ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NGUYEN THANH VAN

Bases de Schauder dans certains espaces de fonctions holomorphes

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 2 (1972), p. 169-253

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_169_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 2 (1972), 169-253.

BASES DE SCHAUDER DANS CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

par NGUYEN THANH VAN

Introduction.

La théorie des bases (de Schauder) dans les espaces de fonctions holomorphes joue un rôle important dans la théorie générale des bases (dans les e.v.t.), beaucoup de résultats de cette dernière ont été établis auparavant pour certains espaces de fonctions holomorphes, le théorème de Dragilev-Dynin-Mityagin qui affirme que toute base d'un espace de Fréchet nucléaire est absolue est un exemple important parmi bien d'autres. Cependant la théorie des bases dans les espaces de fonctions holomorphes ne se réduit pas à ce rôle de modèle particulier, elle a son propre intérêt et ses résultats les plus fins ne semblent pas susceptibles d'être généralisés sans grande difficulté aux e.v.t. généraux; d'autre part des bases assez « bonnes » peuvent être utiles pour l'étude de certains problèmes d'approximation des fonctions holomorphes. C'est à cet aspect qu'est consacré le présent travail.

Chapitre 1.

Avant d'aborder les bases de Schauder, nous croyons utile de donner quelques propriétés générales des systèmes biorthogonaux dans l'espace des fonctions holomorphes sur un ensemble fortement linéellement convexe au sens de M. Martineau.

Ces propriétés résultent de la proposition suivante : E étant un ensemble f.l.c. $\subset \mathbf{C}^n$, $F \subset \mathbf{C}^m$, $T \in \mathcal{L}(H(E), H(F))$, $\{\varphi_K\}$ une suite $\subset H_0\left(\overset{*}{\complement} E\right)$, $\{F_K\}$ une suite $\subset H(F)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

— $\forall f \in H(E)$, $\sum_0^\infty \langle f, \varphi_K \rangle F_K$ converge (resp. converge absolument) dans $H(F)$ et a pour somme $T(f)$.

— $\sum_0^\infty \varphi_K . F_K$ converge (resp. converge absolument) dans $H\left(\overset{*}{\complement} E \times F\right)$ vers le noyau de T.

Chapitre 2.

Soit E une partie de $\mathbf{C}$. Une base $\{F_n\}$ de E est dite simple de 1re espèce lorsque chaque F_n est un polynôme vérifiant $F_n^{(n)}(0) = n!$ et $F_n^{(n+K)}(0) = 0 \ \forall K \geqslant 1$, elle est dite simple de seconde espèce lorsqu'il existe un point $a \in E$ tel qu'on ait pour tout n :

$$F_n^{(n)}(a) = n!, \quad F_n(a) = F_n'(a) = \cdots = F_n^{(n-1)}(a) = 0.$$

Ces bases possèdent de remarquables propriétés, en voici une relative aux bases simples de 1re espèce : si $\{F_n\}$ est une base de $H(\omega)$ où ω est un domaine de Carathéordory, alors $\{F_n\}$ est une base commune des espaces $H(\mathcal{K}_\rho\}$ avec

$$\mathcal{K}_\rho = \left\{ z \in \complement \varpi : G\left(z, \complement \varpi, \infty\right) < \log \rho \right\} \cup \varpi, \quad \rho > 1.$$

Nous appliquons ces propriétés à l'étude asymptotique de certaines suites de valeurs extrémales de la théorie d'approximation quadratique.

Enfin nous généralisons la notion de base simple aux espaces de fonctions holomorphes de plusieurs variables, nous déterminons toutes les bases simples de l'espace des fonctions holomorphes sur un polydisque et calculons l'ordre et le type d'une fonction entière de plusieurs variables f en fonction des coefficients λ_K du développement $\sum_{K \in \mathbf{N}^n} \lambda_K F_K$ de f suivant $\{F_K\}$, en supposant que $\{F_K\}$ soit une base d'un certain espace de fonctions entières.

Chapitre 3.

Nous étudions le problème suivant : soit Ω un domaine de H et soit χ une partie de Ω telle que $\Omega\setminus\chi$ soit connexe, existe-t-il une base commune pour les epsaces $H(\Omega)$ et $H(\chi)$.

La réponse est positive dans le cas où $\Omega\setminus\chi$ est un domaine régulier pour le problème de Dirichlet, χ étant supposé compact. Plus précisément nous montrons que si U est une mesure finie positive sur χ absolument continue par rapport à la mesure harmonique de χ (ou plus généralement U est une mesure admissible au sens de Widom) et si $L^2_p(\chi, U)$ désigne le sous-espace fermé de $L^2(\chi, U)$ engendré par les polynômes, alors il existe une base orthonormale $\{e_n\}$ de $L^2_p(\chi, U)$ qui est une base commune des espaces $H(\Omega)$ et $H(\chi)$ et qui en plus possède la propriété suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\operatorname*{Max}_{z\in\Gamma_\alpha}|e_n(z)|\Big]^{1/n} = R^\alpha \quad \forall\alpha\in\,]0,1[$$

où $\Gamma_\alpha = \{z\in\Omega\setminus\chi : \ h(z)=\alpha\}$, $R = \exp\dfrac{1}{\varphi}$, φ = Flux de $h(z)$ à travers tout contour séparant χ et $\complement\,\Omega$, $h(z)$ désigne la mesure harmonique de Fr. Ω par rapport à $\Omega\setminus\chi$.

Nous précisons notre résultat dans quelques cas particuliers. Enfin nous présentons un cas où la réponse est négative.

Chapitre 4.

Nous donnons quelques applications de la base $\{e_K\}$.

Soit $\{f_n\}$ une base commune des espaces $H(\Omega)$ et $H(\chi)$, nous déterminons tous les ouverts E de Ω non contenus dans χ, et tous les compacts E de Ω rencontrant $(\Omega\setminus\chi)\cup \mathrm{Fr.}\,\chi$ avec $\Omega\setminus E$ connexe et régulier pour le problème de Dirichlet, tels que $\{f_n\}$ soit une base de l'espace $H(E)$. Une généralisation d'un théorème d'interpolation dû à Zerner, Lions et Peetre est donnée ; et enfin nous établissons la formule asymptotique $E_\varepsilon(\mathcal{B}) \simeq \dfrac{(\log\varepsilon)^2}{\log R}$ où $E_\varepsilon(\mathcal{B})$ est l'ε-entropie de l'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions holomorphes et bornées en module par 1 dans $H(\Omega)$, calculée dans la métrique uniforme de $\mathcal{C}(\chi)$.

Chapitre 5.

Ce chapitre est de caractère bien classique, il s'agit du problème d'interpolation d'Abel-Gontcharoff. Nous l'étudions par la méthode des bases voisines au sens de Paley et Wiener; cette méthode a déjà été utilisée en 1940 par Boas, mais nous trouvons qu'une nouvelle adaptation peut donner des résultats beaucoup plus précis, d'autre part l'économie de calculs que présente cette méthode nous permet de donner notre résultat dans le cadre de plusieurs variables aussi aisément que dans le cadre d'une variable. Nous considérons aussi des problèmes connexes et montrons en particulier que, pour tout $\rho > 0$, si f est une fonction entière de croissance $< \left(\text{ordre } \rho, \text{ type } \dfrac{W\rho}{\rho}\right)$ ($W =$ constante de Whittaker) et si chaque $f^{(n)}$ n'est pas univalente dans le disque

$$\{z : |z| \leqslant n^{1-1/\rho}\}$$

sauf pour un nombre fini d'entiers n, alors f est un polynôme.

Les résultats de ce travail ont été annoncés très partiellement dans trois notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [19].

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. Hervé dont les conseils et les encouragements m'ont été précieux. De multiples améliorations de ce travail lui sont dues.

Ma gratitude va également à M. Combes qui m'a tant aidé pendant mes premières années de recherche.

Je suis heureux de remercier M. Martineau pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à mon travail, et pour le soin avec lequel il a lu cette thèse, en tant que Délégué du Département de Mathématiques.

Je désire remercier également M. Lazard pour le très intéressant sujet de deuxième thèse qu'il a bien voulu me proposer.

CHAPITRE 1

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DES FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UN ENSEMBLE FORTEMENT LINÉELLEMENT CONVEXE

Préliminaires (Rappels sur les ensembles fortement linéellement convexes).

$\langle z, u\rangle = \sum\limits_n z_k u_k$ désigne la forme bilinéaire usuelle mettant en dualité $\mathbf{C}^n$ avec lui-même, $P(\mathbf{C}^n)$ l'espace projectif obtenu en adjoignant à $\mathbf{C}^n$ ses points infinis. A tout hyperplan ζ de $P(\mathbf{C}^n)$, $\zeta = \{(z_0, z_1) : z_0\zeta_0 + \langle z_1, \zeta_1\rangle = 0\}$ on associe le point de coordonnées projectives (ζ_0, ζ_1) avec $\zeta_0 \in \mathbf{C}$ et $\zeta_1 \in \mathbf{C}^n$.

Si A est une partie de $P(\mathbf{C}^n)$ nous notons par $\overset{*}{\complement} A$ l'ensemble des hyperplans qui ne rencontrent pas A. L'ensemble $\overset{*}{\complement} A$ étant identifié à une partie de $P(\mathbf{C}^n)$ nous pouvons prendre $\overset{*}{\complement}\,\overset{*}{\complement} A$.

Définition (Martineau [16*a*]). — *A ouvert (ou compact) dans $\mathbf{C}^n$ est linéellement convexe si et seulement si* $\overset{*}{\complement}\,\overset{*}{\complement} A = A$.

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ ouvert. Dire qu'un hyperplan ζ de coordonnées projectives (ζ_0, ζ_1) $({}_0\zeta \in \mathbf{C},\ \zeta_1 \in \mathbf{C}^n)$ appartient à $\overset{*}{\complement}\,\Omega$ revient à dire que la fonction $\left(z_1 \to \dfrac{\zeta_0}{\zeta_0 + \langle z_1, \zeta_1\rangle}\right)$ qui ne dépend que de ζ, est holomorphe sur Ω. Donc si

$T \in H'_{C^n}(\Omega)$ ($H'_{C^n}(\Omega)$ est le dual vectoriel topologique de l'espace $H_{C^n}(\Omega)$ des fonctions de n variables complexes holomorphes sur Ω muni de sa topologie $\mathcal{L} - \mathcal{F}$ usuelle, quand il n'y a pas de confusion on écrit $H(\Omega)$ au lieu de $H_{C^n}(\Omega)$), $T\left(z_1 \to \dfrac{\zeta_0}{\zeta_0 + \langle z_1, \zeta_1\rangle}\right) = \varphi_T(\zeta)$ est définie. On voit aisément que $\varphi_T(\zeta)$ est une fonction holomorphe au voisinage de $\overset{*}{\complement}\,\Omega$ et nulle à l'infini, c'est-à-dire un élément de l'espace $H_{P(C^n),0}\left(\overset{*}{\complement}\,\Omega\right) = \left\{f \in H_{P(C^n)}\left(\overset{*}{\complement}\,\Omega\right) : f(\infty) = 0\right\}$.

Définition [16*a*]. — *Ω est fortement linéellement convexe si et seulement si Ω est linéellement convexe et l'application $T \to \varphi_T$ est une bijection linéaire de $H'_{C^n}(\Omega)$ sur $H_{P(C^n),0}\left(\overset{*}{\complement}\,\Omega\right)$.*

Par le théorème du graphe fermé, $T \to \varphi_T$ est alors un isomorphisme vectoriel topologique de $H'_{C^n}(\Omega)$ muni de sa topologie de dual fort de $H_{C^n}(\Omega)$, sur $H_{P(C^n),0}\left(\overset{*}{\complement}\,\Omega\right)$.

Dans la suite on suppose toujours que Ω soit un ensemble ouvert (ou compact) fortement linéellement convexe de C^n. On met en dualité $H_{C^n}(\Omega)$ et $H_{P(C^n),0}\left(\overset{*}{\complement}\,\Omega\right)$ par la forme bilinéaire : $\langle f, \varphi\rangle = T_\varphi(f)$, où T_φ est l'élément de $H'_{C^n}(\Omega)$ dont l'image par l'application $T \to \varphi_T$ est φ.

Pour simplifier on pose : $\chi = \overset{*}{\complement}\,\Omega$.

1. Représentation d'une application linéaire continue.

Soit E un sous-ensemble de C^m. On désigne par $H_{C^m \times P(C^n),0}(E \times \chi)$ l'espace des fonctions des variables $(z, \zeta) \in C^m \times P(C^n)$ holomorphes au voisinage de $E \times \chi$ et nulles aux points (z, ∞). Cet espace est muni de sa topologie inductive $\mathcal{L}$-$\mathcal{F}$ usuelle.

Soit $\mathcal{K}(z, \zeta) \in H_{C^m \times P(C^n),0}(E \times \chi)$, on pose pour toute $f \in H_{C^n}(\Omega)$:

$$Tf(z) = \langle f, \quad \zeta \to \mathcal{K}(z, \zeta)\rangle.$$

Tf est un élément de $H_{C^m}(E)$ et il est facile de voir que T est une application linéaire continue de $H_{C^n}(\Omega)$ dans $H_{C^m}(E)$. On dit que la fonction $\mathcal{K}(z, \zeta)$ représente l'application T. On constate aisément que deux éléments de $H_{C^m \times P(C^n), 0}(E \times \chi)$ qui représentent une même application linéaire continue de $H_{C^n}(\Omega)$ dans $H_{C^m}(E)$ sont identiques.

Soit $\{F_k, \varphi_k\}$ une suite dans $H_{C^m}(E) \times H_{P(C^n), 0}(\chi)$. On dit que $\{F_k, \varphi_k\}$ représente une application linéaire continue T de $H_{C^m}(\Omega)$ dans $H_{C^m}(E)$ lorsque pour toute $f \in H_{C^n}(\Omega)$ la série $\sum_0^\infty \langle f, \varphi_k \rangle F_k$ converge dans $H_{C^m}(E)$ et y a pour somme la fonction Tf. Lorsque pour toute $f \in H_{C^n}(\Omega)$, $\sum_0^\infty \langle f, \varphi_k \rangle F_k$ converge absolument dans $H_{C^m}(E)$ et y a pour somme Tf alors on dit que $\{F_k, \varphi_k\}$ représente absolument l'application T.

THÉORÈME 1. — *Si* $\{F_k, \varphi_k\}$ *représente* (*resp. représente absolument*) T *alors la série* $\sum_0^\infty F_k(z)\varphi_k(\zeta)$ *converge* (*resp. converge absolument*) *dans* $H_{C^m \times P(C^n), 0}(E \times \chi)$ *et y a pour somme la fonction* $\mathcal{K}(z, \zeta)$ *qui représente* T.

Inversement si T *est représentée par* $\mathcal{K}(z, \zeta)$ *et si la série* $\sum_0^\infty F_k(z)\varphi_k(\zeta)$ *converge* (*resp. converge absolument*) *dans* $H_{C^m \times P(C^n), 0}(E \times \chi)$ *et y a pour somme la fonction* $\mathcal{K}(z, \zeta)$ *alors* $\{F_k, \varphi_k\}$ *représente* (*resp. représente absolument*) T.

Démonstration. — On se borne au cas où Ω est ouvert (raisonnement analogue pour le cas Ω compact).

a) *Supposons que* $\{F_k, \varphi_k\}$ *représente* T : Montrons que la suite $\left\{\mathcal{K}_p(z, \zeta) = \sum_0^p F_k(z)\varphi_k(\zeta)\right\}$ est bornée dans $H_{C^m \times P(C^n), 0}(E \times \chi)$. On raisonne par l'absurde. Supposons le contraire, alors il existe

— une suite $\{z_k\}$ dont les points d'accumulation appartiennent à E [1];

[1] Cela veut dire que pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de E, $z_k \in \mathcal{V}$ pour K assez grand.

— une suite $\{U_p\}$ de voisinages fermés de χ avec $U_p \supset U_{p+1}$ et $\cap U_p = \chi$;

— une suite croissante d'entiers $\{K_p\}$, $K_p \nearrow \infty$ telles que l'on ait pour tout p :

$$(1) \qquad \operatorname*{Max}_{\zeta \in U_p} \left| \sum_{K_p}^{K_{p+1}} F_k(z_p)\varphi_k(\zeta) \right| \geqslant 1.$$

D'autre part, pour toute $f \in H_{\mathbf{C}^n}(\Omega)$ on a, par le fait que $\{F_k, \varphi_k\}$ représente T :

$$\lim_{p \to \infty} \langle f, \quad R_p(\zeta) \rangle = 0$$

où l'on pose :

$$R_p(\zeta) = \sum_{K_p}^{K_{p+1}} F_k(z_p)\varphi_k(\zeta).$$

$\{R_p\}$ converge faiblement, donc fortement, vers 0 dans $H_{P(\mathbf{C}^n),0}(\chi)$. On en déduit que $\{R_p\}$ converge uniformément vers 0 sur un certain U_{p_0} : c'est en contradiction avec (1).

Donc $\{\mathcal{K}_p(z, \zeta)\}$ est bornée dans $H_{\mathbf{C}^m \times P(\mathbf{C}^n),0}(E \times \chi)$; montrons maintenant que $\{\mathcal{K}_p\}$ converge dans cet espace, puisque l'espace en question est de Montel il nous suffit de montrer que toute sous-suite convergente $\{\mathcal{K}_{K_p}\}$ a la même limite :

Soit $\mathcal{K}_{K_p} \to \mathcal{K}$ dans $H_{\mathbf{C}^m \times P(\mathbf{C}^n),0}(E \times \chi)$, alors pour tout $z \in U$, où U est un certain voisinage de E (dans $\mathbf{C}^m$), et toute $f \in H_{\mathbf{C}^n}(\Omega)$ on a :

$$\langle f, \quad \zeta \to \mathcal{K}(z, \zeta) \rangle = \lim_{p \to \infty} \langle f, \zeta \to \mathcal{K}_{K_p}(z, \zeta) \rangle.$$

Puisque $\{F_k, \varphi_k\}$ représente T on a pour toute $f \in H_{\mathbf{C}^n}(\Omega)$:

$$Tf(z) = \lim_{p \to \infty} \sum_{0}^{K_p} \langle f, \varphi_k \rangle F_k(z) = \lim_{p \to \infty} \langle f; \zeta \to \mathcal{K}_{K_p}(z, \zeta) \rangle$$

pour tout $z \in U_f$, où U_f est un voisinage de E dépendant de f. Donc pour $z \in U \cap U_f$ on a :

$$Tf(z) = \langle f, \zeta \to \mathcal{K}(z, \zeta) \rangle$$

Donc $\mathcal{K}(z, \zeta)$ représente T, c'est l'unique élément de $H_{\mathbf{C}^m \times P(\mathbf{C}^n),0}(E \times \chi)$ qui représente T. Donc toutes les sous-suites convergentes $\{\mathcal{K}_{K_p}\}$ convergent vers la même fonction $\mathcal{K}$. La suite $\{\mathcal{K}_p\}$ converge donc vers $\mathcal{K}$. C.Q.F.D.

b) Supposons que $\{F_k, \varphi_k\}$ *représente absolument* T : On constate aisément que pour toute permutation Π de **N** la suite $\{F_{\Pi(k)}, \varphi_{\Pi(k)}\}$ représente T. Donc $\sum_0^\infty F_{\Pi(k)}(z)\varphi_{\Pi(k)}(\zeta)$ converge vers $\mathcal{K}(z, \zeta)$ dans $H_{C^m \times P(C^n), 0}(E \times \chi)$.

La série $\sum_0^\infty F_k(z).\varphi_k(\zeta)$ est commutativement convergente, donc absolument convergente dans $H_{C^m + P(C^n), 0}(E \times \chi)$, car cet espace est nucléaire.

c) Supposons que T est représentée par $\mathcal{K}(z, \zeta)$ et que $\sum_0^\infty F_k(z).\varphi_k(\zeta)$ converge et a pour somme $\mathcal{K}(z, \zeta)$ dans $H_{C^m \times P(C^n), 0}(E \times \chi)$. Pour z appartenant à un certain voisinage U de E on a :

$$Tf(z) = \langle f, \zeta \to \mathcal{K}(z, \zeta)\rangle = \lim_{p \to \infty} \langle f, \zeta \to \mathcal{K}_p(z, \zeta)\rangle$$
$$Tf(z) = \sum_0^\infty \langle f, \varphi_k\rangle F_k(z).$$

Montrons que la série $\sum_0^\infty \langle f, \varphi_k\rangle F_k(z)$ converge uniformément sur tout compact d'un voisinage ouvert de E. Par suite de la convergence de $\sum_0^\infty F_k\varphi_k$ dans $H_{C^m \times P(C^n), 0}(E \times \chi)$ il existe un voisinage ouvert ω de E tel que : pour tout compact $K \subset \omega$, il existe un voisinage ouvert U de χ tel que $\sum_0^\infty F_k(z)\varphi_k(\zeta)$ converge uniformément sur $K \times U$. Cela entraîne :

$$\operatorname*{Sup}_{(z, \zeta) \in K \times U} \left| \sum_p^q F_k(z).\varphi_k(\zeta) \right| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad p \text{ et } q \to \infty.$$

Sur l'espace $H_{P(C^n)}(U)$ la fonctionnelle $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(\varphi) = \langle f, \varphi\rangle$$

peut être représentée par une mesure $\mathcal{M}$ portée par un compact L de U :

$$\tilde{f}(\varphi) = \int f\, d\mathcal{M}.$$

On a :

$$\sum_{p}^{q} \langle f, \varphi_k \rangle \, F_k(z) = \left\langle f, \zeta \to \sum_{p}^{q} F_k(z) \cdot \varphi_k(\zeta) \right\rangle$$
$$= \int_{L} \left(\sum_{p}^{q} F_k(z) \cdot \varphi_k(\zeta) \right) d\mathcal{M}_\zeta$$
$$\left| \sum_{p}^{q} \langle f, \varphi_k \rangle \, F_k(z) \right| \leqslant \|\mathcal{M}\| \operatorname*{Sup}_{\zeta \in L} \left| \sum_{p}^{q} F_k(z) \cdot \varphi_k(\zeta) \right|$$

Donc :

$$\operatorname*{Sup}_{z \in K} \left| \sum_{p}^{q} \langle f, \varphi_k \rangle \, F_k(z) \right| \leqslant \|\mathcal{M}\| \sup_{(z, \zeta) \in K \times L} \left| \sum_{p}^{q} F_k(z) \cdot \varphi_k(\zeta) \right|$$

la dernière quantité tend vers 0 lorsque p et $q \to \infty$.

La suite $\left\{ \sum_{0}^{p} \langle f, \varphi_k \rangle \, F_k(z) \right\}_{p \in N}$ est donc une suite de Cauchy dans $H_{C^m}(\omega)$. Elle est donc convergente dans cet espace, on en déduit que $\{F_k, \varphi_k\}$ représente l'application T.

d) Si dans *c*) on suppose en plus que $\sum_{0}^{\infty} F_k(z) \cdot \varphi_k(\zeta)$ converge absolument dans $H_{C^m \times P(C^n), 0}(E \times \chi)$, alors il est facile de voir que pour toute $f \in H_{C^n}(\Omega)$ la série $\sum_{0}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \, F_k$ est commutativement convergente, donc absolument convergente, dans $H_{C^m}(E)$; donc $\{F_k, \varphi_k\}$ représente absolument T.

2. Suite biorthogonale.

1) Une suite (ou un système) $\{F_k, \varphi_k\}$ dans

$$H_{C^n}(\Omega) \times H_{P(C^n), 0}(\chi)$$

est dite biorthogonale lorsque :

$$\langle F_i, \varphi_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

On pose :

$$\omega(z, \zeta) = \frac{\zeta_0}{\zeta_0 + \langle z, \zeta_1 \rangle}$$

$\zeta_0 \in \mathbf{C}$ et $\zeta_1 \in \mathbf{C}^n$ sont les coordonnées projectives de ζ.

Soit E une partie de Ω. On désigne par I_E l'application canonique de $H_{C^n}(\Omega)$ dans $H_{C^n}(E)$, il est évident que $\omega(z, \zeta)$ représente I_E.

THÉORÈME 2. — *Si* $\{F_k, \varphi_k\}$ *est biorthogonale et si* $\{F_k\}$ *est totale dans* $H_{C^n}(\Omega)$, *alors* $\{F_k, \varphi_k\}$ *représente* I_E *si et seulement si la suite* $\left\{\sum_0^p F_k(z).\varphi_k(\zeta)\right\}_{p\in N}$ *est bornée dans* $H_{C^n\times P(C^n),0}(E \times \chi)$.

Démonstration. — « Seulement si » est évident d'après le théorème 1. Supposons que $\left\{\mathcal{K}_p(z, \zeta) = \sum_0^p F_k(z).\varphi_k(\zeta)\right\}$ soit bornée dans $H_{C^n\times P(C^n),0}(E \times \chi)$. Soit $\{\mathcal{K}_{p_k}\}$ une suite extraite convergente et soit $\mathcal{K}(z, \zeta)$ sa limite, $\mathcal{K}(z, \zeta)$ représente une application linéaire continue T de $H_{C^n}(\Omega)$ dans $H_{C^n}(E)$ et on a, par suite de la biorthogonalité de $\{F_p, \varphi_p\}$:

$$T(F_p) = I_E(F_p) = F_p \quad \text{pour tout } p,$$

T est donc identique à I_E, car $\{F_p\}$ est totale dans $H_{C^n}(\Omega)$. Il en résulte que $\mathcal{K}(z, \zeta) = \omega(z, \zeta)$. Donc toutes les suites extraites convergentes $\{\mathcal{K}_{p_k}\}$ ont la même limite $\omega(z, \zeta)$. Puisque $H_{C^n\times P(C^n),0}(E \times \chi)$ est un espace de Montel, ce fait implique la convergence de $\sum_0^\infty F_k(z).\varphi_k(\zeta)$.

Remarque 0. — Avec les mêmes hypothèses, on peut montrer que $\{F_p, \varphi_p\}$ représente absolument I_E si et seulement si la famille $\left\{\sum_{k\in\sigma} F_k(z).\varphi_k(\zeta)\right\}_{\sigma\in\mathcal{F}}$ ($\mathcal{F}$ désigne la famille des parties finies σ de **N**) est bornée dans $H_{C^n\times P(C^n),0}(E \times \chi)$

2) Soit $\{F_k, \varphi_k\}$ une suite biorthogonale dans

$$H_{C^n}(\Omega) \times H_{P(C^n),0}(\chi),$$

$\{F_k\}$ est dite une base (au sens de Schauder) de $H_{C^n}(\Omega)$ si et seulement si $\{F_k, \varphi_k\}$ représente l'application identique de $H_{C^n}(\Omega)$ sur lui-même.

THÉORÈME 3. — $\{F_k\}$ *est une base de* $H_{C^n}(\Omega)$ *si* $\{F_k\}$ *est totale dans* $H_{C^n}(\Omega)$ *et* $\{F_k(z).\varphi_k(\zeta)\}_{k\in N}$ *est bornée dans* $H_{C^n\times P(C^n),0}(\Omega \times \chi)$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du théorème suivant dû à Dynin et Mitjagin (voir [17]).

THÉORÈME — *Si* X *est un espace nucléaire et si* $\{x_k, x'_k\}$ *est une suite biorthogonale dans* $X \times X'$ *satisfaisant les conditions :*

— $\{x_k\}$ *est totale dans* X.
— *Pour toute seminorme* p *de* X *il existe une seminorme* $q \geqslant p$ *telle que :*

$$\operatorname*{Sup}_k q(x'_k)p(x_k) = K_{pq} < \infty$$

avec

$$q(x'_k) = \operatorname{Sup} \{|x'_k(x)| : q(x) \leqslant 1, x \in X\}.$$

Alors $\{x_k\}$ *est une base absolue de* X.

3) On suppose que $\{F_k\}$ soit une base de $H_{\mathbf{C}^n}(\Omega)$. Soit T une application de $\{F_k\}$ dans $H_{\mathbf{C}^m}(E)$, E étant une partie de $\mathbf{C}^m$: $TF_k = G_k$.

THÉORÈME 4. — T *peut être prolongée en une application linéaire continue de* $H_{\mathbf{C}^n}(\Omega)$ *dans* $H_{\mathbf{C}^m}(E)$ *si et seulement si*

$$\left\{\sum_0^p G_k(z) \cdot \varphi_k(\zeta)\right\}_{p \in \mathbf{N}} \quad \textit{est bornée dans} \quad H_{\mathbf{C}^m \times P(\mathbf{C}^n), 0}(E \times \chi).$$

Démonstration. — Si T peut être prolongée en une application linéaire continue de $H_{\mathbf{C}^n}(\Omega)$ dans $H_{\mathbf{C}^m}(E)$ que l'on note encore par T, alors pour toute $f \in H_{\mathbf{C}^n}(\Omega)$ on a :

$$Tf = \sum_0^\infty \langle f, \varphi_k \rangle \, TF_k = \sum_0^\infty \langle f, \varphi_k \rangle \, G_k$$

la série étant convergente dans $H_{\mathbf{C}^m}(E)$. Donc $\{G_k, \varphi_k\}$ représente T et, d'après le théorème 1, $\left\{\sum_0^p G_k(z) \cdot \varphi_k(\zeta)\right\}$ est bornée dans $H_{\mathbf{C}^m \times P(\mathbf{C}^n), 0}(E \times \chi)$.

Réciproquement supposons que $\left\{\sum_0^p G_k(z) \cdot \varphi_k(\zeta)\right\}$ soit bornée dans $H_{\mathbf{C}^m \times P(\mathbf{C}^n), 0}(E \times \chi)$. Posons

$$\mathcal{K}_p(z, \zeta) = \sum_0^p G_k(z) \cdot \varphi_k(\zeta).$$

Soient $\{\mathcal{K}_{p_k}\}$ et $\{\mathcal{K}_{q_k}\}$ deux suites extraites convergentes quelconques et soient $\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}''$ leurs limites respectives. $\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}''$ représentent deux applications linéaires continues T′ et T″ de $H_{\mathbf{C}^n}(\Omega)$ dans $H_{\mathbf{C}^m}(E)$. On a : $T'F_k = T''F_k = G_k$

pour tout k. Donc $T' = T''$ car $\{F_k\}$ est une base de $H_{C^n}(\Omega)$. Il en résulte que $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'' = \mathcal{K}$. Donc la série $\sum_0^\infty G_k . \varphi_k$ converge (dans $H_{C^m \times P(C^n), 0}(E \times \chi)$) et a pour somme la fonction $\mathcal{K}$. Il est évident que l'application représentée par $\mathcal{K}$ est un prolongement de T.

Remarque 1. — D'après le théorème de Dynin et Mitjagin cité, toute base de $H_{C^n}(\Omega)$ est absolue.

Remarque 2. — Dans le théorème 4 on peut renforcer la condition nécessaire :

Si T est une application linéaire continue de $H_{C^n}(\Omega)$ dans $H_{C^m}(E)$, alors la série $\sum_0^\infty G_k(z) . \varphi_k(\zeta)$ converge absolument dans $H_{C^m \times P(C^n), 0}(E \times \chi)$ et sa somme $\mathcal{K}(z, \zeta)$ représente T.

Démonstration. — Puisque la base $\{F_k\}$ est absolue, pour toute $f \in H_{C^n}(\Omega)$ la série $\sum_0^\infty \langle f, \varphi_k \rangle G_k$ est commutativement convergente, donc absolument convergente, dans $H_{C^m}(E)$. Donc la suite $\{G_k, \varphi_k\}$ représente absolument l'application T. Il ne reste qu'à appliquer le théorème 1 pour avoir la conclusion.

Remarque 3. — Puisque toute base de $H_{C^n}(\Omega)$ est absolue, il résulte du théorème 1 l'assertion suivante qui sera utile dans la suite :

Si Ω est ouvert et si $\{F_k\}$ est une base de $H_{C^n}(\Omega)$, alors pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe un compact $L \subset \Omega$ et une constante finie $\mathcal{M}$ tels que pour toute série $\sum_0^\infty \lambda_k F_k$ convergente dans $H_{C^n}(\Omega)$ on a :

$$\sum_0^\infty |\lambda_k| \left(\operatorname{Max}_{z \in K} |F_k(z)| \right) \leqslant \mathcal{M} . \operatorname{Max}_{z \in L} \left| \sum_0^\infty \lambda_k F_k(z) \right| .$$

Cette assertion peut être considérée comme un cas particulier d'un théorème de Newns [18].

CHAPITRE 2

BASES SIMPLES

Une suite $\{F_n\}$ de fonctions holomorphes sur une partie X de **C** est dite :

— simple de 1^re^ espèce lorsque chaque F_n est un polynôme vérifiant :

$$F_n^{(n)}(0) = n!, \quad F_n^{(n+k)}(0) = 0, \qquad \forall k \geqslant 1.$$

— simple de seconde espèce en un point $a \in X$ lorsque :

$$F_n(a) = F_n'(a) = \cdots = F_n^{(n-1)}(a) = 0, \quad F_n^{(n)}(a) = n!$$

Ce chapitre est consacré à l'étude des bases (de Schauder) simples. De telles bases ont été étudiées par Whittaker [31], Evgrafov [9] et Falgas [11].

Nos résultats sont essentiellement d'une variable complexe, quelques-uns sont donnés sous forme de plusieurs variables complexes, mais dans le cadre trivial des fonctions holomorphes sur un polydisque (le cas des domaines de Reinhart s'y ramène).

1. Bases simples de certains espaces de fonctions d'une variable complexe.

Remarque préliminaire. — *a*) Pour toute partie X de $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, H(X) désigne l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de X muni de sa topologie limite inductive. Soit E une partie de **C**, il est bien connu qu'on peut mettre en dualité vectorielle topologique les espaces H(E) et $H_0(E)$ par le produit scalaire :

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\gamma f(z)\varphi(z)\,dz, \quad \left[f \in H(E), \quad \varphi \in H_0\left(\complement E\right)\right]$$

γ étant un cycle convenablement choisi dépendant de f et φ (voir par exemple [16 *b*]).

b) Soit $\{F_n; \varphi_n\}$ un système biorthogonal dans $H(E) \times H_0(\complement E)$:

$$\langle F_p, \varphi_q \rangle = \delta_{p,q}.$$

— Supposons que E soit un compact à complémentaire connexe et que $\{F_n\}$ soit une suite simple de 1^{re} espèce (respectivement de 2^e espèce en un point $a \in E$). Pour tout nombre R tel que le disque $D(a, R) = \{z : |z - a| < R\}$ contienne E on a (²) :

$$\int_{C(a,R)} F_p(z)\varphi_q(z)\,dz = \langle F_p, \varphi_q \rangle = \delta_{p,q} \quad (C(a, R) = \{z : |z - a| = R\}).$$

On en déduit par un petit calcul :

$$\varphi_n^{(n+1)}(\infty) = \frac{(n+1)!}{2i\pi}, \qquad \varphi_n(\infty) = \varphi_n'(\infty) = \cdots = \varphi_n^{(n)}(\infty) = 0$$

(respectivement $\varphi_n^{(n+k)}(\infty) = 0, \ \forall k \geqslant 2$).

— Maintenant supposons que E soit un domaine, alors avec les mêmes hypothèses on a les mêmes conclusions, car pour tout r tel que $\overline{D(a, r)} \subset E$ on a :

$$\int_{C(a,r)} F_p(z)\varphi_q(z)\,dz = \delta_{p,q}.$$

c) Dans la suite pour ne pas compliquer le langage nous ne considérons que les bases simples de 2^e espèce à l'origine 0 *(on les appellera tout simplement bases simples de* 2^e *espèce)* et, bien sûr, les bases simples de 1^{re} espèce. Cela ne restreint nullement la portée de nos résultats concernant les bases simples de 2^e espèce.

1. Soit χ un compact du plan **C** tel que $\complement\chi$ soit un domaine régulier pour le problème de Dirichlet, Leja [13] a établi l'existence d'une suite de points $\{\alpha_n\}$ de χ telle que :

$$\lim \frac{1}{n} \log |L_n(z)| = G\left(z, \complement\chi, \infty\right) + \log(\text{Cap}\,\chi)$$

(²) Respectivement pour tout R inférieur au rayon d'holomorphie en a de F_p.

uniformément sur tout compact de $\complement\chi$, avec :

$$L_0(z) \equiv 1, \quad L_n(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$$

$G(z, \chi, \infty) =$ Fonction de Green de $\complement\chi$ avec pôle au point ∞,
Cap χ = Capacité logarithmique de χ.

D'après un résultat classique de Walsh (voir [28 *a*], Théorème 2 du chapitre 7; Walsh a démontré ce théorème pour le cas où χ et $\complement\chi$ sont connexes, mais sa démonstration s'étend facilement au cas général) toute fonction f holomorphe sur $\mathcal{K}_\rho$:

$$\mathcal{K}_\rho = \left\{z \in \complement\chi : G\left(z, \complement\chi, \infty\right) < \log\rho\right\} \cup \chi$$

peut être développée en série $\sum_0^\infty C_n L_n(z)$ convergeant uniformément vers f sur tout compact de $\mathcal{K}_\rho$, et ceci pour tout $\rho \in]1, \infty[$. Dans la série $\sum_0^\infty C_n L_n(z)$ les coefficients C_n sont déterminés formellement en posant successivement $z = \alpha_1$, $z = \alpha_2$ ..., $z = \alpha_n$, ...; les C_n sont des formes linéaires continues de f sur $H(\mathcal{K}_\rho)$, donc $\{L_n\}$ est une base commune des espaces $H(\mathcal{K}_\rho)(1 < \rho < \infty)$.

Ainsi a-t-on prouvé le

THÉORÈME 1 (LEJA). — *Il existe une base simple de* 1re *espèce* $\{L_n\}$ *des espaces* $H(\mathcal{K}_\rho)$ *telle que* :

$$\lim_{n\to\infty} (|L_n|_{\mathcal{K}_\rho})^{1/n} = \rho . \text{Cap}\,\chi \quad (\forall\rho \in]1, \infty[)$$
$$|L_n|_{\mathcal{K}_\rho} = \sup_{z\in\mathcal{K}_\rho} |L_n(z)|$$

2. Soit Ω un domaine de $\mathbf{C}$ contenant l'origine 0 et régulier pour le problème de Dirichlet, on pose pour tout $r \in]0, 1[$:

$$I_r = \{z \in \Omega : G(z, \Omega, 0) > -\log r\}$$

$\mathcal{K}$ désigne le complémentaire de Ω et, pour tout ensemble $E \subset \overline{\mathbf{C}}$, $\tilde{E}$ désigne l'image de E par l'inversion $z \to \dfrac{1}{z}$.

Soit $\{\tilde{L}_n\}$ la base de Leja de $H(\tilde{\mathcal{K}})$ (voir Th. 1), soit

$\{\tilde{\varphi}_n\}$ la suite dans $H_0(\complement \tilde{\mathfrak{K}})$ formant avec $\{\tilde{L}_n\}$ un système biorthogonal (on l'appelle aussi, brièvement, la base duale de $\{\tilde{L}_n\}$), c'est une base commune des espaces $H_0(\tilde{\Omega})$ $(\tilde{\Omega} = \complement \tilde{\mathfrak{K}})$ et $H_0(\tilde{I}_r)$, au voisinage de l'infini on a :

$$\tilde{\varphi}_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_0^\infty \alpha_{n,k} z^{-k} \quad \text{avec} \quad \alpha_{n,k} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = n+1 \\ 0 \text{ si } k \leqslant n. \end{cases}$$

En posant :

$$\varphi_0(z) \equiv 1, \quad \varphi_n(z) = \sum_0^\infty \alpha_{n,k+1} z^k$$

on a le

Théorème 2. — *Il existe une base simple de 2e espèce* $\{\varphi_n\}$ *des espaces* $H(I_r)$ *telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} (|\varphi_n|_{I_r})^{1/n} = \frac{r}{\text{Cap. } \tilde{\mathfrak{K}}} \quad (\forall r \in]0, 1[).$$

3. Soit Ω un ouvert du plan $\mathbf{C}$ à complémentaire connexe. On ne sait pas si $H(\Omega)$ possède une base simple de 1re espèce, même lorsque Ω est l'intérieur d'un contour de Jordan. Cependant on a la

Proposition 3. — *Si* $\{P_n\}$ *est une base simple de 1re espèce de l'espace* $H(\Omega)$, *alors pour toute suite complexe* $\{a_n\}$ *la série* $\Sigma a_n P_n$ *converge dans* $H(\Omega)$ *si et seulement si :*

$$\limsup |a_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{\text{Cap } \Omega}.$$

Démonstration. — Posons $\rho = \text{Cap } \Omega$.

a) Supposons que $\limsup |a_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{\rho}$, montrons que la série $\Sigma a_n P_n(z)$ converge normalement sur tout compact K de Ω.

Puisque $\{P_n\}$ est une base absolue de $H(\Omega)$ il existe, d'après la remarque 3 du chapitre 1, une constante $A < \infty$ et un compact $K' \subset \Omega$ tels que :

$$|\Sigma \alpha_j P_j|_K \leqslant A |\Sigma \alpha'_j P_j|_K \tag{1}$$

pour toutes suites finies $\{\alpha_j\}$ et $\{\alpha'_j\}$ telles que $\alpha_j = \alpha'_j$ ou 0. Soit ω un ouvert à complémentaire connexe limité par un nombre fini de Contours de Jordan analytiques disjoints tel que :

$$K' \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega, \qquad \text{Cap}\ \omega = \tau < \rho.$$

Soit $\{F_n\}$ la base de $H(\omega)$ formée par la suite des polynômes de Faber-Walsh [28*b*], $\{F_n\}$ est une base simple de 1re espèce telle que pour toute suite complexe $\{b_n\}$ la série $\Sigma b_n F_n$ converge dans $H(\omega)$ si et seulement si

$$\lim\sup |b_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{\tau}. \tag{2}$$

Puisque $\{P_n\}$ est simple de 1re espèce on a :

$$F_n = P_n = \sum_{j=0}^{n-1} A_{j,n} P_j.$$

Donc (1) donne :

$$|P_n|_K \leqslant A|F_n|_{K'}.$$

Puisque $\lim\sup |a_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{\rho} < \frac{1}{\tau}$ la série $\Sigma |a_n||F_n|_{K'}$ converge d'après (2). Donc la série $\Sigma |a_n||P_n|_K$ converge.

b) Supposons maintenant que $\Sigma a_n P_n$ converge dans $H(\Omega)$, donc normalement sur tout compact de Ω (car $\{P_n\}$ est une base absolue de $H(\Omega)$), montrons que $\lim\sup |a_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{\rho}$.

Soit ω la réunion des intérieurs d'un nombre fini de Contours de Jordan analytiques disjoints dans Ω, soit $\{F_n\}$ la base de Faber-Walsh de $H(\omega)$. En raisonnant comme dans *a*) on voit que la série $\Sigma |a_n||F_n|_K$ converge pour tout compact $K \subset \omega$, donc :

$$\lim_{n\to\infty}\sup |a_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{\text{Cap}\,.\,\omega}$$

On peut choisir ω tel que $\text{Cap}\ \omega$ soit arbitrairement voisine de $\text{Cap}\ \Omega$, donc :

$$\lim_{n\to\infty}\sup |a_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{\text{Cap}\,.\,\Omega}$$

4. *Prolongement des bases simples.*

Soit ω un domaine de Carathéodory, c'est-à-dire tel que ω et la composante connexe non bornée de $\complement\bar{\omega}$ aient la même frontière.

Proposition 4. — *Si* $\{P_n\}$ *est une base simple de* 1re *espèce de* $H(\omega)$, *alors* $\{P_n\}$ *est une base commune des espaces* $H(\mathcal{K}_\rho)$ *avec :*

$$\mathcal{K}_\rho = \{z \in \complement\bar{\omega} : G(z, \bar{\omega}, \infty) < \log\rho\} \cup \bar{\omega}(1 < \rho < \infty)$$

Démonstration. — Soit $\{\psi_n\}$ la base duale de $\{P_n\}$. D'après le théorème 2 du chapitre 1 on a :

Pour tout contour (de Jordan) C dans ω, il existe un contour Γ dans ω et une constante $M < \infty$ tels que :

$$|P_n|_C \cdot |\psi_n|_\Gamma \leqslant M \quad \forall n. \tag{1}$$

Posons :

$$\gamma_\rho^C = \{z \in \text{Ext } C : G(z, \text{Ext } C, \infty) = \log\rho\}$$
$$\gamma_\rho^\Gamma = \{z \in \text{Ext } \Gamma : G(z, \text{Ext } \Gamma, \infty) = \log\rho\}$$

Puisque $\psi_n(\infty) = \psi_n'(\infty) = \cdots = \psi_n^{(n)}(\infty) = 0$ une généralisation du Lemme de Schwarz (voir [29], Lemme 1) donne :

$$|\psi_n|_{\gamma_\rho^\Gamma} \leqslant |\psi_n|_\Gamma \cdot \rho^{-n}. \tag{2}$$

D'autre part une généralisation du lemme de Bernstein ([26*a*], Lemme 2.1) donne :

$$|P_n|_{\gamma_\rho^C} \leqslant |P_n|_C \cdot \rho^n. \tag{3}$$

Puisque ω est un domaine de Carathéodory on peut choisir les contours C et Γ de telle manière que $G(z, \text{Ext } C, \infty)$ et $G(z, \text{Ext } \Gamma, \infty)$ soient arbitrairement proches de $G(z, \complement\bar{\omega}, \infty)$. Ce fait entraîne, avec (1), (2) et (3) :

Pour tout contour γ dans $\mathcal{K}_\rho$, il existe un contour γ' dans $\mathcal{K}_\rho$ et une constante $M < \infty$ tels que :

$$|P_n|_\gamma \cdot |\psi_n|_{\gamma'} \leqslant M \quad \forall n.$$

Donc $\{P_n\}$ est une base de $H(\mathcal{K}_\rho)$ d'après le théorème 3 du Chapitre 1, car $\{P_n\}$ est totale dans $H(\mathcal{K}_\rho)$ (théorème de Runge).

Remarque. — En gardant les notations des paragraphes 1 et 2, et en utilisant la même méthode, on peut prouver que

— si $\{P_n\}$ est une base simple de 1re espèce de $H(\chi)$, alors elle est une base commune des espaces $H(\mathcal{K}_\rho)$ $(1 < \rho < \infty)$,

— si $\{\psi_n\}$ est une base simple de 2e espèce de $H(\Omega)$, alors elle est une base commune des espaces $H(I_r)$ $(0 < r < 1)$.

5. *Équivalence des bases simples.*

Deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ d'un e.v.t. X sont dites équivalentes lorsqu'il existe un automorphisme vectoriel topologique $\mathcal{T}$ de X tel que $\mathcal{T}(x_n) = y_n$ pour tout n.

Proposition 5. — *Si $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont des bases absolues d'un espace tonnelé quasi complet X (sur $\mathbf{C}$) et si pour tout n assez grand on a :*

$$x_n = \sum_0^\infty \alpha_{k,n}\, y_k \qquad \textit{avec} \qquad \alpha_{n,n} = 1$$

$$y_n = \sum_0^\infty \beta_{k,n}\, x_k \qquad \textit{avec} \qquad \beta_{n,n} = 1.$$

Alors $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont équivalentes.

Démonstration. — Par le théorème de Banach-Steinhaus on voit qu'il suffit de montrer que pour toute suite complexe $\{a_n\}$ la convergence (dans X) de la série $\sum_0^\infty a_n y_n$ équivaut à celle de $\sum_0^\infty a_n x_n$.

Lemme ([22]). — *Si $\{x_n\}$ est une base d'un espace tonnelé X et si $\{N_i\}_{i\in I}$ est une famille de semi normes continues engendrant la topologie de X, alors pour tout $i \in I$ il existe une constante finie A et un indice $j \in I$ tels que pour toute série $\sum_0^\infty a_n x_n$ convergente dans X on ait :*

$$N_i\left(\sum_m^n a_k x_k\right) \leqslant A N_j\left(\sum_0^\infty a_k x_k\right) \quad \forall m, n.$$

Maintenant supposons que $\sum\limits_0^\infty a_n x_n$ converge dans X, puisque $\{x_n\}$ est une base absolue de X on a :

$$\sum_0^\infty |a_n| \mathrm{N}_j(x_n) < \infty \quad \text{pour tout} \quad j \in \mathrm{I}.$$

D'après le lemme pour tout $i \in \mathrm{I}$ il existe $\mathrm{A} < \infty$ et $j \in \mathrm{I}$ tels que :

$$\mathrm{N}_i\left(\sum_m^p k,\, n\; y_k\right) \leqslant \mathrm{AN}_j(x_n) \quad \forall m,\, p,$$

en particulier :

$$\mathrm{N}_i(\alpha_{n,\,n}\, y_n) = \mathrm{N}_i(y_n) \leqslant \mathrm{AN}_j(x_n),$$

donc :

$$\sum_0^\infty |a_n| \mathrm{N}_i(y_n) \leqslant \mathrm{A} \sum_0^\infty |a_n| \mathrm{N}_j(x_n) < \infty,$$

cela entraîne, X étant quasi-complet, la convergence (dans X) de la série $\sum\limits_0^\infty a_n y_n$.

De la même façon on montre que la convergence de $\sum\limits_0^\infty a_n y_n$ entraîne la convergence de $\sum\limits_0^\infty a_n x_n$.

Conséquences :

a) Soit E un sous-ensemble de **C**, deux bases simples de 1re espèce quelconques de H(E) sont équivalentes.

En effet si $\{\mathrm{P}_n\}$ et $\{\mathrm{Q}_n\}$ sont deux telles bases on a évidemment :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n &= \mathrm{Q}_n + \alpha_{n-1,\,n}\, \mathrm{Q}_{n-1} + \cdots + \alpha_{0,\,n} \\ \mathrm{Q}_n &= \mathrm{P}_n + \beta_{n-1,\,n}\, \mathrm{P}_{n-1} + \cdots + \beta_{0,\,n}. \end{aligned}$$

On se trouve donc dans la situation de la proposition 5.

b) Si Ω est un ouvert contenant 0 et si $\{\varphi\}$ et $\{\psi\}$ sont deux bases simples de 2e espèce de $\mathrm{H}(\Omega)$, alors elles sont équivalentes.

En effet par substitution des séries on trouve :

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \psi_n + \alpha_{n+1,\,n}\, \psi_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+k,\,n}\, \psi_{n+k} + \cdots \\ \psi_n &= \varphi_n + \beta_{n+1,\,n}\, \varphi_{n+1} + \cdots + \beta_{n+k\,,n}\, \psi_{n+k} + \cdots \end{aligned}$$

c) Si χ est un compact régulier et si $\{\mathrm{P}_n\}$ est une base simple de 1^{re} espèce de $H(\chi)$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} (|P_n|_{\mathcal{K}_\rho})^{1/n} = \rho \operatorname{Cap} \chi \quad \forall \rho > 1.$$

En effet d'après la proposition 5 et la remarque qui suit la proposition 4 $\{P_n\}$ est une base de $H(\mathcal{K}_\rho)$ équivalente à la base de Leja $\{L_n\}$, pour tout $\rho > 1$. L'équivalence simultanée des bases $\{P_n\}$ et $\{L_n\}$ sur les espaces $H(\mathcal{K}_\rho)$ $(\rho > 1)$ entraîne :

$$\lim_{n\to\infty} (|P_n|_{\mathcal{K}_\rho})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (|L_n|_{\mathcal{K}_\rho})^{1/n} = \rho \operatorname{Cap} \chi.$$

d) Si Ω est un domaine régulier contenant 0 et si $\{\psi_n\}$ est une base simple de 2^e espèce de $H(\Omega)$ alors par un raisonnement analogue à celui de *c*) on a :

$$\lim_{n\to\infty} (|\psi_n|_{\mathrm{I}_r})^{1/n} = \frac{r}{\operatorname{Cap} \tilde{\mathcal{K}}} \quad \forall r \in]0, 1[.$$

6. *Complément à un théorème de Widom.*

Dans ce qui suit (paragraphes 6 et 7) $\mathcal{M}$ désigne toujours une mesure positive sur χ.

Soit χ un compact régulier, $\mathcal{M}$ est dite admissible (au sens de Widom [32]) lorsqu'il existe une famille $\{x_t\}_{t>0}$ de sous-compacts de χ telle que

— $\lim_{t\to 0} \operatorname{Cap} \chi_t = \operatorname{Cap} \chi$.

— Pour tout sous-ensemble A de χ tel que $\mathcal{M}(A) = 0$ on ait :

$$\liminf_{t\to 0} \omega^t_\infty(A \cap \chi_t) = 0.$$

ω^t_z désigne la mesure harmonique de χ_t.

Pour chaque n il existe un polynôme

$$P_n(z) = z^n + a_{n,n-1} z^{n-1} + \cdots + a_{n,0} \text{ unique}$$

tel que :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n^2 &= \int |P_n(z)|^2 \, d\mathcal{M}_z \\ &= \operatorname*{Inf}_{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})\in \mathbf{C}^n} \int |z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_0|^2 \, d\mathcal{M}_z.\end{aligned}$$

Posons :

$$|P_n|_\chi = \operatorname*{Max}_{z\in\chi} |P_n(z)|.$$

Widom a montré que :

$$\lim_{n\to\infty} (|P_n|_\chi)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{M}_n)^{1/n} = \operatorname{Cap} \chi. \tag{1}$$

PROPOSITION 6. — $\{P_n\}$ *est une base commune des espaces* $H(\mathcal{K}_\rho)$ $(1 < \rho < \infty)$.

Démonstration. — Soit $A = L^2_p(\chi, \mu)$ le sous-espace formé de $L^2(\chi, \mu)$ engendré par les polynômes, on a :

$$H(\chi) \subsetneq A \tag{2}$$

le signe $\subsetneq$ signifie l'inclusion continue. Il en résulte que toute forme linéaire continue l sur A est une f.l.c. sur $H(\chi)$, donc d'après le théorème de dualité de Köthe il existe une fonction unique $\varphi \in H_0(\chi)$ telle que :

$$l(f) = \langle \varphi, f\rangle = \int_{\gamma_f} \varphi(z) f(z)\, dz \quad \text{pour toute} \quad f \in H(\chi)$$

Par l'application $l \to \varphi$ on peut identifier le dual A' de A à un espace hilbertien A^* de fonctions holomorphes sur $\complement \chi$ et nulles au point ∞ avec la norme :

$$\|\varphi\|_{A^*} = \|l\|_{A'}.$$

La suite $\{P_n\}$ est une base orthogonale de A, soit $\{\psi_n\}$ la suite dans A^* qui forme avec $\{P_n\}$ un système biorthogonal, c'est-à-dire :

$$\langle \psi_p, P_q\rangle = \int_\gamma \psi_p(z) P_q(z)\, dz = \delta_{p,q}.$$

On a :

— $\psi_n^{(k)}(\infty) = 0$ pour $k \leqslant n$, $\psi_n^{(n+1)}(\infty) = \dfrac{(n+1)!}{2i\pi}$

— $\|\psi_n\|_{A^*} = \dfrac{1}{\mu_n}$ $(\mu_n = \|P_n\|_A)$,

— $\{P_n, \psi_n$ est un système biorthogonal dans

$$H(\mathcal{K}_\rho) \times H_0(\mathcal{K}_\rho) \ (1 < \rho < \infty).$$

(2) implique :

$$A^* \subsetneq H_0(\complement \chi).$$

Donc si l'on pose $\Gamma_\rho = \{z \in \complement \chi : G(z, \complement \chi, \infty) = \log \rho\}$ on a :

$$|\psi_n|_{\Gamma_\rho} \leqslant M_\rho \|\psi_n\|_{A^*} = M_\rho \mu_n^{-1} \quad \forall n. \tag{3}$$

En appliquant les lemmes de Schwarz et Bernstein généralisés et en tenant compte de (1) et (3) on trouve :

$$|\psi_n|_{\Gamma_\rho} \leqslant M(\rho, \varepsilon)(1+\varepsilon)^n(\rho\gamma)^{-n}$$
$$|P_n|_{\Gamma_\rho} \leqslant M(\rho, \varepsilon)(1+\varepsilon)^n(\rho\gamma)^n$$

avec $\gamma = \text{Cap}\,\chi$, pour ε arbitrairement petit et $\rho \in]1, \infty[$. Il en résulte que pour tout $\tau < \rho$, il existe un $\sigma < \rho$ tel que

$$|P_n|_{\Gamma_\tau} \cdot |\psi_n|_{\Gamma_\sigma} \leqslant M(\tau, \sigma) < \infty \quad \forall n.$$

$\{P_n\}$ est donc une base de $H(\mathcal{K}_\rho)$, d'après le théorème 3 du chapitre 1.

Remarque. — Cette proposition peut être considérée comme une généralisation des résultats du même genre dus à Walsh (voir [28*a*], chapitre 6).

7. *Un résultat analogue au théorème de Widom.*

Nous gardons les notations du paragraphe 6 et supposons que la frontière de χ soit composée d'un nombre fini de contours de Jordan disjoints. ω désigne l'intérieur de χ. Soit μ une mesure finie positive sur χ.

THÉORÈME 7. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $\quad \lim_{n\to\infty} (\mu_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (|P_n|_\chi)^{1/n} < \infty$

(ii) $\quad \lim_{n\to\infty} (\mu_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (|P_n|_\chi)^{1/n} = \text{Cap}\,\chi$

(iii) $\quad L^2_p(\chi, \mu) \subsetneq H(\omega)$.

Démonstration :

$(i) \Longrightarrow (iii)$: Posons

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (|P_n|_\chi)^{1/n} = \lambda < \infty \tag{1}$$

$$V(z) = \lim\sup \frac{1}{n} \log |P_n(z)|$$

$$V^*(z) = \text{Régularisée supérieure de } V(z).$$

On voit facilement que $V^*(z)$ est une fonction sous-harmonique non constante et :

$$V^*(z) \leqslant \log \lambda \quad \forall z \in \omega.$$

Donc en appliquant le lemme de Hartogs on a :

Pour tout compact $K \subset \omega$, il existe $\varepsilon_0 \in]0, \lambda[$ tel que

$$|P_n|_K \leqslant M(K, \varepsilon_0)(\lambda - \varepsilon_0)^n. \tag{2}$$

D'autre part (1) donne : pour tout $\varepsilon \in]0, \lambda[$ il existe $M_\varepsilon < \infty$ tel que

$$\mu_n = \|P_n\|_A \geqslant M_\varepsilon(\lambda - \varepsilon)^n \quad \forall n. \tag{3}$$

Si nous posons pour toute $f = \Sigma a_n P_n \in A = L_p^2(\chi, \mu)$:

$$\|f\|_A = (\Sigma\, |a_n|^2 \mu_n^2)^{1/2}$$
$$\|f\|_K = \Sigma\, |a_n| |P_n|_K$$

alors les inégalités (2) et (3) donnent :

$$\|f\|_K \leqslant M_K \|f\|_A \quad \forall f \in A.$$

Donc pour tout compact $K \subset \omega$ il existe $M_K < \infty$ tel que :

$$|f|_K \leqslant \|f\|_K \leqslant M_K \|f\|_A \quad \forall f \in A.$$

Il en résulte : $L_p^2(\chi, \mu) \varsubsetneq H(\omega)$.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$: On garde les notations de la démonstration de la proposition 6. On a :

$$H(\chi) \varsubsetneq A \varsubsetneq H(\omega). \tag{4}$$

$$H_0(\complement \omega) \varsubsetneq A^* \varsubsetneq H_0(\complement \chi). \tag{5}$$

Posons :

$$\tilde{P}_n = \frac{P_n}{\mu_n}, \qquad \tilde{\psi}_n = \mu_n \psi_n.$$

$\{\tilde{P}_n\}$ est une base orthonormale de A et $\{\tilde{P}_n ; \tilde{\psi}_n\}$ est un système biorthogonal dans $H(\mathcal{K}_\rho) \times H_0(\complement \mathcal{K}_\rho)$ pour tout $\rho \in]1, \infty[$. (5) implique pour tout $\rho \in]1, \infty[$:

$$|\tilde{\psi}_n|_{\Gamma_\rho} \leqslant M_\rho \|\tilde{\psi}_n\|_{A^*} = M_\rho \quad \forall n.$$

Il en résulte, par le lemme de Schwarz généralisé :

Pour tout $\varepsilon \in]0, \rho[$, il existe $M(\rho, \varepsilon) < \infty$ tel que

$$|\tilde{\psi}_n|_{\Gamma_\rho} \leqslant M(\rho, \varepsilon)(\rho - \varepsilon)^{-n}. \tag{6}$$

Désignons par $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \ldots \mathcal{C}_l$ les contours de Jordan composant la frontière de χ ; soit, pour chaque i, C_i un contour de Jordan dans l'intérieur de $\mathcal{C}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ et posons $C = \bigcup_1^l C_i$; on a d'après (4) :

$$|\tilde{P}_n|_C \leqslant M_C \|\tilde{P}_n\|_A = M_C \quad \forall n$$

Si l'on pose :

$$\text{Ext } C = \text{Domaine non borné limité par } C$$
$$\gamma_\rho^C = \{z \in \text{Ext } C : G(z, \text{Ext } C, \infty) = \log \rho\}$$

alors le lemme de Bernstein généralisé donne :

$$|\tilde{P}_n|_{\gamma_\rho^C} \leqslant M_C \rho^n.$$

Puisque pour tout ρ fixé on peut choisir C de manière que γ_ρ^C soit arbitrairement proche de Γ_ρ, on voit facilement que :

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M(\rho, \varepsilon) < \infty$ tel que

$$|\tilde{P}_n|_{\Gamma_\rho} \leqslant M(\rho, \varepsilon)(\rho + \varepsilon)^n \quad \forall n \tag{7}$$

D'autre part on a :

$$1 = \int_{\Gamma_\rho} \tilde{P}_n(z)\tilde{\psi}_n(z)\, dz \leqslant L_\rho |\tilde{P}_n|_{\Gamma_\rho} \cdot |\tilde{\psi}_n|_{\Gamma_\rho} \tag{8}$$

(6) + (7) + (8) donnent, pour tout $\rho \in]1, \infty[$ et tout $\varepsilon \in]0, \rho[$:

$$C(\rho, \varepsilon)(\rho - \varepsilon)^n \leqslant |\tilde{P}_n|_{\Gamma_\rho} \leqslant C'(\rho, \varepsilon)(\rho + \varepsilon)^n \qquad n$$
$$C(\rho, \varepsilon)(\rho + \varepsilon)^{-n} \leqslant |\tilde{\psi}_n|_{\Gamma_\rho} \leqslant C'(\rho, \varepsilon)(\rho - \varepsilon)^{-n} \qquad n$$

Il en résulte que pour tout $\rho \in]1, \infty[$:

$$- \{\tilde{P}_n\} \text{ est une base de } H(\mathcal{K}_\rho)$$
$$- \lim_{n \to \infty} (|\tilde{P}_n|_{\Gamma_\rho})^{1/n} = \rho. \tag{9}$$

$\{P_n\}$ est donc une base simple de 1$^{\text{re}}$ espèce des espaces $H(\mathcal{K}_\rho)$. D'après la conséquence c de la proposition 5 on a :

$$\lim_{n \to \infty} (|P_n|_{\Gamma_\rho})^{1/n} = \rho \text{ Cap } \chi \quad \forall \rho > 1. \tag{10}$$

Cette formule entraîne avec (9) :

$$\lim_{n \to \infty} (\mu_n)^{1/n} = \text{Cap } \chi.$$

Il résulte immédiatement de (10) :

$$\limsup_{n\to\infty} (|P_n|_\chi)^{1/n} \leqslant \operatorname{Cap} \chi.$$

Si $\liminf_{n\to\infty} (|P_n|_\chi)^{1/n} < \operatorname{Cap} \chi$, alors on a aussi

$$\liminf_{n\to\infty} (\mu_n)^{1/n} < \operatorname{Cap} \chi, \quad \text{car} \quad \mu_n^2 = \int_\chi |P_n|^2 \, d\mu.$$

Donc $\liminf_{n\to\infty} (|P_n|_\chi)^{1/n} \geqslant \operatorname{Cap} \chi$ et finalement :

$$\lim_{n\to\infty} (|P_n|_\chi)^{1/n} = \operatorname{Cap} \chi.$$

Fin de la démonstration.

Dans cette démonstration nous avons implicitement prouvé la proposition suivante :

Proposition 8. — Si $\mathcal{H}$ *est un espace hilbertien de fonctions holomorphes tel que* $H(\chi) \subsetneq \mathcal{H} \subsetneq H(\omega)$ *et si* $\{P_n\}$ *est une suite simple de* 1^re^ *espèce formant une base orthogonale de* $\mathcal{H}$, *alors* $\{P_n\}$ *est une base commune des espaces* $H(\mathcal{K}_\rho)$ $(\rho > 1)$ *et on a* :

$$\lim_{n\to\infty} (\|P_n\|_{\mathcal{H}})^{1/n} = \operatorname{Cap} \chi.$$

Remarque.

— Le théorème 7 et la proposition 8 restent valables quand $\omega = \dot{\chi}$ est un domaine de Carathéodory.

— D'après le théorème 7 et le théorème de Widom, si μ est une mesure admissible sur χ alors :

$$L_p^2(\chi, \mu) \subsetneq H(\omega).$$

On ne sait pas si la réciproque est vraie.

8. Soit Ω un domaine contenant 0, on suppose que la frontière de Ω est composée d'un nombre fini de contours de Jordan disjoints dont l'un contient tous les autres dans son intérieur. Par la méthode du paragraphe précédent on obtient la :

Proposition 9. — *Si* $\mathcal{H}$ *est un espace hilbertien de fonctions holomorphes tel que* $H(\overline{\Omega}) \subsetneq \mathcal{H} \subsetneq H(\Omega)$ *et si* $\{\psi_n\}$ *est une suite simple de* 2^e^ *espèce formant une base orthogonale de*

$\mathcal{H}$, alors $\{\psi_n\}$ est une base commune des espaces $H(I_r)$ *avec*

$$I_r = \{z \in \Omega : G(z, \Omega, 0) > -\log r\} \quad (0 < r < 1)$$

et on a :

$$\lim_{n\to\infty} (\|\psi_n\|_{\mathcal{H}})^{1/n} = (\mathrm{Cap}\ \tilde{\mathcal{K}})^{-1},$$

où $\tilde{\mathcal{K}}$ désigne l'image de $\mathcal{K} = \complement\,\Omega$ par l'inversion $z \to \frac{1}{z}\cdot$

Un exemple. — Prenons $\mathcal{H} = L^2_B(\Omega)$ (espace de Bergman). Pour tout entier n posons :

$$E_n = \{f \in L^2_B(\Omega) : f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0,\quad f^{(n)}(0) = n!\}.$$

Soit f_n l'unique élément de E_n vérifiant :

$$\mu_n^2 = \iint_\Omega |f_n(x+iy)|^2\, dx\, dy = \operatorname*{Inf}_{f\in E_n} \iint_\Omega |f(x+iy)|^2\, dx\, dy.$$

Il est connu (Bergman) que $\{f_n\}$ est une base orthogonale de $L^2_B(\Omega)$. Donc on a d'après la proposition 9 :

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n)^{1/n} = (\mathrm{Cap}\ \tilde{\mathcal{K}})^{-1}.$$

Un résultat analogue a été trouvé par Schiffer et Siciak par une méthode différente (voir [25], théorème 5).

2. Bases simples dans l'espace des fonctions holomorphes sur un polydisque et dans certains espaces de fonctions entières.

1. *Notations.*

Pour tout $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ et

$$K = (K_1, K_2, \ldots, K_n) \in \mathbf{N}^n$$

on pose :

$$z^K = z_1^{K_1}.z_2^{K_2} \ldots z_n^{K_n},\ K! = (K_1!)(K_2!) \ldots (K_n!)$$
$$z = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|,\ \|z\|_\infty = \operatorname*{Max}_i |z_i|.$$

Soit $m = (m_1, m_2, \ldots m_n)$ un élément de $\mathbf{N}^n$, on écrit $K \leqslant m$ lorsque $K_1 \leqslant m_1$, $K_2 \leqslant m_2 \ldots$ et $K_n \leqslant m_n$; on écrit $K < m$ lorsque $K \leqslant m$ et $K \neq m$. L'ordre $\leqslant$ ainsi défini n'est pas total sur $\mathbf{N}^n$ $(n \geqslant 2)$.

On peut définir plusieurs ordres totaux sur $\mathbf{N}^n$ de la façon suivante :

supposons que $\preccurlyeq$ soit un ordre total sur $\mathbf{N}^{n-1}$, soit j un entier compris entre 1 et n, pour deux éléments $K = (K_1 \ldots K_n)$ et $m = (m_1 \ldots m_n)$ de $\mathbf{N}^n$ on écrit $K \preccurlyeq m$ lorsque

— ou bien $K_j < m_j$,
— ou bien $K_j = m_j$ et

$(K_1, K_2 \ldots K_{j-1}, K_{j+1} \ldots K_n) \preccurlyeq (m_1, m_2 \ldots m_{j-1}, m_{j+1} \ldots m_n)$.

On définit ainsi un ordre total sur $\mathbf{N}^n$. En commençant par $\mathbf{N}$ avec son ordre naturel, on définit de proche en proche plusieurs ordres totaux sur $\mathbf{N}^n$; un tel ordre sera noté $\preccurlyeq$. $H_n(R)$ $(0 < R \leqslant \infty)$ désigne l'espace des fonctions de n variables complexes holomorphes dans la boule

$$\{z \in \mathbf{C}^n : \|z\|_\infty < R\}.$$

$\overline{H}_n(R)$ désigne l'espace des fonctions de n variables complexes holomorphes au voisinage de la boule compacte $\{z \in \mathbf{C}^n) : \|z\|_\infty \leqslant R\}$.

Ces espaces sont munis de leurs topologies usuelles. Les bases de ces espaces sont absolues, c'est pourquoi on peut indexer les bases relativement à $\mathbf{N}^n$. La suite $\{z^K\}_{K\in\mathbf{N}^n}$ constitue une base commune à tous les espaces $H_n(R)$ et $\overline{H}_n(R)$. On peut mettre en dualité vectorielle topologique les espaces $H_n(R)$ et $\overline{H}_n(1/R)$ à l'aide de la forme bilinéaire :

$$\langle f, g\rangle = \sum_{K\in\mathbf{N}^n} \frac{f^{(K)}(0)}{K!}\cdot\frac{g^{(K)}(0)}{K!}.$$

Relativement à cette dualité le système $\{z^K, w^K\}_{K\in\mathbf{N}^n}$ est biorthogonal.

2. *Bases simples.*

Une suite $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbf{N}^n}$ de fonctions holomorphes (de n variables) au voisinage de l'origine est dite simple de 1re espèce lorsque l'on a pour tout m :

$$\varphi_m(z) = \sum_{K\in\mathbf{N}^n} A_{K,m}\, z^K \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_{m,m} = 1 \\ A_{K,m} = 0 \quad \text{si} \quad K \not\preccurlyeq m. \end{cases}$$

Lorsque l'on a pour tout m :

$$\varphi_m(z) = \sum_{K\in N^n} A_{K,m}\, z^K \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_{m,m} = 1 \\ A_{K,m} = 0 \quad \text{si} \quad K < m. \end{cases}$$

Alors $\{\varphi_m\}$ est dite simple de 2e espèce.

Une matrice n-infinie est par définition une application de $N^n \times N^n$ dans C. Le produit de deux matrices n-infinies se définit de façon usuelle :

$$[A_{K,m}]\,.\,[B_{K,m}] = [C_{K,m}] \quad \text{avec} \quad C_{K,m} = \sum_{j\in N^n} A_{K,j}\, B_{j,m}$$

$[C_{K,m}]$ existe lorsque la série $\Sigma\, A_{K,j}\, B_{j,m}$ est sommable pour tout couple $(K, m) \in N^n \times N^n$. Dans le cas où :

$$[A_{K,m}]\,.\,[B_{K,m}] = [B_{K,m}]\,.\,[A_{K,m}] = [\delta_{K,m}]$$

$[B_{K,m}]$ est appelée matrice inverse de $[A_{K,m}]$ (cette inverse est unique).

Une matrice n-infinie $[A_{K,m}]$ est dite simple de 1re espèce (resp. de 2e espèce) lorsque l'on a pour tout m :

$$A_{m,m} = 1,\ A_{K,m} = 0 \quad \text{pour} \quad K \not\leqslant m \quad (\text{resp. } K < m).$$

Proposition 1 :

a) Une matrice n-infinie est simple de 1re *espèce (resp. de* 2e *espèce) si et seulement si elle devient une matrice* 1*-infinie simple de* 1re *espèce (resp.* 2e *espèce) lorsqu'on arrange les indices suivant n'importe quel ordre* $\leqslant$ *défini sur* N^n (voir 1).

b) Toute matrice n-infinie de 1re *espèce* (resp. 2e *espèce*) *est inversible et son inverse est aussi de* 1re *espèce (resp.* 2e *espèce).*

Maintenant soit $\varphi_m(z) = \Sigma\ A_{K,m}\, z^K$ une suite simple (de 1re ou seconde espèce) de fonctions holomorphes au voisinage de 0 et soit $[B_{K,m}]$ la matrice inverse de $[A_{K,m}]$.

Théorème 2 :

a) $\{\varphi_m\}_{m\in N^n}$ *est une base de* $H_n(R)$ *si et seulement si :*

$$(C_a) \quad \begin{cases} \limsup\limits_{\|m\|\to\infty} \Big(\sum\limits_{K\in N^n} (|A_{K,m}| + |B_{K,m}|)\, r^{\|K\|}\Big)^{1/\|m\|} < R \\ \textit{pour tout } r < R \end{cases}$$

b) $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbf{N}^n}$ *est une base de* $\overline{\mathrm{H}}_n(\mathrm{R})$ *si et seulement si :*

$$(\mathrm{C}_b)\quad \begin{cases} \textit{Pout tout } \mathrm{R}' > \mathrm{R}, \textit{ il existe } r > \mathrm{R} \textit{ tel que} \\ \limsup\limits_{\|m\|\to\infty} \Big(\sum\limits_{\mathrm{K}\in\mathbf{N}^n} (|\mathrm{A}_{\mathrm{K},m}| + |\mathrm{B}_{\mathrm{K},m}|)r^{\|\mathrm{K}\|}\Big)^{1/\|m\|} < \mathrm{R}'. \end{cases}$$

Démonstration. — En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 4 du Chapitre 1 on a :

Lemme :

a) Une suite $\{\mathrm{F}_m\}_{m\in\mathbf{N}^n}$ *d'éléments de* $\mathrm{H}_n(\mathrm{R})$ *est l'image de* $\{z^m\}_{m\in\mathbf{N}^n}$ *par une application linéaire continue de* $\mathrm{H}_n(\mathrm{R})$ *dans lui-même si et seulement si :*

$$(\mathrm{C}_a)\quad \begin{cases} \textit{Pour tout } r < \mathrm{R}, \textit{ il existe } \tau > \dfrac{1}{\mathrm{R}} \textit{ tel que :} \\ \sum\limits_m \|\mathrm{F}_m\|_r \tau^{\|m\|} < \infty. \end{cases}$$

où $\|\ \|_r$ *désigne la norme* $\|\Sigma a_{\mathrm{K}} z^{\mathrm{K}}\|_r = \Sigma |a_{\mathrm{K}}| r^{\|\mathrm{K}\|}$.

b) Une suite $\{\mathrm{F}_m\}_{m\in\mathbf{N}^n}$ *d'éléments de* $\overline{\mathrm{H}}_n(\mathrm{R})$ *est l'image de* $\{z^m\}_{m\in\mathbf{N}^n}$ *par une application linéaire continue de* $\overline{\mathrm{H}}_n(\mathrm{R})$ *dans lui-même si et seulement si :*

$$(\mathrm{C}_b')\quad \begin{cases} \textit{Pour tout } \tau > \dfrac{1}{\mathrm{R}}, \textit{ il existe } r > \mathrm{R} \textit{ tel que} \\ \sum\limits_m \|\mathrm{F}_m\|_r \tau^{\|m\|} < \infty. \end{cases}$$

Fin de l'énoncé du lemme.

Il est clair que :

$$(\mathrm{C}_a') \Longleftrightarrow \limsup (\|\mathrm{F}_m\|_r)^{1/m} < \mathrm{R} \quad \text{pour tout} \quad r < \mathrm{R}.$$

$$(\mathrm{C}_b') \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Pour tout } \mathrm{R}' > \mathrm{R}, \text{ il existe } r > \mathrm{R} \text{ tel que} \\ \limsup (\|\mathrm{F}_m\|_r)^{1/\|m\|} < \mathrm{R}'. \end{cases}$$

Maintenant supposons que $\{\varphi_m\}$ soit une base de $\mathrm{H}_n(\mathrm{R})$ (resp. $\overline{\mathrm{H}}_n(\mathrm{R})$), alors d'après la Proposition 1.5 et la Proposition 1 $\{\varphi_m\}$ est équivalente à $\{z^m\}$, c'est-à-dire $\{\varphi_m\}$ est l'image de $\{z^m\}$ par un automorphisme de $\mathrm{H}_n(\mathrm{R})$ (resp. $\overline{\mathrm{H}}_n(\mathrm{R})$) que l'on note par A. Il est clair que $\{\psi_n(z) = \Sigma\, \mathrm{B}_{\mathrm{K},m} z^{\mathrm{K}}\}$

est l'image de $\{z^m\}$ par l'inverse de A. Donc, en appliquant le Lemme 1 on trouve immédiatement (C_a) (resp. (C_b)).

Réciproquement si (C_a) (resp. (C_b)) est vérifiée alors d'après le Lemme 1 les applications :

$$\begin{aligned} A &: z^m \to \varphi_m = \Sigma\, A_{K,m} z^K \\ B &: z^m \to \psi_m = \Sigma\, B_{K,m} z^K \end{aligned}$$

se prolongent en deux applications linéaires continues de $H_n(R)$ (resp. $\overline{H}_n(R)$) dans lui-même, ces prolongements seront notés A et B.

Puisque $[A_{K,m}]$ et $[B_{K,m}]$ sont inverses l'une de l'autre on a :

$$A \circ B = B \circ A = \text{Application identique.}$$

Donc A est un automorphisme de $H_n(R)$ (resp. $\overline{H}_n(R)$) et $\{\varphi_m\}$ est une base de cet espace. C.Q.F.D.

Corollaire. — *Si* $\{\varphi_m\}$ *est une base simple de* 1re *espèce* (resp. 2e *espèce*) *de* $H_n(R)$ *ou* $\overline{H}_n(R)$, *alors elle est une base de* $H_n(\rho)$ *pour tout* $\rho > R$ (resp. $\rho < R$).

Démonstration. — Nous allons démontrer le Corollaire dans le cas où $\{\varphi_n\}$ est une base simple de 1re espèce de $H_n(R)$ (les autres cas se démontrent de la même façon).

(C_a) est équivalent à la condition suivante : pour tout $r < R$ il existe $A_r < \infty$ et $\lambda_r \in [0, 1[$ tels que

$$r^{\|m\|}\Big[\sum_k (|A_{k,m}| + |B_{k,m}|) r^{\|k\|-\|m\|}\Big] \leqslant A_r(\lambda_r R)^{\|m\|}.$$

Soit C une constante > 1, il résulte de l'inégalité précédente :

$$(Cr)^{\|m\|}\Big[\sum_k (|A_{k,m}| + |B_{k,m}|) r^{\|k\|-\|m\|}\Big] \leqslant A_r(\lambda_r CR)^{\|m\|}.$$

Puisque $A_{k,m} = B_{k,m} = 0$ pour $k \nleqslant m$ on a :

$$\sum_k (|A_{k,m}| + |B_{k,m}|) r^{\|k\|-\|m\|} \leqslant \sum_k (|A_{k,m}| + |B_{k,m}|(Cr)^{\|k\|-\|m\|}.$$

Donc :

$$(Cr)^m\Big[\sum_k (|A_{k,m}| + |B_{k,m}|)(Cr)^{\|k\|-\|m\|}\Big] \leqslant A_r(\lambda_r CR)^{\|m\|}.$$

Cela montre que $\{\varphi_m\}$ est une base de $H_n(CR)$ pour toute $C > 1$ C.Q.F.D.

Remarque. — Ce corollaire peut être établi par la méthode utilisée dans I.4.

3. *Application : Ordre et type d'une fonction entière.*

Soit Δ un domaine de Reinhart complet et borné de centre 0 de l'espace $\mathbf{C}^n$, soit p un entier $\geqslant 2$, $\log_p x$ désigne l'itérée d'ordre p de $\log x$ et on pose par pure convention $\log_0 x = x$. Soit f une fonction entière de n variables complexes, on pose :

$$M(r, f) = \operatorname*{Sup}_{z/r \in \Delta} |f(z)|, \quad \rho = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log_p M(r, f)}{\log r}$$

ρ s'appelle le p-ordre de f, lorsque ρ est fini et > 0 alors le (Δ, p)-type de f est par définition :

$$\sigma = \limsup \frac{\log_{p-1} M(r, f)}{r^\rho}$$

Soient μ et ν deux nombres > 0, on désigne par $B_\Delta^p(\mu, \nu)$ l'espace de Banach des fonctions entières f telles que :

$$\|f\| = \operatorname*{Sup}_r \frac{M(r, f)}{\exp_{p-1}(\nu r^\mu)} < \infty.$$

$E_\Delta^p(\mu, \nu)$ désigne l'espace des fonctions entières de croissance (p-ordre, (Δ, p)-type) $\leqslant (\mu, \nu)$, $\overline{E}_\Delta^p(\mu, \nu)$ désigne l'espace des fonctions entières de croissance (p-ordre, (Δ, p)-type) $< (\mu, \nu)$.

Pour deux couples (a, b) et (a', b') de nombres réels on écrit $(a, b) \leqslant (a', b')$ lorsque : ou bien $a < a'$, ou bien $a = a'$ et $b \leqslant b'$. On écrit $(a, b) < (a', b')$ lorsque $(a, b) \leqslant (a', b')$ et $(a, b) \neq (a', b')$.

On munit $E_\Delta^p(\mu, \nu)$ de la topologie limite projective de $B_\Delta^p(\mu, \tau)$ avec $\tau > \nu$, et $\overline{E}_\Delta^p(\mu, \nu)$ de la topologie limite inductive des $B_\Delta^p(\mu, \tau)$ avec $\tau < \nu$.

THÉORÈME 3. — *a) Si* $\{\varphi_m\}$ *est une base simple de* 1re *espèce de* $E_\Delta^p(\mu, \nu)$ *ou* $\overline{E}_\Delta^p(\mu, \nu)$, *alors pour tout entier* $q \in [2, p[$

et toute fonction $f = \Sigma\ \lambda_k \varphi_k$ *de cet espace*

$$(\mathcal{F}) \quad \left\| \begin{array}{l} q\text{-}ordre\ de\ f = \alpha = \limsup\limits_{\|k\| \to \infty} \dfrac{\|k\| \log_{q-1} \|k\|}{-\log |\lambda_k|} \\ lorsque\ \ \alpha > 0\ \ et\ fini\ on\ a: \\ (\Delta, q)\text{-}type\ de\ f = \begin{cases} \limsup \log_{q-2} \|k\| (|\lambda_k|\ d_k(\Delta))^{\alpha \|k\|} \\ \quad si\ q > 2 \\ \dfrac{1}{e\alpha} \limsup\ \|k\|\ (|\lambda_k|\ d_k(\Delta))^{\alpha/\|k\|} \\ \quad si\ q = 2 \end{cases} \\ (d_k(\Delta) = \operatorname{Sup}\limits_{z \in \Delta} |z^k|). \end{array} \right.$$

b) Si $\{\varphi_m\}$ *est une base simple de* 2^e *espèce de* $E^p_\Delta(\mu, \nu)$ *ou* $\overline{E}^p_\Delta(\mu, \nu)$, *alors* $\{\varphi_m\}$ *est une base de l'espace des fonctions entières* $H(\mathbf{C}^n)$ *et pour toute fonction entière* $f \notin E^p_\Delta(\mu, \nu)$ *et tout entier* $q \geqslant p$ *le q-ordre et le* (Δ, q)*-type de* f *sont donnés par les formules précédentes* (formules $(\mathcal{F})$).

La démonstration du théorème se base sur plusieurs lemmes.

Lemme 1. — *Le q-ordre et le* (Δ, q)*-type d'une fonction entière* $f = \Sigma \lambda_k z_k$ *sont donnés par les formules* $(\mathcal{F})$.

Ce lemme a été trouvé par Lindelöff dans le cas d'une variable $(n = 1)$ et retrouvé par D. Sato. Le cas $n > 1$ et $q = 2$ a été établi par A. A. Gol'dberg. Le cas général présenté ici se démontre sans difficulté par une combinaison des démonstrations de Sato [24] et Gol'dberg [12].

Lemme 2. — $\{\varphi_m\}$ *est une base de* $E^p_\Delta(\mu, \nu)$ (resp. $\overline{E}^p_\Delta(\mu, \nu)$) *si et seulement si la suite* :

$$\varphi^*_m = \sum_k \frac{d_k(\Delta)\ (\log_{p-2} \|k\|)^{\|k\|/\mu}}{d_m(\Delta)\ (\log_{p-2} \|m\|)^{\|m\|/\mu}} A_{k,m}\, z^k$$

est une base de l'espace $H_n(R)$ (resp. $\overline{H}_n(R)$) *où* :

$$R = R(p, \mu, \nu) = \begin{cases} \nu^{-1/\mu} & si\ \ p > 2. \\ (e\mu\nu)^{-1/\mu} & si\ \ p = 2. \end{cases}$$

Démonstration. — Il résulte du Lemme 2 que la transformation

$$f = \Sigma a_k z^k \rightarrow \mathrm{T}(f) = \Sigma d_k(\Delta)\ (\log_{p-2}\|k\|)^{\|k\|/\mu} a_k z^k$$

est un isomorphisme de $\overline{\mathrm{E}}^p_\Delta(\mu, \nu)$ (resp. $\mathrm{E}^p_\Delta(\mu, \nu)$) sur $\overline{\mathrm{H}}_n(\mathrm{R})$ (resp. $\mathrm{H}_n(\mathrm{R})$). On a :

$$\varphi^*_m = \mathrm{T}\left(\frac{\varphi_m}{d_m(\Delta)\ (\log_{p-2}\|m\|)^{\|m\|/\mu}}\right)$$

d'où le lemme.

Lemme 3. — *a) Si* $\{\varphi_m\}$ *est une base simple de* 1re *espèce de* $\mathrm{E}^p_\Delta(\mu, \nu)$ *ou* $\overline{\mathrm{E}}^p_\Delta(\mu, \nu)$, *alors elle est une base de* $\mathrm{E}^q_\Delta(\rho, \sigma)$ *pour tout triplet* (q, ρ, σ) *vérifiant la condition : ou bien* q *est un entier* $\in [2, p[$, *ou bien* $q = p$ et $(\rho, \sigma) < (\mu, \nu)$.

b) Si $\{\varphi_m\}$ *est une base simple de* 2e *espèce de* $\mathrm{E}^p_\Delta(\mu, \nu)$ *ou* $\overline{\mathrm{E}}^p_\Delta(\mu, \nu)$, *alors elle est une base de* $\mathrm{E}^q_\Delta(\rho, \sigma)$ *pour tout triplet* (q, ρ, σ) *vérifiant la condition : ou bien* q *est un entier* $> p$, *ou bien* $q = p$ *et* $(\mu, \nu) < (\rho, \sigma)$.

Démonstration. — Nous allons démontrer seulement *a*), *b*) pouvant être démontré de façon analogue.

Cas où $q = p$ *et* $\rho = \mu$: En raison du lemme 3 on voit que le résultat est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 2.

Cas où $p > q$ *ou* $p = q$ *et* $\mu > \rho$: posons :

$$\mathrm{A}^*_{k,m}\ (\text{resp. } \mathrm{B}^*_{k,m}) = \frac{d_k(\Delta)\ (\log_{p-2}\|k\|)^{\|k\|/\mu}}{d_m(\Delta)\ (\log_{p-2}\|m\|)^{\|m\|/\mu}} |\mathrm{A}_{k,m}|\ (\text{resp. } |\mathrm{B}_{k,m}|).$$

Supposons que $\{\varphi_m\}$ est une base de $\mathrm{E}^p_\Delta(\mu, \nu)$, alors on a d'après lemme 3 et théorème 2 :

Pour tout $r < \mathrm{R}(p, \mu, \nu)$, il existe $\mathrm{A}_r < \infty$ et $\lambda_r \in [0, 1[$

$$\text{(I)}\quad \text{tels que}\quad r^{\|m\|}\Big[\sum_k (\mathrm{A}^*_{k,m} + \mathrm{B}^*_{k,m}) r^{\|k\|-\|m\|}\Big] \leqslant \mathrm{A}_r(\lambda_r \mathrm{R})^{\|m\|}.$$

On pose $\mathrm{R} = \mathrm{R}(p, \mu, \nu)$. Soit $\mathrm{C} \in]0, \infty[$, on a d'après (I) :

$$(\mathrm{C}r)^{\|m\|}\Big[\sum_k (\mathrm{A}^*_{k,m} + \mathrm{B}^*_{k,m}) r^{\|k\|-\|m\|}\Big] \leqslant \mathrm{A}_r(\lambda_r \mathrm{CR})^{\|m\|}$$

D'autre part considérons l'expression :

$$\Delta_{k,\,m} = \frac{(\log_{q-2}\|k\|)^{\|k\|/\rho}\,(\log_{p-2}\|m\|)^{\|m\|/\mu}}{(\log_{p-2}\|k\|)^{\|k\|/\mu}\,(\log_{q-2}\|m\|)^{\|m\|/\rho}}$$

$$\Delta_{k,m} = \underbrace{\left[\frac{(\log_{p-2}\|m\|)^{1/\mu}\,(\log_{q-2}\|k\|)^{1/\rho}}{(\log_{q-2}\|m\|)^{1/\rho}\,(\log_{p-2}\|k\|)^{1/\mu}}\right]^{\|k\|}}_{e_{k,\,m}} \underbrace{\left[\frac{(\log_{p-2}\|m\|)^{1/\mu}}{(\log_{q-2}\|m\|)^{1/\rho}}\right]^{\|m\|-\|k\|}}_{\varepsilon_m}$$

On a :

$$e_{k,\,m} \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad k \leqslant m \quad \text{et} \quad \|m\| \quad \text{assez grand}$$
$$\varepsilon_m \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \|m\| \to \infty.$$

On en déduit que pour $\|m\|$ assez grand :

$$\sum_k \Delta_{k,\,m}(A^*_{k,\,m} + B^*_{k,\,m})(Cr)^{\|k\|-\|m\|} \leqslant \sum_k (A^*_{k,\,m} + B^*_{k,\,m})r^{\|k\|-\|m\|}.$$

Donc finalement :

$$(Cr)^{\|m\|}\Big[\sum_k \Delta_{k,\,m}(A^*_{k,\,m} + B^*_{k,\,m})(Cr)^{\|k\|-\|m\|}\Big] \leqslant A_r(\lambda_r\, CR)^{\|m\|}.$$

Ainsi a-t-on prouvé que : *pour tout couple* (r_1, r_2) *de nombres positifs avec* $r_1 < r_2$ *il existe* $A < \infty$ *et* $\lambda]0, 1[$ *tels que*

$$r_1^{\|m\|}\Big[\sum_k \frac{d_k(\Delta)}{d_m(\Delta)}\,\frac{(\log_{q-2}\|k\|)^{\|k\|/\rho}}{(\log_{q-2}\|m\|)^{\|m\|/\rho}}\,(|A_{k,\,m}| + |B_{k,\,m}|)\Big] \leqslant A(\lambda r_2)^{\|m\|}.$$

Or d'après lemme 3 et théorème 2 cette dernière assertion équivaut à ce qu'il faut démontrer.

Raisonnement analogue pour le cas où $\{\varphi_m\}$ est une base de $\overline{E}^p_\Delta(\mu, \nu)$.

Démonstration du théorème 3. — Il est clair d'après le lemme 3 que la transformation

$$f = \Sigma\, \lambda_k\varphi_k \to g = \Sigma\, \lambda_k z^k$$

est un automorphisme de $E_\Delta(\rho, \sigma)$ pour tout triplet (q, ρ, σ) tel que :

— ou bien $2 \leqslant q < p$ (respectivement $q > p$);
— ou bien $p = q$ et $(\rho, \sigma) < (\mu, \nu)$ (resp. $(\mu, \nu) < (\rho, \sigma)$).

On en déduit que pour toute fonction entière $f \in E^p_\Delta(\mu, \nu)$ ou $\overline{E}^p_\Delta(\mu, \nu)$ (resp. $f \notin E^p_\Delta(\mu, \nu)$) la fonction g associée est de même q-ordre et (Δ, q)-type que f. Pour avoir le théorème il ne reste plus qu'à appliquer le Lemme 1.

4. *Remarque sur les bases simples dans les domaines de Reinhart.*

Le théorème 2 peut être transposé de façon évidente aux bases simples de l'espace $H(\Delta)$ où Δ est un domaine de Reinhart complet et borné, car d'après Aizenbert et Mityagin [1] la transformation :

$$f = \Sigma\, \lambda_k z^k \to g = \Sigma\, \lambda_k d_k(\Delta) z^k,$$

où $d_k(\Delta) = \operatorname{Sup}_{\Delta}^{z} |z^k|$, est un isomorphisme vectoriel topologique de $H(\Delta)$ sur $H(U)$, U désignant le polydisque unité.

CHAPITRE 3

EXISTENCE DES BASES COMMUNES

Soient E_0 et E_1 deux parties du plan **C**. Une base commune des espaces $H(E_0)$ et $H(E_1)$ est par définition une suite de fonctions holomorphes sur un domaine contenant $E_0 \cup E_1$ qui est à la fois une base de $H(E_0)$ et de $H(E_1)$. Une base $\{f_n\}$ de $H(E_0)$ est dite prolongeable à $H(E_1)$ lorsqu'il existe une base commune $\{\tilde{f}_n\}$ des espaces $H(E_0)$ et $H(E_1)$ telle que $\tilde{f}_n = f_n$ sur $H(E_0)$ pour tout n.

Dans ce chapitre nous nous intéressons principalement au problème suivant : soit Ω un domaine du plan **C** et soit χ un compact dans Ω, existe-t-il une base commune pour les espaces $H(\chi)$ et $H(\Omega)$?

Pour qu'une base commune existe, il est nécessaire que $\Omega \setminus \chi$ soit connexe. En effet l'existence d'une base commune implique que $H(\Omega)$ est partout dense dans $H(\chi)$; supposons que $\Omega \setminus \chi$ ne soit pas connexe, alors il existe une composante connexe U de $\Omega \setminus \chi$ dont la fermeture $\overline{U}$ est compacte dans Ω, et on constate aisément que toute fonction holomorphe au voisinage de χ est une restriction d'une fonction holomorphe au voisinage de $\chi \cup U$, ce qui est impossible.

Notons que le problème a été résolu dans plusieurs cas particuliers :

— $\Omega = \mathbf{C}$ et χ est un continu, par Faber [10].

— $\Omega = \mathbf{C}$, χ régulier par Leja [13].

— Ω est simplement connexe, χ un continu, par Erokhin [8].

— Ω est le disque unité, χ régulier par Walsh et Russel [30] (par une représentation conforme on voit que ce résultat est valable pour tout Ω simplement connexe $\neq \mathbf{C}$).

Faber et Erokhin établissaient leurs résultats à l'aide de représentations conformes tandis que Leja et Walsh-Russell utilisaient la méthode des points extrémaux. D'après Levin et Tikhomirov [14], Erokhin aurait généralisé son résultat aux domaines multiplement connexes; cependant la démonstration est introuvable après le décès de Erokhin.

En 1965, Zakharyuta [33] a donné une nouvelle démonstration du résultat d'Erokhin par une technique d'espaces hilbertiens. Nous allons reprendre cette technique pour résoudre le problème dans le cas où $\Omega \neq \mathbf{C}$ et $\Omega\setminus\chi$ est régulier pour le problème de Dirichlet.

1. Préliminaires.

Nous groupons dans cette section une série de résultats utiles pour la suite.

1) Soit E un espace tonnelé (sur $\mathbf{C}$), E′ le dual de E et F un autre espace tonnelé. Deux bases $\{x_k\}$ et $\{y_k\}$ de E et F respectivement sont dites équivalentes lorsqu'il existe un isomorphisme (vectoriel topologique) T de E sur F tel que $T(x_k) = y_k \forall k$.

Si $\{x_k\}$ est une suite quelconque d'éléments de E, on pose :

$$S(\{x_k\}, E) = \left\{\{\lambda_n\} : \lambda_n \in \mathbf{C}, \sum_0^\infty \lambda_n x_n \text{ converge dans } E\right\}.$$

Lemme 0 : — *a) Deux bases* $\{x_k\}$ *et* $\{y_k\}$ *de* E *et* F *respectivement sont équivalentes si et seulement si* :

$$S(\{x_k\}, E) = S(\{y_k\}, F).$$

b) Soit $\{x_k ; x'_k\}$ *une suite biorthogonale dans* $E \times E'$ *et supposons que* E *soit réflexif, si* $\{x_k\}$ *est une base de* E *alors* $\{x'_k\}$ *est une base de* E′ *et on a* :

$$S(\{x'_k\}, E') = S^+(\{x_k\}, E)$$

où $S^+(\{x_k\}, E)$ *désigne l'espace des suites complexes* $\{\beta_n\}$ *telles que* $\sum_0^\infty \beta_n\lambda_n$ *converge pour toute* $\{\lambda_n\} \in S(\{x_k\}, E)$.

2) Soient $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ deux espaces hilbertiens avec produits scalaires $(x, y)_0$ et $(x, y)_1$, et supposons que $\mathcal{H}_1$ soit un sous-espace partout dense dans $\mathcal{H}_0$ et que l'application canonique E de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_0$ soit complètement continue.

Alors l'opérateur $B = (E^*E)^{1/2}$ est positif et complètement continu dans $\mathcal{H}_1$ et :

$$(x, y)_0 = (Bx, By)_1 \quad \text{pour } x \text{ et } y \in \mathcal{H}_1.$$

L'opérateur positif $T = (EE^*)^{-1/2}$, qui est non borné dans $\mathcal{H}_0$ et prolonge B^{-1}, a pour domaine de définition $\mathcal{H}_1$, $T(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_0$, et

$$(x, y)_1 = Tx, Ty)_0 \quad \text{pour} \quad x \quad \text{et} \quad y \in \mathcal{H}_1.$$

T engendre l'échelle hilbertienne $\mathcal{H}_\alpha$ (voir [17]), $\mathcal{H}_\alpha$ est le domaine de définition de T^α avec le produit :

$$(x, y)_\alpha = T^\alpha x, T^\alpha y)_0 \quad \text{pour} \quad x \quad \text{et} \quad y \in \mathcal{H}_\alpha.$$

Lemme 1 (Zakharyuta). — *Il existe une base orthogonale commune des espaces* $\mathcal{H}_0$ *et* $\mathcal{H}_1$ *telle que* :

$$(e_k, e_k)_\alpha = \mu_k^{2\alpha} \quad \textit{pour tout} \quad a \in [0, 1], \quad \textit{avec} \quad \mu_k \nearrow \infty.$$

3) On considère trois espaces hilbertiens $\mathcal{H}_2 \subsetneq \mathcal{H}_1 \subsetneq \mathcal{H}_0$ avec les produits scalaires $(x, y)_i$ $(i = 0, 1, 2)$ tels que :

$$N_0(x, x)_0 \leqslant N_1(x, x)_1 \leqslant N_2(x, x)_2,$$

on suppose que $\mathcal{H}_j$ soit partout dense dans $\mathcal{H}_i$ pour $j > i$.

Soit E_{ij} l'application canonique de $\mathcal{H}_i$ dans $\mathcal{H}_j$ $(i > j)$ on pose :

$$B_{ij} = E_{ij}^* E_{ij})^{1/2}, \qquad T_{ij} = (E_{ij} E_{ij}^*)^{-1/2}.$$

On considère les échelles hilbertiennes $\mathcal{H}_{ij}^\alpha$ avec les produits scalaires :

$$(x, y)_{ij}^\alpha = (T_{ij}^\alpha x, T_{ij}^\alpha y)_j.$$

Lemme 2 (Zakharyuta).

$$\mathcal{H}_{21}^\alpha \subsetneq \mathcal{H}_{20}^\alpha \quad ((x, x)_{20}^\alpha \leqslant N_1^{1-\alpha} . N_2^{\alpha-1} . (x, x)_{21}^\alpha)$$
$$\mathcal{H}_{20}^\alpha \subsetneq \mathcal{H}_{10}^\alpha \quad ((x, x)_{10}^\alpha \leqslant N_2^\alpha . N_1^{-\alpha} . (x, x)_{20}^\alpha).$$

4) Nous désignons par $h(z)$ la mesure harmonique de la frontière de Ω par rapport au domaine $\Omega\setminus\chi$ et nous posons pour tout $\alpha \in]0, 1[$:

$$\Omega_\alpha = \{z \in \Omega\setminus\chi : \ h(z) < \alpha\} \cup \chi$$
$$\Gamma_\alpha = \{z \in \Omega\setminus\chi : \ h(z) = \alpha\}.$$
$$|f|_\alpha = \operatorname*{Sup}_{z\in\Gamma_\alpha} |f(z)|.$$

Soit $\{f_n; \varphi_n\}$ un système biorthogonal dans $H(\chi)\times H_0\left(\complement\chi\right)$:

$$\langle f_p, \quad \varphi_q\rangle = \int_{\gamma_p} f_p(z)\varphi_q(z)\, dz = S_{p,q}$$

on constate aisément que ce système est aussi biorthogonal dans $H(\Omega_\alpha) \times H_0\left(\complement\Omega_\alpha\right)$, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, et $H(\Omega) \times H_0\left(\complement\Omega\right)$.

Proposition 1. — *Si une suite de fonctions holomorphes $\{f_n\}$ est une base commune des espaces $H(\chi)$ et $H(\Omega)$, alors elle est aussi une base de $H(\Omega_\alpha)$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.*

Démonstration. — Soit $\{\varphi_n\}$ la suite dans $H_0\left(\complement\chi\right)$ formant avec $\{f_n\}$ le système biorthogonal $\{f_n, \varphi_n\}$ dans $H(\chi) \times H_0\left(\complement\chi\right)$, $H(\Omega_\alpha) \times H_0\left(\complement\Omega_\alpha\right)$ et $H(\Omega) \times H_0\left(\complement\Omega\right)$.

a) D'après le théorème 2 du chapitre 1, le fait que $\{f_n\}$ est une base de $H(\Omega)$ implique :

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \text{Pour tout } a \in]0, 1[, \text{ il existe } b \in]0, 1[\text{ tel que :} \\ \qquad \operatorname*{Sup}_n |f_n|_a \cdot |\varphi_n|_b < \infty. \end{cases}$$

Le fait que $\{f_n\}$ est une base de $H(\chi)$ implique :

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} \text{Pour tout } b \in]0, 1[, \text{ il existe } a \in]0, 1[\text{ tel que} \\ \qquad \operatorname*{Sup}_n |f_n|_a \cdot |\varphi_n|_b < \infty. \end{cases}$$

Donc en appliquant le théorème de deux constantes de Nevanlinna on a :

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \text{Pour tout } a \in]0, \alpha[, \text{ il existe } b \in]0, \alpha[\text{ tel que :} \\ \qquad \operatorname*{Sup}_n |f_n|_a \cdot |\varphi_n|_b < \infty. \end{cases}$$

b) Montrons que $\{f_n\}$ est totale dans $H(\Omega_\alpha)$. Pour cela il suffit de montrer que $H(\Omega)$ est partout dense dans $H(\Omega_\alpha)$.

Pour fixer les idées, supposons que Ω_α soit limité par un nombre fini de contours de Jordan disjoints $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \ldots \mathcal{C}_p, \mathcal{C}_0$ contenant tous les autres dans son intérieur, posons :

$$\theta_i = \text{Intérieur de } \mathcal{C}_i, \qquad \mathcal{K}_i = \complement\,\overline{\theta}_i (i = 0, 1, \ldots, p).$$

Chaque $\mathcal{K}_i$ contient un point $z_i \notin \Omega$. Nous avons :

$$H(\Omega_\alpha) = H(\theta_0) \oplus H_0(\mathcal{K}_1) \oplus H_0(\mathcal{K}_2) \oplus \cdots \oplus H_0(\mathcal{K}_p),$$

d'autre part il est bien connu que :

— $\{z^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ est totale dans $H(\theta_0)$.

— $\left\{\dfrac{1}{(z-z_i)^{n+1}}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ est totale dans $H_0(\mathcal{K}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Donc l'espace $H(\mathbf{C}\setminus\{z_1, z_2, \ldots, z_p\})$ est partout dense dans $H(\Omega_\alpha)$. Puisque $H(\Omega) \supset H(\mathbf{C}\setminus\{z_1, z_2, \ldots, z_p\})$ on conclut que $H(\Omega)$ est partout dense dans $H(\Omega_\alpha)$. Donc $\{f_n\}$ est totale dans $H(\Omega_\alpha)$. Notre raisonnement s'applique également aux autres configurations de la frontière de Ω_α.

D'après le théorème 3 du chapitre 1, la totalité de $\{f_n\}$ dans $H(\Omega_\alpha)$ et (C) impliquent que $\{f_n\}$ est une base de l'espace $H(\Omega_\alpha)$.

C.Q.F.D

2. Théorème principal.

1. Soit φ le flux de $h(z)$ à travers tout contour Γ séparant χ et $\complement\,\Omega$:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left|\frac{\partial h}{\partial n}\right| ds$$

$\dfrac{\partial h}{\partial n}$ désigne la dérivée de h suivant la normale de la courbe Γ, posons :

$$R = \exp\frac{1}{\varphi}.$$

Soit μ une mesure finie positive et admissible (au sens de Widom, voir par. 1.6 du chap. 2) sur χ, $L^2_P(\chi, \mu)$ désigne le sous-espace fermé de $L^2(\chi, \mu)$ engendré par les polynômes.

THÉORÈME 1. — *Il existe une base orthonormale* $\{e_k(z)\}$ *de* $L^2_p(\chi, \mu)$ *qui est une base commune de* $H(\chi)$ *et* $H(\Omega)$ *ayant la propriété suivante* :

$$\lim_{k\to\infty} (|e_k|_\alpha)^{1/k} = R^\alpha \quad \forall \alpha \in]0,1[.$$

La base duale $\{e'_k(z)\}$ *est une base commune des espaces* $H_0\left(\complement\,\Omega\right)$ *et* $H_0\left(\complement\,\chi\right)$ *ayant la propriété* :

$$\lim_{k\to\infty} (|e'_k|_\alpha)^{1/k} = R^{-\alpha} \quad \forall \alpha \in]0, 1[.$$

La suite de cette section II est consacrée à la démonstration de ce théorème.

2. Soit $\{P_n\}$ la base déjà étudiée au par. 1.6. du chap. 2. Pour tout $\rho \geqslant 1$ désignons par F_ρ l'espace hilbertien des fonctions $f(z) = \sum_0^\infty c_n P_n(z)$ avec la norme :

$$\|f\|_{F_\rho} = \left(\sum_0^\infty |c_n|^2 \mu_n^2 \rho^{2n}\right)^{1/2} < \infty \qquad (^3)$$

on voit facilement que :

$$F_1 = L^2_p(\chi, \mu), \qquad F_\rho \subsetneq F_1 \quad \text{pour tout} \quad \rho > 1,$$
$$H(\overline{\mathcal{K}}_\rho) \subsetneq F_\rho \subsetneq H(\mathcal{K}_\rho) \quad \text{pour tout} \quad \rho > 1. \qquad (1)$$

LEMME 3. — *Si l'on prend, au paragraphe* 1.2., $\mathcal{H}_1 = F_\rho$ *et* $\mathcal{H}_0 = F_1$, *alors* $\mathcal{H}_\alpha$ *s'identifie à* F_{ρ^α}.

3. On peut supposer sans restreindre la généralité que Ω contienne l'origine 0. Soit $\{\varphi_n\}$ la base simple de 2e espèce dont l'existence est attestée par le théorème 2 du chapitre 2. Pour tout $r \in]0, 1[$ désignons par G_r l'espace hilbertien des fonctions holomorphes $f(z) = \sum_0^\infty c_n \varphi_n(z)$ avec la norme :

$$\|f\|_{G_r} = \left(\sum_0^\infty |c_n|^2 \frac{r^{2n}}{\lambda^{2n}}\right)^{1/2} < \infty$$

(3) Note sur μ_n : à ne pas confondre avec μ_n du lemme 1.

λ désigne la capacité de l'image de $\complement\Omega$ par l'inversion $z \to \frac{1}{z}$. On a :

$$H(\bar{I}_r) \subsetneq G_r \subsetneq H(I_r) \quad \text{pour tout} \quad r \in]0, 1[. \tag{2}$$

LEMME 4. — *Si* $\mathcal{H}_1 = G_1$ *et* $\mathcal{H}_0 = G_r$, *alors* $\mathcal{H}_\alpha$ *s'identifie à* $G_{r^{1-\alpha}}$.

4. On pose $H_1 = G_1$ et $H_0 = F_1$, on construit les espaces H_α $(0 < \alpha < 1)$ à partir de H_1 et H_0 suivant le procédé du paragraphe 1.2. D'après le lemme 1 il existe une base commune orthogonale $\{e_n\}$ des espaces $H_\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ avec :

$$(e_n, e_n)_\alpha = \mu_n^{2\alpha}, \qquad \mu_n \nearrow \infty.$$

On peut identifier H_α à l'espace hilbertien des fonctions $f(z) = \sum_0^\infty c_n e_n(z)$ avec la norme $\|f\|_{H_\alpha}$ finie :

$$\|f\|_{H_\alpha} = \sum_0^\infty |c_n|^2 \mu_n^{2\alpha} < \infty.$$

On va montrer que $\{e_n(z)\}$ est une base commune des espaces $H(\Omega)$ et $H(\chi)$. Pour cela il suffit de montrer que :

$$H(\chi) = \lim_{\alpha \searrow 0} \operatorname{ind} H_\alpha, \quad H(\Omega) = \lim_{\alpha \nearrow 1} \operatorname{proj} H_\alpha.$$

a) $H(\chi) = \lim\limits_{\alpha \searrow 0} \operatorname{ind} H_\alpha$.

On peut choisir ρ_0 et $\rho_1 < 1$ tels que :

$$\bar{\mathcal{K}}_{\rho_0} \subset \Omega \qquad \text{et} \qquad \bar{\Omega} \subset \mathcal{K}_{\rho_1}.$$

On applique le lemme 2 avec $\mathcal{H}_2 = F_{\rho_1}, \mathcal{H}_1 = G_1$ et $\mathcal{H}_0 = F_1$; en remarquant que $\mathcal{H}_{10}^\alpha = H_\alpha$ et $\mathcal{H}_{20}^\alpha = F_{\rho_1^\alpha}$ on a :

$$F_{\rho_1^\alpha} \subsetneq H_\alpha.$$

Maintenant si l'on applique le lemme 2 avec $\mathcal{H}_2 = G_1$, $\mathcal{H}_1 = F_{\rho_0}$ et $\mathcal{H}_0 = F_1$ alors on a :

$$H_\alpha \subsetneq F_{\rho_0^\alpha}.$$

Donc :

$$F_{\rho_1^\alpha} \subsetneq H_\alpha \subsetneq F_{\rho_0^\alpha}. \tag{3}$$

Quand α décroît vers 0, ρ_1^α et ρ_0^α décroissent vers 1 et (1) donne :

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \operatorname{ind} F_{\rho_i^\alpha} = H(\chi) \quad (i = 0, 1),$$

donc en tenant compte de (3) on a :

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \operatorname{ind} H_\alpha = H(\chi). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

b) $H(\Omega) = \lim\limits_{\alpha \nearrow 1} \operatorname{proj} H_\alpha$.

Pour un certain β assez petit on a : $\overline{\mathcal{K}}_{\rho_1^\beta} \subset \Omega$.

On peut trouver r_0 et $r_1 (0 < r_0 < r_1 < 1)$ tel que :

$$\overline{I}_{r_0} \subset \mathcal{K}_{\rho_0^\beta}, \qquad I_{r_1} \subset \overline{\mathcal{K}}_{\rho_1^\beta}$$

(3) et (2) donnent :

$$G_{r_1} \subsetneq H_\beta \subsetneq G_{r_0}.$$

On applique le lemme 2 avec $\mathcal{H}_2 = G_1, \mathcal{H}_1 = G_{r_1}$ et $\mathcal{H}_0 = H_\beta$; en remarquant que $\mathcal{H}_{20}^\alpha = H_{\alpha_1}$ avec $\alpha_1 = \alpha(1 - \beta) + \beta$, et $\mathcal{H}_{21}^\alpha = G_{r_1^{1-\alpha}}$, on a :

$$G_{r_1^{1-\alpha}} \subsetneq H_{\alpha_1}.$$

Maintenant si l'on applique le lemme 2 avec $\mathcal{H}_2 = G_1, \mathcal{H}_1 = H_\beta$ et $\mathcal{H}_0 = G_{r_0}$ alors on obtient :

$$H_{\alpha_1} \subsetneq G_{r_0^{1-\alpha}}.$$

Donc si l'on pose $\alpha_1 = \alpha(1 - \beta) + \beta = \theta$, $r_1^{1-\alpha} = a(\theta)$ et $r_0^{1-\alpha} = b(\theta)$ on a :

$$G_{a(\theta)} \subsetneq H_\theta \subsetneq G_{b(\theta)}.$$

Lorsque θ croît vers 1 alors $a(\theta)$ et $b(\theta)$ croissent vers 1 aussi et d'après (2) :

$$\lim_{\theta \nearrow 1} \operatorname{proj} G_{a(\theta)} = \lim_{\theta \nearrow 1} \operatorname{proj} G_{b(\theta)} = H(\Omega).$$

Donc :

$$\lim_{\theta \nearrow 1} \operatorname{proj} H_\theta = H(\Omega) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

5. Il nous reste à établir les formules :

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} (|e_n|_\alpha)^{1/n} = R^\alpha \quad (\forall \alpha \in]0, 1[) \\ &\lim (|e'_n|_\alpha)^{1/n} = R^{-\alpha} \quad (\forall \alpha \in]0, 1[). \end{aligned} \qquad (\mathcal{F})$$

Nous procédons par plusieurs étapes.

a) Soit $A(\overline{\Omega}_\alpha)$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}_\alpha$ et holomorphes sur Ω_α, c'est un espace de Banach avec la norme uniforme. On a :

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \lim_{\alpha \nearrow 1} \text{proj}\, A(\overline{\Omega}_\alpha) = \lim_{\alpha \nearrow 1} \text{proj}\, H_\alpha \\ H(\chi) &= \lim_{\alpha \searrow 0} \text{ind}\, A(\overline{\Omega}_\alpha) = \lim_{\alpha \searrow 0} \text{ind}\, H_\alpha. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on peut choisir une fonction $\delta_1(\delta)$ $(0 < \delta < 1)$ qui décroît vers 0 avec δ telle que :

$$\begin{aligned} |e_k|_{\delta_1} &\leqslant c_1(\delta) \| e_k \|_{H_\delta} = c_1(\delta) \mu_k^\delta \\ |e_k|_{1-\delta} &\leqslant c_1(\delta) \| e_k \|_{H_{1-\delta_1}} = c_1(\delta) \mu_k^{1-\delta_1}. \end{aligned}$$

Le théorème de deux constantes donne pour tout

$$\alpha \in]\delta_1, 1 - \delta[$$
$$|e_k|_\alpha \leqslant |e_k|_{\delta_1}^{1-\sigma} |e_k|_{1-\delta}^{\sigma} \leqslant c(\alpha, \varepsilon) \mu_k^{\alpha+\varepsilon}$$

avec

$$\sigma = (\alpha - \delta).(1 - \delta - \delta_1)^{-1}, \qquad c(\alpha, \varepsilon) = c_1(\delta)$$

et

$$\varepsilon = \delta_1(1 - \sigma) + \sigma(1 - \delta_1) - \alpha.$$

Puisque $\varepsilon \searrow 0$ lorsque $\delta \searrow 0$, nous avons :

$$|e_k|_\alpha \leqslant c(\alpha, \varepsilon) \mu_k^{\alpha+\varepsilon} \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in]0, 1[\quad \text{et} \quad \varepsilon > 0 \quad (4)$$

b) Soit T l'opérateur qui à chaque $x = \sum_0^\infty \xi_k e_k \in H_\alpha$ associe $x' = \sum_0^\infty \xi'_k e'_k$ avec $\xi'_k = \xi_k \mu_k^{2\alpha}$. T est une isométrie de H_α sur l'espace hilbertien H_α^* des fonctions $f = \sum_0^\infty \zeta_k e'_k$ avec :

$$\|f\|_\alpha^* = \left(\sum_0^\infty |\zeta_k|^2 \mu_k^{-2\alpha} \right)^{1/2} < \infty$$

$\{e'_k\}$ désigne la base duale de $\{e_k\}$, c'est une base commune des espaces $H_0(\complement\, \Omega)$ et $H_0(\complement\, \chi)$.

Toute $f = \sum_0^\infty \zeta_k e'_k \in H_\alpha^*$ définit une forme linéaire continue sur H_α de la manière suivante :

$$(f, y)_\alpha = \sum_0^\infty \zeta_k \eta_k \quad \text{pour tout} \quad y = \sum_0^\infty \eta_k e_k \in H_\alpha;$$

sur l'espace $H(\Omega)$ qui est partout dense dans H_α cette fonctionnelle peut être donnée par la formule :

$$(f, y)_\alpha = \int_\gamma f(z)y(z)\,dz$$

où γ est un cycle dans Ω_α, cela montre que f définit la même fonctionnelle sur les espaces H_β pour $\beta \in [\alpha, 1[$. Nous avons

$$H_0\left(\complement\,\Omega\right) = \lim_{\alpha \nearrow 1} \text{ind}\ A_0(\overline{\Delta}_\alpha) = \lim_{\alpha \nearrow 1} \text{ind}\ H_\alpha^*,$$
$$H_0\left(\complement\,\chi\right) = \lim_{\alpha \searrow 0} \text{proj}\ A_0(\overline{\Delta}_\alpha) = \lim_{\alpha \searrow 0} \text{proj}\ H_\alpha^*,$$
$$\left(\Delta_\alpha = \complement\,\Omega_\alpha,\quad A_0(\overline{\Delta}_\alpha) = \{f \in A(\overline{\Delta}_\alpha) : f(\infty) = 0\}\right),$$

en raisonnant comme dans $a)$ nous avons :

$$|e_k'|_\alpha \leqslant c(\alpha, \varepsilon)\mu_k^{-\alpha+\varepsilon}. \tag{5}$$

Maintenant si nous tenons compte du fait que :

$$1 = \langle e_k', e_k\rangle = \int_{\Gamma_\alpha^\pm} e_k'(z)e_k(z)\,dz \leqslant L_\alpha |e_k|_\alpha |e_k'|_\alpha$$

alors les inégalités (4) et (5) donnent :

$$A(\alpha, \varepsilon)\mu_k^{\alpha-\varepsilon} \leqslant |e_k|_\alpha \leqslant B(\alpha, \varepsilon)\mu_k^{\alpha+\varepsilon} \tag{6}$$
$$A(\alpha, \varepsilon)\mu_k^{-\alpha-\varepsilon} \leqslant |e_k'| \leqslant B(\alpha, \varepsilon)\mu_k^{-\alpha+\varepsilon}. \tag{7}$$

$c)$ D'après (6) et (7) les formules $(\mathcal{F})$ équivalent à la formule :

$$\log \mu_k \sim k \log R \quad (\text{pour}\quad k \to \infty). \tag{8}$$

On va établir (8). Pour tout $\alpha \in]1/2, 1[$ on pose :

$$D_\alpha = \Omega_\alpha \cap \Delta_{1-\alpha}, \qquad |f|_\alpha' = \sup_{z \in D_\alpha} |f(z)|$$
$$g_n(z) = \begin{cases} e_k(z) & \text{pour}\quad n = 2k \\ \mu_k e_k'(z) & \text{pour}\quad n = 2k+1. \end{cases}$$

D'après (6) et (7) il est clair que :

$$c'(\alpha, \varepsilon)\mu_k^{\alpha-\varepsilon} \leqslant |g_n|_\alpha' \leqslant c(\alpha, \varepsilon)\mu_k^{\alpha+\varepsilon}\left(1 = \left[\frac{n}{2}\right]\right) \tag{9}$$

$\{g_n\}$ est une base de $H(D_\alpha)$, car $\{e_k\}$ est une base de $H(\Omega_\alpha)$,

$\{\mu_k e'_k\}$ de $H_0(\Delta_{1-\alpha})$ et $H(D_\alpha) = H(\Omega_\alpha) \oplus H_0(\Delta_{1-\alpha})$. Considérons l'échelle de Riesz $\{L(e^{\sigma a_n})\}$ avec :

$a_n = \log \mu_k$, $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ = partie entière de $\frac{n}{2}$, et désignons par $\{k_n\}$ sa base naturelle.

Lemme 5. — *La formule* $\sum_0^\infty \zeta_n g_n \to \sum_0^\infty \zeta_n k_n$ *établit un isomorphisme simultané des espaces* $H(D_\alpha)$ *sur les espaces* $\Lambda_\alpha(a_n) = \bigcap_{\sigma<\alpha} L(e^{\sigma a_n})$ $(1/2 < \alpha < 1)$.

Démonstration. — Le lemme 0 dit que : $\Sigma\, \zeta_n g_n \to \Sigma\, \zeta_n k_n$ est un isomorphisme de $H(D_\alpha)$ sur $\Lambda_\alpha(a_n)$ si et seulement si la convergente dans $H(D_\alpha)$ de la série $\Sigma\, \zeta_n g_n$ équivaut à la condition $\{\zeta_n\} \in \Lambda_\alpha(a_n)$, pour toute suite complexe $\{\zeta_n\}$.

Supposons que $\Sigma\, \zeta_n g_n$ converge dans $H(D_\alpha)$, puisque $\{g_n\}$ est une base absolue de $H(D_\alpha)$ on a pour tout $\varepsilon \in]0, \alpha[$:

$$\Sigma\, |\zeta_n| |g_n|'_{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}} < \infty.$$

D'après (9) on a :

$$\Sigma\, |\zeta_n| \mu_k^{\alpha-\varepsilon} \leqslant c\, \Sigma\, |\zeta_n| |g_n|'_{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}} < \infty \quad \left(k = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

ε peut être choisi arbitrairement petit, donc $\{\zeta_n\} \in \Lambda_\alpha(a_n)$. Inversement si $\{\zeta_n\} \in \Lambda_\alpha(a_n)$ alors pour tout $\varepsilon \in]0, \alpha[$ on a :

$$\sum_0^\infty |\zeta_n| \mu_k^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}} < \infty \quad \left(k = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

donc d'après (9) :

$$\Sigma\, |\zeta_n| |g_n|'_{\alpha-\varepsilon} \leqslant c'\, \Sigma\, |\zeta_n| \mu_k^{\alpha-\frac{3}{2}} < \infty$$

pour ε arbitrairement petit. Donc $\Sigma\, \zeta_n g_n(z)$ converge normalement sur tout compact de D_α. Fin de la dém. du lemme 5.

Supposons pour le moment que la frontière de $\Omega \setminus \chi$ se compose d'un nombre fini de contours de Jordan disjoints dont l'un contient tous les autres dans son intérieur, dans cette hypothèse on a le

LEMME 6. — *Il existe une base commune* $\{\varphi_n(z)\}$ *pour les espaces* $H(D_\alpha)$ $(1/2) < \alpha < 1)$ *qui possède la propriété suivante* :

$$\mathcal{C}'(\alpha, \varepsilon)R^{\alpha k} \leqslant |\varphi_n|'_\alpha \leqslant \mathcal{C}(\alpha, \varepsilon)R^{\alpha k} \quad \left(k = \left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Démonstration. — Nous rappelons que $R = \exp \dfrac{1}{\varphi}$ où φ est le flux de $h(z)$ à travers tout contour séparant $\complement\,\Omega$ et χ.

D'après Walsh (Théorème 3.1.2 de [28*c*]) si l'on désigne par $B_1, B_2 \dots B_p$ les contours composant la frontière de Ω et par $C_1, C_2 \dots C_q$ ceux composant la frontière de Ω, alors il existe une représentation conforme ψ de $D = \Omega\diagdown\chi$ sur un domaine Δ défini par :

$$1 < \frac{A(z-\alpha_1)^{m_1}(z-\alpha_2)^{m_2} \dots (z-\alpha_p)^{m_p}}{(z-\beta_1)^{n_1}(z-\beta_2)^{n_2} \dots (z-\beta_q)^{n_q}} < R$$

avec $m_j > 0$, $n_j > 0$ et $\Sigma\, m_j = \Sigma\, n_j = 1$.

— ψ est une bijection continue de $\overline{D}$ sur $\overline{\Delta}$.

— Les images de B_j et C_j séparent les α_j et β_j respectivement. Posons :

$$u(z) = \left|\frac{A(z-\alpha_1)^{m_1} \dots (z-\alpha_p)^{m_p}}{(z-\beta_1)^{n_1} \dots (z-\beta_q)^{n_q}}\right|$$

$h^*(z) = \dfrac{\log u(z)}{\log R}$ (sur le domaine Δ la fonction $h^*(z)$ est égale à $h[\psi^{-1}(z)]$).

$$\Omega^*_\alpha = \{z : h^*(z) < \alpha\}, \quad \Delta^*_\alpha = \complement\,\overline{\Omega^*_\alpha}.$$

Un autre théorème de Walsh (Th. 3.2.1 de [28*c*]) établit l'existence d'une base commune $\{u_n(z)\}$ pour les espaces $H(\Omega^*_\alpha)$ telle que :

$$u_n(z) = \frac{A(z-a_1)(z-a_2) \dots (z-a_n)}{(z-b_1)(z-b_2) \dots (z-b_n)},$$

$$0 < A_{\mathcal{K}} < \frac{u)(z)}{[u(z)]^n} < B_{\mathcal{K}} < \infty \quad \text{pour} \quad z \in \mathcal{K},$$

$$\forall\mathcal{K} \text{ compact} \subset \complement\,\{a_j\} \cap \complement\,\{b_j\},$$

dans l'expression de $u_n(z)$ chaque a_n (resp. b_n) est un certain α_j (resp. β_j).

Soit $\{\mathfrak{V}_n\}$ la base duale de $\{u_n\}$, c'est une base commune des espaces $H_0(\Delta_\alpha)$ et d'après [28*a*, p. 190] on a :

$$\mathfrak{V}_n(z) = \frac{(a_{n+1} - b_n).(z - b_1).(z - b_2) \ldots (z - b_{n-1})}{A.2\pi i.(z - a_1).(z - a_2) \ldots (z - a_{n+1})}$$

En posant :

$$\varphi_n^*(z) = \begin{cases} u_k(z) & \text{pour} \quad n = 2k \\ R^{k+1}\varphi_{k+1}(z) & \text{pour} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\varphi_n(z) = \varphi_n^*[\psi(z)]$$

nous obtenons la base $\{\varphi_n\}$ du lemme. Fin de la démonstration du L. 6. Posons :

$$b_n = k \log R \left(k = \left[\frac{n+1}{2}\right]\right), \qquad \Lambda_\alpha(b_n) = \bigcap_{\sigma<\alpha} L(e^{\sigma b_n})$$

$\{l_n\}$: base naturelle de l'échelle de Riesz $\{L(e^{\sigma b_n})\}$. Alors le lemme 6 montre que la formule :

$$\Sigma\ \xi_n\varphi_n \to \Sigma\ \xi_n l_n$$

établit un isomorphisme simultané des espaces $H(\Delta_\alpha)$ sur les espaces $\Lambda_\alpha(b_n)$. Ce fait et le lemme 5 nous permettent d'affirmer que la formule :

$$\Sigma\ \zeta_n k_n \to \Sigma\ \zeta_n g_n = \Sigma\ \xi_n\varphi_n \to \Sigma\ \xi_n l_n$$

établit un isomorphisme simultané des espaces $\Lambda_a(a_n)$ sur les espaces $\Lambda_\alpha(b_n)$ $(1/2 < \alpha < 1)$. Donc d'après un résultat de Zakharyuta (théorème 2 de [33]) on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, c'est-à-dire $\log \mu_k \sim k \log R$.

Il nous reste à montrer que (8) reste valable dans le cas général, ce que nous allons faire au sous-paragraphe suivant.

d) On peut choisir β_0 et β_1, avec $0 < \beta_0 < \beta_1 < 1$, tels que

— La frontière de Ω_{β_1} est composée d'un nombre fini de contours de Jordan disjoints dont l'un contient tous les autres dans son intérieur.

— La frontière de Ω_{β_0} est composée d'un nombre fini de contours de Jordan disjoints extérieurs les uns aux autres.

Posons :

$$\theta_1 = \Omega_{\beta_1}, \qquad \theta_0 = \Omega_{\beta_0}$$

$$\theta_\alpha = \left\{ z \in \theta_1 \diagdown \overline{\theta}_0 : \frac{h(z) - \beta_0}{\beta_1 - \beta_0} < \alpha \right\} \cup \overline{\theta}_0.$$

$$\mathfrak{D}_\alpha = \complement \overline{\theta}_\alpha, \qquad \nu_k = \mu_k^{\beta_1 - \beta_0}, \qquad f_k = \mu_k^{-\beta_0} e_k.$$

Les inégalités (6) et (7) donnent :

$$c(\alpha, \varepsilon)\nu_k^{\alpha-\varepsilon} \leqslant |f_k|_{\theta_\alpha} \leqslant c'(\alpha, \varepsilon)\nu_k^{\alpha+\varepsilon}$$
$$c(\alpha, \varepsilon)\nu_k^{-\alpha-\varepsilon} \leqslant |f'_k|_{\mathfrak{D}_\alpha} \leqslant c'(\alpha, \varepsilon)\nu_k^{-\alpha+\varepsilon} (f'_k = \mu_k^{\beta_0} e'_k).$$

Par le raisonnement utilisé dans c) on voit que

$$\log \nu_k \sim k \log \mathrm{S} (k \to \infty)$$

avec :

$$\mathrm{S} = \exp \frac{1}{\psi}, \qquad \psi = \text{Flux de } \frac{h(z) - \beta_0}{\beta_1 - \beta_0}$$

à travers tout contour séparant $\overline{\theta}_0$ et $\complement \theta_1 = \frac{\varphi}{\beta_1 - \beta_0}$. Donc :

$$\log \mu_k \sim k \log \mathrm{R}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

3. Étude de quelques cas particuliers.

1. Considérons le cas où Ω est limité par un nombre fini de contours de Jordan dont l'un contient tous les autres dans son intérieur. Soit $\{f_n\}$ la base donnée comme exemple au paragraphe 1.8 du chapitre 2, posons :

$$\nu_n^2 = \iint_\Omega |f_n(x + iy)|^2 \, dx \, dy.$$

G_r = espace hilbertien des fonctions holomorphes $f = \Sigma \, c_n f_n$ telles que $\|f\|_{\mathrm{G}_r} = \left(\sum_0^\infty |c_n|^2 \nu_n^2 r^{2n} \right)^{1/2} < \infty$.

$$\mathrm{G}_1 = \mathrm{L}_\mathrm{B}^2(\Omega) \quad \text{(espace de Bergman).}$$

La relation (2), le lemme 4 et le reste de la démonstration du théorème 1 sont encore valables, donc on a :

THÉORÈME 2. — *Il existe une base* $\{e_k\}$ *qui jouit de toutes les propriétés mentionnées dans le théorème* 1 *et qui est de plus une base orthogonale de* $\mathrm{L}_\mathrm{B}^2(\Omega)$.

Remarque. — On voit sans peine que toute base orthogonale commune $\{e_k\}$ des espaces $L^2_B(\Omega)$ et $L^2_P(\chi, \mu)$ vérifiant :

$$\|e_k\|_{L^2_P(\chi,\mu)} = 1, \qquad \|e_k\|_{L^2_B(\Omega)} \nearrow \infty,$$

possède toutes les propriétés mentionnées, en particulier le système doublement orthogonal de Bergman (voir [3], p. 14) pour $L^2_B(\Omega)$ et $L^2_B(\omega)$ dans le cas où $\omega = \mathring{\chi}$ est limité par un nombre fini de contours de Jordan disjoints.

2. Nous supposons maintenant que la frontière de $\Omega \setminus \chi$ soit composée d'un nombre fini de contours de Jordan analytiques disjoints dont l'un contient tous les autres dans son intérieur, nous posons :

$$\Omega_0 = \text{Intérieur de } \chi, \qquad \Omega_1 = \Omega.$$

Soient $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ deux espaces hilbertiens tels que :

$$H(\overline{\Omega}_i) \subsetneq \mathcal{H}_i \subsetneq H(\Omega_i) \quad (i = 0,1). \tag{10}$$

Théorème 3. — *Si* $\{g_n\}$ *est une base orthogonale commune des espaces* $\mathcal{H}_i$ *telle que* :

$$\|g_n\|_{\mathcal{H}_0} = 1, \qquad \gamma_n = \|g_n\|_{\mathcal{H}_1} \nearrow \infty.$$

Alors $\{g_n\}$ *est une base commune des espaces* $H(\chi)$ *et* $H(\Omega)$ *ayant la propriété* :

$$\lim_{n\to\infty} (|g_n|_\alpha)^{1/n} = R^\alpha \quad \forall \alpha \in]0, 1[.$$

Démonstration. — Toute fonctionnelle (forme linéaire continue) l sur $\mathcal{H}_i$ est une fonctionnelle sur $H(\overline{\Omega}_i)$, elle s'identifie donc à une fonction $\varphi \in H_0\left(\complement \overline{\Omega}_i\right)$:

$$l(f) = \langle \varphi, f \rangle = \int_{\gamma_f} \varphi(z) f(z)\, dz \quad \text{pour toute} \quad f \in H(\overline{\Omega}_i).$$

De cette manière on voit que le dual $\mathcal{H}'_i$ de $\mathcal{H}_i$ s'identifie à un espace hilbertien $\mathcal{H}^*_i$ de fonctions holomorphes sur $\complement \overline{\Omega}_i$ et nulles au point infini avec la norme :

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}^*_i} = \|l\|_{\mathcal{H}'_i}$$

On a :

$$\mathrm{H}_0\left(\complement\,\Omega_0\right) \subsetneq \mathrm{H}_0^* \subsetneq \mathrm{H}_0\left(\complement\,\overline{\Omega}_0\right) \subsetneq \mathrm{H}_0\left(\complement\,\Omega_1\right) \subsetneq \mathrm{H}_1^* \subsetneq \mathrm{H}_0\left(\complement\,\overline{\Omega}_1\right) \qquad (10')$$

Soit $\{g'_n\}$ la suite dans $\mathcal{H}_0^*$ biorthogonale à $\{g_n\}$:

$$\langle g'_p, g_q\rangle = \int_\gamma g'_p(z) g_q(z)\, dz = \delta_{p,q}.$$

$\{g'_n;\ g_n\}$ est un système biorthogonal dans $\mathrm{H}_0\left(\complement\,\omega\right) \times \mathrm{H}(\omega)$ pour tout domaine ω contenant χ tel que $\omega\setminus\chi$ soit connexe.

Posons $\Delta_\alpha = \complement\,\overline{\Omega}_\alpha$. Nous allons établir les inégalités :

$$|g_n|_{\Omega_\alpha} \leqslant c(\alpha, \varepsilon)\ \gamma_n^{\alpha+\varepsilon} \qquad \forall n \qquad (11)$$

$$|g'_n|_{\Delta_\alpha} \leqslant c(\alpha, \varepsilon)\ \gamma_n^{-\alpha+\varepsilon} \qquad \forall n \qquad (11')$$

valables pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et tout $\varepsilon > 0$.

Puisque la frontière de $\Omega\setminus\chi$ est analytique la fonction $h(z)$ se prolonge en une fonction harmonique sur un domaine $\mathcal{V}$ contenant $\overline{\Omega\setminus\chi}$. On pose :

$$m = \operatorname*{Inf}_{z\in\mathcal{V}} h(z), \qquad \mathrm{M} = \operatorname*{Sup}_{z\in\mathcal{V}} h(z)$$

$$\Omega_\alpha = \{\mathcal{V} \cup \chi\}\setminus\{z \in \mathcal{V} : h(z) \geqslant \alpha\} \quad (m < \alpha < \mathrm{M}).$$

a) Soient $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ deux suites strictement croissantes telles que :

$$m < \alpha_n < 0, \qquad \lim \alpha_n = 0$$

$$0 < \beta_n < 1, \qquad \lim \beta_n = 1.$$

On pose :

$$\Omega_n^\circ = \Omega_{\alpha_n}, \qquad \Omega'_n = \Omega_{\beta_n}.$$

$$\Omega_n^\alpha = \{\mathcal{V} \cup \chi\}\setminus\left\{z \in \mathcal{V} : \frac{h(z) - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n} \geqslant \alpha\right\}.$$

On a alors :

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n^\alpha = \Omega_\alpha, \qquad \overline{\Omega}_n^\alpha \subset \Omega_{n+1}^\alpha \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$$

(10) nous donne :

$$|f|_{\Omega_n^i} \leqslant \mathrm{L}_n \|f\|_{\mathcal{H}_i} \quad \text{pour toute} \quad f \in \mathcal{H}_i \quad (i = 0, 1)$$

en particulier :

$$|g_k|_{\Omega_n^i} \leqslant L_n \|g_k\|_{\mathcal{H}_i} = L_n \gamma_k^i.$$

Le théorème de deux constantes donne ensuite :

$$|g_k|_{\Omega_n^\beta} \leqslant |g_k|_{\Omega_n^0}^{1-\beta} \cdot |g_k|_{\Omega_n^i}^{\beta} \leqslant L_n \gamma_k^\beta.$$

Maintenant soit $\alpha \in]0, 1[$ et soit $\varepsilon \in]0, 1-\alpha[$, on peut trouver $n_0 = n_0(\alpha, \varepsilon)$ tel que $\Omega_\alpha \subset \Omega_{n_0}^{\alpha+\varepsilon}$, on a donc :

$$|f_k|_{\Omega_\alpha} \leqslant |f_k|_{\Omega_{n_0}^{\alpha+\varepsilon}} \leqslant L_{n_0} \gamma_k^{\alpha+\varepsilon}.$$

L'inégalité (11) est donc établie.

b) Maintenant prenons deux suites $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ strictement décroissantes telles que :

$$\begin{array}{ll} 0 < \alpha_n < 1, & \lim \alpha_n = 0, \\ 1 < \beta_n < M, & \lim \beta_n = 0, \end{array}$$

et posons :

$$\Delta_n^\alpha = \complement \, \overline{\Omega}_n^\alpha.$$

Nous avons évidemment :

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n^\alpha = \Delta_\alpha, \qquad \overline{\Delta}_n^\alpha \subset \Delta_{n+1}^\alpha.$$

Un raisonnement analogue à celui de *a*) nous donne successivement :

$$\begin{array}{l} |g'_k|_{\Delta_n^i} \leqslant L_n \|g'_k\|_{\mathcal{H}_i^*} = L_n \gamma_k^{-i} \\ |g'_k|_{\Delta_n^\beta} \leqslant |g'_k|_{\Delta_n^0}^{1-\beta} \cdot |g'_k|_{\Delta_n^i}^{\beta} \leqslant L_n \gamma_k^{-\beta} \\ |g'_k|_{\Delta_\alpha} \leqslant |g'_k|_{\Delta_{n_0}^{\alpha+\varepsilon}} \leqslant L_{n_0} \gamma_k^{-\alpha+\varepsilon} \end{array}$$

(11′) est donc prouvée.

Les inégalités (11) et (11′) étant établies, le reste se fait comme dans la démonstration du théorème 1.

4. Un cas d'inexistence des bases communes.

Soit G un domaine régulier (pour le problème de Dirichlet) et soit Γ un sous domaine de G, $\Gamma \neq G$. En général H(G) et H(Γ) n'ont pas de bases communes, même lorsque $G \setminus \Gamma$

est connexe. Voici un cas d'inexistence. On suppose qu'il existe une suite de domaines G_n telle que :

a) Chaque G_n est limité par un nombre fini de contours de Jordan analytiques disjoints

(*b*)

$$\overline{G}_n \subset G_{n+1} \subset \overline{G}_{n+1} \subset G, \qquad \bigcup_0^{\infty} G_n = G$$

(*c*)

$$\omega\left(z_0, \complement \Gamma F_r . G_n, G_n\right) \to 0, \qquad \text{où} \qquad z_0 \in G$$

et $\omega\left(z, \complement \Gamma \cap F_r . G_n, G_n\right)$ désigne la mesure harmonique de $\complement \Gamma \cap F_r . G_n$ par rapport à G_n.

Théorème 5. — *Les espaces* H(G) *et* H(Γ) *n'ont aucune base commune.*

Ce théorème a été établi par Dragilev dans le cas où G et Γ sont simplement connexes. Notre démonstration est inspirée de celle de Dragilev [6*b*].

Démonstration. — (*c*) entraîne : pour chaque n il existe un ouvert $E_n \supset \complement \Gamma \cap F_r . G_n$ sur $F_r . G_n$ tel que $\omega(z_0, E_n, G_n)$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Par un argument standard de « famille normale » on constate que la fonction $h_n(z) = \omega(z, E_n, G_n)$ converge uniformément vers 0 sur tout compact de G.

D'autre part il résulte du théorème 2 du chapitre 2 que H(G) possède une base $\{\omega_n(z)\}$ telle que : pour toute suite $\{\lambda_n\}$ la série $\sum_0^{\infty} \lambda_n \omega_n$ converge dans H(G) si et seulement si $\limsup |\lambda_n|^{1/n} \leqslant 1$.

Nous démontrons le théorème 5 par l'absurde.

Supposons qu'il existe une base $\{\varphi_n(z)\}$ commune aux espaces H(G) et H(Γ).

D'après un théorème de Dragilev [4], $\{\varphi_n\}$, qui est une base de H(G), est quasi-équivalente à la base $\{\omega_n\}$. Cela veut dire qu'il existe une permutation Π de **N** et une suite de

[4] *Premier théorème de Dragilev* (voir [17] p. 99, th. 12) : Deux bases quelconques du centre d'une échelle de Riesz nucléaire (finie ou infinie) sont quasi-équivalentes.

nombres non nuls $\{\alpha_n\}$ telles que la suite :

$$\psi_n = \alpha_n \varphi_{\pi(n)}$$

soit l'image de $\{\omega_n\}$ par un automorphisme de $H(G)$.

Il est évident que $\{\psi_n\}$ est une base de $H(\Gamma)$.

Pour tout compact F dans G, on pose :

$$m_F = \liminf_{n\to\infty} \left[\operatorname*{Max}_{z\in F} |\psi_n(z)|\right]^{1/n}, \quad M_F = \limsup_{n\to\infty} \left[\operatorname*{Max}_{z\in F} |\psi_n(z)|\right]^{1/n}.$$

En raison de l'équivalence de deux bases $\{\psi_n\}$ et $\{\omega_n\}$ on a :

$$\operatorname*{Sup}_{F\subset G} m_F = \operatorname*{Sup}_{F\subset G} M_F = 1.$$

On pose :

$$m = \operatorname*{Sup}_{F\subset\Gamma} m_F,$$

il est clair que $m \leqslant 1$.

c) *Montrons que* $m \neq 1$: En effet si $m = 1$ alors pour toute fonction $f = \Sigma\, \lambda_n \psi_n$ de l'espace $H(\Gamma)$ on a :

$$\limsup_{n\to\infty} |\lambda_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{\operatorname*{Sup}_{F\subset\Gamma} m_F} = 1,$$

donc $\Sigma\, \lambda_n \psi_n$ converge dans $H(G)$ et la fonction f est analytiquement prolongeable à G, ce qui est impossible puisque, G étant différent de Γ et contenant Γ, il existe des fonctions holomorphes sur Γ et non analytiquement prolongeables à G.

d) *Montrons que* $m \nless 1$: Supposons que $m < 1$. Puisque $\operatorname*{Sup}_{F\subset G} m_F = 1 > m$ il existe un compact F dans G tel que :

$$m_F = r > m.$$

Soit $\varepsilon \in]0, r - m[$. On peut choisir un entier N assez grand tel que :

$$G_N \supset U, \qquad h_N(z) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad z \in U,$$

où U est un ouvert contenant F et de fermeture compacte dans G_N. Puisque $F_N = Fr.G_N \setminus E_N$ est un fermé dans Γ on a :

$$\liminf_{n\to\infty} \left[\operatorname*{Max}_{z\in F_N} |\psi_n(z)|\right]^{1/n} \leqslant m.$$

On en déduit l'existence d'une suite infinie croissante d'entiers $\{n_K\}$ telle que :

$$\limsup \Big[\max_{z \in F_N} |\psi_{n_k}(z)|\Big]^{1/n_k} \leqslant m.$$

Considérons la fonction $V^*(z)$:

$$\begin{aligned} V^*(z) &= \text{régularisée supérieure de } V(z) \\ V(z) &= \limsup |\psi_{n_k}(z)|^{1/n_k}. \end{aligned}$$

$V^*(z)$ est sousharmonique sur G_N et :

$$V^*(z) \leqslant \begin{cases} m & \text{sur } F_N \\ 1 & \text{sur } E_N. \end{cases}$$

Donc :

$$V^*(z) \leqslant m + h_N(z) \leqslant m + \varepsilon/2 \quad \text{pour} \quad z \in U.$$

D'après le lemme de Hartogs on a pour K assez grand :

$$|\psi_{n_k}(z)|^{1/n_k} \leqslant m + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = m + 3\varepsilon/4 < r,$$

donc $m_F < r$, c'est en contradiction avec $m_F = r$. Donc $m \nless 1$. Ainsi a-t-on :

$$m < 1, \qquad m \neq 1, \qquad m \nless 1.$$

Ce qui est absurde. C.Q.F.D.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS DE LA BASE COMMUNE $\{e_k(z)\}$

Dans ce chapitre, sauf indication contraire, Ω est toujours un domaine plan $\neq$, χ un compact dans Ω et on suppose toujours que $\Omega \setminus \chi$ soit connexe et régulier pour le problème de Dirichlet. On garde les notations du chapitre 2.

1. Prolongement des bases communes.

1. On sait d'après la proposition 1 du chapitre 2 que si $\{f_n\}$ est une base commune des espaces $H(\chi)$ et $H(\Omega)$, alors elle se prolonge, en tant que base, aux ensembles Ω_α et $\overline{\Omega}_\alpha (0 < \alpha < 1)$. On se demande si $\{f_n\}$ peut se prolonger à d'autres ensembles ouverts ou compacts. Le théorème suivant est une réponse à cette question.

Théorème. — *Soit* $\{f_n(z)\}$ *une base commune des espaces* $H(\chi)$ *et* $H(\Omega)$.

a) Si $\mathfrak{U}$ *est un ouvert dans* Ω *non entièrement contenu dans* χ *et si* $\{f_n\}$ *est une base de* $H(\mathfrak{U})$, *alors* $\mathfrak{U} = \Omega_\beta$ *pour un certain* $\beta \in]0, 1]$.

b) Si $\mathcal{K}$ *est un compact dans* Ω *tel que :*

— $\Omega \setminus \mathcal{K}$ *soit connexe et régulier pour le problème de Dirichlet.*

— $\mathcal{K}$ *rencontre* $(\Omega \setminus \chi) \cup \mathrm{Fr}.\chi$. *et si* $\{f_n\}$ *est une base de* $H(\mathcal{K})$, *alors ou bien* $\mathcal{K} = \chi$, *ou bien* $\mathcal{K} = \overline{\Omega}_\beta$ *pour un certain* $\beta \in]0, 1[$.

c) Si $\mathfrak{U}$ *est un domaine tel que :*

— $\mathfrak{U} \setminus \chi$ *soit connexe et régulier pour le problème de Dirichlet.*

— $\mathcal{U} \supset \chi$ *et* $\mathcal{U} \not\supset \Omega$, *et si* $\{f_n\}$ *est une base de* $H(\mathcal{U})$, *alors* $\mathcal{U} = \Omega_\beta$ *pour un certain* $\beta \in]0, 1]$.

d) Si $\mathcal{K}$ *est un compact,* $\mathcal{K} \supset \chi$ *et* $\mathcal{K} \not\supset \Omega$, *et si* $\{f_n\}$ *est une base de* $H(\mathcal{K})$ *alors ou bien* $\mathcal{K} = \chi$ *ou bien* $\mathcal{K} = \overline{\Omega}_\beta$ *pour un certain* $\beta \in]0, 1[$.

Un résultat semblable a été établi par Dragilev dans le cas où Ω est simplement connexe et χ connexe. Cet Auteur a démontré dans ce travail l'important théorème suivant :

2e Théorème de Dragilev [1]. — *Si* $\{f_n(z)\}$ *est une base commune des espaces* $H(D_{r_1})$ *et* $H(\overline{D}_{r_0})$ $(0 < r_0 < r_1 < \infty$, $D_r = \{z : |z| < r\})$ *alors il existe une suite de nombres* > 0 $\{\lambda_n\}$ *et une permutation* π *de* $\mathbf{N}$ *telles que la suite :*

$$\varphi_n(z) = \lambda_n f_{\pi(n)}(z)$$

soit équivalente à la base $\{z^n\}$ *sur l'espace* $H(D_r)$ *pour tout* $r \in]r_0, r_1]$.

Procédons maintenant à la démonstration du théorème.

Puisque la transformation $f = \Sigma\ c_n e_n \to g = \Sigma\ c_n z^n$ est un isomorphisme simultané des espaces $H(\Omega_\alpha)$ sur les espaces $H(D_{R^\alpha})$ $(0 < \alpha < 1)$ le deuxième Théorème de Dragilev peut se transposer aux bases communes des espaces $H(\chi)$ et $H(\Omega)$:

Si $\{f_n\}$ est une base commune des espaces $H(\chi)$ et $H(\Omega)$ alors il existe une suite de nombres > 0 $\{\lambda_n\}$ et une permutation π de $\mathbf{N}$ telles que la suite :

$$\varphi_n(z) = \lambda_n f_{\pi(n)}(z)$$

soit équivalente à $\{e_n(z)\}$ sur l'espace $H(\Omega_\alpha)$ pour tout $\alpha]0, 1[$.

Il en résulte que si nous désignons par $\{f'_n\}$ la base duale de $\{f_n\}$, c'est-à-dire la base de $H_0(\complement\chi)$ qui forme avec $\{f_n\}$ un système biorthogonal dans $H(\chi) \times H_0(\complement\chi)$, alors la base :

$$\varphi'_n(z) = \frac{1}{\lambda_n} f'_{\pi(n)}(z)$$

est équivalente à $\{e'_n(z)\}$ sur l'espace $H_0(\Delta_\alpha)$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$ $\left(\Delta_\alpha = \complement\,\overline{\Omega}_\alpha\right)$.

L'équivalence simultanée des bases $\{\varphi_n\}$ et $\{e_n\}$ sur les espaces $H(\Omega_\alpha)$ entraîne :

$$\lim_{n\to\infty} (|\varphi_n|_\alpha)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (|e_n|_\alpha)^{1/n} = R^\alpha \quad (0 < \alpha < 1). \qquad (1)$$

De même on a :

$$\lim_{n\to\infty} (|\varphi'_n|_\alpha)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (|e'_n|_\alpha)^{1/n} = R^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1). \qquad (2)$$

Lemme. — *Pour tout ouvert* ω *non vide et relativement compact dans* $\Omega\setminus\chi$ *on a* :

$$(a) \qquad \lim_{n\to\infty} \Big[\operatorname*{Sup}_{z\in\omega} |\varphi_n(z)|\Big]^{1/n} = \operatorname*{Sup}_{z\in\omega} R^{h(z)}$$

$$(b) \qquad \lim_{n\to\infty} \Big[\operatorname*{Sup}_{z\in\omega} |\varphi'_n(z)|\Big]^{1/n} = \operatorname*{Sup}_{z\in\omega} R^{-h(z)}.$$

Démonstration du lemme :

a) La formule (1) entraîne immédiatement :

$$\limsup_{n\to\infty} \Big[\operatorname*{Sup}_{z\in\omega} |\varphi_n(z)|\Big]^{1/n} < \operatorname*{Sup}_{z\in\omega} R^{h(z)}.$$

Pour avoir (*a*) il suffit de montrer que :

$$\liminf_{n\to\infty} \Big[\operatorname*{Sup}_{z\in\omega} |\varphi_n(z)|\Big]^{1/n} > \operatorname*{Sup}_{z\in\omega} F^{h(z)}.$$

Nous raisonnons par l'absurbe; supposons le contraire, alors il existe une sous-suite infinie $\{\varphi_{n_k}\}$ telle que :

$$\text{lim. Sup. } \Big[\operatorname*{Sup}_{z\in\omega} |\varphi_{n_k}(z)|\Big]^{1/n} < \operatorname*{Sup}_{z\in\omega} R^{h(z)}. \qquad (H)$$

Posons :

$$\begin{aligned} V_{n_k}(z) &= \frac{1}{n_k} \log |\varphi_{n_k}(z)| - (\log R).h(z) \\ V(z) &= \limsup_{n_k\to\infty} V_{n_k}(z) \\ V^*(z) &= \text{régularisée supérieure de } V(z) \end{aligned}$$

$V^*(z)$ est sous-harmonique et < 0 dans $\Omega\setminus\chi$ (d'après (1)). Si $V^*(z) < 0$ en tout point z de $\Omega\setminus\chi$ alors d'après le théorème de Hartogs il existe un $\varepsilon(\alpha) > 0$ tel que :

$$V_{n_k}(z) < -\varepsilon(\alpha) \quad \text{pour} \quad z \in \Gamma_\alpha, \quad \forall\alpha \in]0, 1[.$$

$(\Gamma_\alpha = \{z \in \Omega\setminus\chi : h(z) = \alpha\})$, cela entraîne :

$$\limsup (|\varphi_{n_k}|_\alpha)^{1/n} < R^\alpha e^{-\varepsilon(\alpha)} < R^\alpha$$

c'est en contradiction avec (1), donc $V^*(z)$ doit s'annuler en un point $z_0 \in \Omega\setminus\chi$. Puisque $V^*(z)$ est sous-harmonique < 0 dans $\Omega\setminus\chi$ on conclut que $V^*(z) \equiv 0$.

Or l'hypothèse (H) entraîne :

$$V(z) < 0 \text{ sur un ouvert non vide de } \Omega\setminus\chi.$$

On aboutit ainsi à une contradiction puisque $V(z) = V^*(z) = 0$ sauf sur un ensemble de mesure nulle.

La démonstration de (b) est tout à fait analogue.

Démonstration du théorème :

$a)$ Posons $\beta = \operatorname*{Sup}_{z\in\mathcal{U}} h(z)$. Il est clair que $\Omega_\beta \supset \mathcal{U}$. On va prouver que $\Omega_\beta = \mathcal{U}$, pour cela il suffit de montrer que toute fonction holomorphe f dans $\mathcal{U}$ est la restriction à $\mathcal{U}$ d'une fonction holomorphe dans Ω_β.

Puisque $\{f_n\}$ est une base de $H(\mathcal{U})$, $\{\varphi_n\}$ est aussi une base de cet espace; soit $\Sigma\, a_n\varphi_n$ le développement de f suivant la base $\{\varphi_n\}$, il résulte du lemme que :

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leqslant R^{-\beta}.$$

Donc la série $\sum_0^\infty a_n\varphi_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω_β, sa somme est évidemment un prolongement de f à Ω_β. C.Q.F.D.

$b)$ Soit $\omega(z, \mathcal{K}, \Omega\setminus\mathcal{K})$ la mesure harmonique de $\mathrm{Fr}.\mathcal{K}$ par rapport à $\Omega\setminus\mathcal{K}$, posons pour tout $r \in\,]0, 1[$:

$$\theta_r = \{z \in \Omega\setminus\mathcal{K} : \omega(z, \mathcal{K}, \Omega\setminus\mathcal{K}) < r\} \cup \mathcal{K}.$$

Si $\{f_n\}$ est une base commune des espaces $H(\Omega)$ et $H(\mathcal{K})$ alors elle est une base de $H(\theta_r)$ pour tout $r \in\,]0, 1[$.

En appliquant $a)$ on voit que pour tout $r \in\,]0, 1]$ il existe un $\beta \in\,]0, 1[$ (β dépend de r) tel que $\theta_r = \Omega_\beta$.

Il en résulte que : ou bien $\mathcal{K} = \chi$, ou bien $\mathcal{K} = \overline{\Omega}_\beta$ pour un certain $\beta \in\,]0, 1[$.

c) et d) : On raisonne comme précédemment, en utilisant $\{\varphi'_n\}$ au lieu de $\{\varphi_n\}$.

2. Relation avec la théorie des espaces d'interpolation et le prolongement analytique en plusieurs variables.

1. La base commune $\{e_k(z)\}$ nous permet de donner une généralisation à un théorème d'interpolation dû à Zerner, Lions et Peetre (voir [4], page 65, théorème 2.1).

Gardons les notations de la section précédente, supposons maintenant que la frontière de χ soit composée d'un nombre fini de contours de Jordan analytiques disjoints, et posons :

$$\Omega_0 = \text{Intérieur de } \chi, \ \Omega_1 = \Omega$$
$$\Omega_\theta = \{z\Omega\chi : h(z) < \theta\} \cup \chi \quad (0 < \theta < 1).$$

Avec les notations de l'article [4] de Lions et Peetre nous avons le

Théorème. — *Quels que soient* p_0 *et* p_1 (*avec* $1 < p_i < \infty$) *on a* :

$$S(p_0, \theta, H(\Omega_0); p_1, \theta - 1, H(\Omega_1)) = H(\Omega_\theta)$$

avec des topologies équivalentes.

La démonstration, que nous omettons, consiste à adapter celle de Lions et Peetre en utilisant la base $\{e_k(z)\}$ au lieu de la base de Taylor $\{z^k\}$.

2. Notre théorème principal du chapitre 3 généralise un théorème de Siciak relatif au cas où Ω est un domaine simplement connexe symétrique par rapport à l'axe réel et χ le segment $[-1, +1]$. Comme le théorème de Siciak le nôtre peut être utilisé pour démontrer des résultats sur le prolongement analytique en plusieurs variables complexes, pour plus de détails nous renvoyons aux mémoires de Siciak [26*b* et *c*].

3. Formule asymptotique pour ε-entropie.

On suppose maintenant que Ω soit un domaine borné dont le complémentaire se compose d'un nombre fini de continus disjoints de la sphère de Riemann et que χ soit un compact régulier contenu dans Ω.

$\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes et bornées en module par 1 dans Ω, l'entropie de $\mathcal{B}$ dans l'espace $\mathcal{C}(\chi)$ muni de la norme uniforme

$$\|f\| = \operatorname*{Max}_{z \in \chi} |f(z)|$$

est par définition la fonction de $\varepsilon > 0$ définie par :

$$\mathrm{E}_\varepsilon(\mathcal{B}) = \log \mathrm{N}_\varepsilon(\mathcal{B})$$

où $\mathrm{N}_\varepsilon(\mathcal{B})$ désigne le minimum des nombres entiers p tels qu'il existe p sous-ensembles $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \mathrm{A}_p$ de $\mathcal{C}(\chi)$, de diamètres inférieurs ou égaux à 2ε, dont la réunion $\cup \mathrm{A}_i$ contient $\mathcal{B}$

Théorème (5) :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{E}_\varepsilon(\mathcal{B})}{(\log \varepsilon)^2} = \frac{1}{\log \mathrm{R}} = \varphi.$$

Ce théorème a été établi par Babenko et Erokhin, indépendamment l'un de l'autre, dans le cas où Ω est simplement connexe et χ est un continu. Le cas général ci-présent a été traité par Levin (A. L.) et Tikhomirov [3], ces auteurs ont donné une démonstration délicate basée sur un résultat de Walsh concernant la représentation conforme des domaines multiplement connexes (on the conformal mapping of multiply connected regions, *Trans. A.M.S.*, Vol. 82, p. 128-146). Moyennant une base Commune « régulière » des espaces $\mathrm{H}(\Omega)$ et $\mathrm{H}(\chi)$, nous allons donner une nouvelle démonstration qui est comparable à celle d'Erokhim [2] par son caractère « classique », car elle rejoint le travail de Vitushkin qui utilisait les bases de Taylor, Laurent, Tchebicheff et Fourier.

Démonstration. — Par une représentation conforme on peut se ramener au cas où la frontière de Ω est composée d'un nombre fini de contours de Jordan analytiques disjoints.

a) $\mathrm{Fr}.\Omega$ étant analytique, la fonction $h(z)$ se prolonge en une fonction harmonique sur un domaine $\mathfrak{U}$ contenant $\overline{\Omega}\setminus\chi$.

(5) Dans un travail à paraître « Rational Approximation and *n*-dimensional diameter » H. Widom montre que le théorème est encore vrai avec des hypothèses plus générales (ajoutée le 2 septembre 1971).

Soit $b \in h(\mathcal{U}) \cap]1, \infty[$, on pose :

$$\Omega^* = (\mathcal{U} \cup \chi) \setminus \{z \in \mathcal{U} : h(z) \geqslant b\}$$

$\varphi^* = \dfrac{\varphi}{b} =$ Flux de $h^*(z)$ $\left(= \dfrac{h(z)}{b}\right)$ à travers tout contour séparant $\complement\, \Omega^*$ et χ.

$$|f|_\alpha = \operatorname*{Max}_{z \in \gamma_\alpha} |f(z)| \qquad \text{avec} \qquad \gamma_\alpha = \{z \in \mathcal{U} : h(z) = \alpha\}.$$

$$|f|_\alpha^* = \operatorname*{Max}_{z \in \gamma_\alpha^*} |f(z)| \qquad \text{avec} \qquad \gamma_\alpha^* = \{z \in \mathcal{U} : h^*(z) = \alpha\}.$$

Le théorème 1 du chapitre 3 nous assure l'existence d'une base orthonormale $\{F_n\}$ de $L_p^2(\chi, \mu)$ qui est aussi une base commune des espaces $H(\Omega^*)$ et $H(\chi)$ telle que :

$$\lim_{n \to \infty} (|F_n|_\alpha^*)^{1/n} = \left(\exp \frac{1}{\varphi^*}\right)^{\alpha}$$

$$\lim_{n \to \infty} (|F'_n|_\alpha^*)^{1/n} = \left(\exp \frac{1}{\varphi^*}\right)^{-\alpha}$$

pour tout $\alpha \in]0, 1[$ ($\{F'_n\}$ désigne la base duale de $\{F_n\}$).

Il en résulte :

$$\lim_{n \to \infty} (|F_n|_\alpha)^{1/n} = R^\alpha \qquad \forall \alpha \in]0, 1] \tag{A}$$

$$\lim_{n \to \infty} (|F'_n|_\alpha)^{1/n} = R^{-\alpha} \qquad \forall \alpha \in]0, 1]. \tag{B}$$

Dans la suite nous allons nous servir de cette base $\{F_n\}$.

b) Rappelons maintenant quelques résultats connus utiles.

On dit qu'une suite $f_1, f_2 \ldots f_p$ (suite finie) d'éléments de $\mathcal{C}(\chi)$ forme un « ε-net » de $\mathcal{B}$ lorsque la réunion des boules de centres f_i et de rayons ε contient $\mathcal{B}$.

N''_ε désigne le minimum des entiers p tels qu'il existe p éléments $f_1, f_2 \ldots f_p$ de $H(\Omega)$ formant un « ε-net » de $\mathcal{B}$.

M_ε désigne le maximum des entiers q tels qu'il existe q éléments $f_1, f_2 \ldots f_q$ de $\mathcal{B}$ avec $\|f_i - f_j\| \geqslant \varepsilon$ pour tout $i \neq j$.

On a l'inégalité due à Kolmogoroff :

$$M_{2\varepsilon} \leqslant N_\varepsilon \leqslant N''_\varepsilon. \tag{I$_1$}$$

On va majorer N''_ε et minorer M_ε moyennant les deux lemmes suivants :

Lemme 1. — *Pour tout* δ $]0, r]$, *il existe* k *points* $z_1, z_2 \ldots z_k$ *avec* $k < \left(\frac{2r}{\delta}\right)^2$ *tels que* : $\bigcup_{i=1}^{k} \{z : |z - z_i| \leqslant \delta\} \supset \{z : |z| \leqslant r\}$.

Lemme 2. — *Pour tout* δ $\left]0, \frac{r}{2}\right[$, *il existe* q *points* $z_1, z_2 \ldots z_q$ *avec* $q > \left(\frac{r}{2\delta}\right)^2$ *tels que* : $|z_i| \leqslant r$, $|z_i - z_j| \geqslant \delta$ *pour* $i \neq j$.

c) Soit $\delta \in]0, R[$

L'égalité (A) nous donne :

$$\|F_n\| = \operatorname*{Max}_{z \in \chi} |F_n(z)| < A(1 + \delta)^n$$

où A est une constante ne dépendant que de δ.

Si $f = \Sigma\, c_n F_n$ *est* un élément de $\mathcal{B}$, on a :

$$c_n = \int_\gamma f(z) . F'_n(z)\, dz \quad (\gamma \text{ est un cycle dans } \Omega).$$

$$|c_n| < \int_\gamma |f(z)||F'_n(z)|\, dz < \int_\gamma |F'_n(z)|\, dz < c^{te} . \operatorname*{Max}_{z \in \gamma} |F'_n(z)|$$
$$< c^{te} . \operatorname*{Max}_{z \in \overline{\Omega}} |F'_n(z)| .$$

Or (B) donne : $\operatorname*{Max}_{z \in \Omega} |F'_n(z)| < c^{te} . (R - \delta)^{-n}$.

Donc : $|c_n| < B(R - \delta)^{-n}$ ($B = c^{te}$ dépendant de δ non de f). On en déduit :

$$\left\| f - \sum_0^{n-1} c_k F_k \right\| \leqslant \sum_n^\infty |c_k| \, \|F_k\| < \sum_n^\infty B_\xi (R - \xi)^{-k} A_\xi (1 + \xi)^k.$$

On peut toujours choisir ξ tel que $\frac{1+\xi}{R-\xi} < \frac{1}{R-\delta}$, donc :

$$\left\| f - \sum_0^{n-1} c_k F_k \right\| < \left(A_\xi B_\xi \sum_0^\infty (R - \delta)^{-p} \right) (R - \delta)^{-n} = C(R - \delta)^{-n}.$$

C est une constante indépendante de f.

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, puisque $\frac{1}{(R - \delta)^n} \searrow 0$ il existe un

$n \geqslant 2$ unique tel que :

$$(\mathrm{R} - \delta)^{1-n} > \frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{C}} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{R} - \delta)^{-n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{C}}.$$

Pour chaque $\nu(\nu = 0,\ 1,\ \ldots\ n-1)$ fixons les points $\mathrm{C}_{\nu,\,1}, \mathrm{C}_{\nu,\,2}, \ldots, \mathrm{C}_{\nu,\,k_\nu}$ tels que la réunion des disques de centres $\mathrm{C}_{\nu,\,j}$ et de rayons $\varepsilon_\nu = \dfrac{\varepsilon \mathrm{E}}{(1+2\delta)^\nu}$ contienne le disque $\left\{z : |z| \leqslant \dfrac{\mathrm{B}}{(\mathrm{R}-\delta)^n}\right\}$, la constante E est choisie égale à $\left(2 \sum\limits_0^\infty \mathrm{A}(1+\delta)^n(1+2\delta)^{-n}\right)^{-1}$.

Considérons les fonctions :

$$f_{j_0,\,j_1,\,\ldots,\,j_{n-1}} = \sum_0^{n=1} \mathrm{C}_{\nu,\,j_\nu}.\mathrm{F}_\nu \quad (1 < j_\nu < k_\nu).$$

Soit $f = \Sigma\ \mathrm{C}_\nu \mathrm{F}_\nu$ un élément de $\mathscr{B}$, nous avons :

$$|\mathrm{C}_\nu| < \mathrm{B}(\mathrm{R}-\delta)^{-\nu}$$

donc il existe $j_\nu \leqslant k_\nu$ tel que $|\mathrm{C}_{\nu,\,j_\nu} - \mathrm{C}_\nu| \leqslant \varepsilon_\nu$.

On a donc :

$$\|f - f_{j_0,\,j_1\,\cdots\,j_{n-1}}\| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon_\nu \mathrm{A}(1+\delta)^\nu + \frac{\mathrm{C}}{(\mathrm{R}-\delta)^n}$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

N''_ε est inférieur ou égal au nombre des fonctions $f_{j_0\,j_1\,\cdots\,j_{n-1}}$, donc :

$$\mathrm{N}''_\varepsilon \leqslant \prod_{\nu=0}^{n-1} k_\nu.$$

En raison du Lemme 1 on peut choisir k_ν tel que :

$$k_\nu \leqslant \left(\frac{2\,\mathrm{B}}{\mathrm{E}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+2\delta}{\mathrm{R}-\delta}\right)^{2\nu} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2},$$

d'autre part puisque

$$\frac{1}{(\mathrm{R}-\delta)^{n-1}} > \frac{\varepsilon}{2\,\mathrm{C}}$$

on a :

$$n \leqslant \frac{\log \dfrac{1}{\varepsilon}}{\log(\mathrm{R}-\delta)} + \frac{\log 2\,\mathrm{C}}{\log(\mathrm{R}-\delta)} - 1,$$

donc :

$$\log N''_\varepsilon \leqslant 2 \sum_{\nu=0}^{n-1} \log \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1+2\delta}{R-\delta}\right)^\nu + \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^2 o(\varepsilon)$$

$$\log N''_\varepsilon \leqslant 2n \log \frac{1}{\varepsilon} - n(n-1) \log \frac{R-\delta}{1+2\delta} + (\log \varepsilon)^2\, o(\varepsilon)$$

$$\log N''_\varepsilon \leqslant \left[\frac{2}{\log (R-\delta)} + \frac{\log \dfrac{1+2\delta}{R-\delta}}{(\log (R-\delta))^2} + o(\varepsilon)\right] (\log \varepsilon)^2$$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N''_\varepsilon}{(\log \varepsilon)^2} \leqslant \frac{2}{\log (R-\varepsilon)} - \frac{\log \dfrac{R-\delta}{1+2\delta}}{(\log (R-\delta))^2}$$

la dernière inégalité est valable pour δ arbitrairement petit, donc :

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N''_\varepsilon}{(\log \varepsilon)^2} \leqslant \frac{1}{\log R} \qquad (\mathrm{I}_2)$$

d) Soit $\delta \in \,]0, 1[$, on a d'après (A) :

$$\sup_{z \in \Omega} |F_n(z)| < H.(R+\delta)^n \quad (H = c^{te} \text{ dépendant de } \delta).$$

Soit $\sum\limits_0^\infty a_p F_p$ une série convergente dans $\mathcal{C}(\chi)$, on a :

$$\left\|\sum_0^\infty a_p F_p\right\| \geqslant k \left\|\sum_0^\infty a_p F_p\right\|_{L^2_P(\chi, \mathcal{M})} \geqslant k|a_n|$$

pour tout entier n, où k est une constante.

On pose :

$$L = \left[2H \sum_0^\infty \left(\frac{R+\delta}{R+2\delta}\right)^n\right]^{-1}, \qquad r_\nu = \frac{L}{(R+2\delta)^\nu}$$

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe un n unique tel que $r_{n-1} > \varepsilon$ et $r_n \leqslant \varepsilon$, on a :

$$n \geqslant \frac{\log \dfrac{1}{\varepsilon}}{\log (R+2\delta)} + \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) o(\varepsilon).$$

D'après le lemme 2 on peut choisir les points $b_{\nu,1}, b_{\nu,2}, \ldots, b_{\nu,q_\nu}$ dans chaque disque $\{z : |z| \leqslant r_\nu\}$ avec :

$$q_\nu > \left(\frac{r_\nu k}{2\varepsilon}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad |b_{\nu,j} - b_{\nu,i}| > \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Considérons les fonctions

$$f_{j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}} = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{\nu, j_\nu} . F_\nu \qquad \text{avec} \qquad 1 \leqslant j_\nu \leqslant q_\nu.$$

Nous avons manifestement :

$$\operatorname*{Sup}_{z \in \Omega} |f_{j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}}(z)| \leqslant \Sigma\, r_\nu \operatorname*{Sup}_{z \in \Omega} |F_\nu(z)| \leqslant 1$$

d'autre part la distance de deux fonctions distinctes de cette forme est $\geqslant \varepsilon_\nu k(1 - \delta)^\nu = \varepsilon$. Donc :

$$M_\varepsilon \geqslant \prod_{\nu=0}^{n-1} q_\nu.$$

Puisque :

$$q_\nu > L^2 . k^2 \left(\frac{1 - \delta}{R + 2\delta}\right)^{2\nu} \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$n \geqslant \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log (R + 2\delta)} + \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) o(\varepsilon)$$

on a après un petit calcul :

$$\log M_\varepsilon \geqslant \log \prod_{\nu=0}^{n-1} q_\nu \geqslant \left[\frac{1}{\log (R + 2\delta)} + o(\varepsilon)\right] (\log \varepsilon)^2.$$

On en déduit :

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log M_\varepsilon}{(\log \varepsilon)^2} \geqslant \frac{1}{\log R} \qquad (I_3)$$

Le théorème résulte immédiatement des inégalités (I_1), (I_2) et (I_3).

CHAPITRE 5

MÉTHODE DES BASES VOISINES

Depuis les premiers travaux de Whittaker (J. M.) et Gontcharoff (W.) on cherche à établir des relations entre les principales constantes rencontrées dans la théorie d'interpolation des fonctions entières ou holomorphes dans un disque (constantes de Whittaker, Gontcharoff...). Les résultats les plus avancés dans cette direction ont été obtenus par Cukhlova et Dragilev [7] et Suetin [27], ce dernier auteur a réussi notamment à établir l'identité des constantes W et G.

Nous présentons dans ce chapitre une approche de quelques problèmes de ce genre par la méthode des bases voisines. Le théorème des bases voisines de Paley-Wiener a été généralisé et utilisé par Boas [4*a*] et Evgrafov [9] dans leurs travaux sur l'interpolation. Dans la littérature il y a plusieurs versions du théorème des bases voisines dont celle de M. G. Arsove [2] semble être une des plus générales, la version particulière suivante, due à M. Pommiez [20*c*], nous sera utile :

Théorème 0. — *Si une suite* $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbf{N}^n}$ *d'éléments de* $\mathrm{H}_n(\mathrm{R})$ *vérifie les conditions* :

$$\varphi_m(z) = z^m \Big(\sum_{k\in\mathbf{N}^n} \alpha_{k,m}\, z^k\Big) \quad \textit{avec} \quad \alpha_{0,m} = 1$$

$$\limsup_{m\to\infty} \Big(\sum_{k\in\mathbf{N}^n-\{0\}} |\alpha_{k,m}|\, r^k\Big) \leqslant 1 \quad \textit{pour tout} \quad r\in[0,\ \mathrm{R}[.$$

Alors elle est une base de $\mathrm{H}_n(\mathrm{R})$.

1. Sur l'interpolation d'Abel-Gontcharoff généralisée.

1. *Généralités.* Soit $\lambda \in [0,\ \infty[$. Pour toute fonction $f(z) = \sum_{m\in\mathbf{N}^n} a_m z^m$ holomorphe au voisinage de l'origine et tout

$k \in \mathbf{N}^n$ on pose :

$$f^{(k,\lambda)}(z) = \sum_{m \in \mathbf{N}^n} a_m (z^m)^{(\lambda, k)}$$

avec

$$(z^m)^{(\lambda, k)} = \begin{cases} \left(\dfrac{m!}{(m-k)!}\right)^{\lambda_z m-k} & \text{si} \quad m > k. \\ 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

$f^{(\lambda,k)}$ est une sorte de dérivée généralisée d'ordre k de f, lorsque $\lambda = 1$ on obtient les dérivées ordinaires, lorsque $\lambda = 0$ on obtient les restes partiels.

Le problème d'interpolation d'Abel-Gontcharoff généralisé consiste à déterminer f en connaissant les valeurs $f^{(\lambda,k)}(z_k)$ où $\{z_k\}_{k \in \mathbf{N}^n}$ est une suite multiple de points de ^{n}.

Notations. — Pour tout $z = (z_1, z_2 \ldots z_n) \in \mathbf{C}^n$ on pose

$$\|z\|_\lambda = \left(\sum_1^n |z_i|^\lambda\right)^{1/\lambda}, \; \|z\|_\infty = \operatorname{Max} |z_i|, \; \|z\|_1 = \|z\|$$

$$\Delta_\lambda = \{z^n : \|z\|_{1/\lambda} < 1\}, \; d_m(\Delta_\lambda) = \sup_{z \in \Delta_\lambda} |z^m| = \left(\frac{m^m}{\|m\|^{\|m\|}}\right)^\lambda$$

m^m désigne $m_1^{m_1} . m_2^{m_2} \ldots m_n^{m_n}$.

On désigne par $\overline{\mathrm{A}}_n(\lambda, \tau)$ $(0 < \tau \leqslant \infty)$ l'espace des fonctions f holomorphes au voisinage de l'origine telles que :

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbf{N}^n} \frac{a_m}{(m!)^\lambda} z^m \qquad \text{avec} \qquad \limsup |a_m|^{1/\|m\|} < \tau.$$

On s'aperçoit que :

$$\overline{\mathrm{A}}_n(\lambda, \tau) = \begin{cases} \overline{\mathrm{H}}_n(1/\tau) \quad \text{lorsque} \quad = 0 \\ \overline{\mathrm{E}}^2_{\Delta_\lambda}(1/\lambda, \lambda . \tau^{1/\lambda}) \quad \text{lorsque} \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

$\overline{\mathrm{A}}_n(\lambda, \tau)$ sera muni de la topologie de $\overline{\mathrm{H}}_n(1/\lambda)$ ou $\overline{\mathrm{E}}^2_{\Delta_\lambda}(1/\lambda, \lambda\tau^{1/\lambda})$ Pour toute suite $\{z_k\}_{k \in \mathbf{N}^n}$ de points de $\mathbf{C}^n$, il existe une seule suite simple de polynômes de n variables $\{\mathrm{G}_m\}_{m \in \mathbf{N}^n}$ telle que :

$$(k!)^{-\lambda} . \mathrm{G}_m^{(\lambda, k)}(z_k) = \delta_{m,k}$$

$\{\mathrm{G}_m\}$ est appelée suite des polynômes d'Abel-Gontcharoff généralisés associée à $\{z_k\}$.

Soit $C(n, \lambda)$ la racine positive unique de l'équation :

$$\sum_{q=0}^{\infty} (q!)^{-\lambda} x^q = \sqrt[n]{2}.$$

PROPOSITION 1. — *Si* $\|z_k\|_\infty < 1$ *pour tout* k, *alors* $\{G_m\}$ *est une base de l'espace* $\overline{A}_n(\lambda, C(n, \lambda))$.

Démonstration. — La transformation

$$f(z) = \Sigma\, a_m z^m \to g(z) = \Sigma (m!)^\lambda a_m z^m$$

est un isomorphisme de $\overline{A}_n(\lambda, C(n, \lambda))$ sur $\overline{H}_n(1/C(n, \lambda))$, désignons par $\tilde{G}_m$ l'image de $\dfrac{G_m}{(m!)^\lambda}$ par cette transformation.

Soit $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbf{N}^n}$ la suite d'éléments de $H_n(C(n, \lambda))$ qui forme avec $\{\tilde{G}_m\}$ un système biorthogonal relativement à la forme bilinéaire :

$$(f = \Sigma\, a_m z^m,\ g = \Sigma\, b_m z^m) = \Sigma a_m b_m$$

qui met en dualité $\overline{H}_n(1/C(n, \lambda))$ et $H_n(C(n, \lambda))$. On a :

$$\varphi_m(z) = z^m \Big(\sum_{k\in\mathbf{N}^n} (k!)^{-\lambda} . (z_m)^k . z^k \Big).$$

Il résulte du théorème 0 que $\{\varphi_m\}$ est une base de $H_n(C(n, \lambda))$, donc (lemme 0 du chapitre 2) $\{\tilde{G}_m\}$ est une base de $\overline{H}_n(1/C(n,\lambda))$. On en déduit que $\{G_m\}$ est une base de $A_n(\lambda, C(n, \lambda))$.

Définition de la constante $W(n, \lambda)$: $W(n, \lambda)$ *est la borne supérieure des constantes* $R (0 < R < \infty)$ *telles que* : *si* $f \in \overline{A}_n(\lambda, R)$ *et si, pour chaque* $m \in \mathbf{N}^n$, *la fonction* $f^{(\lambda, m)}$ *possède un zéro dans la boule* $\overline{\Delta}_0 = \{z \in \mathbf{C}^n : \|z\|_\infty < 1\}$, *alors* f *est identiquement nulle.*

$W(1, 1) = W$ est la constante bien connue de Whittaker.

On a les inégalités évidentes : $C(n, \lambda) \leqslant W(n, \lambda)$,

$W(q, \lambda) \leqslant W(p, \lambda)$ pour $q > p$. D'après Suetin [27] :

$$\frac{1}{2} \leqslant W(1, \lambda) \leqslant 1.$$

Donc :

$$C(n, \lambda) \leqslant W(n, \lambda) \leqslant 1.$$

2. Examinons maintenant de plus près la suite $\{G_m\}$ des polynômes d'Abel-Gontcharoff généralisés. On voit que G_m est de la forme :

$$G_m(z) = (m\,!)^\lambda\Big(\sum_{p \leqslant m} \delta_{m-p,\, m}(p\,!)^{-\lambda} z^p\Big)$$

chaque coefficient $\delta_{k,\, m}(k \leqslant m)$ est determiné par le système d'équations :

$$\sum_{p \leqslant m-q} \delta_{m-p-q,\, m}(p\,!)^{-\lambda}(z_q)^p = 0 \text{ pour tout } q \text{ tel que } m - k \leqslant q < m$$
$$\delta_{0,\, m} = 0$$

Donc $\delta_{k,\, m}$ est un polynôme indépendant de m des variables z_q $(m - k \leqslant q < m)$, on le note $\delta_k(z_q;\ m - k \leqslant q < m)$ On pose :

$$D_m = \operatorname*{Max}_{\|z_q\|_\infty \leqslant 1} |\delta_m(z_q;\ 0 < q < m)|$$
$$D(n, \lambda) = \limsup_{m \to \infty} (D_m)^{1/m}.$$

Théorème 1. — $W(n, \lambda) = \dfrac{1}{D(n, \lambda)}$.

Démonstration. — *a*) Montrons que $\dfrac{1}{W(n, \lambda)} \geqslant D(n, \lambda)$. Pour cela on raisonne par l'absurbe en supposant le contraire : $\dfrac{1}{W(n, \lambda)} < D(n, \lambda)$.

Soit $R \in \left]\dfrac{1}{W(n, \lambda)},\ D(n, \lambda)\right[$, on a :

$$\limsup_{\|m\| \to \infty} D_m R^{-\|m\|} = +\infty.$$

On en déduit l'existence d'une suite infinie $\{m_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{N}^n$ telle que :

$D_{m_j} R^{-\|m_j\|} \to \infty$, $D_q R^{-\|q\|} < D_{m_j} R^{-\|m_j\|}$ pour tout $q < m_j$.

Pour chaque j, soit $\{Z_{k,\, j}\}_{k \in \mathbf{N}^n}$ une suite de points de la boule $\overline{\Delta_0}$ vérifiant l'égalité :

$$D_{m_j} = |\delta_{m_j}(Z_{k,\, j};\ 0 \leqslant k < m_j),$$

soit $\{G_{k,\, j}\}_{k \in \mathbf{N}^n}$ la suite des polynômes d'Abel-Gontcharoff généralisés associée à $\{Z_{k,\, j}\}$, on pose : $P_j = \dfrac{(m_j\,!)^\lambda}{D_{m_j}} G_{m_j,\, j}$.

On a :

$$
\begin{aligned}
|P_j(z)| &\leqslant \sum_{k\leqslant m_j} \frac{D_{m_j-k}}{D_{m_j}} (\|z\|_\infty)^k (k!)^{-\lambda} \\
&\leqslant \sum_{k\in m_j} R^{-\|k\|}(\|z\|_\infty)^{\|k\|}(k!)^{-\lambda} \\
&\leqslant \sum_{k\in \mathbf{N}^n} R^{-\|k\|}(\|z\|_\infty)^{\|k\|}(k!)^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Donc :

— $\{P_j\}$ est une famille normale sur $\mathbf{C}^n$ lorsque $\lambda > 0$.
— $\{P_j\}$ est une famille normale sur $\{z \in \mathbf{C}^n : \|z\|_\infty < R\}$ lorsque $\lambda = 0$.

Il en résulte l'existence d'une suite strictement croissante de nombres entiers $\{j_h\}_{h\in\mathbf{N}}$ telle que :

— $\{P_{j_h}\}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}^n$ vers une fonction F lorsque $\lambda > 0$.
— $\{P_{j_h}\}$ converge uniformément sur tout compact de la boule $\{z \in \mathbf{C}^n : \|z\|_\infty < R\}$ vers une fonction F lorsque $\lambda = 0$.

Dans les deux cas F est holomorphe sur un voisinage de la boule unité $\overline{\Delta}_0$, car $R > \dfrac{1}{W(n, \lambda)} \geqslant 1$.

Pour tout k fixé la suite $\{Z_{k,j_h}\}$ admet au moins une valeur d'adhérence que l'on désigne par Z_k^*, on a :

$$
F \in \overline{A}_n(\lambda, W(n, \lambda)),\ F(0) = 1,
$$
$$
F^{(\lambda, k)}(Z_k^*) = 0 \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbf{N}^n
$$

cela est contraire à la définition même de $W(n, \lambda)$.

Donc $\dfrac{1}{W(n, \lambda)} \geqslant D(n, \lambda)$.

b) Montrons maintenant que $\dfrac{1}{W(n, \lambda)} \leqslant D(n, \lambda)$. Cette inégalité résulte immédiatement du

LEMME 1. — *Si* $\|z_k\|_\infty \leqslant 1$ *pour tout* k, *alors la suite* $\{G_m\}_{m\in\mathbf{N}^n}$ *associée à* $\{z_k\}_{k\in\mathbf{N}^n}$ *est une base de l'espace* $\overline{A}_n\left(\lambda, \dfrac{1}{D(n, \lambda)}\right)$.

Démonstration. — Reprenons les notations données lors de la démonstration de la proposition 1, on voit sans peine que :

$$\operatorname*{Max}_{\|z\|_\infty < R} |\varphi_k(z)| < C(r).R^k \quad \text{pour tout} \quad R,\ 0 < C(R) < \infty.$$

D'autre part pour tout $R > D(n, \lambda)$ on a :

$$\begin{aligned}\operatorname*{Max}_{z_\infty < R} |\tilde{G}_k(z)| &\leqslant \sum_{j \leqslant k} |\delta_{k-j,k}| R^{\|j\|} \leqslant R^{\|k\|} \sum_{j \in \mathbf{N}^n} D_j R^{-\|j\|} \\ &\leqslant \mathcal{C}(R).R^{\|k\|}, \qquad 0 < \mathcal{C}(R) < \infty.\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{k \in \mathbf{N}^n} \tilde{G}_k(z).\varphi_k(W)$ est sommable dans $H(\overline{\Delta}' \times \Delta'')$ où :

$$\Delta' = \{z \in \mathbf{C}^n : \|z\|_\infty < D(n, \lambda)\},$$
$$\Delta'' = \left\{z \in \mathbf{C}^n : \|z\|_\infty < \frac{1}{D(n, \lambda)}\right\}.$$

Donc $\{\tilde{G}_k\}$ est une base de $H(\overline{\Delta}')$ et $\{G_k\}$ est une base de $\overline{A}_n\left(\lambda, \dfrac{1}{D(n, \lambda)}\right)$. On a ainsi prouvé en même temps le

Théorème 1' : *Si* $\|z_k\|_\infty \leqslant 1$ *pour tout* k, *alors* $\{G_m\}$ *est une base de* $\overline{A}_n(\lambda, W(n, \lambda))$.

3. Examinons maintenant le cas où :

$$\limsup_{m \to \infty} \|m\|^\lambda.(\log_{q-2}\|m\|)^{-1/\rho}.\|z_m\|_\infty \leqslant 1. \qquad (1)$$

(q est un entier $\geqslant 2$, lorsque $q = 2$ alors $\log_{q-2} x = \log_0 x = x$).

Lemme 2. — $\{G_m\}_{m \in \mathbf{N}^n}$ *est une base de l'espace* $\overline{E}^q_{\Delta_\lambda}(\rho, \sigma)$ *si et seulement si la suite* :

$$\varphi_m(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} \left(\frac{\log_{q-2}\|m\|}{\log_{q-2}\|m + k\|}\right)^{\|m+k\|} \left(\frac{\|m + k\|}{\|m\|}\right)^{\lambda\|m+k\|} (z_m.\|m\|^\lambda (\log_{q-2}\|m\|)^{-1/\rho})^k . \frac{z^{m+k}}{(k!)^\lambda}$$

est une base de $H_n(R)$ *avec* :

$$R = \begin{cases}\sigma^{1/\rho}.e^{-\lambda} & \text{si} \quad q > 2 \\ (\sigma\rho)^{1/\rho} e^{-\lambda} & \text{si} \quad q = 2.\end{cases}$$

Démonstration. — Nous allons établir le lemme dans le cas où $q > 2$.

Nous savons que si le q-ordre d'une fonction entière est fini et strictement positif, alors son (Δ_λ, q)-type est donné par la formule :

$$\sigma^{1/\rho} = \limsup_{\|m\| \to \infty} \left((\log_{q-2} \|m\|)^{\|m\|/\rho} \frac{m^{\lambda m}}{\|m\|^{\lambda \|m\|}} |a_m| \right)^{1/\|m\|}$$

où les a_m sont les coefficients de Taylor de la fonction entière.

Donc :

$$\sigma^{1/\lambda} e^{-\lambda} = \limsup_{\|m\| \to \infty} \left(\frac{(\log_{q-2} \|m\|)^{\|m\|/\rho}}{\|m\|^{\lambda \|m\|}} (m^m e^{-\|m\|})^\lambda |a_m| \right)^{1/\|m\|}.$$

Or la formule de Stirling donne :

$$\lim_{\|m\| \to \infty} ((m!)^{-1} m^m e^{-\|m\|})^{1/\|m\|} = 1,$$

donc :

$$\sigma^{1/\rho} e^{-\lambda} = \limsup_{m \to \infty} ((\log_{q-2} \|m\|)^{\|m\|/\rho} \|m\|^{-\lambda \|m\|} (m!) |^\lambda a_m|)^{1/\|m\|}.$$

On en déduit que la transformation

$$f(z) = \Sigma\, a_m z^m \to g(z) = \Sigma\, (\log_{q-2} \|m\|)^{\|m\|/\rho} (m!)^\lambda \|m\|^{-\lambda \|m\|} a_m z^m$$

est un isomorphisme de $\overline{\mathrm{E}}^q_{\Delta_\lambda}(\rho, \sigma)$ sur $\overline{\mathrm{H}}_n(e^\lambda . \sigma^{-1/\rho})$.

Si l'on désigne par G^*_m l'image par cet isomorphisme de la fonction $\|m\|^{\lambda\|m\|} . (m!)^{-\lambda} . (\log_{q-2} \|m\|)^{-\|m\|/\rho} . \mathrm{G}_m$, on s'aperçoit que $\{\varphi_m\}$ est précisément la suite d'éléments de $\mathrm{H}_n(e^{-\lambda} . \sigma^{1/\rho})$ qui forme avec $\{\mathrm{G}^*_m)$ un système biorthogonal. Donc d'après le lemme 0 du chapitre 2 $\{\mathrm{G}_m\}$ est une base de $\overline{\mathrm{E}}^q_{\Delta_\lambda}(\rho, \sigma)$ si et seulement si $\{\varphi_m\}$ est une base de $\mathrm{H}_n(e^{-\lambda} . \sigma^{1/\rho})$.

Démonstration analogue pour le cas où $q = 2$.

Théorème 2. — *Si* $\{z_m\}_{m \in \mathrm{N}^n}$ *vérifie la condition* (1), *alors* $\{\mathrm{G}_m\}_{m \in \mathrm{N}^n}$ *est une base de l'espace* $\overline{\mathrm{E}}^q_{\Delta_\lambda}(\rho, \mathrm{R})$ *avec :*

$$\mathrm{R} = \begin{cases} (\mathrm{W}(n, \lambda))^\rho . \rho^{-1} & \text{si } q = 2 \\ (\mathrm{W}(n, \lambda))^\rho & \text{si } q > 2. \end{cases}$$

Démonstration. — Nous allons démontrer le théorème dans le cas où $q > 2$ (démonstration analogue pour $q = 2$).

(1) implique l'existence d'une suite $\{z_m\}_{m\in\mathbf{N}^n}$ de points de la boule unité $\overline{\Delta}_0 = \{z \in \mathbf{C}^n : \|z\|_\infty < 1\}$ telle que :

$$\lim_{m\to\infty} \|z_m - \|m\|^\lambda (\log_{q-2}\|m\|^{-1/\rho}.z_m\| = 0.$$

Nous reprenons les notations du lemme 2 et posons :

$$\psi_m(z) = e^{\lambda m}\varphi_m(e^{-\lambda}.z) = \sum_{k\in\mathbf{N}^n}\left(\frac{\log_{q-2}\|m\|}{\log_{q-2}\|m+k\|}\cdot\frac{\|m+k\|^\lambda}{\|m\|^\lambda}\right)^{\|m+k\|} e^{-\lambda\|k\|}.$$

$$(z_m\|m\|^\lambda(\log_{q-2}\|m\|)^{-1/\rho})^k\cdot\frac{z^{m+k}}{(k!)^\lambda}$$

$$\varphi_m^*(z) = \sum_{k\in\mathbf{N}^n}(z_m)^k\frac{z^{m+k}}{(k!)^k}.$$

Il suffit de montrer que $\{\psi_m\}$ est une base de $\mathrm{H}_n(\mathrm{W}(n, \lambda))$. Pour cela on utilise le fait que $\{\psi_m\}$ est « assez voisine » de la suite $\{\varphi_m^*\}$ qui est une base de $\mathrm{H}_n(\mathrm{W}(n, \lambda))$ d'après le théorème 1'. On a :

$$\psi_m(z) = \sum_{j\in\mathbf{N}^n} a_{j,\,m}\varphi^*_{m+j} \qquad \text{avec} \qquad a_{0,\,m} = 1.$$

La base $\{\varphi_m^*\}$ est équivalente à la base $\{z^m\}$, donc $\{\psi_m\}$ est une base de $\mathrm{H}_n(\mathrm{W}, n, \lambda))$ si et seulement si la suite :

$$\chi_m(z) = z^m.\Big(\sum_{z\in\mathbf{N}^n} a_{j,\,m}z^j\Big) \quad (a_{0,\,m} = 1)$$

est une base de cet espace. On applique le théorème 0, on pose :

$$h_m(r) = \sum_{j\neq 0}|a_{j,\,m}|r^{\|j\|},$$

on va montrer que $h_m(r)\to 0$ $(\|m\|\to\infty)$ pour tout r $[0, \mathrm{W}(n, \lambda)[$.

Soit :

$$\mathrm{F}_m(z) = \frac{\psi_m(z)-\varphi_m^*(z)}{z^m} = \sum_{j\neq 0} a_{j,\,m}\left(\sum_i (z^*_{m+j})^i\cdot\frac{z^{j+i}}{(i!)^\lambda}\right).$$

On a :

$$|a_{j,\,m}| < \sum_{i\leqslant j}|\delta_i(z_q^*;\, m+j-i \leqslant q < m+j)||b_{i,\,m}|$$

où les $b_{i,\,m}$ sont les coefficients de Taylor de F_m.

Soit $r < W(n, \lambda)$, il existe $R \in \left]\frac{1}{W(n, \lambda)}, \infty\right[$ et $\tau \in]r, W(n, \lambda)[$ tels que : $rR < 1$ et $\tau R < 1$.

D'autre part il existe $A(R) < \infty$ tel que : $D_i \leqslant A(R) R^{\|i\|} \forall i$, de plus : $|b_{i,m}| < M_m(\tau) . \tau^{-\|i\|}$, $M_m(\tau) = \underset{\|z\|_\infty \leqslant \tau}{\operatorname{Max}} |F_m(z)|$. Donc :

$$|a_{j,m}| < A(R) M_m(\tau) . R^{\|j\|} \left(\sum_{i \in \mathbf{N}^n} (\tau R)^{-\|i\|} \right)$$

$$h_m(r) \leqslant M_m(\tau) . AR) \cdot \left(\frac{1}{1 - \tau R} \right)^n \left(\frac{1}{1 - rR} \right)^n$$

$h_m(r)$ converge vers 0 pour $m \to \infty$, car on peut vérifier à l'aide de la formule :

$$F_m(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} \frac{\log_{q-2} \|m\|}{\log_{q-2} \|m+k\|} \cdot \left(\frac{\|m+k\|^\lambda}{\|m\|^\lambda} \right)^{\|m+k\|} e^{-\lambda \|k\|} (z_m \|m\|^\lambda (\log_{q-2} \|m\|)^{-1/\rho})^k \frac{z^k}{(k!)^\lambda} - \sum_{k \in \mathbf{N}^n} (z_m^*)^k \frac{z^k}{(k!)^\lambda}$$

que $M_m(\tau)$ converge vers 0 pour tout $\tau < 1$.

Corollaire. — *Avec la condition* (1) *pour toute fonction* $f \in \overline{E}^q_{\Delta\lambda}(\rho, R)$ *et tout entier* $p \in [2, q]$ *la fonction*

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} \frac{1}{(k!)^\lambda} f^{(\lambda, k)}(z_k) . z^k$$

est de même p-ordre et (Δ_λ, p)*-type que* f.

Démonstration. — Conséquence immédiate du théorème précédent et du théorème 3 du chapitre 4.

Remarque :

a) Soit $W(n, \lambda, \rho)$ la borne supérieure des constantes C telles que : si $f \in \overline{E}^2_{\Delta\lambda}\left(\rho, \frac{C^\rho}{\rho}\right)$ et si pour tout $m \in \mathbf{N}^n$ la fonction $f^{(\lambda, m)}$ possède un zéro dans la boule $\{z \in \mathbf{C}^n : \|z\|_\infty \leqslant m^{1/\rho - \lambda}\}$ alors f est identiquement nulle.

Il est très probable que $W(n, \lambda, \rho) = W(n, \lambda)$ pour tout

$\rho \in]0, \infty[$. L'égalité $W(1, \lambda, \rho) = W(1, \lambda)$ a été établie par Suetin [27].

b) La même méthode nous permet de retrouver facilement l'extension donnée par Kamenetsky et Mme Macintyre à un théorème de Schoenberg : Si $\{z_p\}_{p \in \mathbf{N}}$ est une suite de nombres complexes dont les valeurs d'adhérence appartiennent toutes à $[-1, +1]$ et si f est une fonction entière non identiquement nulle telle que $f^{(p)}(z_p) = 0$ pour tout p, alors f ne peut être de croissance moindre que $\left(\text{ordre } 1, \text{ type } \frac{\pi}{4}\right)$.

c) Indépendamment de nous, Rubel et Taylor [23] ont aussi étudié l'interpolation d'Abel-Gontcharoff des fonctions analytiques de plusieurs variables par la méthode des bases voisines. Cependant leurs résultats sont d'un autre genre.

d) Le théorème 2 et son corollaire généralisent tout en précisant les résultats de Pommiez [20*a*] et Combes [5].

2. Sur les différences divisées successives.

1. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite de points d'un domaine D et f une fonction holomorphe sur D, on définit la suite $\{f_{(n)}\}$ par les égalités :

$$f_{(0)} = f, \; f_{(n)}(z) = (z - \lambda_n)^{-1} \cdot [f_{(n-1)}(z) - f_{(n-1)}(\lambda_n)]$$

pour $n = 1, 2\ldots$

On écrira :

$$f_{(n)}(z) = [f(\lambda_1), f(\lambda_2) \ldots, f(\lambda_n), f(z)] \quad \text{pour} \quad n = 1, 2 \ldots.$$

Les $\{f_{(n)}(z)\}$ sont appelées les différences divisées successives de f relatives à la suite $\{\lambda_n\}$.

M. Pommiez [20*b*] a étudié le problème de l'interpolation par les valeurs que prennent les différences divisées successives en une suite de points. On va montrer que dans ses résultats la constante a $(0{,}536 < a < 0{,}537$; a est la racine positive de l'équation $4x^4 - x^3 + x^2 + x - 1 = 0)$ peut être remplacé par la constante $C = W(1, 0)$.

2. Δ désigne le disque unité, soient $\{\lambda_n\}$ et $\{z_n\}$ deux suites de points dans Δ; on désigne par $\{C_n(z)\}$ la suite simple de polynômes telle que :

$$L_m(C_n) = \delta_{m,n} \quad \text{pour tout} \quad (m, n)$$

où L_m désigne la forme linéaire :

$$L_m(f) = [f(\lambda_1), f(\lambda_2) \ldots, f(\lambda_m), f(z_m)].$$

Théorème. — *Si* $\lim \lambda_n = 0$ *et si* $\limsup |z_n| \leqslant C$, *alors la suite* $\{C_n(z)\}$ *est une base de l'espace* $H(\overline{\Delta})$.

Démonstration. — Posons

$$P_0(z) \equiv 1, \; P_n(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \ldots (z - \lambda_n),$$

il est connu que $\{P_n(z)\}$ est une base de $H(\Delta)$ et que la transformation T :

$$f = \Sigma\, a_n P_n \to g = \Sigma\, a_n z^n$$

est un automorphisme de $H(\Delta)$.

Soit $\{\varphi_n(z)\}$ la suite d'éléments de $H(\Delta)$ qui constitue avec $\{C_n(z)\}$ un système biorthogonal, nous avons :

$$\varphi_n(z) = P_n(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{n+k}(z)P_{n+k}(z_n)}{P_n(z) \, . \, P_n(z_n)}\right)$$

$$T\varphi_n(z) = \psi_n(z) = z^n\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^n \frac{P_{n+k}(z_n)}{P_n(z_n)}\right)$$

Si $\{z_n^*\}$ désigne une suite dans $\{z : |z| \leqslant C\}$ telle que $\lim (z_n - z_n^*) = 0$ et si $\varphi_n^*(z)$ désigne la fonction $\dfrac{z^n}{1 - z \, . \, z_n^*}$ nous avons $\dfrac{\psi_n(z) - \varphi_n^*(z)}{z^n} \to 0$ uniformément sur tout compact de Δ.

En raisonnant exactement comme dans la démonstration du théorème VI, on voit que $\{\psi_n(z)\}$ est une base $H(\Delta)$. Il en résulte que $\{C_n(z)\}$ est une base de $H(\overline{\Delta})$. C.Q.F.D.

3. Théorème. — *Si* $\lim (\log_{q-2} n)^{-1/p} |\lambda_n| = 0$ *et si*

$$\limsup (\log_{q-2} n)^{-1/\rho} |z_n| \leqslant 1$$

alors $\{C_n(z)\}$ *est une base de* $\overline{E}^q(\rho, R)$ *avec* :

$$R = \frac{C^\rho}{\rho} \quad \textit{lorsque} \quad q = 2,\ R = C^\rho \quad \textit{lorsque} \quad q > 2.$$

La démonstration se fait comme précédemment.

4. Soit $\overline{E}(1, k(\theta))$ l'espace des fonctions entières f de type exponentiel fini telles que :

$$h_f(\theta) < k(\theta) \qquad \text{pour} \qquad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}$$

où $h_f(\theta)$ désigne l'indicatrice de f et $k(\theta)$ la fonction :

$$k(\theta) = \cos\theta \log(2\cos\theta) + \theta \sin\theta.$$

On munit $\overline{E}(1, k(\theta))$ de sa topologie standard de limite inductive d'espaces de Fréchet.

THÉORÈME. — *Si* $\lambda_n = n$ *pour tout* n *et si*

$$\limsup \left|\frac{z_n - n}{n}\right| < C,$$

alors $\{C_n(z)\}$ *est une base de* $\overline{E}(1, k(\theta))$.

Démonstration. — Comme Monsieur Pommiez l'a indiqué dans sa démonstration, il suffit de montrer que la suite :

$$\psi_n(z) = z^n\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z_n - n) \ldots (z_n - n - k + 1}{(n+1) \ldots (n+k)} z^k\right)$$

est une base de l'espace $H(\Delta)$. Pour cela on raisonne comme précédemment.

3. Univalence des dérivées successives.

En 1940 Boas [4*b*] a établi le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Si* f *est une fonction entière de type exponentiel plus petit que* $\log 2$ *et si les dérivées successives de* f, *sauf un nombre fini, ne sont pas univalentes dans le disque unité, alors* f *est un polynôme.*

Ce résultat vient d'être amélioré par G. A. Read [21], qui a remplacé la constante log 2 par 0,7259 (constante trouvée par S. S. Macyntire). On va améliorer encore une fois le théorème de Boas.

Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites de points du disque unité Δ, on considère les fonctionnelles :

$$\underset{(n\geqslant 1)}{L_n(f)} = \begin{cases} \dfrac{f^{(n-1)}(a_n) - f^{(n-1)}(b_n)}{n!(a_n - b_n)} & \text{si} \quad a_n \neq b_n \\ \dfrac{f^{(n)}(a_n)}{n!} \quad \text{si} \quad a_n = b_n \end{cases}$$

$$L_0(f) = f(0).$$

On désigne par $\{P_n(z)\}$ la suite simple de polynômes qui forme avec $\{L_n\}$ un système biorthognal, c'est-à-dire :

$$L_n(P_m) = \delta_{n,m} \quad \text{pour tout} \quad (n, m) \in \mathbf{N}^2.$$

On peut représenter $P_n(z)$ sous la forme d'un déterminant

$$P_b(z) = \frac{1}{(n-1)!\dots 2!1!}\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^n \\ 1 & \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{2(a_0 - b_0)} & \dfrac{a_0^3 - b_0^3}{3(a_0 - b_0)} & \dots & \dfrac{a_0^{n+1} - b_0^{n+1}}{(n+1)(a_0 - b_0)} \\ 0 & 1! & \dfrac{a_1^2 - b_1^2}{a_1 - b_1} & \dots & \dfrac{a_1^n - b_1^n}{a_1 - b_1} \\ 0 & 0 & 2! & \dots & \dfrac{n(a_2^{n-1} - b_2^{n-1})}{a_2 - b_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots (n-1)! & \dfrac{n!(a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2)}{2(a_{n-1} - b_{n-1})} \end{vmatrix}$$

Lorsque $a_n = b_n = \alpha_n$ alors $P_n(z)$ est le polynôme de Gontcharoff $G_n(z)$:

$$G_n(z) = \frac{1}{(n-1)!\dots 2!1!}\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^{n-1} & z^n \\ 1 & 0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^{n-1} & \alpha_0^n \\ 0 & 1! & 2\alpha_1 & \dots & (n-1)\alpha_1^{n-2} & n\alpha_1^{n-1} \\ 0 & 0 & 2! & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! & n!\alpha_{n-1} \end{vmatrix}$$

On peut écrire :

$$P_n(z) = n!\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} p_{n-k}(a_k, a_{k+1} \dots, a_{n-1}, b_k, b_{k+1} \dots, b_{n-1}) \frac{z^k}{k!}$$

$$G_n(z) = n!\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} g_{n-k}(\alpha_k, a_{k+1} \dots, \alpha_{n-1}) \frac{z^k}{k!}$$

avec

$$p_n(a_0, a_1 \dots, a_{n-1}, b_0, b_1 \dots b_{n-1})$$

$$= \frac{1}{(n-1)! \dots 2!1!} \begin{vmatrix} \dfrac{a_0^2 - b_0^2}{2(a_0 - b_0)} & \dfrac{a_0^3 - b_0^3}{3(a_0 - b_0)} & & \dfrac{a_0^{n+1} - b_0^{n+1}}{(n+1)(a_0 - b_0)} \\ 1 & \dfrac{a_1^2 - b_1^2}{a_1 - b_1} & & \dfrac{a_1^n - b_1^n}{a_1 - b_1} \\ 0 & 2! & & \dfrac{n(a_0^{n-1} - b_0^{n-1})}{a_2 - b_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & (n-1)! & \dfrac{n!(a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2)}{2(a_{n-1} - b_{n-1})} \end{vmatrix}$$

$$g_n(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \frac{1}{(n-1!) \dots 2!1!} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^{n-1} & \alpha_0^n \\ 1! & 2\alpha_1 & \dots & (n-1)\alpha_1^{n-2} & n\alpha_1^{n-1} \\ 0 & 2! & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & & \dots & (n-1)! & n!\alpha_{n-1} \end{vmatrix}$$

Il est clair que :

$$p_n(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) = g_n(\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{n-1})$$

$$p_n(a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}) = \frac{1}{(a_0 - b_0)(a_1 - b_1) \dots (a_{n-1} - b_{n-1})} \int_{a_0}^{b_0} d\alpha_0 \int_{a_1}^{b_1} d\alpha_1 \dots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} g_n(\alpha_0, \alpha_1 \dots, a_{n-1})\, d\alpha_{n-1}$$

$$\operatorname*{Max}_{a_i \text{ et } b_i \in \bar\Delta} |p_n(a_0, \dots a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1})| = \operatorname*{Max}_{\alpha_i \in \Delta} |g_n(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})|$$

Donc d'après le théorème 1 on a :

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\operatorname*{Max}_{a_i \text{ et } b_i \in \bar\Delta} |p_n(a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1})| \right)^{1/n} = \frac{1}{W}$$

où W désigne la constante de Whittaker.

Par les arguments déjà utilisés on démontre le

Théorème. — *Si* $\limsup_{n \to \infty} n(\log_{q-2} n)^{-1/\rho} \operatorname{Max} \{|a_n|, |b_n|\} \leqslant 1$ *alors la suite* $\{P_n(z)\}$ *est une base de l'espace* $\overline{E}^q(\rho, R)$ *avec :*

$$R = \begin{cases} \dfrac{W\rho}{\rho} & \textit{lorsque} \quad q = 2 \\ W^\rho & \textit{lorsque} \quad q > 2. \end{cases}$$

COROLLAIRE. — *Si* $f \in \overline{\mathrm{E}}^q(\rho, \mathrm{R})$ *et si chaque* $f^{(n)}$, *sauf pour un nombre fini d'entiers* n, *n'est pas univalente dans le disque* $\overline{\mathrm{D}}_n$:

$$\overline{\mathrm{D}}_n = \{z : |z| \leqslant n(\log_{q-2} n)^{-1/\rho}\}$$

alors f *est un polynôme.*

Remarque. — On peut étudier par la même méthode l'univalence des dérivées généralisées $f^{(\lambda, n)}$, les résultats correspondants sont faciles à énoncer.

Note. — Après avoir terminé la rédaction de ce chapitre nous avons pris connaissance du travail sur le même sujet de Buckholtz ([6]), l'Auteur y démontre en particulier le corollaire ci-dessus dans le cas où $q = 2$ et $\rho = 1$, sa méthode est différente.

BIBLIOGRAGHIE

[1] L. A. AIZENBERG et B. S. MITYAGIN, Espaces des fonctions holomorphes sur les domaines multicerclés (en russe), *Sibirski Mat. Z.*, 1 (1960).

[2] M. G. ARSOVE, The Paley-Wiener theorem in metric linear spaces, *Pacific. J. Math.*, 10 (1960).

[3] S. BERGMAN, The Kernel function and conformal mapping, *Math. Surveys*, n° 5, *Amer. Math. Soc.*, (1950).

[4] R. Ph. Jr. BOAS, *a*) Expansions of analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 48 (1940).

b) Univalent derivatives of entire functions, *Duke Math. J.*, 6 (1940).

[5] J. COMBES, Sur les valeurs prises par les dérivées successives des fonctions analytiques, *Am. Fac. Sc. Univ. Toulouse*, 4e série, XXIV (1960).

[6] M. M. DRAGILEV, *a*) Extendable bases of analytic functions, *Amer. Math. Soc. Translations*, Ser. 2, 43 (1964).

*b)*On the existence of a common basis for imbedded spaces of analytic functions, *Soviet Math. Dokl.*, 3 (1962).

[7] M. M. DRAGILEV et O. P. CUKHLOVA, Sur la convergence de certaines séries d'interpolation (en russe), *Sibirsk. Math. Z*, 4 (1963).

[8] V. D. EROKHIN, Best linear approximation of functions analytically continuable from a continuum to a given region, *Russian Math. Surveys*, 23 (1968).

[9] M. A. EVGRAFOV, The method of near systems in the space of analytic functions and its application to interpolation, *Amer. Math. Soc. Translations*, ser. 2, 16 (1960).

([6]) Buckholts J. D. : The Whittaker Constant and successive derivatives of entire functions, *J. Approx. Theory*, 3 (1970), p. 194-212.

[10] G. Faber, Uber polynomische entwicklungen, *Math. Ann.*, 57 (1903).

[11] M. Falgas, Sur les séries de base de polynômes, *Am. Sc. Ec. Norm. Sup.*, ser. 3, 81 (1964).

[12] A. A. Gol'dberg, Remarque élémentaire sur les formules déterminant l'ordre et le type des fonctions de plusieurs variables complexes (en russe), *Akad. Nauk Armjan.*, SSR Dokl., 29 (1959).

[13] F. Leja, Sur certaines suites liées aux ensembles plans et leur application à la représentation conforme, *Ann. Soc. Pol. Math.*, 4 (1957).

[14] A. L. Levin and V. M. Tikhomirov, On a theorem of Eroklim, Appendice de 8.

[15] J. L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Publ. Math.*, n° 19, I.H.E.S., 1964.

[16] A. Martineau, *a*) Sur la notion d'ensemble fortement linéellement convexe, *Anais Acad. Bras. Ciencias*, 40 (1968).

b) Indicatrices des fonctionnelles analytiques et transformée de Laplace, Notas e comunicaçoes de Matematica, *Inst. Fis. Mat.*, *Univ.* Recife, (1965).

[17] B. S. Mityagin, Approximative dimension and bases in nuclear spaces, *Russian Math. Surveys*, 16 (1961).

[18] W. News, Representation of analytic functions by infinite series, *Philos. Trans. Roy. Soc.*, London, Seri. A, 245 (1953).

[19] Nguyen Thanh Van. *a*) Sur les bases de Schauder de l'espace des fonctions holomorphes dans un domaine simplement connexe, *C.R. Acad. Sc. Paris*, Ser. A, 264 (1967).

b) Sur certaines interpolations des fonctions analytiques de n variables complexes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, Ser. A, 266 (1968).

c) Bases communes des espaces de fonctions holomorphes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, Ser. A, 269 (1969).

[20] M. Pommiez. *a*) Sur les restes successifs des séries de Taylor, *Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse*, 4e série, XXIV (1960).

b) Sur les différences divisées successives et les restes des séries de Newton généralisées, *Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse*, 4e série, XXVIII (1964).

c) Sur certaines bases d'un espace de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, ser. A, 262 (1966).

[21] G. A. Read, Univalent derivatives of entire functions, *J. London Math. Sco.*, 2nd ser., 1 (1969).

[22] J. M. Retherford and C. W. McArthur, Some remarks on bases in linear topological spaces, *Math. Ann.*, 164 (1966).

[23] L. A. Rubel and B. Taylor, Uniqueness theorems for analytic functions of one and of several complex variables, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, (1968).

[24] D. Sato, Rate of growth of certain entire functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70 (1964).

[25] M. Schiffer and J. Siciak, Transfinite diameter and analytic continuation of functions of two complex variables, « Mélanges Polya », Standford University Press, (1962).

[26] J. Siciak, *a*) Some applications of the method of extremal points, *Colloq. Math.*, 11 (1964).

b) Analyticity and separate analyticity of functions defined on lower dimensional subset of $\mathbf{C}^n$, *Zeszyty Nauk. Univ. Jag.*, 13 (1969).

c) Separately analytic functions and envelops of holomorphy of some lower dimensional subsets of $\mathbf{C}^n$, *Ann. Pol. Math.*, 22 (1969).

[27] Ju. K. Suetin, *a*) Sur les constantes de convergence et d'unicité de certains problèmes d'interpolation (en russe), *Math. Sbornik*, 66 (108) (1965).

b) Identité des constantes d'unicité et de convergence dans certains problèmes d'interpolation (en russe) Vesnik Moskov, *Univ. Ser. I Mat. Meh*, 21 (1966).

[28] J. L. Walsh, *a*) Interpolation and approximation, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, 3e édition (1960).

b) A generalization of Faber polynomials, *Math. Ann.*, 136 (1958).

c) « Approximation by bounded analytic functions », *Mém. Sc. Math.*, Gauthier-Villars, Paris, 1960.

[29] J. L. Walsh and P. J. Davis, Interpolation and orthonormal systems, *J. d'Analyse Math.*, 2 (1952).

[30] L. J. Walsh and H. Russel, Hyperbolic capacity and interpolating rational functions II, *Duke Math. J.*, 33 (1966).

[31] J. M. Whittaker, Leçons sur les séries de base de polynômes quelconques, Collection Borel, Gauthiers-Villars, Paris, 1949.

[32] H. Widom, Polynomials associated with measures in the complex plane, *J. Math. Mech.*, 16 (1967).

[33] V. P. Zakharyuta, Continuable bases in spaces of analytic functions of one and of several complex variables, *Siberian Math. J.*, 8 (1967).

Manuscrit reçu le 9 février 1971.
accepté par M. Brelot

Nguyen Thanh Van,
U.E.R. de Mathématiques,
Université Paul-Sabatier,
118, Route de Narbonne,
31-Toulouse.