MAURICE POUZET

Sur les prémeilleurordres

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 2 (1972), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 2 (1972), 1-20.

SUR LES PRÉMEILLEURORDRES

par Maurice POUZET

Introduction.

Les notions d'ordre les plus simples qui généralisent le bon ordre à l'ordre partiel sont essentiellement celle d'ordre artinien, pour qui toute partie de la base admet des éléments minimaux, et celle d'ordre artinien d'incomparabilité finie (en abrégé a.i.f.), plus communément appelée « *partial-well order* », pour qui toute partie de la base a des éléments minimaux en nombre fini.

Un résultat classique affirme qu'un ensemble ordonné est a.i.f. si et seulement si l'ensemble de ses sections initiales (parties contenant tous les éléments antérieurs à l'un des leurs) ordonné par l'inclusion est artinien; ce dernier ensemble n'étant pas nécessairement a.i.f. comme le montre un exemple dû à Kruskal [7].

En 1954, Rado [17] a obtenu une caractérisation des ensembles ordonnés dont l'ensemble des sections initiales est a.i.f.; s'inspirant de celle-ci, Nash-Williams [11] a introduit en 1965 une structure de préordre appelée *better quasi order* (en abrégé b.q.o.) qui, pour l'ordre, est intermédiaire entre celles d'a.i.f. et de bon ordre et de plus se conserve par passage aux ensembles de sections initiales.

Cette nouvelle notion a un développement parallèle à celui des a.i.f. :

Ainsi, en 1968, Nash-Williams [12] a prouvé que la classe des suites, dont le domaine est un ordinal et à valeurs dans un b.q.o., est encore b.q.o. (une suite s étant antérieure à la suite t lorsque l'on peut appliquer, en respectant l'ordre des indices, chaque terme de s sur un terme de t qui lui soit postérieur); ce résultat est analogue au fait que sur un a.i.f., l'ensemble des suites finies est a.i.f. (alors que l'ensemble des suites de domaine infini n'est pas nécessairement a.i.f.).

Récemment [16], nous plaçant dans le cadre de l'algèbre universelle, nous avons étudié un nouveau type d'algèbres : *les algèbres préordonnées par divisibilité*. Une algèbre de ce type consiste en la donnée d'un ensemble préordonné M d'opérations sur un ensemble préordonné A; à chaque élément f de M correspond à la fois un ordinal α, c'est l'arité de f, et une aplication $\tilde{f}$ de A^α dans A(A^α est l'ensemble des suites de domaine α à valeurs dans A) de sorte que : 1° si f d'arité α est inférieure à g d'arité β et la suite s de A^α inférieure à la suite t de A^β, alors $\tilde{f}(s)$ est inférieur à $\tilde{g}(t)$; 2° un élément quelconque x de A est toujours inférieur au résultat de n'importe quelle opération f appliquée à une suite donc x est un des termes. Ce concept a été introduit pour les opérations d'arité finie par Higman et mis sous cette forme par Cohn; les résultats de Higman [5] et Kruskal en 1960 [8] reviennent à dire que pour une algèbre préordonnée par divisibilité dont l'arité des opérations est finie, si l'ensemble des opérations et une partie engendrant l'algèbre sont a.i.f., alors l'algèbre elle même est a.i.f.. Nous avons montré sans cette hypothèse restrictive sur l'arité des opérations, que *si l'ensemble des opérations et une partie engendrant l'algèbre sont b.q.o., alors l'algèbre est b.q.o.;* résultat permettant une large synthèse des propriétés connues des b.q.o.

La notion de b.q.o. joue un rôle essentiel dans la théorie de l'ordre; elle permet en particulier de montrer que certaines classes de structures sont a.i.f. pour des préordres très naturels, et par là même de donner des procédés de construction de ces structures. Ainsi, Nash-Williams [11] a prouvé en 1965 que la classe des arbres infinis est a.i.f.; résultat conjecturé par Kruskal [8] une fois montré en 1960 que la classe des arbres finis est a.i.f. En 1969, Laver [9] a prouvé que la classe des chaînes dispersées est a.i.f. pour l'abritement, résultat conjecturé par Fraisse [3] dès 1948. (Une chaîne C s'*abrite* dans la chaîne C′ si C est isomorphe à une restriction de C′; une chaîne est *dispersée* si elle n'abrite pas la chaîne des rationnels). Dernièrement Corominas [1] a obtenu un résultat similaire pour la classe des p-groupes abéliens caractérisés par leurs invariants d'Ulm. Ces résultats n'ont pu être obtenus avant l'introduction de la notion de b.q.o. : le caractère a.i.f. ne se conserve pas par des clôtures algébriques faisant intervenir des opérations infinitaires telles que la somme ordinale pour les chaînes ou la somme directe pour les groupes, alors qu'en accord avec notre résultat algébrique, le caractère b.q.o., lui, se conserve.

Comme, malgré tout, la définition des b.q.o. par Nash-Williams n'est pas très intuitive et le rapport de cette notion avec les a.i.f. pas très évident, sauf peut-être quant aux résultats, Jullien [6] en a cherché une définition plus naturelle. Ayant remarqué qu'un ensemble préordonné est a.i.f. si et seulement si toute suite de domaine des entiers et à valeurs sur cet ensemble est une somme finie de suites indécomposables (la somme de la suite s et de la suite t est la suite $s + t$ obtenue en écrivant les termes de t à la suite des termes de s; une suite s est alors indécomposable si dès qu'elle est la somme de s_1 et s_2, (avec $s_2 \neq 0$) elle est inférieure à s_2), Jullien appelle *prémeilleurordre* (en abrégé p.m.o.) *tout ensemble préordonné sur lequel une suite quelconque est toujours égale à une somme finie de suites indécomposables*; il montre qu'un b.q.o. est p.m.o. et conjecture la réciproque. Dans un article précédent [14], nous avons étudié, en connexion avec des hypothèses de Fraisse sur les chaînes, les suites ayant pour domaine une chaîne dispersée et en particulier un ordinal; le résultat alors obtenu nous permet d'affirmer qu'*un p.m.o. est un ensemble préordonné sur lequel les suites ordinales forment un a.i.f.*

Dans cet article, nous appuyant sur ce résultat et quelques propriétés des « *barrières* » (notion intervenant dans la définition des b.q.o. par Nash-Williams), essentiellement sur le fait qu'une barrière est bien ordonnée pour l'ordre lexicographique, nous prouvons l'identité entre les notions de p.m.o. et de b.q.o. Nous annonçons de nouvelles propriétés des barrières nous permettant de caractériser un b.q.o. comme un ensemble préordonné ne contenant pas de parties isomorphes à certains ensembles ordonnés, ceci étant à rapprocher du fait qu'un a.i.f. est un ensemble préordonné ne contenant pas de partie isomorphe à l'ensemble des entiers négatifs et pas de partie isomorphe à l'ensemble des entiers ordonnés par l'égalité. Enfin nous annonçons des résultats sur les α-prémeilleurordres, notions intermédiaires, modulo l'ordinal α, entre celles d'a.i.f. et de p.m.o.

Cet article est la suite naturelle de [14]; il utilise le même vocabulaire, seules les définitions et notations essentielles sont rappelées, en particulier celles de « *better-quasi order* » avec des notations pratiquement identiques à [11].

1. Better quasi order de Nash-Williams.

I-1. *Terminologie-Notations.*

I-1.1. Si α est un ordinal, 0_α est l'ensemble des ordinaux strictement inférieurs à α. Une *α-séquence*, ou *séquence ordinale*, ou *suite ordinale*, est une application s de 0_α dans un ensemble X; L'ensemble des $s(i)$ pour $i \in 0_\alpha$ est l'image de la séquence s, on la désigne par Ims; l'ensemble 0_α est le domaine de séquence s, on le désigne aussi par D_s; l'ordinal α est la longueur de la séquence s, notée aussi $l(s)$; $[s(0), \ldots s(i), \ldots]_{i<\alpha}$ désigne la α-séquence s; si $s \in X$, on note $[x]$ l'unique 1-séquence prenant la valeur x, enfin si aucune confusion n'est à craindre, on désigne par 0 la 0-séquence (elle est désignée par $\square$ dans [11]).

I-1.2. Pour l'ordinal α, on note $\alpha.\,X$ la classe de toutes les β-séquences sur X telles que β soit inférieur strictement à α; on note $\mathfrak{B}.\,X$ la classe réunion de tous les $\alpha.\,X$, c'est donc la classe de toutes les séquences ordinales sur X. Lorsque X est préordonné par $\leqslant$, il en est de même de $\mathfrak{B}.X$, une α-séquence s étant inférieure à une β-séquence t et l'on note $s \leqslant t$ lorsqu'il existe une application h strictement croissante de 0_α dans 0_β telle que pour $i < \alpha$ on ait $s(i) \leqslant t_0 h(i)$; dans toute la suite les séquences seront comparées de cette façon.

I-1.3. Soient s une α-séquence et t une β-séquence;

a) on dit que t *commence par* s et l'on note $s \ll t$ lorsque s diffère de t et la restriction de t à 0_α est égale à s.

b) On appelle *somme ordinale*, ou concaténée de s et t la $(\alpha + \beta)$-séquence $s + t$ définie par $(s + t)(i) = s(i)$ pour $i < \alpha$ et $(s + t)(\alpha + i) = t(i)$ pour $i < \beta$.

[Plus généralement, étant donnée une α-séquence de α_i-séquences s_i on définit la *somme ordinale* (ou somme lexicographique) des s_i suivant α, que l'on note $\sum_{i<\alpha} s_i$, comme la séquence ayant pour domaine la somme ordinale usuelle des α_i suivant α, soit $\sum_{i<\alpha} \alpha_i$, et prenant la valeur $s_{i'}(j')$ pour l'ordinal $\sum_{i<i'} \alpha_i + j'$ tel que $j' < \alpha_{i'}$].

c) On note $_*s$ la séquence obtenue en supprimant le premier terme de s, c'est-à-dire que $_*s$ vérifie $s = [s(0)] + {}_*s$.

d) On note $\lambda(s)$ le dernier terme de s quand $l(s)$ est fini, donc

$$\lambda(s) = s(l(s) - 1).$$

I-1.4. Si X est préordonné par $\leqslant$, l'élément x de X est strictement inférieur (resp. incomparable) à l'élément y de X et l'on note $x < y$ (resp. $x \| y$) si $x \leqslant y$ et $y \nleqslant x$ (resp. $x \nleqslant y$ et $y \nleqslant x$). Une α-séquence est alors strictement croissante si $i < j < \alpha$ implique $s(i) < s(j)$. On désigne par $A_\alpha(X)$ l'ensemble des α-séquences strictement croissantes et par $A(X)$ la réunion des $A_\alpha(X)$ pour $\alpha < \omega$. Si B est une partie de $A(X)$ alors *la base de* B, notée $\overline{B}$, est la réunion des images des éléments de B. Comme toute séquence finie strictement croissante sur l'ensemble **N** des entiers naturels peut être identifiée à son image, on identifie $A(\mathbf{N})$ à l'ensemble des parties finies d'entiers. On dit que deux éléments s et t de $A(\mathbf{N})$ sont *consécutifs* et l'on note $s \lhd t$ lorsqu'il existe un élément u de $A(\mathbf{N})$ tel que $s \ll u$ et $t = {}_*u$.

Par exemple : $[1] \lhd [2]$, $[1, 4, 5] \lhd [4, 5, 8, 10]$ etc...

I-2. ***Définitions.***

I.2-1. *Une barrière* est une partie B de $A(\mathbf{N})$ telle que :

B1 : $\overline{B}$ est infini,

B2 : $\forall s \exists t (s \in A_\omega(\overline{B}) \rightarrow t \in B$ et $t \ll s)$,

B3 : $\forall s \forall t$ $(s \in B$ et $t \in B$ et $\mathrm{Im} s \subseteq \mathrm{Im} t \rightarrow s = t)$.

Ainsi l'ensemble des singletons, l'ensemble des paires et plus généralement l'ensemble des parties à n éléments de **N**, sont des barrières (d'autres exemples seront donnés en III-2.6.

Une sous-barrière d'une barrière B est une barrière B′ contenue dans B.

I-2.2. Une application f d'une barrière B dans l'ensemble préordonné X est *bonne* s'il existe s et t dans B tels que $s \lhd t$ et $f(s) \leqslant f(t)$ sinon elle est *mauvaise*.

I-2.3. (Nash-Williams [11]) une relation de préordre χ sur une classe X est un *better quasi order* (en abrégé b.q.o.) si toute application f d'une barrière B quelconque dans X est bonne. (Par abus de langage, la classe préordonnée $\langle X, \chi \rangle$ est aussi appelée b.q.o.).

I-3. *Propriétés.*

I-3.1. Rappelons qu'un ensemble (ou une classe préordonnée) X est *artinien d'incomparabilité finie* (en abrégé a.i.f.) si toute partie admet des éléments minimaux (i.e. sans éléments strictement antérieurs) en nombre fini. Moyennant l'axiome du choix, cela revient à dire que toute suite strictement décroissante d'élément de X et toute partie de X formée d'éléments deux à deux incomparables sont finies; c'est encore équivalent au fait que pour toute ω-séquence s sur X, il existe $i < j < \omega$ tels que $s(i) \leqslant s(j)$.

I-3.2. L'ensemble des singletons de N étant une barrière, et la relation $[I] \lhd [j]$ pour i et j dans N, équivalente à $i < j$ dans N, il est clair que *tout b.q.o. est a.i.f.*; par ailleurs, il est assez facile de montrer que tout *bon ordre est b.q.o.* Cette notion ne se réduit donc pas à des exemples triviaux.

I-3.3. Comme pour les a.i.f., toute restriction, toute image surjective, toute réunion finie, tout produit fini de b.q.o. sont encore b.q.o. (la démonstration de ces deux dernières propriétés fait appel à une généralisation non triviale du théorème de Ramsey par Nash-Williams [12]).

I-3.4. Dans ce qui suit, nous utiliserons seulement le fait que la *classe des séquences ordinales sur un b.q.o. est b.q.o.*

Ce résultat a été obtenu de façon très compliquée, par Nash-Williams [12], et sans utiliser la notion d'arbre qu'il avait déjà étudiée [11]. Généralisant les résultats de ce dernier article, R. Laver [9] en a obtenu une nouvelle preuve. Finalement, nous inspirant de la méthode de R. Laver, nous en avons donné une preuve assez simple [15] faisant seulement appel aux techniques usuelles des b.q.o. et à la notion de quasi-monotonie; cette preuve a été reprise dernièrement par R. Fraisse [4] pour l'exposé de la démonstration de ses conjectures sur les chaînes dispersées.

II. Prémeilleurs ordres de Jullien.

II-1. *Définitions.*

II-1.1. Une séquence ordinale s sur la classe préordonnée X est *indécomposable* si dès que $s = s_1 + s_2$ avec $s_2 \neq 0$ alors $s \leqslant s_2$.

II-1.2. [6]. — Une classe préordonnée X est *prémeilleur ordonnée*, le préordre étant un *prémeilleurordre* (en abrégé p.m.o.) si toute séquence ordinale sur X est égale à une somme finie d'indécomposables.

II-2. *Propriétés.*

Rappelons le théorème II-2.1. de [14] pour les séquences ordinales sur X (i.e. en fait pour les types des X-chaînes bien ordonnées).

II-2.1. Théorème. — *Dans la classe* $\mathfrak{B}.\mathrm{X}$ *des séquences ordinales* (resp. des *séquences ordinales dénombrables*) *sur la classe préordonnée* X;

Il y a équivalence entre:

i) *toute suite strictement décroissante est finie*;

ii) *toute famille d'éléments deux à deux incomparables est finie*;

iii) *tout élément est une somme finie d'indécomposables*;

iv) *tout élément différent de* 0 *est de la forme* $k + l$ *avec* l *indécomposable différent de* 0.

v) *tout indécomposable différent de* 0 *et des séquences à un élément est une somme ordinale quasi-monotone régulière d'indécomposables strictement inférieurs.* (La somme ordinale $\sum_{i<\mu} k_i$ est quasi-monotone si μ est un ordinal régulier et si pour tout $i < \mu$ l'ensemble des j tels que $k_i \leqslant k_j$ est de type μ).

Nous n'utiliserons que le :

II-2.2. Corollaire. — *Pour toute classe préordonnée* X, *il y a équivalence entre* :

i) X p.m.o.;

ii) ß.X a.i.f.

III. Prémeilleur ordre et better quasi order.

Le résultat essentiel de cette partie montre l'exactitude de la conjecture de Jullien.

III-1. Théorème. — *Pour toute classe préordonnée* X, *il y a équivalence entre* :

i) X *est prémeilleurordonnée*;

ii) *La classe des séquences ordinales dénombrables sur* X *est artinienne d'incomparabilité finie*;

iii) X *est un better quasi order.*

Début de la preuve.

1) i) $\rightarrow$ ii) est trivial d'après II.2.2.

2) iii) $\rightarrow$ i) Comme X est b.q.o., d'après [12] la classe ß.X l'est aussi, en particulier cette classe est a.i.f., d'où d'après II.2.2., X est p.m.o.

3) ii) $\rightarrow$ iii) constitue la part originale de cette partie, elle fait appel à des :

III-2. *Propriétés nouvelles des barrières.*

III-2.1. Définition. — *L'ensemble* A(**N**) *est muni de l'ordre lexicographique, noté* $\leqslant$, *défini par* $s \leqslant t$ *lorsque* s *et* t *appartiennent à* A(**N**) *et soit* $s \ll t$, *soit* $s = t$, *soit pour le plus petit entier* i *tel que* $s(i) \neq t(i)$ *on a* $s(i) < t(i)$.

Une partie quelconque B de A(**N**) sera munie de l'ordre induit. Notons que $A(\mathbf{N})$ est totalement ordonné (mais non bien ordonné car il contient des parties denses).

III-2.2. Proposition. — *Toute barrière est bien ordonnée pour l'ordre lexicographique.*

Preuve. — Montrons qu'une partie non vide C d'une barrière B admet un plus petit élément. Pour cela considérons le plus petit entier c_0 premier terme d'une suite s de C; si $[c_0]$ appartient à C, c'est évidemment son plus petit élément; sinon considérons le plus petit entier c_1 deuxième terme des suites C ayant c_0 pour premier terme; si $[c_0, c_1]$ appartient à C, c'est évidemment son plus petit élément; sinon considérons le plus petit entier c_2 troisième terme des suites de C ayant c_0 pour premier terme et c_1 pour deuxième terme, etc... On construit ainsi une suite strictement croissante $c = [c_0, c_1, c_2, \ldots c_n \ldots]$ d'éléments de $\overline{\mathrm{B}}$ dans laquelle c_n est le plus petit $n+1$ ième terme des suites de C commençant par $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$. Si cette suite est infinie il existe un entier n pour lequel $[c_0, c_1, \ldots c_n]$ appartient à B, par conséquent il n'y a pas de suite dans B (et donc dans C) commençant par $c_0, c_1, \ldots c_n, c_{n+1}$ ce qui est contradictoire. La suite c est donc finie et appartient évidemment à C; si maintenant s est un élément de C ne commençant pas par c, il diffère de c par au moins un terme, si i_0 est le plus petit entier tel que $s(i_0) \neq c_{i_0}$, alors s commence par:

$$c_0, c_1, c_2, \ldots c_{i_0-1}$$

et donc $c_{i_0} < s(i_0)$, c'est-à-dire $c < s$. Par conséquent c est le plus petit élément de C. Q.E.D.

III-2.3. *Notation.* — Pour toute barrière B et tout élément s de $A(\mathbf{N})$, on désigne par B_s l'ensemble des éléments t de B tels que $s \ll t$ ou $s = t$.

Par exemple $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}$; $s \in \mathrm{B}$ équivaut à $\mathrm{B}_s = \{s\}$.

III-2.4. Proposition. — *Pour toute barrière* B *et tout élément* s *de* $A(N)$

a) si B_s *est fini non vide, alors* $\mathrm{B}_s = \{s\}$.

b) Si B_s *est infini, alors pour tout* $k \in \overline{\mathrm{B}}$ *tel que* $k > \lambda(s)$, *l'ensemble* $B_{s+[k]}$ *n'est pas vide, et* B_s *est la somme lexicographique de ces* $B_{s+[k]}$.

Preuve. — *a*) Comme B_s est fini, $\overline{B}_s$ l'est aussi, or $\overline{B}$ est infini, par conséquent $\overline{B} - \overline{B}_s$ est infini; on peut donc construire une ω-séquence strictement croissante t sur $\overline{B}$ telle que $s \ll t$ et $t(i) \notin \overline{B}_s$ pour $i \notin D_s$. Comme B est une barrière, il existe $s' \in B$ tel que $s' \ll t$; si $s' \ll s$ alors B_s est vide, ce qui est exclu, si $s \ll s'$ alors $s' \in B_s$ ce qui est impossible, reste donc $s = s'$ et par conséquent $B_s = \{s\}$.

b) Si B_s est infini, soit $k \in \overline{B}$ tel que $k > \lambda(s)$; construisons une ω-séquence strictement croissante t telle que $s + [k] \ll t$, il existe alors s' tel que $s' \ll t$ et $s' \in B_{s+[k]}$ qui n'est donc pas vide. Il est clair que B_s est alors égal à la somme lexicographique :

$$\sum_{k \in \overline{B} \text{ et } k > \lambda(s)} B_{s+[k]}.$$

Nous aurons besoin d'un résultat technique généralisant le lemme 3.4.1 de [6].

III.2-5. Lemme. — *Soit* A *une partie de* **N** *ayant au moins deux éléments, et* f *une application croissante de* A *dans* A; *Si le cardinal de l'image de* f *est strictement inférieur au cardinal de* A, *alors il existe dans* A *deux éléments distincts* k *et* k' *tels que* $f(k) = f(k') = k$, *de plus si* A *est infini on peut trouver* k *strictement inférieur à* k'.

Preuve. — On raisonne par récurrence sur le cardinal nécessairement fini des images de telles applications.

• Bien entendu le lemme est vrai pour toutes les applications f dont l'image n'a qu'un élément.

• Supposons le lemme démontré pour toutes les applications f dont l'image a moins de n éléments.

Soit alors f de A dans A dont l'image a exactement n éléments, et soient $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ les éléments de l'image numérotés dans l'ordre de croissance.

1er *cas.* — *Pour tout* i *on a* $f(a_i) = a_i$. Comme f n'est pas injective, il existe i tel que $f^{-1}(a_i)$ ait au moins deux éléments, ce qui démontre le lemme lorsque A est fini.

Si A est infini, à cause de la croissance de f, l'ensemble $f^{-1}(a_{n-1})$ est infini, donc on peut trouver $k > a_{n-1}$ tel que $f(k) = f(a_{n-1}) = a_{n-1}$ ce qui démontre le lemme.

2e *cas. — Il existe* i *tel que* $f(a_i) \neq a_i$. Soit alors i_0 le plus petit de ces indices-là.

2e $a)$: $f(a_{i_0}) < a_{i_0}$. Alors $a_0 < a_{i_0}$, et comme $f(a_{i_0-1}) = a_{i_0-1}$ et f croissante on a $f(a_{i_0}) = f(a_{i_0-1}) = a_{i_0-1}$ et le lemme est démontré.

2e $b)$ $a_{i_0} < f(a_{i_0})$. Soit alors $A_{i_0} = \{x \in A \text{ et } x \geqslant a_{i_0}\}$; A_{i_0} a évidemment au moins deux éléments et la restriction de f à A_{i_0} est une application croissante de A_{i_0} dans lui-même, comme a_{i_0} n'appartient pas à l'image de A_{i_0} par f, il s'ensuit que le cardinal cette image est inférieur à celui de A_{i_0}, de plus si A est infini alors A_{i_0} l'est aussi, on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à A_{i_0} qui démontre le lemme.

III-2.6. Bien que cela ne soit pas indispensable à la compréhension de cet article, nous allons donner quelques exemples de barrières. Pour cela, si C et D sont deux parties de A(**N**), le *concaténat* de C et D sera l'ensemble des suites $s + t$ telles que $s \in C$, $t \in D$ et $\lambda(s) < t(0)$; on le notera $D * C$, sauf si C est réduit à l'élément s, auquel cas on le notera $D * s$.

— Si B_1 et B_2 sont deux barrières de même base, alors $B_2 * B_1$ est évidemment une barrière de même base. Si les types d'ordres de B_1 et B_2 sont les ordinaux indécomposables ω^{β_1} et ω^{β_2}, alors puisque $B_2 * B_1$ est la somme lexicographique $\sum_{s \in B_1} B_2 * s$, son type d'ordre est l'ordinal indécomposable $\omega^{\beta_2+\beta_1}$.

Par exemple, si [**N**] est la barrière formée des singletons de **N**, et B une barrière quelconque dont le type d'ordre est ω^{β}, le type d'ordre de la barrière $B * [\mathbf{N}]$ est $\omega^{\beta+1}$. En particulier, on obtient les barrières $[\mathbf{N}]^{n+1}$ formées des parties de **N** ayant $n + 1$ éléments, barrières dont le type est évidemment ω^{n+1} puisque $[\mathbf{N}]^{n+1} = [\mathbf{N}]^n * [\mathbf{N}]$.

— Si $(B_0, B_1, \ldots B_i, \ldots)_{i \in \mathbf{N}}$ est une famille de barrières de base $\mathbf{N}$, alors on montre en utilisant le lemme III-2.5. que $B = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} B_0 * B_1 * \cdots * B_i * [i]$ est une barrière de base $\mathbf{N}$.

Si les types d'ordres des B_i sont les ordinaux indécomposables ω^{β_i} alors le type d'ordre de B est l'ordinal indécomposable $\omega^{\beta_0+\beta_1+\cdots\beta_i+\cdots}$.

Par exemple si tous les B_i sont égaux à $[\mathbf{N}]$, on obtient une barrière dont le type d'ordre est ω^ω, celle-ci étant formée de toutes les suites s dont la longueur est égale au premier terme de s plus 2.

— Finalement on obtient la

Proposition. — *Pour tout ordinal dénombrable indécomposable, il existe une barrière dont le type d'ordre est cet ordinal.*

Preuve. — Tout ordinal indécomposable étant de la forme ω^β, montrons par induction sur β la propriété $P(\beta)$: « *Pour tout ordinal* β *compris entre* 0 *et* ω_1 *il existe une barrière de base* $\mathbf{N}$ *dont le type d'ordre est* ω^β ».

— $P(1)$ est vraie puisque $[\mathrm{N}]$ a pour type ω.

— si $P(\beta')$ est vraie pour $0 < \beta' < \beta < \omega_1$ alors : ou bien β est isolé, auquel cas comme il existe une barrière B de type $\omega^{\beta-1}$, la barrière $B * \mathbf{N}$ a pour type ω^β; ou bien β est limite, auquel cas il est de la forme $\sum_{n<\omega} \beta_n$ avec $\beta_n < \beta$, comme il existe par hypothèse inductive une famille $(B_n)_n$ de barrières B_n de type ω^{β_n}, la barrière

$$B = \bigcup_{i \in \mathrm{N}} B_0 * B_1 * \cdots B_i * [i]$$

a pour type ω^β, par conséquent $P(\beta)$ est vraie. Q.E.D.

III-3. *Compléments.*

Signalons quelques propriétés intéressantes des barrières dont les preuves seront publiées ultérieurement.

III-3.1. — *Les types d'ordres des barrières inférieurs ou égaux à* ω^ω *sont indécomposables.*

Ceci fait appel à la :

PROPOSITION. — *Si* B *est une barrière, dont le type est strictement inférieur à* ω^ω *alors la longueur des éléments de* B *est bornée et si* n *est le maximum des longueurs de ses éléments,* B *est de type* ω^n.

— *Au delà de* ω^ω *les types d'ordres des barrières ne sont pas toujours indécomposables* : *on peut construire une barrière de type* ω^ω. 2.

— *Toute barrière contient une barrière de type indécomposable* (en fait une barrière B se décompose en une somme ordinale $E + B'$ avec B' barrière de type indécomposable).

— *Toute barrière contenue dans une barrière de type indécomposable a même type d'ordre.*

Par conséquent relativement à la définition des b.q.o., on peut ne considérer que les barrières de types indécomposables.

III-3.2. Disons que *deux barrières* B *et* B′ *sont semblables* lorsque l'unique isomorphisme d'ordre h de $\overline{B}$ sur $\overline{B}'$ se prolonge en l'isomorphisme $\tilde{h}$ de B sur B′ défini par $\tilde{h}(s) = h \circ s$.

Bien entendu deux barrières semblables ont mêmes propriétés aussi bien vis-à-vis de la relation $\lhd$ que de l'ordre lexicographique. Nous obtenons que :

— *Toute barrière est semblable à une barrière de base* $\mathbf{N}$.

— *Toute bijection* f *d'une barrière* B *sur une barrière* B′ *qui conserve la relation* $\rhd$ (c'est-à-dire que $s \rhd t$ équivaut à $f(s) \rhd f(t)$) *est égale à* $\tilde{h}$ *où* h *est l'unique isomorphisme d'ordre de* $\overline{B}$ *sur* $\overline{B}'$, (c'est-à-dire que B et B′ sont semblables).

— Deux barrières peuvent avoir même type d'ordre sans être semblables. Nous conjecturons néanmoins que deux barrières de même type d'ordre jouent le même rôle vis-à-vis de la définition des b.q.o., et de façon plus précise :

« *Si deux barrières ont même type d'ordre, il existe une sous-barrière de l'une semblable à une sous-barrière de l'autre* ».

III-3.3. Ordonnons une barrière B par la relation $s \prec t$ lorsque 1° pour tout $i \in D_s$ on a $s(i) \leqslant t(i)$ et 2° si $s(0) < t(0)$ alors il existe $j \in D_s$ tel que $s(j) < t(j-1)$. Alors :

PROPOSITION. — *Si* B *est une barrière de type indécomposable, l'application identique de* B *dans* (B, $\prec$) *est mauvaise et toute application* f *d'une barrière* B′ *de type inférieur à celui de* B *dans* B *est bonne.*

Par conséquent pour la définition des b.q.o., il faut *au moins* considérer tous les types de barrières.

THÉORÈME. — *Un ensemble ordonné* X *est* b.q.o. *si* :

1) X *est artinien*;

2) X *ne contient aucune partie isomorphe à un* (B, $\prec$).

Noter que sur la barrière consistant des singletons l'ordre $\prec$ n'est autre que l'égalité, ce qui montre bien le parallélisme entre a.i.f. et b.q.o., et que la barrière consistant des paires d'entiers n'est autre qu'un exemple (semblable à celui de Kruskal) d'a.i.f. dont l'ensemble des sections initiales n'est pas a.i.f.

III-4. *Preuve du théorème.*

Si $\omega_1 . X$ est a.i.f., pour tout ordinal dénombrable α, la classe $\alpha . X$ est aussi a.i.f.; comme toute barrière est d'un certain type α dénombrable il nous suffit de prouver le :

III-4.1. LEMME. *Soient* α *un ordinal et* X *une classe préordonnée*; *si* α.X *est* a.i.f., *alors toute application* f *d'une barrière* B *de type* α *dans* X *est bonne.*

Preuve. — S'il n'existe pas de barrière de type α le lemme est prouvé ! Soit donc B une barrière de type α et f une application de B dans X. Pour i appartenant à $\overline{B}$, notons α_i le type de $B_{[i]}$ et f_i la restriction de f à $B_{[i]}$, f_i s'identifie alors à une α_i-séquence sur X. D'après III-2.4. $\alpha = \sum_{i \in \overline{B}} \alpha_i$ avec les α_i non nuls, les α_i sont donc strictement inférieurs à α et par conséquent les f_i appartiennent à $\alpha . X$. Comme $\alpha . X$ est a.i.f. et la famille des f_i est infinie, on peut trouver

i et j dans $\overline{\mathrm{B}}$ tel que $i < j$ et $f_i \leqslant f_j$, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme d'ordre h de $\mathrm{B}_{[i]}$ dans $\mathrm{B}_{[j]}$ tel que $s \in \mathrm{B}_{[i]}$ entraîne $f_i(s) \leqslant f_j \circ h(s)$.

Si par exemple $\mathrm{B}_{[i]}$ est réduit à i, on a $[i] \lhd h([i])$; de même, si $[i, j]$ appartient à B on a encore $[i, j] \lhd h([i, j])$ et donc dans ces deux cas le lemme est prouvé. On est donc amené à construire un élément s de $\mathrm{B}_{[i]}$ tel que $s \lhd h(s)$ ce qui prouvera le lemme.

Pour cela définissons par induction une suite $[s_n]_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathrm{A}(\mathbf{N})$ vérifiant :

1° $s_0 = [i]$.

2° Si $s_n \neq 0$ alors $s_0 \ll s_1 \ll \cdots \quad s_p \ll \cdots \quad s_n$ avec $l(s_p) = p + 1$ pour $p \leqslant n$, et

2e *a*) ou bien $\mathrm{B}_{s_n} = \{s_n\}$ et $s_n \lhd h(s_n)$;

2e *b*) ou bien $\mathrm{B}_{s_n} \neq \{s_n\}$ et il existe une partie finie K_n de B telle que l'image de B_{s_n} par h soit contenue dans la somme lexicographique des $\mathrm{B}_{*s_n + [p]}$ pour p appartenant à K_n.

La suite dont le seul terme est $s_0 = [i]$ vérifie évidemment 1° et 2° en prenant pour K_0 la partie réduite au seul élément j.

Supposons maintenant $s_0, s_1, \ldots s_{m-1}$ définis et vérifiant 1°) et 2°), définissons s_m :

— si $s_{m-1} = 0$, on pose $s_m = 0$,
— si $s_{m-1} \neq 0$,

ou bien $\mathrm{B}_{s_{m-1}} = \{s_{m-1}\}$, on pose alors $s_m = 0$;

ou bien $\mathrm{B}_{s_{m-1}} \neq \{s_{m-1}\}$. Par hypothèse $\mathrm{B}_{s_{m-1}}$ est alors isomorphe par h à une somme finie de $\mathrm{B}_{*s_{m-1}+[p]}$, or d'après III-2.4, $\mathrm{B}_{s_{m-1}}$ est la somme lexicographique des $\mathrm{B}_{s_{m-1}+[k]}$ pour $k \in \overline{\mathrm{B}}$ et $k > s_{m-1}(m-1)$; On définit alors $\psi(k)$ comme le plus petit des indices p de K_{m-1} tel que l'image par h de $\mathrm{B}_{s_{m-1}+[k]}$ ait une intersection non vide avec $\mathrm{B}_{*s_{m-1}+[p]}$. L'application ψ est évidemment croissante et vérifie les conditions de III-2.5., par conséquent il existe k et k' tels que $k < k'$ et $\psi(k) = \psi(k') = k$; par suite $\sum\limits_{k \leqslant q \leqslant k'} \mathrm{B}_{s_{m-1}+[q]}$ est isomorphe à une partie de $\mathrm{B}_{*s_{m-1}+[k]}$.

On pose alors $s_m = s_{m-1} + [k]$. On a bien $s_{m-1} \ll s_m$ et comme $l(s_{m-1}) = m$, $l(s_m) = m + 1$. Si $\mathrm{B}_{s_m} = \{s_m\}$, il est clair que $s_m \lhd h(s_m)$; Sinon B_{s_m} est infini et par suite B_{*s_m} l'est aussi, comme $B_{s_{m-1}+[k']}$ se plonge par h dans B_{*s_m}, il est clair que B_{s_m} se plonge dans un nombre fini de $B_{*s_m+[p]}$; Dans tous les cas s_m est donc bien défini.

La suite $s_0, s_1, \ldots s_n, \ldots$ étant construite, si pour tout entier n, on a $s_n \neq 0$, alors $s_0 \ll s_1 \ll \ldots s_n \ldots$ donc la ω-séquence $[s_i(i)]_{i<\omega}$ est strictement croissante et par conséquent il existe un entier m tel que $[s_i(i)]_{i \leqslant m} = s_m \in B$, c'est-à-dire que $B_{s_m} = \{s_m\}$, ce qui entraîne $s_{m+1} = 0$ donc une contradiction. Il existe donc un plus grand entier n tel que $s_n \neq 0$ pour lequel on a $B_{s_n} = \{s_n\}$ et donc $s_n \lhd h(s_n)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

III-4.2. *Remarques.*

On peut se demander s'il est possible d'affaiblir la condition $\omega_1 . X$ a.i.f. pour montrer que X est b.q.o.. Par exemple, s'il suffit que $\alpha . X$ soit a.i.f. pour un certain α dénombrable.

Comme il existe des barrières de tout type indécomposable dénombrable (Proposition III-2.6.) notre démonstration nécessite $\alpha . X$ a.i.f. pour tout α indécomposable dénombrable et donc $\omega_1 . X$ a.i.f. Pour montrer que cette dernière condition est tout à fait indispensable, donnons sans preuve quelques résultats concernant les

IV. α-Prémeilleurordres de Fraisse.

IV-1. Les définitions de better-quasi-order ou de prémeilleurordre font intervenir l'une des applications de toutes les barrières sur un ensemble X; l'autre, toutes les séquences (dénombrables) sur cet ensemble. Il semble intéressant de considérer seulement les applications de certaines barrières dans X ou certaines séquences sur cet ensemble et d'étudier les propriétés qui les lient.

Ainsi R. Fraisse donne la :

IV-2. Définition. — *Étant donné l'ordinal* α, *un ensemble* (*ou une classe*) *préordonné* X *est* α*-prémeilleurordonné* (*en abrégé* α-p.m.o.) *si toute* α*-suite* s *sur* X *est de la forme* $s_1 + s_2$ *avec* s_2 *indécomposable différent de* 0.

P. Jullien a montré ([6] proposition 6-1) l'équivalence entre les notions d'a.i.f. et de ω-prémeilleur-ordre.

Compte tenu du théorème II-2.1, on a aussi l'équivalence entre celles de prémeilleurordre et de α-prémeilleurordre pour tout ordinal α.

Une étude de cette notion conduit à faire le rapprochement avec les better-quasi-order de Nash-Williams. Nous obtenons alors la généralisation du théorème III-1.

IV-3. Théorème. — *α étant un ordinal dénombrable indécomposable; Il y a équivalence entre :*

i) X *est un α-prémeilleurordre;*

ii) *l'ensemble des β-séquences sur* X *pour* $\beta < \alpha$ *est a.i.f.;*

iii) *toute application d'une barrière de type* α *dans* X *est bonne.* Par suite pour l'ordre $\prec$ défini en III-3.3. nous obtenons :

IV-4. Théorème. — *Si* B *est une barrière de type* α *indécomposable*

— $(B, \prec)$ *n'est pas α-meilleurordonné;*
— $(B, \prec)$ *est β-meilleurordonné pour tout* $\beta < \alpha$.

La condition $\omega_1 . X$ a.i.f. du théorème III.1. ne peut donc pas être affaiblie.

Pour retrouver le fait que si X est prémeilleur-ordonné il en est de même de la classe des séquences ordinales sur X, on renforce l'équivalence entre i) et ii) du théorème IV-3. en :

IV-5. Théorème. — *Pour un ordinal dénombrable indécomposable* α;
il y a équivalence entre :

i) X *est un α-prémeilleurordre;*

ii) *pour tout ordinal indécomposable* θ *inférieur ou égal à* α, *la classe des β-séquences sur* X *avec* $\beta < \theta$ *est un $\omega . \mu$-prémeilleur ordre,* μ *étant l'unique solution de* $\theta . \mu = \alpha$.

Ainsi, pour $\theta = \alpha$, on a $\mu = 1$, ce qui redonne bien l'équivalence entre i) et ii) du théorème IV-3.

Pour $\theta = \omega$, on obtient $\omega . \mu = \alpha$ et donc l'équivalence entre :

1) X est un α-prémeilleurordre;

2) la classe des suites finies sur X est un α-prémeilleur ordre dont un cas particulier est l'équivalence classique entre :

1') X est a.i.f.;

2') la classe des suites finies sur X est a.i.f.

V. Conclusion.

La notion de b.q.o. de Nash-Williams a une traduction très naturelle en terme de suites ordinales, les conditions imposées au moyen des barrières s'exprimant par des conditions sur les suites.

Il semblerait que l'on puisse éliminer la notion de barrière pour l'étude de cette structure d'ordre, malheureusement cela semble difficile pour le moment car avec la définition de Jullien il est assez difficile de montrer qu'une réunion finie de p.m.o. est p.m.o. (déjà le fait qu'un ensemble à deux éléments soit p.m.o. n'a rien d'évident), il faut pour cela faire appel à un théorème de Laver-Corominas de 1970 [2] qui d'une certaine façon semble exprimer la généralisation du théorème de Ramsey par Nash-Williams (bien entendu ce dernier théorème est indispensable pour montrer qu'une réunion finie de b.q.o. est b.q.o., mais il a l'avantage sur le théorème de Laver-Corominas d'une grande commodité d'utilisation).

Nous tenons à remercier vivement P. Jullien pour l'aide qu'il nous a apportée à la rédaction de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Corominas, Sur une application de l'algèbre ordinale à la théorie des groupes abéliens de torsion, *C.R. Acad. Sci.*, 272 (1971), Série A, p. 1357-1359.

[2] A. Denis, Arbre et théorème de Corominas-Laver (mémoire Lyon, 1970).

[3] R. Fraisse, Sur la comparaison des types d'ordre, *C.R. Acad. Sci.*, 226 (1948) Série A, 987-988 et 1 330-1 331.

[4] R. Fraisse, Abritement entre relations et spécialement entre chaînes, *Symposia Mathematica*, 1970, vol. 5, p. 203-251.

[5] G. HIGMAN, Ordering by divisibility in abstract algebra, *Proc. London Math. Soc.*, (1952), 326-336.

[6] P. JULLIEN, Sur les types d'ordres dispersés (polycopié), Contribution à l'étude des types d'ordres dispersés (1969), Thèse Fac. Sc. Marseille.

[7] KRUSKAL, Well quasi ordering and Rado's conjecture, Non publié.

[8] KRUSKAL, Well quasi ordering, the tree theorem, and WAZSONYI's conjecture, *Transactions of AMS* 95 (1960), 210.

[9] R. LAVER, « On Fraisse's » order type conjecture, Thèse Université de Californie (Berkeley), U.S.A. on *Annal. of Math.*, vol. 93, N. 1 (1971), p. 89-111.

[10] C. St. J. A. NASH-WILLIAMS, On well quasi ordering transfinite sequences, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 61 (1965), 33-39.

[11] C. St. J. A. NASH-WILLIAMS, On well quasi ordering infinite trees, *Ibid*, 61 (1965), 697-720.

[12] C. St. J. A. NASH-WILLIAMS, On better quasi ordering transfinite sequences, *ibid.*, 64 (1968), 273-290.

[13] M. POUZET, Sur des conjectures de Fraisse et les prémeilleurs ordres, *C.R. Acad. Sci.*, 270, (1970), Série A, 1.3.

[14] M. POUZET, Sur des conjectures de Fraisse; Publications du Département de Mathématiques, Fac. Sc. Lyon, t. 7, fasc. 3, 1971, p. 55-104.

[15] M. POUZET, Sur certaines algèbres préordonnées, Thèse 3e Cycle, Avril 70, nº 500, Université de Lyon.

[16] M. POUZET, Algèbre ordinale prémeilleur ordonnée, *C.R. Acad. Sci.*, 270 (1970), Série A, 300-303.

[17] R. RADO, Partial well ordering of sets of vectors, Mathematika 1(1954), 89-95.

Manuscrit reçu le 19 avril 1971.

Maurice POUZET,
Département de Mathématiques,
43, Bd du 11-Novembre 1918,
69-Villeurbanne.