonction harmonique-près dans* ω.

b) Soit U *surharmonique définie en dehors d'un compact* X. *Pour tout domaine* $\delta \supset X$, *il existe une fonction surharmonique* V *dans* Ω *telle que* V *égale* U *à une fonction harmonique-près dans* $v \cap \Omega$ *où* v *est un voisinage ouvert de* $(\Omega - \delta)$.

Démonstration. — *a)* Soient ω_1 et ω_2 deux ouverts tels que $\overline{\omega} \subset \omega_1 \subset \overline{\omega}_1 \subset \omega_2 \subset \overline{\omega}_2 \subset D$. On peut modifier U dans un voisinage $(\overline{\omega}_2 - \omega_1)$ pour la rendre harmonique dans ce voisinage sans l'altérer dans ω. Soit s la restriction de cette nouvelle fonction dans ω_2.

Ainsi, s est surharmonique dans ω_2, de support compact $\subset \omega_1$ et $s = U$ dans ω. D'après le théorème 3.4, il existe une fonction V surharmonique de support compact dans Ω telle que $V = (s +$ une fonction harmonique) dans ω_1 et donc V égale U à une fonction harmonique-près dans ω.

b) Soient K un compact e.r. et ω un domaine régulier tels que $X \subset \mathring{K} \subset K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \delta$ (lemme 1.4). Soit ν la mesure unitaire associée à (K, ω).

En changeant la valeur de U dans un voisinage de $\overline{(\omega - K)}$ nous pourrions rendre U harmonique dans ce voisinage, U n'étant pas changée dans $\mathcal{V} \cap \Omega$ où $\mathcal{V}$ est un voisinage de $(\Omega - \delta)$.

$\int_{\partial\omega} (U - BU)\, d\nu$ est finie, et comme dans la démonstration du théorème 3.4, on peut choisir une fonction harmonique H définie en dehors d'un compact $A \subset \mathring{K}$ telle que $\int_{\partial\omega} (H - BH)\, d\nu \neq 0$.

On peut donc trouver un λ fini tel que

$$\int_{\partial\omega} (U - BU)\, d\nu + \lambda \int_{\partial\omega} (H - BH)\, d\nu = 0.$$

Ce qui implique (d'après le théorème 2.3) qu'il existe un $\varphi \in c\,(\partial\omega)$ tel que $(1 - T)\varphi = (U + \lambda H) - B(U + \lambda H)$.

Définissons V surharmonique dans Ω au moyen des deux fonctions suivantes, égales dans $(\omega - K)$, à savoir $D\varphi$ dans ω et $B(D\varphi) + (U + \lambda H) - B(U + \lambda H)$ dans $(\Omega - K)$.

Alors, $(V = U +$ une fonction harmonique $h)$ dans $(\Omega - K)$.

2. Conséquences du théorème du prolongement.

THÉORÈME 3.6. (Existence de fonctions surharmoniques de support ponctuel). — *Dans un espace* Ω B.S., *pour chaque* $x_0 \in \Omega$, *il existe une fonction surharmonique* q_{x_0} *dans* Ω *de support* $\{x_0\}$. *S'il y a la proportionnalité (de potentiel à support ponctuel) locale, pour toute fonction surharmonique* s *de support* $\{x_0\}$ *dans* Ω, *on a* $(s = \lambda q_{x_0} +$ *une fonction harmonique*$)$.

Démonstration. — Soit δ un domaine régulier dans Ω contenant x_0. Il existe [10] un potentiel $p_{x_0} > 0$ dans δ de support $\{x_0\}$. D'après le théorème 3.4, il existe une fonction q_{x_0} surharmonique dans Ω de support $\{x_0\}$.

Supposons maintenant l'axiome de proportionnalité locale. Soit s surharmonique dans Ω de support x_0. Si h_1 (resp. h_2) est la plus grande minorante harmonique de q_{x_0} (resp. s) dans δ, l'axiome de proportionnalité locale entraîne que

$(s - h_2) = \lambda(q_{x_0} - h_1)$ dans $\mathcal{S}$. On en déduit que $(s = \lambda q_{x_0}$ $+$ harmonique) dans Ω.

THÉORÈME 3.7. (Théorème fondamental). — *Dans un espace* Ω B.S., *soit* P *un potentiel* > 0 *de support* $\{x_0\}$ *défini dans un voisinage ouvert de* x_0 *et soit* H *une fonction harmonique définie en dehors d'un compact. Il existe une fonction* s *dans* Ω *harmonique dans* $\Omega - \{x_0\}$ *et unique à une constante additive-près, telle que*

(i) $s = \lambda P +$ *une fonction harmonique* (λ *fini convenable*) *dans un voisinage de* $\{x_0\}$, *et*

(ii) $|s - H|$ *est bornée dans un voisinage de* $\mathcal{A}$.

Démonstration. — Supposons que P soit défini dans le domaine $\mathcal{S}$ et H en dehors d'un compact X. Soient K un compact e.r. et ω un domaine régulier, tels que $X \subset \mathring{K} \subset K \subset \omega$. D'après le théorème du prolongement de Mme Hervé ([14] p. 458) on peut considérer que P est un potentiel > 0 de support $\{x_0\}$ défini dans un voisinage de $\overline{\omega}$.

Existence. — Supposons flux de H à l'infini

$$= N_{K,\omega}(H) = \int_{\partial\omega} (H - BH)\, d\nu = 0.$$

Alors, d'après le théorème 2.4, il existe une fonction U harmonique dans Ω telle que $|U - H|$ est bornée dans un voisinage de $\mathcal{A}$. Avec $\lambda = 0$, la fonction $s = U$ satisfait aux conditions (i) et (ii) du théorème.

Si $N_{K,\omega}(H) = \int_{\partial\omega} (H - BH)\, d\nu \neq 0$, on obtient (comme dans la démonstration du théorème 3.4) une fonction V harmonique de support $\{x_0\}$ dans Ω, telle que $V = (P +$ une fonction harmonique) dans un voisinage de x_0 et $V = (\mu H +$ une fonction harmonique bornée) dans un voisinage de $\mathcal{A}$ avec $\mu \neq 0$. Alors, $S = \dfrac{1}{\mu} V$ satisfait aux conditions du théorème.

Unicité. — Soient s_1 et s_2 deux fonctions dans Ω, harmoniques dans $\Omega - \{x_0\}$ telles que (pour $i = 1,2$) $s_i = (\lambda_i P$

$+$ une fonction harmonique) dans un voisinage de $\{x_0\}$ et $|s_i - \mathrm{H}|$ est bornée dans un voisinage de $\mathfrak{A}$.

On a $\lambda_1 = \lambda_2$; en effet, supposons au contraire $\lambda_1 > \lambda_2$. Alors, $(s_1 - s_2)$ est surharmonique dans Ω de support $\{x_0\}$ et dans un voisinage de $\mathfrak{A}$,

$$|s_1 - s_2| \leqslant |s_1 - \mathrm{H}| + |s_2 - \mathrm{H}| < \infty$$

et donc $(s_1 - s_2)$ est une constante d'après la proposition 1.2. C'est une contradiction.

Ainsi, avec $\lambda_1 = \lambda_2$, $(s_1 - s_2)$ est une fonction harmonique dans Ω, bornée dans un voisinage de $\mathfrak{A}$ et donc $s_1 - s_2 \equiv$ constante.

Autres notions de flux dans un espace B.S. *Fixons dans un voisinage ouvert de* x_0 *un potentiel* $\mathrm{P} > 0$ *de support* x_0.

Flux à l'infini.

Soit H une fonction harmonique dans $v \cap \Omega$ où v est un voisinage de $\mathfrak{A}$.

a) On sait que H admet *un* N-flux *nul à l'infini* s'il existe une fonction harmonique h dans Ω telle que $|h - \mathrm{H}|$ est bornée dans $v_1 \cap \Omega$ où v_1 est un voisinage de $\mathfrak{A}$.

En particulier, si H est harmonique bornée en dehors d'un compact, alors N-flux $(\mathrm{H}) = 0$.

b) Si ce N-flux n'est pas nul, d'après le théorème fondamental (théorème 3.7) il existe une fonction s dans Ω, unique à une constante additive-près, telle que

(i) s est harmonique dans $\Omega - \{x_0\}$ et $|s - \mathrm{H}|$ est bornée en dehors d'un compact, et

(ii) $s = (\lambda\mathrm{P} +$ une fonction harmonique) dans un voisinage de x_0 $(\lambda \neq 0)$.

On définit dans ce cas, le flux à l'infini de H par rapport à P par l'égalité

$$\mathrm{Flux}_p\,(\mathrm{H})\ \textit{à l'infini} = -\lambda \neq 0.$$

Le $\mathrm{flux}_p\,(\mathrm{H})$ *sera défini par* 0, si le N-flux est nul.

Remarque. — Dans la théorie classique dans $\mathbf{R}^2$, ce flux_p est à un facteur numérique-près le flux classique élémentaire.

Flux de Nakai et flux_p *à l'infini.*

LEMME 3.8. — *Soient* Ω *un espace* B.S. *et* U *une fonction harmonique définie dans un domaine* δ; K *un compact* e.r. *et* ω *un domaine régulier tels que* $K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \delta$. *Si* ν *est la mesure unitaire associée à* (K, ω), *on a* $\int_{\partial\omega} (U - BU)\, d\nu = 0$.

En effet, si $T = BD$ est l'opérateur défini plus haut en appliquant $c(\partial\omega)$ dans $c(\partial\omega)$, on sait (d'après le théorème 2.3) qu'il existe une solution $\varphi = \varphi_0 \in c(\partial\omega)$ pour l'équation $(1 - T)\varphi = f$, où $f \in c(\partial\omega)$, si et seulement si $\int_{\partial\omega} f\, d\nu = 0$ où ν est la mesure unitaire associée à K, ω, T.

Dans ce cas, soit $f = (U - BU)|_{\partial\omega}$. Alors, $\varphi = U$ est une solution de $(1 - T)\varphi = (U - BU)$; en effet, U étant harmonique dans δ, $DU = U$ dans ω et donc $TU = B(DU) = BU$. Par conséquent, $\int_{\partial\omega} (U - BU)\, d\nu = 0$.

LEMME 3.9. — *Dans un espace* Ω B.S., *soit* P *un potentiel de support* x_0 *défini dans un domaine* δ. *Soit* δ_1 *un domaine régulier contenant* δ *et soit* P_1 *le potentiel dans* δ_1 (*comme dans le théorème du prolongement de* Mme Hervé [16] p. 458) *de support* x_0 *tel que* P_1 *est égal à* P *à une fonction harmonique-près dans un voisinage de* x_0. *Soit* (K, ω) *une paire comme dans le lemme* 3.8 *avec* $x_0 \in \mathring{K}$. *Alors,*

$$\int_{\partial\omega} (P - BP)\, d\nu = \int_{\partial\omega} (P_1 - BP_1)\, d\nu.$$

En effet, par hypothèse $P_1 = P + U$ dans δ où U est harmonique dans δ et donc $\int_{\partial\omega} (U - BU)\, d\nu = 0$ par le lemme 3.8. D'où le résultat.

Dans un espace Ω B.S., soit H une fonction harmonique définie en dehors d'un compact X. Soit K un compact e.r. et soit ω un domaine régulier tels que $X \subset \mathring{K} \subset K \subset \omega$. Si ν est la mesure unitaire associée à (K, ω) par le lemme de Nakai, rappelons que flux de H à l'infini =

$$N_{K,\omega}(H) = \int_{\partial\omega} (H - BH)\, d\nu.$$

En général, ce flux $N_{K,\omega}(H)$ *dépend du choix de* (K, ω). Voici un exemple.

Soit $\Omega =]-\infty, \infty[$ avec les fonctions localement affines comme harmoniques. Soit $K = [-1, 1]$ et $\omega_n =]-n, n[$ avec $n > 1$.

Soit

$$H(x) = \begin{cases} \alpha(x-1) & \text{dans } [1, \infty[\\ \beta(x+1) & \text{dans }]-\infty, -1] \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \alpha > \beta.$$

Soit ν_n la mesure unitaire associée à (K, ω_n) par le lemme de Nakai. On sait que $\operatorname{supp} \nu_n = \partial\omega_n$, et donc $\nu_n = \frac{\varepsilon_{-n} + \varepsilon_n}{2}$, $\left(\text{c'est-à-dire une masse } \frac{1}{2} \text{ au point } -n \text{ et une autre masse } \frac{1}{2} \text{ au point } n\right)$.

Par conséquent, le flux (H) à l'infini par rapport

$$\begin{aligned}(K, \omega_n) = N_{K,\omega_n}(H) &= \int_{\partial\omega_n} (H - BH)\, d\nu_n \\ &= \int_{\partial\omega_n} H\, d\nu_n \quad (H \text{ étant } 0 \text{ sur } \partial K, BH = 0) \\ &= \frac{1}{2}\alpha(n-1) + \frac{1}{2}\beta(-n+1) \\ &= \frac{n-1}{2}(\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Ce qui montre la dépendance annoncée.

Au contraire, on sait que le flux_p (H) n'en dépend pas.

Théorème 3.10. — *Dans un espace* Ω B.S., *le* flux_p *à l'infini de* H *harmonique au voisinage de* $\mathcal{A}$ *vaut* $N_{K,\omega}(H)$ *à un facteur près fonction de* P, ω *et* K.

Démonstration. — Soit H harmonique définie en dehors d'un compact X. Soit K un compact e.r. et soit ω un domaine régulier tels que $X \subset \mathring{K} \subset K \subset \omega$ avec la mesure ν associée à (K, ω).

Soit P_1 un potentiel > 0 de support x_0 défini dans un domaine régulier $\delta_1 \supset \bar{\omega}$ tel que P_1 égale à P une fonction harmonique près dans un voisinage de x_0. D'après le lemme 3.9, $\int_{\partial\omega} (P_1 - BP_1)\, d\nu$ est indépendant du choix de δ_1.

Notons

$$\lambda_{K,\omega}(P) = \int_{\partial\omega} (P_1 - BP_1)\, d\nu.$$

D'après la définition $N_{K,\omega}(H) = \int_{\partial\omega} (H - BH)\, d\nu$.

Comme dans le démonstration du théorème du prolongement (théorème 3.4) si $N_{K,\omega}(H) \neq 0$, on peut trouver un $\varphi \in c\,(\partial\omega)$ tel que

$$(1 - T)\varphi = \{N_{K,\omega}(H)P_1 - \lambda_{K,\omega}(P)H\} \\ - B\{N_{K,\omega}(H)P_1 - \lambda_{K,\omega}(P)H\},$$

et donc les fonctions définies par $\{N_{K,\omega}(H)P_1 - D\varphi\}$ dans ω et par $\lambda_{K,\omega}(P)H + B\{N_{K,\omega}(H)P_1 - \lambda_{K,\omega}(P)H\} - B(D\varphi)$ dans $(\Omega - K)$ sont égales dans $(\omega - K)$ et donc définissent une fonction V dans Ω qui est harmonique dans $\Omega - \{x_0\}$.

Rappelons que P_1 est égal à P à une fonction harmonique près dans un voisinage de x_0. Par conséquent, il existe une fonction $U\left(= \dfrac{1}{\lambda_{K,\omega}(P)} V\right)$ dans Ω, harmonique dans $\Omega - \{x_0\}$ telle que

(i) $U = \left\{\dfrac{N_{K,\omega}(H)}{\lambda_{K,\omega}(P)} P + \text{une fonction harmonique}\right\}$ dans ω,

et

(ii) $|U - H|$ est bornée dans un voisinage de $\mathfrak{A}$.

Donc, d'après la définition,

$$\text{flux}_p\,(H) \text{ à l'infini} = -\frac{N_{K,\omega}(H)}{\lambda_{K,\omega}(P)}.$$

Flux$_p$ *à l'infini d'une fonction surharmonique.*

Soit s une fonction surharmonique définie en dehors d'un compact.

Si s n'admet pas de minorantes harmoniques dans $\nu \cap \Omega$ (ν un voisinage quelconque de $\mathfrak{A}$), on dit que flux$_p\,(s)$ à l'infini est infini.

Si s admet une minorante harmonique dans $\nu \cap \Omega$, soit H la plus grande minorante harmonique de s dans $(\Omega - K)$ où K est un compact e.r. et $(\Omega - \mathring{K}) \subset \nu$. *On définit*: flux$_p\,(s)$ *à l'infini* $=$ flux$_p\,(H)$ *à l'infini.*

Cela est indépendant de K. En effet, soit H_1 (resp. H_2) la plus grande minorante harmonique de s dans $(\Omega - K_1)$ (resp. dans $(\Omega - K_2)$). Soit K un compact e.r. tel que $K_1 \cup K_2 \subset \mathring{K}$ et soit H la plus grande minorante harmonique de s dans $(\Omega - K)$. En utilisant le lemme 3.1, on démontre que $|H - H_1|$ et $|H - H_2|$ sont bornées en dehors d'un compact.

En effet, soit L un compact e.r. tel que

$$K_1 \cup K_2 \subset \mathring{K} \subset K \subset \mathring{L}.$$

Par le lemme 3.1, il existe un $V_1 \in \mathcal{H}_{K_1}$ qui correspond à $(H - B_L H) \in \mathcal{X}_L$ tel que $|V_1 - (H - B_L H)| < \infty$ dans $(\Omega - L)$; de plus, dans $(\Omega - L)$, $s - H \geqslant 0$ (par hypothèse) et $|B_L H| \leqslant \sup_{\partial L} |H|$ et donc, dans $(\Omega - L)$, $(s - V_1)$ est bornée inférieurement (1).

Aussi, dans $(L - \mathring{K}_1)$, $(s - V_1)$ est bornée inférieurement, parce que s est surharmonique dans un voisinage de $(\Omega - \mathring{K}_1)$ et V_1 est continue dans $(\Omega - \mathring{K}_1)$ (2).

D'après (1) et (2), il existe une constante λ telle que $s \geqslant V_1 + \lambda$ dans $(\Omega - K_1)$ et par conséquent, $H_1 \geqslant V_1 + \lambda$ dans $(\Omega - K_1)$. On en déduit qu'il existe une constante μ telle que $H_1 \geqslant H + \mu$ dans $(\Omega - L)$, parce que

$$|V_1 - H| \leqslant |B_L H| + |V - (H - B_L H)| < \infty \text{ dans } (\Omega - L).$$

Mais, par définition, $H \geqslant H_1$ dans $(\Omega - K) \supset (\Omega - L)$. Par conséquent, dans $(\Omega - L)$, $H \geqslant H_1 \geqslant H + \mu$.

Ainsi, nous avons démontré que $|H - H_1|$, et de même $|H - H_2|$, est bornée en dehors du compact L. Par conséquent, on voit que $|H_1 - H_2|$ est bornée en dehors d'un compact; donc, $\text{flux}_p(H_1)$ à l'infini $= \text{flux}_p(H_2)$ à l'infini parce que flux_p à l'infini d'une fonction harmonique bornée est nul.

Proposition 3.11. — *Dans un espace* Ω B.S., *soit* s *une fonction surharmonique.* s *est harmonique dans* Ω *si et seulement si* $\text{flux}_p(s)$ *à l'infini est nul.*

Démonstration. — Si s est harmonique, $\text{flux}_p(s)$ à l'infini est nul d'après la définition.

Supposons $\text{flux}_p(s)$ à l'infini nul. Alors, il existe une minorante harmonique h de s dans $(\Omega - X)$ où X est un compact telle que $\text{flux}_p(h)$ à l'infini est nul; en conséquence, il existe une fonction harmonique H dans Ω telle que $|H - h|$ est bornée dans un voisinage de $\mathfrak{A}$.

On en déduit que $(s - H)$, surharmonique dans Ω, est bornée inférieurement en dehors d'un compact; ce qui implique, Ω étant B.S., que s est harmonique dans Ω (d'après la proposition 1.2).

Flux$_p$ *à l'intérieur.*

Soit ω un domaine relativement compact dans un espace Ω B.S. Par définition, si U est harmonique dans ω, flux$_p$ (U) $= 0$.

Si U est surharmonique dans ω, à support compact $X \subset \omega$, choisissons une fonction harmonique H définie en dehors d'un compact avec Flux$_p$ (H) à l'infini non nul. Soit Flux$_p$ (H) à l'infini $= 1$.

Il existe (comme dans la démonstration du théorème 3.4) une fonction s dans Ω telle que

(i) s est harmonique dans $(\Omega - X)$ et $|s - H|$ est bornée en dehors d'un compact, et

(ii) $s = (\mu U +$ une fonction harmonique) dans ω.

Alors, $\mu \neq 0$, et on définit :

Le flux$_p$ (U) *dans* ω *est défini par* $-\dfrac{1}{\mu}$.

Ce flux est indépendant de la fonction H *qu'on a choisie.*

En effet, soit h une autre fonction harmonique définie en dehors d'un compact avec le flux$_p$ (h) à l'infini $= 1$; et soit s_1 une fonction dans Ω telle que : s_1 est harmonique dans $(\Omega - X)$ et $|s_1 - h|$ est bornée en dehors d'un compact; et $s_1 = (\mu_1 U +$ une fonction harmonique) dans un voisinage de X.

Nous démontrons que $\mu = \mu_1$.

Supposons que $\mu > \mu_1$. Alors $(s - s_1) = [(\mu - \mu_1)U +$ une fonction harmonique] dans un voisinage de X; et, en dehors d'un compact

$$|(s - s_1) - (H - h)| \leqslant |s - H| + |s_1 - h| < \infty. \quad (1)$$

Mais, flux$_p$ $(H - h)$ à l'infini est nul, et donc, il existe une fonction W harmonique dans Ω telle que

$$|W - (H - h)| \text{ est bornée en dehors d'un compact} \quad (2)$$

D'après (1) et (2), la fonction surharmonique $[(s - s_1) - W]$ est bornée inférieurement en dehors d'un compact dans Ω. En conséquence $(s - s_1)$ est harmonique dans Ω (proposition 1.2); ce qui implique que $\mu = \mu_1$.

Fonctions harmoniques avec singularités données en deux points.

THÉORÈME 3.12. — *Soient x_1 et x_2 deux points distincts dans un espace Ω B.S. Soit φ_1 (resp. φ_2) une fonction surharmonique définie dans un voisinage de x_1 (resp. de x_2) de support x_1 (resp. x_2). Si* $\text{flux}_p(\varphi_1) - \text{flux}_p(\varphi_2) = 0$ *alors, il existe une fonction s dans Ω telle que :*

(i) *s est harmonique dans $\Omega - \{x_0, x_1\}$*

(ii) *$s = (\varphi_1 +$ une fonction harmonique) dans un voisinage de x_1*

(iii) *$s = (-\varphi_2 +$ une fonction harmonique) dans un voisinage de x_2*

(iv) *s est bornée en dehors d'un compact, ce qui implique la nullité du flux à l'infini de s.*

Démonstration. — Fixons une fonction H harmonique définie en dehors d'un compact telle que $\text{flux}_p(H)$ à l'infini $= 1$.

Soit $\text{flux}_p(\varphi_1) = \text{flux}_p(\varphi_2) = a \neq 0$.

Alors, par définition, pour $i = 1, 2$, il existe une fonction s_i dans Ω telle que :

(i) s_i est harmonique dans $\Omega - \{x_i\}$, et $|s_i - H|$ est bornée dans $v_i \cap \Omega$ où v_i est un voisinage de $\mathfrak{A}$, et

(ii) $s_i = \left(-\dfrac{1}{a}\varphi_i + \text{une fonction harmonique}\right)$ dans un voisinage de $\{x_i\}$.

Alors, $s = a(s_2 - s_1)$ satisfait les conditions du théorème.

THÉORÈME 3.13. (Théorème de partition). — *Dans un espace Ω B.S., soient U une fonction surharmonique et ω un ouvert relativement compact. Alors, il existe dans Ω deux fonctions surharmoniques U_1 et U_2 telles que $U = U_1 + U_2$; U_1 est harmonique dans $(\Omega - \overline{\omega})$, et U_2 est harmonique dans ω.*

Démonstration. — Ce théorème est une conséquence directe du théorème 3.4 et du *théorème de partition* de Mme Hervé ([14], p. 456) : Soit ω un ouvert dans un espace Ω B.P. Soit V une fonction surharmonique > 0 dans Ω. Alors, il existe deux fonctions V_1 et V_2 surharmoniques > 0 dans Ω telles que

(i) $V = V_1 + V_2$ dans Ω,

(ii) V_1 est harmonique dans ω, et

(iii) V_2 est harmonique dans $\Omega \cap c\bar{\omega}$.

En effet, supposons que D soit un domaine régulier contenant $\bar{\omega}$, et que U soit une fonction surharmonique dans Ω B.S. Dans D, il existe des potentiels > 0; en conséquence, d'après le théorème de partition de Mme Hervé, il existe dans D deux fonctions V_1 et V_2 surharmoniques telles que $U = V_1 + V_2$; V_1 est harmonique dans $(D - \bar{\omega})$ et V_2 est harmonique dans ω.

D'après le théorème 3.4, on obtient une fonction surharmonique U_1 dans Ω telle que U_1 a le même support que V_1 et ($U_1 = V_1 +$ une fonction harmonique) dans un voisinage de $\bar{\omega}$.

Donc, dans D, $U_1 = V_1 + h_1$ où h_1 est harmonique dans D.

Les fonctions $(U - U_1)$ dans $(\Omega - \bar{\omega})$ et $(V_2 - h_1)$ dans D sont égales dans $(D - \bar{\omega})$. En effet, dans $(D - \bar{\omega})$, U_1, V_1 et h_1 sont harmoniques; et, dans D, $U = V_1 + V_2$ et $U_1 = V_1 + h_1$. Donc dans $(D - \bar{\omega})$,

$$U - U_1 = (V_1 + V_2) - (V_1 + h_1) = V_2 - h_1.$$

Par conséquent, la fonction U_2 définie par $(U - U_1)$ dans $(\Omega - \bar{\omega})$ et $(V_2 - h_1)$ dans D est une fonction surharmonique dans Ω; harmonique dans ω, puisque V_2 l'est dans ω.

Enfin, $U = U_1 + U_2$ dans Ω. En effet, dans $(\Omega - \bar{\omega})$, $U_2 = U - U_1$ par définition et U_1 est harmonique dans $(\Omega - \bar{\omega})$; et dans $D \supset \bar{\omega}$,

$$U = V_1 + V_2 = (U_1 - h_1) + V_2 = U_1 + U_2.$$

Remarque. — Dans le théorème 3.13, si U est une fonction surharmonique avec support compact, on peut prendre ω comme ouvert sans qu'il soit nécessairement relativement compact.

Existence des fonctions surharmoniques à support ponctuel (démonstration directe).

Avec une restriction sur Ω, *sans utiliser la notion de flux*, on peut démontrer qu'il existe des fonctions surharmoniques à support ponctuel dans un espace Ω B.S. Dans la démonstration, on utilise une idée de M. Heins [12] :

Soit, dans un espace Ω B.S., *un voisinage* A *compact d'un point* $a \in \Omega$ *tel que le complémentaire de* A *dans* Ω *soit connexe. Alors, il existe une fonction surharmonique dans* Ω *à support* $\{a\}$.

En effet, soit $\{\Omega_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de domaines réguliers, telle que $A \subset \Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ pour chaque n, et soit $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$. Soient δ et δ_1 deux domaines réguliers tels que $A \subset \delta_1 \subset \overline{\delta}_1 \subset \delta \subset \overline{\delta} \subset \Omega$.

Il existe, [10], un potentiel p_a^δ dans δ à support $\{a\}$. Soient $\Gamma_0 = \partial A$ et $\Gamma_n = \partial \Omega_n$ $(n \geqslant 1)$.

Soit p_n le potentiel unique, (voir Mme Hervé [14], p. 458) dans Ω_n à support $\{a\}$, tel que

$$(p_n = p_a^\delta + \text{une fonction harmonique } h_n) \quad \text{dans} \quad \delta_1$$

et

$$p_n \to 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_n. \tag{1}$$

Supposons que $M_n = \max_{\Gamma_0} p_n(x) > 0$ $(n \geqslant 1)$.

Alors, dans $(\Omega_n - A)$, $p_n(x) < M_n$.

En effet, soit U la fonction dans $(\Omega - A)$ égale à p_n dans $(\Omega_n - A)$, prolongée par 0 ailleurs. Parce que $p_n \to 0$ sur Γ_n, U est sousharmonique dans le domaine $(\Omega - A)$ et $\limsup_{x\in\Omega-A,\, x\to x_0\in\Gamma_0} U(x) \leqslant M_n$. Donc, dans $(\Omega - A)$, $U \leqslant M_n$ (voir proposition 1.14). De plus, U n'étant pas constante dans le domaine $(\Omega - A)$, $U < M_n$ dans $(\Omega - A)$; en particulier, $U = p_n < M_n$ dans $(\Omega_n - A)$.

Posons

$$U_n(x) = M_n - p_n(x), \quad n \geqslant 1 \tag{2}$$

Alors, $U_n \geqslant 0$ dans $(\Omega_n - \mathring{A})$ et $U_n > 0$ dans $(\Omega_n - A)$. Puisque $U_1 \geqslant 0$ sur Γ_0 et U_n est nul en un point $y_n \in \Gamma_0$, il s'ensuit que $U_1(y_n) - U_n(y_n) \geqslant 0$. De plus, $(U_1 - U_n)$ est harmonique dans Ω_1 telle que $\lim\limits_{\substack{y \in \Omega_1 \\ y \to z \in \Gamma_1}} [U_1(y) - U_n(y)]$ existe.

Donc, dans Ω_1, $(U_1 - U_n) \leqslant \max\limits_{\Gamma_1} \left\{ \lim\limits_{\substack{y \in \Omega_1 \\ y \to z \in \Gamma_1}} [U_1(y) - U_n(y)] \right\}$.

Par conséquent,

$$0 = [U_1(y_n) - U_n(y_n)] \leqslant \max_{\Gamma_1} \left\{ \lim_{\substack{y \in \Omega_1 \\ y \to z \in \Gamma_1}} [U_1(y) - U_n(y)] \right\},$$

ce qui implique que $0 \leqslant \max\limits_{\Gamma_1} [M_1 - U_n(z)]$ et donc,

$$\min_{\Gamma_1} U_n(z) \leqslant M_1 \tag{3}$$

Soit X un compact dans le domaine $(\Omega - A)$.
Alors,

$$\max_{X} U_n(x) \leqslant \mu \text{ (une constante)} \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 1 \tag{4}$$

En effet, $X \cup \Gamma_1$ est compact dans le domaine $(\Omega - A)$ et il existe donc, deux constantes > 0, b et c, telles que pour chaque n,

$$c < \frac{U_n(x')}{U_n(x'')} < b \qquad \text{où} \qquad x', \quad x'' \in X \cup \Gamma_1.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \max_{x' \in X} U_n(x') &\leqslant b \min_{x'' \in \Gamma_1} U_n(x'') \\ &\leqslant b\, M_1 \quad \text{(d'après (3))}. \end{aligned}$$

Donc, de $\{U_n\}$ qui est localement bornée dans $(\Omega - A)$, on peut extraire une suite $\{U'_n\}$ convergeant localement uniformément dans $(\Omega - A)$ (5).

Maintenant, considérons la convergence dans A.

Soit δ_2 un domaine tel que $A \subset \delta_2 \subset \overline{\delta}_2 \subset \delta_1$.

Dans δ_1 posons $V'_n = U'_n + P^{\delta}_a$. Alors, V'_n est harmonique dans δ_1 et sur $\partial\delta_2$,

$|V'_n| \leqslant |U'_n| + |P^{\delta}_a| \leqslant \lambda$ (une constante), parce que $\{U'_n\}$ est bornée sur $\partial\delta_2$, d'après (4).

Par conséquent,

$$|V'_n| \leqslant \lambda \quad \text{dans} \quad \delta_2. \tag{6}$$

De la suite $\{V'_n\}$, donc, on peut extraire une sous-suite $\{V''_n\}$ convergeant localement uniformément dans $\delta_2 \supset A$.

Posons $V''_n = U''_n + P^\delta_a$ dans δ_2. Alors, les fonctions $-\lim U''_n(x)$ dans $(\Omega - A)$ et $\{P^\delta_a - \lim V''_n(x)\}$ sont égales dans $(\delta_2 - A)$.

Par conséquent, la fonction U définie par $-\lim U''_n(x)$ dans $(\Omega - A)$, et $\{P^\delta_a - \lim V''_n(x)\}$ dans δ_2 est harmonique dans $\Omega - \{a\}$, et dans un voisinage δ_2 de $\{a\}$, ($U = P^\delta_a +$ une fonction harmonique).

3. Approximation.

Lemme 3.14. — *Soit* ω *un domaine dans un espace* Ω B.S. *et* $x_0 \in \Omega$. *Alors, il existe une fonction surharmonique* s *finie continue dans* Ω, *non harmonique dans* ω, *telle que* $s(x_0) < \infty$.

En effet, soit δ un domaine régulier dans Ω tel que $\bar{\delta} \subset \omega$ et $x_0 \notin \bar{\delta}$. Pour un $y \in \delta$, soit q la fonction surharmonique de support $\{y\}$ dans Ω (voir théorème 3.6.).

Si

$$s(x) = \begin{cases} H^\delta_q(x) & \text{dans} \quad \delta \\ q(x) & \text{dans} \quad (\Omega - \delta) \end{cases}$$

Alors, $s(x)$ satisfait les conditions du lemme.

Proposition 3.15. — *Dans un espace* Ω B.S., *soit* $\{\omega_n\}$ *une famille dénombrable de domaines. Alors, il existe une fonction surharmonique dans* Ω, *qui n'est harmonique dans aucun* ω_n.

Démonstration. — Soit $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ où pour $n \geqslant 1$, Ω_n est un domaine régulier et $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$. Soit $x_0 \in \Omega_1$. Alors, il existe une fonction surharmonique V_i dans Ω telle que V_i n'est pas harmonique dans ω_i et $V_i(x_0) < \infty$ (lemme 3.14).

Si a_i est le minimum de V_i dans Ω_i, on peut choisir une suite $\lambda_i > 0$ telle que $\sum_i \lambda_i(V_i(x_0) - a_i) < \infty$.

Définissons $U(x) = \sum_i \lambda_i(V_i(x) - a_i)$.

Quel que soit K compact dans Ω, $\lambda_i\ (V_i(x) - a_i) \geqslant 0$ sur K pour $i \geqslant n_K$; en conséquence, U est une fonction hyperharmonique dans Ω. De plus, $U(x_0) < \infty$; et donc, U est une fonction surharmonique dans Ω.

Ainsi, U est une fonction surharmonique dans Ω, qui n'est évidemment pas harmonique dans aucun ω_i.

Conséquence. — Si Ω est un espace B.S. à base dénombrable, il existe dans Ω une fonction surharmonique V qui n'est harmonique dans aucun ouvert de Ω.

LEMME 3.16. — *Soient x, y deux points distincts dans un espace* Ω B.S. *Il existe une fonction surharmonique* V *finie continue dans* Ω *telle que* $V(x) \neq V(y)$.

En effet, soit δ un domaine régulier contenant x tel que $y \notin \bar{\delta}$. Soit U une fonction surharmonique finie continue dans Ω qui n'est pas harmonique dans δ.

Si $U(x) = U(y)$, considérons

$$V = \begin{cases} H_U^\delta & \text{dans } \delta \\ U & \text{dans } (\Omega - \delta). \end{cases}$$

Alors, V est surharmonique finie continue dans Ω telle que $V(x) \neq V(y)$.

THÉORÈME 3.17. (Théorème d'approximation analogue à un théorème de Mme Hervé [14] dans un B.P.). — *Dans un espace* Ω B.S., *toute fonction finie continue sur un compact* $K \subset \Omega$ *peut être approchée uniformément sur* K *par des différences de deux fonctions surharmoniques finies continues dans* Ω (*non nécessairement* $\geqslant 0$).

Soit $C(K)$ l'ensemble des fonctions finies continues sur K et soit E le sous-espace vectoriel de $C(K)$ formé des restrictions à K des différences $(U - V)$, où U et V sont des fonctions surharmoniques finies continues dans Ω.

Alors, E contient les constantes; $U \in E$ entraîne $|U| \in E$; et E sépare les points (lemme 3.16). Donc, toute fonction de $C(K)$ peut être approchée uniformément sur K, par des fonctions $\in E$.

4. Ensembles localement polaires.

Dans le cas d'un espace Ω B.P., on dit qu'un ensemble e dans Ω est *polaire* s'il existe une fonction surharmonique $s > 0$ dans Ω telle que $e \subset \{x : s(x) = +\infty\}$. Dans le cas d'un espace B.S., on dit qu'un ensemble e est *localement polaire* si pour chaque $x \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert ω de x tel que $\omega \cap e$ soit polaire dans ω. On sait que *dans un espace* Ω B.P., *si* e *est localement polaire, il est aussi polaire* ([7], p. 127).

Dans un espace Ω B.S., on a

Théorème 3.18. — *Si* e *est un ensemble localement polaire dans un espace* Ω B.S., *il existe une fonction surharmonique* U *dans* Ω *telle que* $U(x) = \infty$ *sur* e.

Nous supposons qu'il existe un $x_0 \in \Omega \cap c\bar{e}$. En effet, on peut écrire $e = e_1 \cup e_2$ tel que pour $i = 1, 2$, $(\Omega - \bar{e}_i)$ ne soit pas vide, et, en considérant séparément e_1 et e_2, on déduise la propriété de e.

Soit $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ où Ω_n est un domaine régulier contenant x_0 et $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.

Maintenant $(e \cap \Omega_{n+1})$ est localement polaire dans Ω_{n+1} qui est un B.P. et, donc, $(e \cap \Omega_{n+1})$ est polaire dans Ω_{n+1}. Il existe, alors, une fonction surharmonique $s_{n+1} > 0$ dans Ω_{n+1} telle que $s_{n+1} = \infty$ sur $e \cap \Omega_{n+1}$. On en déduit (théorème 3.4) qu'il existe une fonction surharmonique V_n dans Ω telle que ($V_n = s_{n+1} +$ une fonction harmonique) dans Ω_n. Parce que $x_0 \in \Omega_n \cap c\bar{e}$, nous pouvons supposer que $V_n(x_0) < \infty$ sans changer la valeur de V_n sur $e \cap \Omega_n$.

Ainsi, pour chaque $n \geqslant 1$, il existe une fonction surharmonique V_n dans Ω telle que $V_n(x_0) < \infty$ et $V_n(x) = \infty$ sur $e \cap \Omega_n$.

On achève la démonstration comme dans la proposition 3.15. Soit a_n le minimum de V_n dans Ω_n. Alors, on peut choisir une suite $\lambda_n > 0$ telle que $\Sigma\lambda_n(V_n(x_0) - a_n) < \infty$. Définissons que $U(x) = \Sigma\lambda_n(V_n(x) - a_n)$.

Alors, U est une fonction surharmonique dans Ω telle que $U(x) = \infty$ sur e.

La proposition suivante donne *une condition suffisante* pour que e soit localement polaire quand Ω a une base dénombrable.

PROPOSITION 3.19. — *Soit Ω un espace B.S. à base dénombrable. Dans Ω, soit e un ensemble qui est polaire dans un voisinage de chacun de ses points. Alors, il existe une fonction* V *surharmonique dans Ω telle que $V(x) = \infty$ sur e et $V(x_0) < \infty$ pour un x_0 arbitraire dans $(\Omega - e)$; ce qui implique que e est localement polaire dans Ω.*

En effet, pour $x \in e$, soit δ_x un domaine régulier contenant x, où il existe une fonction surharmonique $U_x > 0$ telle que $U_x = \infty$ sur $e \cap \delta_x$.

Soit α_x un domaine régulier tel que $\bar{\alpha}_x \subset \delta_x$ et $x_0 \notin \bar{\alpha}_x$. Comme Ω a une base dénombrable, il existe une suite de tels domaines α_x qui couvre e; notons cette suite par (α_n).

Comme dans la proposition précédente, on peut démontrer qu'il existe une fonction surharmonique V_n dans Ω telle que $V_n = \infty$ sur $(e \cap \alpha_n)$ et $V_n(x_0) < \infty$.

On en déduit, comme dans la proposition 3.15, qu'il existe une fonction V surharmonique dans Ω telle que $V(x) = \infty$ sur e, et $V(x_0) < \infty$.

Le lemme suivant est démontré par M. Bauer [2], en supposant une base dénombrable. Nous en donnons une démonstration modifiée qui ne fait pas cette hypothèse.

LEMME 3.20. — *Dans un espace Ω B.P., soit e un ensemble polaire, fermé. Alors, il existe dans Ω, une fonction surharmonique $s > 0$ telle que $e = \{x : s(x) = \infty\}$.*

En effet, soit p un potentiel fini continu dans Ω. Alors, pour $x \notin e$, $R_p^e(x) = 0$; et donc, pour chaque $x \in ce$, il existe une fonction $U > 0$ surharmonique telle que $U \leqslant p$ dans Ω, $U = p$ sur e, U est continue au point x et $U(x) < \varepsilon$. Par conséquent, pour un compact $K \subset ce$, il existe une fonction U_K surharmonique > 0 dans Ω telle que $U_K \leqslant p$ dans Ω, $U_K = p$ sur e, et $U_K < \varepsilon$ sur K.

Soit $\{a_n\}$ une suite de constantes > 0, telles que $\Sigma a_n < \infty$. Parce que e est polaire, fermé, ce est un domaine ([7],

p. 125) et donc [11], $ce = \cup K_n$ où $\{K_n\}$ est une suite croissante de compacts. Soit U_n surharmonique > 0 dans Ω telle que $U_n \leqslant p$, $U_n = p$ sur e, et $U_n < a_n$ sur K_n.

Considérons $s = \Sigma U_n$. s est hyperharmonique > 0 dans Ω et $s = \infty$ sur e; si $x \in ce$, il existe un m tel que $x \in K_m$ et par conséquent,

$$s(x) \leqslant (m-1)p(x) + \sum_{m}^{\infty} a_n < \infty.$$

Ainsi, s est surharmonique > 0 dans Ω telle que $e = \{x : s(x) = \infty\}$.

THÉORÈME 3.21. — *Dans un espace* Ω B.S., *soit* e *un ensemble localement polaire et fermé. Alors, il existe dans* Ω *une fonction surharmonique* s *telle que* $e = \{x : s(x) = \infty\}$.

Démonstration. — Supposons que e soit compact.

Soit ω un domaine régulier contenant e; il existe dans ω, d'après le lemme 3.20, une fonction surharmonique $p > 0$ telle que $e = \{x : p(x) = \infty\}$, et on peut même considérer que p est harmonique dans ω en dehors d'un voisinage de e. D'après le théorème 3.4, alors, il existe une fonction s surharmonique dans Ω telle que $e = \{x : s(x) = \infty\}$.

Supposons, maintenant, que e soit fermé, non compact, et localement-polaire dans Ω. Alors, ce est un domaine. Soient ω un domaine régulier et K, L deux compacts e.r. tels que $L \subset \mathring{K} \subset K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset ce$.

Dans chaque composante connexe δ de $(\Omega - L)$, il existe (lemme 3.20) une fonction surharmonique $s > 0$ telle que $e \cap \delta = \{x : s(x) = \infty\}$. Considérant chaque composante connexe de $(\Omega - L)$, on voit qu'il existe une fonction $U > 0$, surharmonique dans $(\Omega - L)$ telle que $e = \{x : U(x) = \infty\}$.

Alors, on démontre, comme dans la démonstration du théorème 3.5 (b), qu'il existe une fonction V surharmonique dans Ω telle que V est égale à U harmonique près dans $(\Omega - K) \supset e$; et V est harmonique dans ω. Par conséquent, V est une fonction surharmonique dans Ω telle que $e = \{x : V(x) = +\infty\}$.

5. Fonctions admissibles.

DÉFINITION 3.22. — *Dans un espace* Ω B.S., *une fonction* U *surharmonique est dite admissible* [1] *si elle admet une minorante harmonique en dehors d'un compact dans* Ω.

Remarque. — D'une façon équivalente, on peut dire que U *est admissible si et seulement si* $\mathrm{Flux}_p\,(\mathrm{U})$ *à l'infini est fini* (§ 2).

THÉORÈME 3.23. (Balayage dans un B.S.). — *Soit* Ω *un espace* B.S. *et soit* V *une fonction surharmonique dans* Ω. *Alors* V *est admissible si et seulement si pour tout compact* $\mathrm{X}(\mathring{\mathrm{X}} \neq \varnothing)$, *il existe une fonction* U *surharmonique dans* Ω *telle que*

(i) $\mathrm{U} \leqslant \mathrm{V}$ *dans* Ω,

(ii) $\mathrm{U} = \mathrm{V}$ *dans* $\mathring{\mathrm{X}}$,

(iii) U *est harmonique dans* $(\Omega - \mathrm{X})$, *et*

(iv) $\mathrm{Flux}_p\,(\mathrm{U})$ *à l'infini est égal à* $\mathrm{Flux}_p\,(\mathrm{V})$ *à l'infini.*

Démonstration. — Étant donné une fonction surharmonique V, s'il existe pour un compact $\mathrm{X}\ (\mathring{\mathrm{X}} \neq \varnothing)$ une fonction U surharmonique satisfaisant les conditions (i) et (iii), alors V est admissible.

Supposons maintenant que V soit admissible et X un compact $(\mathring{\mathrm{X}} \neq \varnothing)$. Par définition, V a une minorante harmonique h définie dans $(\Omega - \mathrm{A})$ où A est un compact. Soient K un compact e.r. et ω un domaine régulier tels que $\mathring{\mathrm{K}} \subset \mathrm{K} \subset \omega \subset \mathring{\mathrm{X}}$; et L un compact e.r. tel que $\mathrm{A} \cup \mathrm{K} \subset \mathring{\mathrm{L}}$.

Il existe alors (lemme 3.1), une fonction H harmonique dans $(\Omega - \mathrm{K})$ tendant vers 0 sur $\partial\mathrm{K}$, telle que $|\mathrm{H} - (h - \mathrm{B_L}h)|$ est bornée dans $(\Omega - \mathrm{L})$. Aussi, $|\mathrm{B_L}h| \leqslant \sup\limits_{\partial\mathrm{L}} |h|$ dans $(\Omega - \mathrm{L})$; par conséquent,

$$\sup_{\Omega-\mathrm{L}} |\mathrm{H} - h| < \infty. \tag{1}$$

[1] Dans $\mathbf{R}^2$, on peut démontrer qu'une fonction U est admissible si et seulement si U est un potentiel (logarithmique) à une fonction harmonique près (voir M. Brelot [4] où il y a aussi un exemple, p. 308, montrant qu'une fonction surharmonique n'est pas nécessairement admissible).

Par hypothèse, la fonction surharmonique $V \geqslant h$ dans $(\Omega - A)$; donc, d'après (1), dans $(\Omega - K)$, $V \geqslant H + \lambda$ pour une constante λ. Ainsi, V a une minorante harmonique dans $(\Omega - K)$. Soit q la plus grande minorante harmonique de V dans $(\Omega - K)$.

Soit $\mathcal{F}$ la famille de fonctions surharmoniques s dans $(\Omega - K)$ telle que

(i) $s \geqslant V$ dans $X \cap (\Omega - K)$,

(ii) $s \geqslant q$ dans $(\Omega - K)$. Alors, $\mathcal{F}$ n'est pas vide, parce que $V \in \mathcal{F}$.

Définissons $s_0 = \inf\limits_{\mathcal{F}} s$; alors, s_0 est surharmonique dans $(\Omega - K)$; $s_0 \leqslant V$ dans $(\Omega - K)$; $s_0 = V$ dans $\overset{\circ}{\widehat{X \cap (\Omega - K)}}$ et s_0 est harmonique dans $(\Omega - X)$.

Les fonctions s_0 dans $(\Omega - K)$ et V dans ω sont, donc, égales dans l'ensemble de l'intersection

$$\omega \cap (\Omega - K) \subset \overset{\circ}{\widehat{X \cap (\Omega - K)}}.$$

Par conséquent, la fonction U définie par s_0 dans $(\Omega - K)$ et V dans ω est surharmonique dans Ω, satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème.

U satisfait la condition (iv) aussi. En effet, soit h_0 la plus grande minorante harmonique de V dans $(\Omega - L)$. Alors, $U \leqslant h_0$ dans $(\Omega - L)$, parce que dans $(\Omega - L)$, U est harmonique $\leqslant V$. (2)

De plus, comme dans (1) en utilisant le lemme 3.1, on obtient qu'il existe une fonction h_1 harmonique dans $(\Omega - K)$ tendant vers 0 sur ∂K telle que $|h_1 - h_0|$ est bornée en dehors d'un compact E. (3)

En outre, $V \geqslant h_0$ dans $(\Omega - E) \subset (\Omega - L)$ et dans $(E - \overset{\circ}{K})$, $(V - h_1)$ est bornée inférieurement, parce que V est surharmonique et $h_1 \to 0$ sur ∂K. Par conséquent, d'après (3), pour une constante μ, $V \geqslant h_1 + \mu$ dans $(\Omega - K)$; ce qui implique que dans $(\Omega - K)$,

$$q \geqslant h_1 + \mu \qquad \text{et donc,} \qquad U \geqslant (h_1 + \mu) \qquad (4)$$

D'après (2), (3) et (4) on obtient que dans $(\Omega - E)$, la fonction harmonique $(U - h_0)$ est bornée et donc, $\text{flux}_p\,(U - h_0)$ à l'infini est nul. Par conséquent

$$\begin{aligned} \text{flux}_p\,(U) \text{ à l'infini} &= \text{flux}_p\,(h_0) \text{ à l'infini} \\ &= \text{flux}_p\,(V) \text{ à l'infini} \quad (\text{par déf. § } 2) \end{aligned}$$

Remarque. — Dans le théorème 3.23, désignons la fonction U par B_V^X. Soient X_1, X_2 deux compacts avec l'intérieur non vide, tels que $X_1 \subset X_2$. Alors, de la construction ci-dessus, on obtient qu'il existe deux fonctions surharmoniques $B_V^{X_1}$ et $B_V^{X_2}$ dans Ω telles que $B_V^{X_1} \leqslant B_V^{X_2}$.

COROLLAIRE 3.24. — *Une fonction* V *surharmonique est admissible si et seulement si* V *est une limite croissante de fonctions surharmoniques dans* Ω *à supports compacts.*

En effet, $\Omega = \cup\, \Omega_n$ où Ω_n est un domaine régulier tel que $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$. Soit $U_n = B_V^{\overline{\Omega}_n}$. Alors, $U_n \leqslant U_{n+1}$; U_n a le support $\subset \overline{\Omega}_n$; et $U_n = V$ dans Ω_n. Donc, $V = \lim U_n$. Pour l'inverse, on note que si U est surharmonique majorant une fonction admissible, alors U est admissible.

COROLLAIRE 3.25. — *Dans un espace* Ω B.S., *soit* X *un compact* ($\mathring{X} \neq \emptyset$). *Alors, dans* Ω, *il existe une fonction* s *surharmonique, nonharmonique, telle que*

(i) $s \leqslant 1$ *dans* Ω,

(ii) $s = 1$ *sur* $\mathring{X}$, *et*

(iii) s *est harmonique dans* $(\Omega - X)$.

En effet, soit K un compact e.r. contenant X. On sait d'après la démonstration du théorème 1.18, qu'il existe une fonction $H \geqslant 0$ harmonique dans $(\Omega - K)$, tendant vers 0 sur ∂K.

Alors,

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } K \\ -H(x) & \text{dans } (\Omega - K), \end{cases}$$

est surharmonique dans Ω; et, U est admissible.

Donc, par le théorème 3.23, il existe une fonction surharmonique V dans Ω telle que

(i) $V \leqslant U \leqslant 0$ dans Ω,

(ii) $V = U = 0$ dans $\mathring{X}$, et

(iii) V est harmonique dans $(\Omega - X)$.

Alors, $s = (V + 1)$ possède toutes les propriétés énoncées dans le corollaire.

Remarque. — (D'après le lemme 3.2), le théorème 3.23 et le corollaire 3.25 sont vrais même si l'on suppose seulement que X est compact non-localement-polaire.

6. Domaines du type B.P.

Définition 3.26. — *Dans un espace* Ω B.S., *on dit qu'un domaine* ω *est du type* B.P. *s'il existe un potentiel* > 0 *dans* ω.

Théorème 3.27. [10]. — *Dans un espace* Ω B.S., *un domaine* ω *est du type* B.P. *si et seulement si* $(\Omega - \omega)$ *n'est pas localement polaire.*

Démonstration. — Voici une démonstration différente de [10]. Soit ω un domaine du type B.P. dans un espace Ω B.S.; si $(\Omega - \omega)$ était localement polaire, alors il y aurait un potentiel > 0 dans Ω. Par conséquent, si ω est un domaine du type B.P. dans Ω B.S., alors $(\Omega - \omega)$ n'est pas localement polaire.

Supposons maintenant que ω soit un domaine dans un espace Ω B.S. et que $(\Omega - \omega)$ ne soit pas localement polaire. Soit $x_0 \in \omega$, et soit $\mathcal{F}$ la famille de domaines réguliers dans Ω contenant x_0. $(\Omega - \omega)$ n'est pas localement polaire implique qu'il existe un $\Omega_i \in \mathcal{F}$ tel que $(C\omega \cap \Omega_i)$ n'est pas localement polaire dans Ω_i. Soit K un compact e.r. tel que $K \subset \omega \cap \Omega_i$; soit $\alpha_i = (\Omega_i - K)$.

Alors, $(\hat{R}_1^{C\omega \cap \Omega_i})_{\alpha_i} \neq 0$.

Soit σ un domaine régulier contenant $\overline{\Omega}_i$. Alors, $C\omega \cap \Omega_i$ est relativement compact dans $(\sigma - k)$ et donc $(\hat{R}_1^{C\omega \cap \Omega_i})_{\sigma-k}$ est un potentiel dans $(\sigma - k)$. Aussi, on a que $(\hat{R}_1^{C\omega \cap \Omega_i})_{\sigma-k}$

tend vers 0 sur $\partial(\sigma - k)$. D'après les inégalités

$$0 \leqslant (\hat{R}_1^{C\omega \cap \Omega_i})_{\alpha_i} \leqslant (\hat{R}_1^{C\omega \cap \Omega_i})_{\sigma - k} \leqslant (\hat{R}_1^{C\omega})_{\sigma - k} \qquad (1)$$

on obtient que $V_i = (\hat{R}_1^{C\omega \cap \Omega_i})_{\alpha_i}$ est une fonction surharmonique dans $(\Omega_i - k)$, prenant ses valeurs dans $[0, 1]$, étant harmonique $\not\equiv 0$ dans $(\omega \cap \Omega_i) - k$, et tendant vers 0 sur ∂K.

Soient $\Omega_j \in \mathcal{F}$ et $\Omega_j \supset \Omega_i$. Alors, d'après (1),

$$(\hat{R}_1^{C\omega \cap \Omega_i})_{\alpha_i} \leqslant (\hat{R}_1^{C\omega \cap \Omega_i})_{\alpha_j = \Omega_j - k} \leqslant (\hat{R}_1^{C\omega \cap \Omega_j})_{\alpha_j} \leqslant (\hat{R}_1^{C\omega})_{\Omega - k} \quad (2)$$

c'est-à-dire, si $\Omega_i \subset \Omega_j$ alors on a $V_i \leqslant V_j \leqslant (\hat{R}_1^{C\omega})_{\Omega - k}$.

Soit δ un domaine régulier tel que $K \subset \delta \subset \overline{\delta} \subset \omega$, et soit dans $(\delta - K)$ h la fonction $H_\varphi^{(\delta - k)}$ où $\varphi = 0$ sur ∂K et $\varphi = 1$ sur $\partial\delta$. Alors, h prolongée par 1 dans $(\Omega - \delta)$ est une fonction surharmonique dans $(\Omega - K)$, tendant vers 0 sur ∂k et $\geqslant (\hat{R}_1^{C\omega})_{\Omega - k}$ (3).

D'après (2) et (3), $\{V_j\}$ est une famille filtrante croissante où V_j correspond à $\Omega_j \supset \Omega_i$; V_j tend vers 0 sur ∂k; $0 \leqslant V_j \leqslant 1$ dans $(\Omega_j - K)$, mais $V_j \not\equiv 0$; et V_j est harmonique dans $(\omega \cap \Omega_j) - K$.

Par conséquent, si $V = \sup V_j$, alors V est harmonique dans $(\omega - K)$; et $0 \leqslant V \leqslant 1$, mais $V \not\equiv 0$ dans $(\omega - K)$. D'après (2) et (3), $V_j \leqslant (\hat{R}_1^{C\omega})_{\Omega - k}$ implique que V tend vers 0 sur ∂K.

La fonction s définie par V dans $(\omega - K)$, prolongée par 0 dans K, est donc une fonction sousharmonique, bornée, nonconstante dans ω ; ce qui implique qu'il existe un potentiel > 0 dans ω (proposition 1.2).

Voici *d'autres caractérisations d'un domaine* ω *du type* B.P. Pour un $y \in \Omega$, on désigne par q_y une fonction surharmonique dans Ω de support $\{y\}$.

Théorème 3.28. — *Soit* ω *un domaine dans un espace* Ω B.S. *Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) ω *est un domaine du type* B.P.,

(ii) *pour chaque* $y \in \omega$, *il existe une fonction surharmonique* > 0 *dans* ω *à support* $\{y\}$ *qui est de la forme* (q_y + *une fonction harmonique*) *dans un voisinage de* $\{y\}$,

(iii) *pour chaque* $y \in \omega$, *il existe une minorante harmonique de* q_y *dans* ω,

(iv) *pour tous les domaines* ω_i *relativement compacts dans* ω *contenant* $\{y\}$, $\sup p_y^{\omega_i} \not\equiv \infty$ *où* $p_y^{\omega_i}$ *est le potentiel unique* ([14], p. 458) *dans* ω_i, *de support* $\{y\}$, *qui est de la forme* (q_y + *une fonction harmonique*) *dans un voisinage de* $\{y\}$.

Démonstration.

(i) $\Longrightarrow$ (ii).

Soit V un potentiel > 0 dans ω. $y \in \omega$. Soient α, δ, δ' des domaines réguliers tels que

$$y \in \alpha \subset \bar{\alpha} \subset \delta' \subset \bar{\delta}' \subset \delta \subset \bar{\delta} \subset \omega.$$

Soit $\Gamma = \delta - \bar{\delta}'$.

Alors, $U = (\hat{R}_V^\alpha)_\omega$ n'est pas harmonique dans δ, parce que U est harmonique dans $(\omega - \bar{\alpha})$ et $U \leqslant V$ dans ω. Par conséquent, $(U - H_U^\delta) > 0$ dans δ.

Soit h la plus grande minorante harmonique de q_y dans δ. Alors, il existe un $\lambda > 0$ tel que

$$(U - H_U^\delta) \geqslant \lambda(q_y - h) \qquad \text{sur} \qquad \partial\delta' \tag{1}$$

$(U - H_U^\delta)$ et $(q_y - h)$ sont harmoniques dans Γ et (1) est vrai dans $\partial\delta$ aussi, parce que $h \to q_y$ sur $\partial\delta$. Par conséquent, $(U - H_U^\delta) \geqslant \lambda(q_y - h)$ sur $\bar{\Gamma}$.

Définissons

$$W = \begin{cases} H_U^\delta + \lambda(q_y - h) & \text{dans } \delta \\ U & \text{dans } (\omega - \delta) \end{cases}$$

Alors, W est surharmonique > 0 dans ω, et donc $\dfrac{W}{\lambda}$ est surharmonique > 0 dans ω et de la forme (q_y + une fonction harmonique) dans un voisinage de $\{y\}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Soit $y \in \omega$; alors, il existe une fonction surharmonique $V > 0$ dans ω, de support $\{y\}$, telle que ($V = q_y$ + une fonction harmonique) dans un voisinage de $\{y\}$. Par conséquent, il existe une fonction harmonique H dans ω telle que $V = q_y + H > 0$, et donc q_y a une minorante harmonique dans ω.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv).

Par hypothèse, la plus grande minorante harmonique de q_y existe dans ω. Soit $\mathcal{F}$ la famille de domaines relativement compacts dans ω contenant $\{y\}$. Alors, $p_y^{\omega_i} = q_y$ — la plus grande minorante harmonique de q_y dans ω_i et donc $p_y^{\omega_i} \leqslant q_y$ — la plus grande minorante harmonique de q_y dans ω.

Par conséquent, $\sup p_y^{\omega_i} \not\equiv \infty$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i).

Soit $\mathcal{F}$ la famille ordonnée de domaines relativement compacts dans ω, contenant $\{y\}$, telle que $\omega = \cup\, \omega_i$. Alors $\{p_y^{\omega_i}\}_{\omega_i \in \mathcal{F}}$ est une famille ordonnée de fonctions surharmoniques > 0, et d'après (iv), $V = \sup p_y^{\omega_i} \not\equiv \infty$. Donc, dans ω, il existe une fonction surharmonique > 0, qui n'est pas harmonique; par conséquent, ω est un domaine du type B.P.

7. Harmonicité à l'infini.

PROPOSITION 3.29. — *Soit* Ω *un espace* B.S. *et soit* U *une fonction harmonique définie en dehors d'un compact* X. *Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *pour un compact* K e.r. *tel que* $X \subset \mathring{K}$, $U = B_K U$ *dans* $(\Omega - K)$,

(ii) U *est bornée en dehors d'un compact,*

(iii) U *est bornée dans un sens à l'infini et* $\mathrm{flux}_p(U)$ *à l'infini est nul.*

Démonstration. — L'équivalence entre (i) et (ii) est évidente, d'après le corollaire 1.15. Par définition, si U est bornée, $\mathrm{flux}_p(U)$ à l'infini est nul et donc (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Pour montrer (iii) $\Longrightarrow$ (ii), supposons U bornée inférieurement en dehors d'un compact et $\mathrm{flux}_p(U)$ à l'infini est nul. Alors, par définition du flux nul, il existe une fonction V harmonique dans Ω telle que $|V - U|$ est bornée en dehors d'un compact, et donc V est bornée inférieurement en dehors d'un compact; ce qui implique que V est constante (proposition 1.2). Par conséquent, U est bornée en dehors d'un compact.

DÉFINITION 3.30. — *Soit* Ω *un espace* B.S., *et soit* ω *un ouvert dans* $\overline{\Omega}$ *contenant* $\mathcal{A}$. *Soit* U *une fonction harmonique définie dans* $\omega \cap \Omega$. *On dit que* U *est harmonique à l'infini* ([2]) *si l'une des conditions équivalentes de la proposition* 3.29 *est satisfaite; et, une fonction* V *définie dans* $\omega \cap \Omega$ *est dite harmonique relativement à* ω *si* V *est harmonique dans* $\omega \cap \Omega$ *au sens habituel et* V *est harmonique à l'infini.*

Rapport avec le cas classique.

Voici comment on peut considérer la définition 3.30 plus haut, comme une généralisation de la notion correspondante dans $\mathbf{R}^2$.

Dans $\mathbf{R}^2$, on notera D_0^r et Δ_0^r les domaines où $|x| < r$ et $|x| > r$; $\Delta_0'^r = \Delta_0^r \cup \{\mathcal{A}\}$; $M_u^r(0)$ la moyenne d'une fonction U sur la circonférence $|x| = r$.

Soit ω un ouvert dans $\overline{\mathbf{R}}^2$ contenant $\{\mathcal{A}\}$. *Une fonction* U *dans* ω *est harmonique* si elle l'est sur $\omega - \{\mathcal{A}\}$ au sens habituel et en $\{\mathcal{A}\}$ finie continue, égale à $M_u^r(0)$ [pour 0 fixe et r alors assez grand, ou encore quel que soit $\Delta_0'^r \subset \omega$].

Cette définition au point $\{\mathcal{A}\}$ revient à supposer, dans le développement, (comme dans § 4, chap. I), pour $|x| = \rho$,

$$U(x) = K + \alpha \log \frac{1}{\rho} + \sum_{p}^{\infty} \rho^n Y_n(\theta) + \sum_{1}^{\infty} \frac{Y_n'(\theta)}{\rho^n}$$

que α et le premier Σ sont nuls, et par conséquent, $\lim_{x \to \mathcal{A}} U(x)$ existe. Ainsi, une fonction U définie dans un ouvert ω de $\mathbf{R}^2$, contenant $\{\mathcal{A}\}$, est harmonique relativement à ω si et seulement si U est harmonique dans $\omega - \{\mathcal{A}\}$ au sens habituel et U est bornée dans un voisinage de $\{\mathcal{A}\}$.

Base de voisinages réguliers de $\mathcal{A}$.

Parce que Ω est dénombrable à l'infini, on a $\Omega = \cup K_n$ où $\{K_n\}$ est une suite croissante de compacts e.r. On peut

([2]) Dans [4], M. Brelot a introduit les notions de l'harmonicité et la sousharmonicité sur les ensembles ouverts de $\overline{\mathbf{R}}^n$ ($n \geqslant 2$) mêmes, contenant le point à l'infini, de manière à conserver des propriétés fondamentales comme le principe du maximum.

donc considérer $(\overline{\Omega} - K_n)$, $n \geqslant 1$, comme une base d'ouverts réguliers de $\mathcal{Q}$.

Notation. — Soient K compact e.r. et U définie sur ∂K. Notons par $\overline{B}_K U$ la fonction $\overline{H}^{\Omega - K}_{\underset{*}{U}}$ où $\underset{*}{U}$ est U sur ∂K et 0 en $\mathcal{Q}$. Donc, si f est finie continue sur ∂K, $\overline{B}_K f = B_K f$.

Proposition 3.31. — *Dans un espace* Ω B.S., *soit* U *surharmonique définie en dehors d'un compact* X. *Alors, les conditons suivantes sont équivalentes*

(i) *pour un compact* K e.r. *tel que* $X \subset \mathring{K}$, $U \geqslant \overline{B}_K U$ *dans* $(\Omega - K)$,

(ii) U *est bornée inférieurement en dehors d'un compact.*

Démonstration.

(i) $\Longrightarrow$ (ii).

Soit $U \geqslant \lambda$ sr ∂K. Alors, $\overline{B}_K U \geqslant \overline{B}_K \lambda = B_K \lambda = \lambda$ dans $(\Omega - K)$; et donc $U \geqslant \overline{B}_K U$ dans $(\Omega - K)$ implique que U est bornée inférieurement à l'infini.

(ii) $\Longrightarrow$ (i).

Soient $U \geqslant \lambda$ en dehors d'un compact A et K un compact e.r. tel que $A \subset \mathring{K}$. Soit $V = U - \lambda \geqslant 0$ dans $(\Omega - A)$. Alors, $V \geqslant \overline{B}_K V$ dans $(\Omega - K)$; c'est-à-dire dans $(\Omega - K)$, $U - \lambda \geqslant \overline{B}_K(U - \lambda) \geqslant \overline{B}_K U - B_K \lambda = \overline{B}_K U - \lambda$ et donc $U \geqslant \overline{B}_K U$ dans $(\Omega - K)$.

Définition 3.32. — *Soient* Ω *un espace* B.S., *et* U *surharmonique définie en dehors d'un compact* X. *On dit que* U *est surharmonique à l'infini si l'une des conditions équivalentes de la proposition* 3.31 *est vérifiée.*

Potentiels de support $\mathcal{Q}$.

Dans un espace Ω B.S., soit K un compact e.r. Il existe alors dans $(\Omega - K)$ une fonction harmonique $H \geqslant 0$, tendant vers 0 sur ∂K telle que $\overline{\lim}_{x \to \mathcal{Q}} H(x) = \infty$ (d'après la démonstration du théorème 1.18). Par définition 3.32, cette fonction H est surharmonique (et non harmonique) à l'infini. De plus, si $h \geqslant 0$ est harmonique relativement à $(\overline{\Omega} - K)$ et $h \leqslant H$, alors $h \equiv 0$; en effet, h est bornée dans $(\Omega - K)$ et tend vers 0 sur ∂K, et donc $h \equiv 0$ (corollaire 1.15). En conséquence, par analogie, *on peut appeler* H *un potentiel relativement à* $(\overline{\Omega} - K)$ *et de support* $\mathcal{A}$.

Voici une conséquence immédiate de cette interprétation.

Proposition 3.33. — *Soit* Ω *un espace* B.S. *et* φ_0 *un potentiel* > 0 *dans un voisinage de* $x_0 \in \Omega$ *et de support* x_0. *Soit* φ *un potentiel* $\neq 0$ *relativement à un voisinage de* $\mathcal{A}$ *et de support* $\mathcal{A}$. *Alors, il existe une fonction* s *dans* Ω *telle que*

(i) s *est harmonique dans* $\Omega - \{x_0\}$,

(ii) $s = (\varphi_0 +$ *une fonction harmonique) dans un voisinage de* x_0, *et*

(iii) $s = (\lambda\varphi +$ *une fonction harmonique) relativement à un voisinage de* $\mathcal{A}$.

En effet, φ est une fonction harmonique $\geqslant 0$ dans $(\Omega - K)$, K étant compact, telle que $\overline{\lim\limits_{x \to \mathcal{A}}} \varphi(x) = \infty$ et donc $\text{flux}_p(\varphi)$ à l'infini n'est pas nul (proposition 3.29).

Alors, comme dans la démonstration du théorème 3.4, on construit une fonction s dans Ω telle que

(a) s est harmonique dans $\Omega - \{x_0\}$ telle que $s = (\varphi_0 +$ une fonction harmonique) dans un voisinage de x_0, et

(b) $s = (\lambda\varphi +$ une fonction harmonique bornée) en dehors d'un compact; c'est-à-dire $s = (\lambda\varphi +$ une fonction harmonique) relativement à un voisinage de $\mathcal{A}$.

Sur la proportionnalité des potentiels de support $\mathcal{A}$.

Soit K un compact e.r. dans un espace Ω B.S. Soit $\mathcal{H}_K^+$ la classe de fonctions U positives $\not\equiv 0$ harmonique dans $(\Omega - K)$ tendant vers 0 sur ∂K. Donc, si $U \in \mathcal{H}_K^+$, U est un potentiel relativement au voisinage $(\overline{\Omega} - K)$ de $\mathcal{A}$ de support $\mathcal{A}$. Relativement à ce voisinage, *s'il y a proportionnalité des potentiels de support* $\mathcal{A}$, *alors tous les éléments de* $\mathcal{H}_K^+$ *sont proportionnels*.

Dans le cas particulier où $\Omega = \mathbf{R}^2$ et $K = \{|x| \leqslant r\}$, il est évident qu'il y a proportionnalité des potentiels de support $\mathfrak{A}$ relatif à $\mathbf{R}^2 - \{|x| \leqslant r\}$. Mais, dans le cas général, il n'y a pas de proportionnalité de tels potentiels, comme l'exemple suivant le démontre :

Soit $\Omega =]-\infty, \infty[$ avec des fonctions affines continues comme harmoniques localement, et soit $K = [a, b]$. Alors, il existe deux éléments non proportionnels $U_1, U_2 \in \mathcal{H}_K^+$ tels que pour chaque $U \in \mathcal{H}_K^+$ on a $U = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$; par conséquent, il n'y a pas de proportionnalité des potentiels de support $\mathfrak{A}$, relatif au voisinage $(\overline{\Omega} - K)$ de $\mathfrak{A}$.

Dans la suite, on introduit la notion de dimension harmonique à l'infini (suivant la méthode de M. Heins [19] pour une surface de Riemann) qui est étroitement liée avec la multiplicité des potentiels de support $\mathfrak{A}$.

8. Dimension harmonique à l'infini.

Dans un espace Ω B.S., si K est un compact e.r., soit $\mathcal{H}_K^+$ qui désigne la famille de fonctions harmoniques $\geqslant 0$ dans $(\Omega - K)$, tendant vers 0 sur ∂K.

THÉORÈME 3.34. — *Dans un espace* Ω B.S., *soient* K *et* L *deux compacts* e.r. *Alors, il existe des applications additives et positivement homogènes* $R : \mathcal{H}_L^+ \to \mathcal{H}_K^+$ *et* $S : \mathcal{H}_K^+ \to \mathcal{H}_L^+$ *telles que* $RS = I$ *et* $SR = I$.

Démonstration. — Nous pouvons supposer $K \subset \mathring{L}$; en effet, étant donné deux compacts K_1 et K_2 e.r., on peut toujours trouver un compact K_3 e.r. tel que $K_1 \cup K_2 \subset \mathring{K}_3$.

Soit ω un domaine régulier tel que $L \subset \omega$. Introduisons les opérateurs M, B_K, B_L et $T = B_L M$ comme dans le lemme 3.1. Alors, pour un $U \in \mathcal{H}_L^+$ il existe un élément unique $\varphi \in c(\partial\omega)$ tel que $(1 - T)\varphi = U$ sur $\partial\omega$.

Alors les fonctions $M\varphi$ et $B_L(M\varphi) + U$ sont égales dans $(\omega - L)$ (lemme 3.1) et donc la fonction V définie par $M\varphi$ dans $(\omega - K)$ et par $B_L(M\varphi) + U$ dans $(\Omega - L)$ est harmonique dans $(\Omega - K)$ et $V \in \mathcal{H}_K^+$. *Posons* $RU = V$.

Pour une fonction $V \in \mathcal{H}_K^+$, définissons

$$SV = V - B_L V \in \mathcal{H}_L^+.$$

Alors, pour un $U \in \mathcal{H}_L^+$, RU est la plus petite fonction de la classe $\mathcal{H}_K^+$ qui majore U sur $(\Omega - L)$. En effet, soit $H \in \mathcal{H}_K^+$ la plus petite fonction de $\mathcal{H}_K^+$ qui majore U sur $(\Omega - L)$. Alors, $RU \geqslant H$ dans $(\Omega - K)$ et donc, $(RU - H)$ est une fonction harmonique $\geqslant 0$ dans $(\Omega - K)$ telle que dans $(\Omega - L)$,

$$\begin{aligned} RU - H &= B_L(M\varphi) + U - H \quad \text{(par définition de } RU)\\ &\leqslant B_L(M\varphi) < \infty, \qquad \text{dans} \quad (\Omega - L). \end{aligned}$$

En conséquence, $(RU - H)$ est une fonction harmonique bornée dans $(\Omega - K)$, tendant vers 0 sur ∂K; et donc, $RU - H = 0$ (corollaire 1.15).

On en déduit que si $V \in \mathcal{H}_K^+$ alors $V \geqslant SV$ dans $(\Omega - L)$ et donc, $V \geqslant R(SV)$ dans $(\Omega - K)$.

Aussi, dans $(\Omega - L)$,

$$\begin{aligned} V - R(SV) &\leqslant V - SV\\ &= B_L V \quad \text{(par définition de } S)\\ &\leqslant \sup_{\partial L} V \qquad \text{dans} \quad (\Omega - L). \end{aligned}$$

Par conséquent, $V - R(SV)$ est bornée supérieurement dans $(\Omega - K)$ aussi. Ainsi, $0 \leqslant V - R(SV)$ est bornée dans $(\Omega - K)$ et tend vers 0 sur ∂K, parce que V et $R(SV) \to 0$ sur ∂K. Donc, $V = R(SV)$ dans $(\Omega - K)$, par le corollaire 1.15.

Considérons maintenant une fonction $U \in \mathcal{H}_L^+$. Alors, dans $(\Omega - L)$,

$$\begin{aligned} S(RU) &= RU - B_L(RU) \quad &\text{(par définition de } S)\\ &= U &\text{(par définition de } R) \end{aligned}$$

et donc, si $U \in \mathcal{H}_L^+$ on a $S(RU) = U$ dans $(\Omega - L)$.

Définition 3.35. — *On dit que* $U \in \mathcal{H}_K^+$ *est un élément minimal de* $\mathcal{H}_K^+$ *si pour tout* $V \in \mathcal{H}_K^+$ *tel que* $V \leqslant U$, *on a* $V = \lambda U$, $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$.

Proposition 3.36. — *Un élément* $U \in \mathcal{H}_L^+$ *est minimal de* $\mathcal{H}_L^+$ *si et seulement si* RU *est minimal de* $\mathcal{H}_K^+$.

En effet, soit U minimal de $\mathcal{H}_L^+$. Si $h \in \mathcal{H}_K^+$ tel que $h \leqslant \mathrm{RU}$ dans $(\Omega - \mathrm{K})$ alors $\mathrm{RU} - h \geqslant \mathrm{B_L}(\mathrm{RU} - h)$ dans $(\Omega - \mathrm{L})$; c'est-à-dire, $\mathrm{S}h \leqslant \mathrm{S(RU)} = \mathrm{U}$ dans $(\Omega - \mathrm{L})$, et donc, $\mathrm{S}h = \lambda\mathrm{U}$. Par conséquent, $h = \lambda(\mathrm{RU})$; ce qui implique que RU est minimal de $\mathcal{H}_K^+$.

Réciproquement, supposons $\mathrm{U} \in \mathcal{H}_L^+$ et RU un élément minimal de $\mathcal{H}_K^+$. Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{H}_L^+$ tel que $\mathrm{H} \leqslant \mathrm{U}$. Alors, $\mathrm{RH} = \lambda(\mathrm{RU})$ et donc, $\mathrm{H} = \lambda\mathrm{U}$; ce qui implique que U est un élément minimal de $\mathcal{H}_L^+$.

Cette proposition démontre que le nombre d'éléments minimaux de $\mathcal{H}_K^+$ ne dépend pas du choix du compact K e.r.

On dit qu'un élément minimal $\mathrm{U} \in \mathcal{H}_K^+$ *est normalisé si le* Flux_p (U) *à l'infini* $= 1$. Soit $\mathcal{F}$ la famille d'éléments minimaux normalisés et distincts de $\mathcal{H}_K^+$.

Définition 3.37. (M. Heins [13]). — *Dans un espace* Ω B.S., *pour un compact* K e.r., *soit* $\mathcal{F}$ *la famille d'éléments minimaux normalisés et distincts dans* $\mathcal{H}_K^+$. *Si* $\mathcal{F}$ *contient* n *éléments, on dit que la dimension harmonique à l'infini de* Ω *est* n. (*ce qui est indépendant de* K).

Proposition 3.38. — *Soit* Ω *un espace* B.S. *Si la dimension harmonique à l'infini de* Ω *est* > 1, *il existe des fonctions harmoniques non constantes dans* Ω.

En effet, soient h_1, h_2 deux éléments distincts de $\mathcal{F}$ correspondant à un compact K e.r.; c'est-à-dire, pour $i = 1, 2$, $h_i \in \mathcal{H}_K^+$ et $\mathrm{Flux}_p\,(h_i)$ à l'infini est 1. Donc, $h = h_1 - h_2$ est harmonique dans $(\Omega - \mathrm{K})$, tendant vers 0 sur $\partial\mathrm{K}$, et ayant le flux à l'infini nul; aussi, h n'est pas bornée (autrement h serait $\equiv 0$ d'après le corollaire 1.15).

D'après la définition de flux nul, donc, il existe une fonction U harmonique dans Ω telle que $|\mathrm{U} - h|$ est bornée en dehors d'un compact. Comme h est non bornée dans $(\Omega - \mathrm{K})$, U n'est pas constante dans Ω.

Remarque. — Si la dimension harmonique à l'infini de Ω est 1, il n'y a pas toujours de fonctions harmoniques non constantes dans Ω. Voici un exemple :

Soit $\Omega = [0, \infty[$. Si U est une fonction continue dans Ω, on dit que U est harmonique dans $]a, b[$ si U est linéaire dans $]a, b[$; on dit que U est harmonique dans $[0, b[$ si U est constante dans $[0, b[$.

Alors, Ω est un espace B.S. avec la dimension harmonique de Ω à l'infini 1; et les seules fonctions harmoniques dans Ω sont les constantes.

THÉORÈME 3.39. — *Soit* Ω *un espace* B.S. *et soit* K *un compact. Si la dimension harmonique de* Ω *à l'infini est* 1, *il existe un unique composant connexe non relativement compact de* $(\Omega - K)$ (*comme dans* $\mathbf{R}^2$) *et il est du type* B.S. *ou* B.P. *selon que* K *est localement-polaire ou non.*

Démonstration. — Soit L un compact e.r. tel que $K \subset \mathring{L}$. On va démontrer que $(\Omega - L)$ contient un seul composant connexe non relativement compact (qui est nécessairement un S-domaine correspondant à L); d'où le résultat.

Si possible, soient ω_1 et ω_2 deux composants connexes non relativement compacts de $(\Omega - L)$. Ω étant B.S., ω_1 et ω_2 sont nécessairement S-domaines (proposition 1.10). Alors, pour $i = 1, 2$, il existe une fonction harmonique $h_i > 0$ dans ω_i tendant vers 0 sur ∂L (théorème 1.17). Définissons U_i dans $(\Omega - K)$ égale à h_i dans ω_i prolongée par 0 ailleurs. $U_1, U_2 \in \mathcal{H}_L^+$ et elles sont non-proportionnelles; c'est une contradiction, parce que la dimension harmonique de Ω à l'infini est 1 implique que tous les éléments $(\neq 0)$ de $\mathcal{H}_L^+$ sont proportionnels.

Enfin, notons par ω cet unique composant connexe non relativement compact de $(\Omega - K)$. Si K est non localement polaire, $(\Omega - \omega)$ est non localement-polaire et donc ω est du type B.P. (théorème 3.27). Si K est localement-polaire, $(\Omega - K)$ est connexe et donc $\omega = (\Omega - K)$; dans ce cas, ω est nécessairement du type B.S.

THÉORÈME 3.40. — *Soit* Ω *un espace* B.S. *et soit* $x_0 \in \Omega$. *Il existe une fonction surharmonique* q *dans* Ω *de support* x_0, *et bornée supérieurement au voisinage de* $\mathcal{A}$. *Dans le cas où la dimension harmonique de* Ω *à l'infini est* 1, *s'il y a la proportionnalité (de potentiel à support ponctuel) locale, alors pour toute* s *surharmonique dans* Ω *de support* $\{x_0\}$ *et bornée* *supérieurement au voisinage de* $\mathcal{A}$, *on a* $s = (cq +$ une constante) *dans* Ω *où* c *est une constante* > 0.

Démonstration. — Soient K un compact e.r. et ω un domaine régulier tels que $x_0 \in \mathring{K} \subset K \subset \omega$. Soit $P > 0$ un potentiel dans ω de support $\{x_0\}$. Soit $H \geqslant 0$ une fonction harmonique non bornée dans $(\Omega - K)$ tendant vers 0 sur ∂K. (Pour l'existence d'une telle fonction H, voir la démonstration du théorème 1.18).

Existence.

D'après le théorème 3.7, il existe une fonction U dans Ω, harmonique dans $\Omega - \{x_0\}$, telle que $U = (\lambda P +$ une fonction harmonique, dans ω et $U = (H +$ une fonction harmonique bornée) dans un voisinage de $\mathcal{A}$.

H étant $\geqslant 0$, λ est < 0; autrement dans Ω, U serait une fonction surharmonique non constante et bornée inférieurement dans un voisinage de $\mathcal{A}$, ce qui n'est pas possible (proposition 1.2).

Ainsi, il existe une fonction $q\left(= \dfrac{U}{\lambda}\right)$ dans Ω satisfaisant les conditions du théorème.

Unicité.

Supposons maintenant que la dimension harmonique de Ω à l'infini est 1; aussi, l'axiome de proportionnalité locale.

Soit s une fonction surharmonique dans Ω, de support $\{x_0\}$ et bornée supérieurement dans un voisinage de $\mathcal{A}$.

$(Bs - s)$ est harmonique, bornée inférieurement et tend vers 0 sur ∂K. Par conséquent, d'après la proposition 1.14, $(Bs - s) \geqslant 0$ dans $(\Omega - K)$; et la dimension harmonique de Ω à l'infini étant 1, on a $Bs - s = \mu H$ dans $(\Omega - K)$ où $\mu > 0$.

La proportionnalité locale entraîne (comme dans le théorème 3.6) que $s = (\sigma P +$ une fonction harmonique) dans ω où $\sigma > 0$.

Ainsi, l'allure de s, comme pour q, est déterminée par P (dans un voisinage de x_0) et par H (dans un voisinage de $\mathcal{A}$).

Par conséquent, comme dans la démonstration du théorème fondamental (théorème 3.7), il s'ensuit que $s = (cq +$ une constante) dans Ω où c est nécessairement > 0.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Ahlfors et L. Sario, Riemann surfaces, Princeton, (1960).

[2] H. Bauer, Propriétés fines des fonctions hyperharmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble t. 15/1 (1965), 137-154.

[3] M. Brelot, Fonctions sousharmoniques et balayage, *Bull. Ac. royale de Belgique*, t. XXIV (1938), 421-436.

[4] M. Brelot, Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques. *Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. 61 (1944), 301-332.

[5] M. Brelot, Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point singulier. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 1 (1949), 121-156.

[6] M. Brelot, Éléments de la théorie classique du potentiel. 4e édition, C.D.U., Paris (1969).

[7] M. Brelot, Lectures on potential theory. T.I.F.R., Bombay, 1960 (re-issued 1967).

[8] M. Brelot, Axiomatique des fonctions harmoniques. Cours d'été 1965, Montréal, Les Presses de l'Université (1966).

[9] M. Brelot et G. Choquet, Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier*, t. 3 (1951), 199-263.

[10] C. Constantinescu et A. Cornea, On the axiomatic of harmonic functions I. *Ann. Inst. Fourier*, t. 13/2 (1963), 377-388.

[11] A. Cornea, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 264 A (1970), 190.

[12] M. Heins, The conformal mapping of simply-connected Riemann surfaces, *Ann. of Math.*, t. 50 (1949), 686-690.

[13] M. Heins, Riemann surfaces of infinite genus. *Ann. of Math.*, t. 55 (1952), 296-317.

[14] Mme R. M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, t. 12 (1962), 415-571.

[15] P. A. Loeb, An axiomatic treatment of pairs of elliptic differential équations, *Ann. Inst. Fourier*, t. 16/2 (1966), 167-208.

[16] B. Rodin et L. Sario, Principal functions. Van Nostrand, 1968.

[17] B. Walsh, Flux in axiomatic Potential Theory I. Inventiones Math. t. 8/3 (1969).

Manuscrit reçu le 1er novembre 1971,
accepté par M. Brelot.

Victor Anandam,
Department of Mathematics,
Loyola college,
Madras-34 (India).