JOSEPH GRIFONE

Structure presque tangente et connexions I

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 1 (1972), p. 287-334

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_1_287_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22,1 (1972), 287-334

STRUCTURE PRESQUE-TANGENTE ET CONNEXIONS, I.

par Joseph GRIFONE

Introduction.

La théorie des connexions finsleriennes a été abordée par plusieurs auteurs suivant des points de vue différents. E. Cartan, dans son travail classique sur les espaces de Finsler, a montré que le cadre le plus approprié de la géométrie finslerienne est le fibré vertical tangent. Ainsi les connexions qui interviennent naturellement sont des connexions linéaires sur le fibré vertical, notamment les connexions de directions.

Dans cet article nous nous proposons d'adopter un point de vue différent : si le cadre le plus approprié de la géométrie finslerienne est le fibré vertical tangent, le cadre le plus naturel est cependant la variété elle-même. Toutefois une telle optique nous oblige à nous servir des connexions non linéaires dont l'utilisation n'est pas aisée (on ne peut définir d'une manière satisfaisante la torsion, la dérivée covariante est peu maniable, ...). Pour porter remède à cet inconvénient, nous donnons une nouvelle définition des connexions non linéaires – et plus généralement des connexions non homogènes – plus maniable au point de vue algébrique. Ce formalisme permet d'établir l'existence et l'unicité d'une connexion non linéaire sur une variété finslerienne qui généralise la connexion de Levi-Civita du cas riemannien.

Dans un prochain article nous établirons les relations entre les connexions non linéaires sur la variété et les connexions linéaires sur le fibré vertical, faisant ainsi le lien entre notre point de vue et le point de vue classique de la géométrie finslerienne.

Soit J la structure presque-tangente naturelle du fibré tangent $TM \xrightarrow{\pi} M$.

Une connexion (non homogène) sur une variété M est une 1-forme vectorielle Γ sur TM, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{T}$M = TM $-\{0\}$, telle que $J\Gamma = J$ et $\Gamma J = -J$ (définition I.14).

La connexion est dite *homogène* si Γ est homogène de degré 1 en tant que 1-forme vectorielle. Elle est dite *linéaire* si elle est homogène et de classe $\mathcal{C}^1$ sur la section nulle.

On peut verifier que la donnée d'une connexion ainsi définie équivaut à la donnée d'une scission de la suite exacte

$$0 \to \pi^* (TM) \xrightarrow{i} TTM \xrightarrow{j} \pi^* (TM) \to 0$$

(Proposition I.19) ou, de façon équivalente, à une structure presque produit sur TM admettant en chaque point le sous-espace vertical comme l'un des sous-espaces propres (Proposition I.15).

Ce point de vue permet de définir à l'aide du formalisme de Frölicher-Nijenhuis les tenseurs de torsion et de courbure. Dans le cas non homogène, il apparaît deux tenseurs de torsion : la *torsion faible* $t = \frac{1}{2}[J, \Gamma]$ et la *torsion forte* $T = i_S t - \frac{1}{2}[C, \Gamma]$ (Définition I.49). Ici C est le champ canonique sur TM et S une équation différentielle du second ordre arbitraire (semi-gerbe), c'est-à-dire un champ sur $\mathcal{T}$M tel que $JS = C$.

On vérifie tout d'abord que T ne dépend pas du choix de S et que dans le cas d'une connexion linéaire t et T se ramènent, par un isomorphisme, à la torsion classique

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y] .$$

On peut montrer que la torsion forte est nulle si et seulement si la torsion faible est nulle et la connexion est homogène (Corollaire I.56). Par conséquent, il n'existe pas de connexions non homogènes à torsion forte nulle.

La *courbure* est définie par $R = -\frac{1}{2}[h, h]$, où h est le projecteur horizontal de la connexion (Définition I.57).

Il s'agit maintenant de justifier les définitions posées, en montrant qu'elles permettent de généraliser les principaux résultats sur les connexions linéaires, faisant intervenir la torsion et la courbure.

Nous montrons tout d'abord qu'il existe une et une seule connexion dont on se donne la semi-gerbe S et la torsion forte T. Elle est donnée par $\Gamma = [J , S] + T$. (Théorème de décomposition canonique I.55). Ceci fournit la généralisation d'un résultat bien connu pour les connexions linéaires, et donc une première justification de nos définitions.

Le second résultat concerne la structure presque-complexe F sur TM que l'on peut associer canoniquement à une connexion sur M. On peut vérifier que, comme dans le cas linéaire, F est une structure complexe sur $\mathcal{T}M = TM - \{0\}$ si et seulement si Γ est "faiblement plate", c'est-à-dire si $t = 0$ et $R = 0$ (Proposition I.65).

Le troisième résultat concerne la géométrie finslérienne. Nous montrons que sur une variété finslérienne il existe une et une seule connexion qui conserve l'énergie par transport parallèle, et dont la torsion forte est nulle (Proposition II.33).

Les motivations du chapitre II relèvent de problèmes de nature géométrique et mécanique.

Nous appelons *variété semi-finslerienne* un triplet (M , E , π) où M est une variété différentiable ; E une application de TM dans $\mathbf{R}^+$, avec $E(0) = 0$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{T}M$, $\mathcal{C}^0$ sur la section nulle et telle que $dd_J E$ ait un rang maximum ; π est une 2-forme scalaire semi-basique sur TM, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{T}M$. E est appelée *énergie* et π *tenseur force*. Un *système mécanique* (au sens de [8]) d'énergie E et de champ de forces ω, donne lieu à une structure semi-finslerienne : il suffit de prendre $\pi = d_J \omega$. Une *variété finslerienne* en est un cas particulier : il correspond à $\pi = 0$ et E homogène de degré 2 et de classe $\mathcal{C}^1$ sur la section nulle. En particulier la variété est riemannienne si E est de classe $\mathcal{C}^2$ sur la section nulle. Nous nous proposons de construire canoniquement une connexion sur M qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1) *Les "géodésiques" sont les solutions des équations de Lagrange d'énergie* E *et de tenseur force* π (cf. [12]).

2) *La fonction* $\mathcal{E} = \theta_C E - E$, *dite énergie principale, se conserve par transport parallèle (ainsi est-elle constante sur chaque sous-variété horizontale).*

Remarquons que l'énergie principale joue un rôle important en mécanique analytique, car elle intervient dans l'intégrale première de Painlevé.

D'après la théorie du chapitre I, une connexion est déterminée par sa semi-gerbe (les "géodésiques") et sa torsion forte. Il faut donc tout d'abord construire une semi-gerbe dont les courbes intégrales se projettent sur les solutions des équations de Lagrange et, ensuite, se donner la torsion.

La semi-gerbe est définie canoniquement comme le champ S tel que

$$i_S \Omega = -d(\theta_C E - E)$$

où $\Omega = dd_J E + \pi$. On peut montrer que ce système différentiel définit bien une semi-gerbe qui de plus est homogène de degré 2 si E est homogène de degré 2 et π homogène de degré 1 (Propositions II.15 et II.25).

Le choix de la torsion laisse une large indétermination. Nous nous proposons de la déterminer de façon que la seconde condition soit vérifiée, c'est-à-dire que l'énergie principale se conserve par transport parallèle. On procède de la façon suivante.

Il est bien connu tout d'abord que E définit une métrique $\overline{g}$, sur le fibré vertical tangent à $\mathcal{C}M$. Or si l'on se donne une connexion Γ sur M, $\overline{g}$ peut être prolongée canoniquement en une métrique riemannienne g_Γ sur le fibré $T\mathcal{C}M \to \mathcal{C}M$ (Proposition II.1). Si F est la structure presque complexe associée à Γ, le triplet (M, g_Γ, F) est une variété presque-hermitienne et la forme de Kähler est donnée par

$$K_\Gamma(X, Y) = g_\Gamma(X, JY) - g_\Gamma(JX, Y) .$$

(Proposition II.3). Nous montrons que l'on peut choisir la torsion de la connexion Γ qui nous intéresse de façon que l'on ait $K_\Gamma = \Omega$ (connexions simples). (Théorème II.37).

L'intérêt de ceci est double :

– la forme de Kähler est fermée dès que $d\pi = 0$ en particulier pour $\pi = 0$. Dans ce cas on obtient donc canoniquement sur $\mathcal{C}M$ une structure presque kählérienne.

– on peut montrer que si $K_\Gamma = \Omega$, l'énergie principale se conserve par transport parallèle (proposition II.32).

Ainsi notre problème est résolu.

Cet article et celui qui va suivre constituent l'essentiel d'un travail présenté comme thèse de doctorat à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble et en partie annoncé dans quelques notes aux Comptes Rendus. Je remercie Monsieur Klein pour l'aide et le soutien qu'il m'a toujours apportés, Monsieur Chabauty qui a bien voulu présider le jury, Monsieur Koszul et Monsieur Dazord pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et leur participation au jury.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I
CONNEXIONS SUR UNE VARIETE

1. Notations.

Dans tout ce travail le terme “variété” doit être pris au sens de variété différentiable réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dimension finie n, paracompacte.

On notera :

M une variété différentiable.

$\mathcal{F}(M)$ la **R**-algèbre des fonctions différentiables sur M.

$A^p(M)$ (resp : $\Phi^p(M)$) le $\mathcal{F}(M)$-module des p-formes scalaires (resp : scalaires antisymétriques) sur M.

$B^l(M)$ (resp : $\psi^l(M)$) le $\mathcal{F}(M)$-module des l-formes sur M à valeurs dans TM (resp : antisymétriques).

$A(M)$, $B(M)$, $\Phi(M)$, $\psi(M)$ les anneaux gradués correspondants.

$\mathcal{X}(M)$ désignera le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de vecteurs sur M.

$\pi : TM \to M$ le fibré tangent à M.

$P : TTM \to TM$ le fibré tangent à TM.

$V(TM) = (\pi^T)^{-1}\{0\}$ est l'ensemble des vecteurs verticaux tangents à TM. En restreignant P à V(TM), on fait de V(TM) un fibré vectoriel au-dessus de TM.

Enfin $\pi_0 : \mathcal{T}M \to M$ désigne le fibré des vecteurs non nuls tangents à M.

Le formalisme de Frölicher-Nijenhuis sera l'outil fondamental de ce travail (cf. [7]). On notera θ_X, au lieu de d_X, la dérivée de Lie d'une forme scalaire par rapport au champ de vecteurs X.

On a la suite exacte de fibrés vectoriels sur TM :

$$0 \to \pi^*(TM) \xrightarrow{i} TTM \xrightarrow{j} \pi^*(TM) \to 0$$

i étant l'injection naturelle et $j = (P, \pi^T)$.

Si on pose $J = i \circ j$ on définit canoniquement une structure presque-tangente sur TM (cf : [14]). Un champ de vecteurs X sur

TM est vertical si et seulement si $JX = 0$ ou, de façon équivalente, s'il existe un champ Y sur TM tel que $X = JY$.

Enfin, on notera C le champ canonique sur TM (cf. [14]), défini par $C = i \circ \delta$ où $\delta : z \mapsto (z, z)$ est le champ canonique de π^* (TM). Le tenseur J vérifie les deux pripriétés :

$$[J, J] = 0$$
$$[C, J] = -J$$

Dans tous les calculs en coordonnées locales on supprimera le signe de somme pour les indices répétés.

2. Formes semi-basiques et formes homogènes.

a) *Formes semi-basiques.*

Nous posons la définition suivante qui généralise une notion bien connue pour les formes scalaires [12].

Definition I.1. – *Une forme vectorielle* $L \in B^l(TM)$, $l \geqslant 1$ *est dite semi-basique si elle vérifie les conditions :*

1) $L(X_1, \dots, X_l)$ *est vertical pour tous* $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(TM)$.

2) $L(X_1, \dots, X_l) = 0$ *si l'un des champs* $X_1, \dots, X_l$ *est vertical.*

Un champ de vecteurs sera dit semi-basique s'il est vertical.

Si L est antisymétrique, en utilisant la structure presque-tangente J, ces deux conditions peuvent s'écrire :

1) $JL = 0$

2) $i_{JX}L = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(TM)$.

Si $VB^l(TM)$ désigne le module des formes vectorielles semi-basiques de degré l, pour tout $z \in TM$ on définit un isomorphisme

$$\xi_z : V_z B^l(TM) \to B^l_{\pi(z)}(M)$$

de la façon suivante. Soient $u_1, u_2 \dots u_l \in T_{\pi(z)}M$ et $U_1, U_2 \dots U_l$ des vecteurs sur TM se projectant respectivement sur $u_1, u_2 \dots u_l$. On pose :

$$(\xi_z L)(u_1 \dots u_l) = pr_2 \circ i_z^{-1} \circ L(U_1 \dots U_l) .$$

Puisque L est semi-basique, ξ_z est bien définie car deux vecteurs U, V sur TM se projetant sur le même vecteur u diffèrent par un vecteur vertical.

Sur une carte U de TM de coordonnées locales naturelles (x^α, y^α), un champ de l-formes semi-basiques s'écrit :

$$L = L^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_l}(x^1 \dots x^n, y^1 \dots y^n)\, dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_l} \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

et on a :

$$\xi_z L = L^\alpha_{\beta_1 \dots \beta_l}(x^1 \dots x^n, z^1 \dots z^n)\, dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_l} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

si $z \underset{U}{=} (x^1 \dots x^n, z^1 \dots z^n)$.

b) *Champs de formes homogènes sur* $\mathcal{T}$M.

Soit C le champ canonique sur TM, $\pi_0 : \mathcal{T}M \to M$ le fibré des vecteurs non nuls tangents à M.

On pose les définitions suivantes (cf. [13], [14]).

DEFINITION I.2. – *Une fonction f différentiable, définie sur* $\mathcal{T}$M, *est dite (positivement) homogène de degré r, et l'on écrit que f est $h \cdot (r)$, si*

$$\theta_C f = rf .$$

Soit h_λ : TM $\to$ TM ($\lambda \in \mathbf{R}^+$) l'homothétie dans les fibres de rapport λ. Il est bien clair que I.2 exprime l'identité d'Euler des fonctions homogènes ; elle est donc équivalente à :

$$h_\lambda^* f = \lambda^r f$$

De même on pose :

DEFINITION I.3. – *Une p-forme scalaire antisymétrique $\omega \in \mathcal{T}M$ est dite homogène de degré r, et l'on écrit que ω est $h \cdot (r)$ si*

$$\theta_C \omega = r\omega .$$

DEFINITION I.4. – *Une l-forme vectorielle antisymétrique* L *sur* $\mathcal{T}$M *est dite homogène de degré r* (L est $h \cdot (r)$) *si*

$$[C, L] = (r-1) L .$$

3. Semi-gerbes et potentiels.

DEFINITION I.5. – *On appelle semi-gerbe sur* M *un champ* S *sur* TM, $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathcal{T}$M, *qui est une section du fibré vectoriel* π^T : TTM $\to$ TM.

Une semi-gerbe est donc une équation différentielle du second ordre, pouvant présenter des singularités sur la section nulle.

PROPOSITION I.6. – *Un champ* S *sur* TM, $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathcal{T}$M *est une semi-gerbe si et seulement si :*

$$JS = C .$$

En effet, JS = C si et seulement si $i \circ j \circ S = i \circ \delta$.

Comme i est un monomorphisme : JS = C si et seulement si $j \circ S = \delta$.

Or, $j = (P, \pi^T)$ donc JS = C si et seulement si S est une section des deux fibrés P : TTM $\to$ TM et π^T : TTM $\to$ TM.

En coordonnées locales naturelles, une semi-gerbe S s'écrit :

$$S = y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - 2G^\alpha(x^1 \dots x^n, y^1 \dots y^n) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

où les fonctions G^α sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{T}$M.

PROPOSITION I.7. – *Si* S *est une semi-gerbe sur* M, *alors pour tout* $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$, *on a* :

$$J[JX, S] = JX .$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de l'homogénéité et de l'intégrabilité de J. En effet,

$$0 = \frac{1}{2}[J, J](S, X) = [C, JX] - J[C, X] - J[S, JX]$$

et d'autre part

$$-JX = [C, J]X = [C, JX] - J[C, X]$$

d'où

$$J[S, JX] = -JX \text{ , c'est-à-dire } J[JX, S] = JX .$$

C.Q.F.D.

Remarque. – I.7 montre que le champ $X-[JX, S]$ est vertical quel que soit X et quelle que soit la semi-gerbe S.

PROPOSITION I.8. – *Si* S *est une semi-gerbe, on a :*

$$X = J[X, S] + [JX, S] - J[[JX, S], S]$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$.

Cette identité se déduit de I.7. Le champ $X-[JX, S]$ étant vertical, on peut écrire I.7 en remplaçant JX par $X-[JX, S]$. On obtient ainsi immédiatement I.8.

Enfin, si S et S′ sont deux semi-gerbes arbitraires, en posant $X = S - S'$ dans I.8, on a :

$$J[S, S'] = S - S' . \tag{I.9}$$

Nous nous proposons maintenant d'exprimer la non-homogénéité d'une semi-gerbe.

DEFINITION I.10. – *Soit* S *une semi-gerbe sur* M. *On appelle déviation de* S *le champ*

$$S^* = [C, S] - S .$$

PROPOSITION I.11. – *La déviation d'une semi-gerbe est un champ vertical.*

La démonstration est immédiate. De la proposition I.7 il résulte en effet

$$J[C, S] = C , \quad \text{car } C \text{ est vertical ;}$$

donc

$$JS^* = J[C, S] - JS = C - C = 0 .$$

Cas particuliers :

1) Une *gerbe* (au sens de Dazord, cf. [5]) est une semi-gerbe à déviation nulle (c'est-à-dire homogène de degré 2), qui de plus est de classe $\mathcal{C}^1$ sur la section nulle. Les fonctions G^α sont donc $h \cdot (2)$.

2) Une *gerbe quadratique* (cf. [1]) est une semi-gerbe à déviation nulle, qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur la section nulle. Ici les fonctions G^α sont quadratiques en y.

Venons maintenant à la notion de potentiel.

DEFINITION I.12. – *Soit* L *une l-forme scalaire ou vectorielle semi-basique sur* TM, *avec* $l \geqslant 1$. *On appelle potentiel de* L *la* $(l-1)$*-forme semi-basique.*

$$L^0 = i_S L$$

où S *est une semi-gerbe arbitraire.*

Pour $L \in \Psi^0(TM)$, *on pose* $L^0 = 0$

Remarques.

1) Il est facile de vérifier que L^0 ne dépend pas du choix de la semi-gerbe S. En effet, si S′ est une autre semi-gerbe, S – S′ est vertical, car $J(S - S') = C - C = 0$ (cf. aussi I.9). Donc $i_{S-S'} L = 0$ parce que L est semi-basique ; il en résulte que $i_S L = i_{S'} L$.

2) La terminologie est justifiée par la propriété suivante.

Soit L une l-forme vectorielle semi-basique antisymétrique, homogène de degré r, avec $r + l \neq 0$. On peut voir facilement en utilisant la formule (6.6) de [7] que :

$$L = \frac{1}{r+l} ([J, L]^0 + [J, L^0]) . \tag{I.13}$$

Donc si L est "J-fermée" (c'est-à-dire si $[J, L] = 0$) elle s'exprime en fonction des dérivées de son potentiel :

$$L = \frac{1}{r+l} [J, L^0] .$$

Pour les formes scalaires on a une propriété tout à fait analogue (cf. [12]).

3) Si L est antisymétrique, on a évidemment $(L^0)^0 = 0$.

4) En coordonnées locales naturelles, si

$$L = L^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_l} \, dx^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\beta_l} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}$$

on a :

$$L^0 = y^{\beta_1} L^{\alpha}_{\beta_1 \ldots \beta_l}\, dx^{\beta_2} \otimes \ldots \otimes dx^{\beta_l} \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

5) Dans la suite nous dirons qu'une 1-forme vectorielle semi-basique L est "en équilibre" avec une semi-gerbe S si la déviation de S est équilibrée par le potentiel de L, c'est-à-dire si

$$S^* + L^0 = 0 .$$

4. Connexions sur M (cf. [9]).

DEFINITION I.14. – *On appelle connexion non homogène sur* M, *ou plus simplement connexion sur* M, *une* 1-*forme vectorielle* Γ *sur* TM, $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathcal{T}$M *et telle que*

A) $J\Gamma = J$

B) $\Gamma J = - J$.

PROPOSITION I.15. – *Une* 1-*forme vectorielle* Γ *sur* TM *est une connexion sur* M *si et seulement si* Γ *définit une structure presque-produit sur* TM, $(\Gamma^2 = I)$, $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathcal{T}$M, *telle que, pour tout* $z \in$ TM, *le sous-espace propre de* Γ_z *correspondant à la valeur propre* (-1) *est le sous-espace* V_z(TM) *des vecteurs verticaux tangents en* z *à* TM.

Démonstration. – On vérifie facilement que la condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, considérons une connexion Γ sur M. On a $J\Gamma = J$ si et seulement si $J(\Gamma - I) = 0$, et $\Gamma J = - J$ si et seulement si $(\Gamma + I) J = 0$.

Comme i est un monomorphisme :

$$(i \circ j) \circ (\Gamma - I) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad j \circ (\Gamma - I) = 0 .$$

Comme j est un épimorphisme :

$$(\Gamma + I) \circ (i \circ j) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad (\Gamma + I) \circ i = 0 .$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} Im(\Gamma - I) &\subset \operatorname{Ker} j = Im\, i \\ Im\, i &\subset \operatorname{Ker}(\Gamma + I) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{I}m(\Gamma - \mathrm{I}) \subset \mathrm{Ker}(\Gamma + \mathrm{I})$$

d'où finalement

$$(\Gamma + \mathrm{I})(\Gamma - \mathrm{I}) = \Gamma^2 - \mathrm{I} = 0 \,.$$

D'autre part, si $X \in T_z TM$ est un vecteur propre de Γ_z associé à la valeur propre (-1), on a :

$X = -\Gamma X$, d'où : $JX = -J(\Gamma X) = -JX$ c'est-à-dire $JX = 0$. X est donc un vecteur vertical.

Réciproquement : si $X \in V_z(TM)$, il existe $Y \in T_z TM$ tel que $X = JY$. D'où

$$\Gamma X = \Gamma JY = -JY = -X$$

X est donc vecteur propre de Γ_z associé à la valeur propre -1.

C.Q.F.D.

On posera dans la suite

$$\left| \begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \Gamma) \\ v &= \frac{1}{2}(\mathrm{I} - \Gamma) \end{aligned} \right. \qquad (\mathrm{I}.16)$$

Il est facile de vérifier que $h^2 = h$ et $v^2 = v$; h et v sont donc deux projecteurs et

$$TTM = \mathrm{I}m\, v \oplus \mathrm{I}m\, h \,.$$

Or $\mathrm{I}m\, v = \mathrm{Ker}\, h = \{X \in TTM \mid \Gamma X = -X\} = V(TM)$. Aussi v est-il appelé projecteur vertical associé à Γ et h projecteur horizontal. En notant

$$\mathrm{I}m\, h = H(TM)$$

Γ permet finalement d'obtenir la décomposition

$$TTM = V(TM) \oplus H(TM) \,.$$

h et v vérifient les propriétés suivantes :

$$\left| \begin{matrix} Jh = J & , & hJ = 0 \\ Jv = 0 & , & vJ = J \end{matrix} \right. . \qquad (\mathrm{I}.17)$$

Enfin, si S est une semi-gerbe, puisque d'après (I.17) $[JX, S] - X$ est vertical quel que soit X, on a $h([JX, S] - X) = 0$, c'est-à-dire

$$h[\mathrm{JX}, \mathrm{S}] = h\mathrm{X} . \tag{I.18}$$

PROPOSITION I.19. — *La donnée d'une connexion* Γ *sur* M *définit canoniquement une scission de la suite exacte*

$$0 \to \pi^* (\mathrm{TM}) \xrightarrow{i} \mathrm{TTM} \xrightarrow{j} \pi^* (\mathrm{TM}) \to 0$$

de morphismes de fibrés vectoriels, qui est $\mathcal{C}^\infty$ *au-dessus de* $\mathcal{T}$M.

Réciproquement, une telle scission détermine une connexion sur M, *au sens de* (I.14).

Démonstration. — Soit Γ une connexion sur M, h son projecteur horizontal et $\bar{j}$ une scission quelconque de j, c'est-à-dire une application de $\mathrm{TM} \underset{\mathrm{M}}{\times} \mathrm{TM}$ dans TTM telle que $j \circ \bar{j} = \mathrm{Id}_{\mathrm{TM} \underset{\mathrm{M}}{\times} \mathrm{TM}}$. On sait qu'il en existe, car j est surjective et M paracompacte. Posons $\gamma = h \circ \bar{j}$; γ est bien défini. En effet, soit $\bar{j}'$ une autre scission. On a $j(\bar{j} - \bar{j}') = 0$ donc $\bar{j} - \bar{j}' \in \operatorname{Ker} j = \mathrm{V(TM)}$ et par conséquent : $h(\bar{j} - \bar{j}') = 0$, c'est-à-dire $h\bar{j} = h\bar{j}'$. D'autre part $j \circ \gamma = j \circ h \circ \bar{j}$. Or, d'après I.17 $\mathrm{J}h = \mathrm{J}$ c'est-à-dire : $i \circ j \circ h = i \circ j$ et, comme i est un monomorphisme : $j \circ h = j$. On a donc :

$$j \circ \gamma = j \circ \bar{j} = \mathrm{Id}_{\pi^*(\mathrm{TM})}$$

C'est-à-dire : γ est une scission de la suite exacte.

Réciproquement, soit γ une scission de la suite exacte. Si on pose :

$$\Gamma = 2\gamma \circ j - \mathrm{I}$$

on a

$$\mathrm{J}\Gamma = 2i \circ j \circ \gamma \circ j - \mathrm{J} = 2i \circ j - \mathrm{J} = \mathrm{J}$$

et

$$\Gamma\mathrm{J} = 2\gamma \circ j \circ i \circ j - \mathrm{J} = -\mathrm{J} \quad \text{car} \quad j \circ i = 0 .$$

C.Q.F.D.

Expression en coordonnées locales d'une connexion sur M.

Soit U une trivialisation de TM et $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}(\mathrm{TU})$: $\mathrm{X} \underset{\mathrm{U}}{=} (a, b, c, d)$. Si h est le projecteur horizontal de Γ, posons

$$hX \underset{U}{=} (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions de *a, b, c et d.*

Comme $h \in \psi^1$: $\alpha = a$, $\beta = b$ et γ et δ sont linéaires en c et d. D'autre part, de $Jh = J$ on déduit que $\gamma = c$ et de $hJ = 0$ que $\delta(a, b, 0, c) = 0$. Donc δ ne dépend pas de d, car

$$\delta(a, b, c, d) - \delta(a, b, c, d') = \delta(a, b, 0, d - d') = 0 .$$

On pose donc, classiquement :

$$\delta(a, b, c) = -\Gamma^\beta_\alpha(a, b)\, c^\alpha \quad \text{avec} \quad c = (c^1 \dots c^n)$$

où les Γ^β_α sont des fonctions sur TM, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{T}$M et on a :

$$h(a, b, c, d) \underset{U}{=} (a, b, c, -\Gamma^\beta_\alpha(a, b)\, c^\alpha) .$$

Par conséquent :

$$\left| \begin{aligned} \Gamma(a, b, c, d) &\underset{U}{=} (2h - I)(a, b, c, d) \\ &\underset{U}{=} (a, b, c^\beta, -2\Gamma^\beta_\alpha(a, b)\, c^\alpha - d^\beta) . \end{aligned} \right. \tag{I.20}$$

Sous forme matricielle, dans un système de coordonnées locales naturelles Γ s'écrit :

$$\left| \Gamma = \begin{pmatrix} \delta^\beta_\alpha & 0 \\ -2\Gamma^\beta_\alpha(x, y) & -\delta^\beta_\alpha \end{pmatrix} \right. \quad \delta^\beta_\alpha\text{: symbole de Krönecker.} \tag{I.20'}$$

En particulier :

$$\begin{cases} h \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\beta_\alpha \dfrac{\partial}{\partial y^\beta} \\[2ex] h \dfrac{\partial}{\partial y^\alpha} = 0 . \end{cases}$$

5. Dérivation covariante.

DEFINITION I.21. — *Soient* M *et* N *deux variétés différentiables,* Γ *une connexion sur* M, $z \in \mathfrak{X}(N)$ *et* g *une application différentiable de* N *dans* TM. *L'application de* N *dans* TM *définie par :*

$$D_z g = \xi_g(\nu \circ g^T \circ z)$$

est dite dérivée covariante de g par rapport à z :

$$\begin{tikzcd}
 & TTM \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "p"] & V(TM) \arrow[dl, "\xi"] \\
TN \arrow[ur, "g^T"] & TM \arrow[d, "\pi"] & \\
N \arrow[u, "z"] \arrow[ur, shift left, "D_z g"] \arrow[ur, shift right, "g"'] \arrow[r, "\pi \circ g"'] & M &
\end{tikzcd}$$

$D_z g$ est une application de N dans TM, $\mathcal{C}^\infty$ sur tout point a de N tel que $g(a) \neq 0$.

Cette définition est tout à fait analogue à celle donnée dans le cas des connexions linéaires (cf. par exemple [3]).

Cas particuliers :

1) $N = M$, $g = w \in \mathfrak{X}(M)$. Localement, on trouve :

$$D_z w = z^\alpha \left(\frac{\partial w^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_\alpha(x, w)\right) \frac{\partial}{\partial x^\beta} \cdot \tag{I.22}$$

Remarque. – $D_z w \notin \mathfrak{X}(M)$ car $D_z w$ n'est pas $\mathcal{C}^\infty$ sur les points $a \in M$ tels que $w_a = 0$.

2) Si $z_1, z_2, w \in \mathfrak{X}(M)$, on a :

$$\left|\begin{array}{ll} 1) & D_{z_1 + z_2} w = D_{z_1} w + D_{z_2} w \\ 2) & D_{f z_1} w = f D_{z_1} w \, . \end{array}\right. \tag{I.23}$$

3) Soit $N = I$ intervalle de **R** et $g : I \to TM$
$t \mapsto (x(t), y(t))$.

On a :

$$D_{\frac{d}{dt}} g = \xi_g(\nu \circ g') \quad \text{où} \quad g' = g^T \circ \frac{d}{dt} \cdot$$

Localement :

$$D_{\frac{d}{dt}} g = \left(\frac{dy^\beta}{dt} + \Gamma^\beta_\alpha(x(t), y(t)) \frac{dx^\alpha}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial x^\beta} .$$

La *dérivée covariante* d'un champ de formes vectorielles ou scalaires, même non antisymétriques, se définit de la façon habituelle. Soit L un champ de l-formes sur M et z un champ de vecteurs sur M. On pose :

$$\left|\begin{array}{l} D_z L(z_1 \ldots z_l) = D_z(L(z_1 \ldots z_l)) - \sum\limits_{i=1} L(z_1 \ldots D_z z_i \ldots z_l) \\ \text{et} \quad D_z f = \theta_z f \quad \text{si} \quad f \in \phi^0 . \end{array}\right. \tag{I.25}$$

Remarquons que $D_z L$ en général n'est pas un tenseur.

DEFINITION I.26. — *Soit $f(t)$ une courbe différentiable sur* M *et $g(t)$ un champ de vecteurs le long de $f(t)$. On dit que $g(t)$ est parallèle le long de $f(t)$ si*

$$D_{\frac{d}{dt}} g(t) = 0 .$$

D'après la définition de $D_{\frac{d}{dt}}$ cela veut dire que $g'(t)$ est horizontal.

DEFINITION I.27. — *Soit* E *une application différentiable de* TM *dans* **R** *et $f(t)$ une courbe différentiable sur* M. *On dit que* E *se conserve par transport parallèle si*

$$\frac{d}{dt} E(g(t)) = 0$$

quel que soit le champ de vecteurs parallèle $g(t)$ le long de $f(t)$ et quelle que soit la courbe différentiable $f(t)$.

PROPOSITION I.28. — *L'application* E : TM $\to$ **R** *se conserve par transport parallèle si et seulement si*

$$d_h E = 0$$

h étant le projecteur horizontal de la connexion.

En effet, si $d_h \mathrm{E} = 0$, $d\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0$ quel que soit le champ horizontal X. Par conséquent, si $g(t)$ est un champ parallèle le long d'une courbe de M :

$$\frac{d}{dt} \mathrm{E}(g(t)) = d\mathrm{E}(g'(t)) = 0$$

puisque g' est horizontal. La réciproque est évidente.

6. Tension d'une connexion – Cas particuliers.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'exprimer la non-homogénéité d'une connexion.

DEFINITION I.29. – *On appelle tension de la connexion* Γ *la* 1-*forme vectorielle sur* TM, $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathcal{T}$M :

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2} [\mathrm{C}, \Gamma] .$$

PROPRIETES I.30.

1) H *est une* 1-*forme vectorielle semi-basique,*

2) *En coordonnées locales naturelles, on a :*

$$\mathrm{H} = \left(\Gamma^\beta_\alpha - y^\gamma \frac{\partial \Gamma^\beta_\alpha}{\partial y^\gamma}\right) dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta} \cdot \tag{I.31}$$

La démonstration ne présente pas de difficultés

Connexions particulières.

DEFINITION I.32. – *Une connexion* Γ *sur* M *est dite homogène de degré* 1 (*ou simplement* $h \cdot (1)$) *si sa tension est nulle, c'est-à-dire si la forme vectorielle* Γ *est* $h \cdot (1)$.

Cette condition impose aux fonctions $\Gamma^\beta_\alpha(x, y)$ la propriété d'être (positivement) homogènes de degré 1 par rapport aux variables y^α, comme on le voit sur I.31. Une connexion $h \cdot (1)$ est donc une connexion "non linéaire" au sens classique [cf. par exemple : [2] et [16] p. 235].

Il est immédiat dans ces conditions que pour $z, w \in \mathfrak{X}(M)$ et $f \in \mathfrak{F}(M)$ on a :

$$\left| D_z f w = f D_z w + (z \cdot f) w \right. . \qquad (I.33)$$

DEFINITION I.34. – *Une connexion* $h \cdot$ (1) *est dite linéaire si elle est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur la section nulle.*

On vérifie facilement que pour une connexion linéaire on a aussi :

$$D_z(w_1 + w_2) = D_z w_1 + D_z w_2 \qquad (I.35)$$

pour tous $z_1 w_1$, $w_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Donc une connexion linéaire sur la variété M peut-être définie comme une loi de dérivation D sur le $\mathfrak{F}(M)$-module $\mathfrak{X}(M)$, c'est-à-dire :

$$D \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{X}(M) , \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}(M)}(\mathfrak{X}(M) , \mathfrak{X}(M))$$

avec

$$D_z f w = f D_z w + (z \cdot f) w$$

quels que soient z, $w \in \mathfrak{X}(M)$ et $f \in \mathfrak{F}(M)$ (cf. [15]).

Dans le cas d'une connexion linéaire la condition de dérivabilité sur la section nulle entraîne que les fonctions $\Gamma_\alpha^\beta(x, y)$ sont linéaires en y. On peut donc poser :

$$\Gamma_\alpha^\beta(x, y) = y^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta(x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta(x) = \frac{\partial \Gamma_\alpha^\beta}{\partial y^\gamma} \cdot \qquad (I.36)$$

On peut vérifier facilement la proposition suivante qui sera utile dans la suite :

PROPOSITION I.37. – *Soit* Γ *une connexion linéaire sur* M, z *et* $w \in \mathfrak{X}(M)$ *et* Z, W *deux champs sur* TM *projetables respectivement sur* z *et* w. *On a :*

$$D_z w = \xi([h , JW] Z) .$$

7. Semi-gerbe associée à une connexion.

PROPOSITION I.38. – *A toute connexion* Γ *sur* M *de tension* H *est associée canoniquement une semi-gerbe* S *dont la déviation est donnée par le potentiel de* H ; *c'est-à-dire que* S *vérifie la relation*

$$S^* = H^0 .$$

En effet soit S' une semi-gerbe arbitraire et $h = \frac{1}{2}(I + \Gamma)$ le projecteur horizontal de Γ ; on pose

$$S = hS' . \tag{I.39}$$

Le champ S ainsi défini ne dépend pas du choix de la semi-gerbe S'. En effet, si S'' est une autre semi-gerbe, $S'' - S'$ et vertical et donc $h(S'' - S') = 0$ c'est-à-dire $hS'' = hS'$. D'autre part S est une semi-gerbe, car $JS = JhS' = JS' = C$.

Enfin, on a $H^0 = S^*$ comme on peut le voir par un calcul très simple.

C.Q.F.D.

Localement, la semi-gerbe associée à la connexion Γ est déterminée par les fonctions :

$$G^\alpha = \frac{1}{2} y^\beta \Gamma^\alpha_\beta . \tag{I.40}$$

PROPOSITION I.41.

1) *Soit* S *une semi-gerbe sur* M ; *alors* $[J, S]$ *est une connexion sur* M. *La semi-gerbe associée à* $[J, S]$ *est* $S + \frac{1}{2} S^*$.

2) *Si* S *est une gerbe, alors* $[J, S]$ *est une connexion* $h \cdot (1)$ *dont la gerbe est* S.

3) *Si* S *est une gerbe quadratique, alors* $[J, S]$ *est linéaire : il s'agit de la connexion symétrique associée canoniquement à* S (cf. [1]).

Démonstration :

1) On a $J[J, S]X = J[JX, S] - J^2[X, S] = J[JX, S] = JX$ d'après

(I.7). De même, on voit que $[J, S] J = - J$. Ce qui montre que $[J, S]$ est une connexion sur M. La semi-gerbe associée à $[J, S]$ est :

$$hS' = \frac{1}{2} (I + [J, S]) S' = \frac{1}{2} (S' + [J, S] S') =$$

$$= \frac{1}{2} (S' + [C, S] - J[S', S]) = \frac{1}{2} (S' + [C, S] - (S' - S))$$

d'après (I.9). D'où :

$$hS' = \frac{1}{2} (S + [C, S]) = S + \frac{1}{2} S^* .$$

2) Soit maintenant S une gerbe. $[J, S]$ est une connexion, comme on vient de le montrer. Sa tension H est déterminée par :

$$2H = [C, \Gamma] = [C, [J, S]] .$$

D'après l'identité de Jacobi, on a :

$$[C, [J, S]] + [J, [S, C]] + [S, [C, J]] = 0$$

or $[C, J] = - J$ et $[C, S] = S$; donc :

$$[C, [J, S]] - [J, S] - [S, J] = 0$$

c'est-à-dire $[C, [J, S]] = 0$ d'où $H = 0$.

3) Enfin, si S est une gerbe quadratique, $[J, S]$ est linéaire. En effet localement on trouve

$$\Gamma_\alpha^\beta(x, y) = \frac{\partial G^\beta}{\partial y^\alpha} (x, y) . \qquad \text{(I.42)}$$

Si les G^β sont $\mathcal{C}^2$, les fonctions Γ_α^β sont $\mathcal{C}^1$; donc, étant $h \cdot (1)$, elles sont linéaires en y.

8. Chemins d'une semi-gerbe et d'une connexion.

DEFINITION I.43. – *Un chemin sur* M *relatif à une semi-gerbe* S *est une courbe paramétrée*

$$f : I \to M \quad (I \textit{ intervalle de } \mathbf{R})$$

telle que

$$f'' = S_{f'}$$

c'est-à-dire telle que f' soit courbe intégrale de S. *Si* S *est une gerbe les chemins de* S *sont dits géodésiques* (cf. [3]).

En coordonnées locales, si $f = (x^{\alpha}(t))$ et

$$S = (x^{\alpha}, y^{\alpha}, y^{\alpha}, -2G^{\alpha}(x, y)) :$$

les chemins de S sont les solutions du système différentiel :

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2} + 2G^{\alpha}\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{I.44}$$

DEFINITION I.45. — *Une courbe paramétrée f sur* M *est appelée chemin d'une connexion Γ sur* M, *si*

$$D_{\frac{d}{dt}} f' = 0$$

où D *est l'opérateur de dérivation covariante associé à* Γ (cf. [3]).

Si Γ est $h \cdot (1)$, f est dite géodésique de Γ.

PROPOSITION I.46. — *f est un chemin de Γ si et seulement si*

$$v_{f'} f'' = 0 .$$

En effet, $D_{\frac{d}{dt}} f = \xi_{f'}\left(v \circ f'^{T} \circ \frac{d}{dt}\right) = \xi_{f'}(vf'')$.

En coordonnées locales les équations des chemins d'une connexion s'écrivent

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^{\beta}}{dt} = 0 . \tag{I.47}$$

PROPOSITION I.48. — *Les chemins d'une connexion Γ sont les chemins de la semi-gerbe associée à Γ.*

En effet, d'après (II.29) : $S = (x^{\alpha}, y^{\alpha}, y^{\alpha}, -2G^{\alpha})$ avec $G^{\alpha} = \frac{1}{2} y^{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\beta}$ d'où

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^{\beta}}{dt} = \frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2} + 2G^{\alpha}\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

9. Torsion d'une connexion.

L'utilisation de la dérivée covariante s'avère compliquée lorsque la connexion n'est pas linéaire. (cf. remarque p. 303). Aussi pour définir les notions de torsion et de courbure est-il préférable d'utiliser des définitions portant sur l'algèbre tensorielle construite sur TM.

DEFINITION I.49. – *Soit* Γ *une connexion sur* M. *On appelle torsion faible de* Γ *la 2-forme sur* $\mathcal{C}$M *à valeurs vectorielles dans* T$\mathcal{C}$M :

$$t = \frac{1}{2}\,[J\,,\Gamma]\,.$$

On appelle torsion forte de Γ *la 1-forme vectorielle sur* $\mathcal{C}$M :

$$T = t^0 - H\,.$$

Remarques :

1) Il est facile de vérifier que t est semi-basique, ce qui justifie la définition de T. Puisque H est semi-basique, il en résulte immédiatement que T est semi-basique.

2) Nous verrons dans la suite que si la torsion forte est nulle alors la torsion faible l'est aussi, mais que la réciproque n'est pas vraie en général.

3) *Expression en coordonnées locales.* On trouve :

$$t(X\,,Y) = X^\alpha Y^\beta \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_\alpha}{\partial y^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_\beta}{\partial y^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial y^\lambda} \tag{I.50}$$

et

$$T = \left(y^\alpha\,\frac{\partial \Gamma^\lambda_\alpha}{\partial y^\beta} - \Gamma^\lambda_\beta\right) dx^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial y^\lambda}\,. \tag{I.51}$$

En particulier, pour une connexion linéaire on a

$$\Gamma^\lambda_\alpha(x\,,y) = y^\gamma\,\Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}(x)\ ;\ \text{donc :}$$

$$t(X\,,Y) = X^\alpha Y^\beta\,(\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha})\,\frac{\partial}{\partial y^\lambda}$$

$$T(X) = y^\alpha X^\beta (\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}) \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \cdot$$

On voit donc que si $z, w \in \mathfrak{X}(M)$ et $Z, W \in \mathfrak{X}(TM)$ sont tels que $\pi^T Z = z$ et $\pi^T W = w$, on a :

$$\xi t(Z, W) = \xi_z T(W) = D_z w - D_w z - [z, w] . \qquad (I.52)$$

Si D est une connexion linéaire, alors la 2-forme sur M à valeurs vectorielles sur TM :

$$\mathbf{T}(z, w) = D_z w - D_w z - [z, w] \qquad (I.53)$$

est dite (classiquement) torsion. Ceci justifie les définitions posées.

PROPOSITION I.54. – *La semi-gerbe de* Γ *est "en équilibre" avec la torsion forte, c'est-à-dire :*

$$S^* + T^0 = 0 .$$

En effet

$$T^0 = (t^0 - H)^0 = (t^0)^0 - H^0 = - H^0 = - S^*$$

d'après (I.38). C.Q.F.D.

10. Décomposition canonique.

Nous avons vu qu'à toute connexion Γ sur M sont associées canoniquement :

– une semi-gerbe $S = hS'$ (S' semi-gerbe arbitraire).

– une 1-forme vectorielle semi-basique $T = t^0 - H$, dite torsion forte de Γ, "en équilibre" avec S, c'est-à-dire vérifiant la condition :

$$T^0 + S^* = 0 .$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant qui fournit une généralisation d'un théorème classique.

THEOREME de décomposition canonique I.55. – *Soit* S *une semi-gerbe sur* M *et* T *une* 1*-forme vectorielle semi-basique sur* TM, *"en équilibre" avec* S. *Il existe alors une et une seule connexion admettant*

S *comme semi-gerbe et* T *comme torsion forte. Elle est donnée par :*

$$\Gamma = [J\,,S] + T\,.$$

Démonstration :

A) *Existence.* Soient S et T comme dans l'énoncé. En posant $\Gamma = [J\,,S] + T$ on vérifie sans difficultés que Γ est une connexion de semi-gerbe S et de torsion forte T.

B) *Unicité.* Pour montrer l'unicité, considérons une connexion Γ' de semi-gerbe S et de torsion forte T et montrons que l'on a nécessairement

$$\Gamma' = [J\,,S] + T$$

c'est-à-dire, puisque T est la torsion forte de Γ'

$$\left(T = \frac{1}{2}\,(i_S[J\,,\Gamma'] - [C\,,\Gamma'])\right)\,,$$

que l'on a nécessairement :

$$\Gamma' = [J\,,S] + \frac{1}{2}\,(i_S[J\,,\Gamma'] - [C\,,\Gamma'])$$

où $S = \frac{1}{2}\,(I + \Gamma')\,\widetilde{S}$, $\widetilde{S}$ étant une semi-gerbe arbitraire.

Puisque S est une semi-gerbe, on a, d'après (I.8) pour tout champ $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$:

i) $$X = J[X\,,S] + [JX\,,S] - J[[JX\,,S]\,,S]\,.$$

En remplaçant X par $\Gamma'X$ on obtient :

ii) $$\Gamma'X = J[\Gamma'X\,,S] + [JX\,,S] - J[[JX\,,S]\,,S]$$

en utilisant i), ii) peut s'écrire :

ii') $$\Gamma'X = J[\Gamma'X\,,S] - J[X\,,S] + X\,.$$

D'autre part, en multipliant les deux membres de i) par Γ', on obtient :

$$\Gamma'X = -\,J[X\,,S] + \Gamma'[JX\,,S] + J[[JX\,,S]\,,S]$$

et, en utilisant i), cette expression peut s'écrire :

iii) $$\Gamma' X = \Gamma'[JX , S] + [JX , S] - X .$$

Or :

$$\begin{aligned} i_S[J , \Gamma'] &= ([C , \Gamma'] - J[S , \Gamma'] + [\Gamma' S , J] - \Gamma'[S , J])X \\ &= [C , \Gamma']X + \Gamma'[JX , S] + J[\Gamma' X , S] + [S , JX] - J[S , X] \end{aligned}$$

c'est-à-dire

iv) $$i_S[J , \Gamma'] = [C , \Gamma']X + \Gamma'[JX , S] + J[\Gamma' X , S] - [J , S]X .$$

En sommant ii′) et iii) :

$$2\Gamma' X = J[\Gamma' X , S] + \Gamma'[JX , S] + [J , S]X$$

et, en utilisant iv)

$$2\Gamma' X = (i_S[J , \Gamma'] - [C , \Gamma'])X + 2[J , S]X$$

c'est-à-dire

$$\Gamma' = [J , S] + \frac{1}{2}(i_S[J , \Gamma'] - [C , \Gamma']) .$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1.56.– (Relation entre la torsion forte et la torsion faible).

La torsion forte est nulle si et si seulement si la torsion faible et la tension sont nulles.

(Par conséquent, il n'y a pas de connexions non homogènes à torsion forte nulle).

Démonstration :

Si $T = 0$ alors $\Gamma = [J , S]$ et par conséquent $t = \frac{1}{2}[J , \Gamma] = 0$ en vertu de l'identité de Jacobi.

D'autre part $T = t^0 - H$; donc si $T = 0$ on a aussi $H = 0$.

La réciproque est évidente, T étant égale par définition à $t^0 - H$.

11. Courbure.

DEFINITION I.57. — *On appelle courbure de la connexion* Γ *la 2-forme vectorielle* R, $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathcal{T}$M *définie par*

$$R = -\frac{1}{2}[h, h]$$

h étant le projecteur horizontal de Γ.

Propriétés.

1) R est semi-basique, comme on le vérifie facilement.

2) En utilisant I.37 on peut montrer que si Γ est une connexion linéaire et si $z, w, u \in \mathfrak{X}(M)$ et $Z, W \in \mathfrak{X}(TM)$ sont tels que $\pi^T Z = z$ et $\pi^T W = w$, on a :

$$\xi_u R(Z, W) = D_z D_w u - D_w D_z u - D_{[z,w]} u . \qquad (I.58)$$

3) *Expression de* R *en coordonnées locales.* Avec les notations habituelles on a :

$$R(X, Y) = X^\alpha Y^\beta \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\mu_\beta \frac{\partial \Gamma^\lambda_\alpha}{\partial y^\mu} - \Gamma^\mu_\alpha \frac{\partial \Gamma^\lambda_\beta}{\partial y^\mu}\right) \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \cdot (I.59)$$

Pour une connexion linéaire on a $\Gamma^\beta_\alpha = y^\gamma \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}(x)$. Donc

$$R(X,Y) = X^\alpha Y^\beta y^\gamma \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\Gamma^\lambda_{\beta\mu}\right) \frac{\partial}{\partial y^\mu} \cdot (I.60)$$

PROPOSITION I.61. — *Les identités suivantes lient la courbure à la torsion forte et à la torsion faible et représentent la généralisation des identités de Bianchi (comme on peut le vérifier pour une connexion linéaire).*

I. $\qquad [J, R] = [h, t]$

II. $\qquad [h, R] = 0$.

Remarque. — II. *peut s'écrire* : $[[J, S], R] = -[T, R]$.

On les démontre immédiatement en utilisant l'identité de Jacobi.

Enfin, toujours d'après l'identité de Jacobi :

$$[C, R] = -[h, H] \tag{I.62}$$

ce qui montre que si Γ est $h \cdot (1)$, R aussi est $h \cdot (1)$.

12. Structure presque-complexe associée à une connexion.

Comme pour les connexions $h \cdot (1)$ (cf. [6], [11]) on peut définir dans le cas général une structure presque complexe sur TM, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{T}$M, associée à une connexion. On a en effet :

PROPOSITION I.63. – *Soit* Γ *une connexion, h le projecteur horizontal. Il existe une et une seule* 1*-forme vectorielle* F *sur* TM, $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathcal{T}$M, *telle que*

$$FJ = h \quad \text{et} \quad Fh = -J\,.$$

Pour montrer que F existe, il suffira de vérifier qu'elle est bien définie. Considérons la première relation : $FJ = h$. Soit V un champ vertical et soient Y et Y' deux champs sur TM tels que $JY = JY' = V$. Puisque $J(Y - Y') = 0$, $Y - Y'$ est vertical donc $h(Y - Y') = 0$ c'est-à-dire $hY = hY'$, d'où finalement : $FV = hY = hY'$.

De même on montre que la relation $Fh = -J$ est bien définie.

D'autre part, F est unique car, d'après la définition, elle est entièrement déterminée sur les vecteurs horizontaux et sur les vecteurs verticaux.

On a aussi la propriété suivante qui se vérifie immédiatement sur les champs verticaux et horizontaux :

$$JF = v \tag{I.64}$$

v étant le projecteur vertical de la connexion Γ.

On peut généraliser la propriété fondamentale de F relative à l'intégrabilité, bien connue pour les connexions $h \cdot (1)$ (cf. [6], [11]).

PROPOSITION I.65. – *La structure presque-complexe* F *est intégrable sur* $\mathcal{T}$M *si et seulement si* Γ *est "faiblement plate" (c'est-à-dire* $t = 0$, $R = 0$).

Démonstration :

La condition est nécessaire. On a en effet :

$$\text{i) } \frac{1}{2}[F , F](hX , hY) = [JX , JY] - [hX , hY] + \\ + F[JX , hY] + F[hX , JY] .$$

D'autre part :

$$t(X , Y) = [J , h](X , Y) = [J , h](hX , hY)$$

puisque t est semi-basique.

Donc, après quelques calculs :

$$\text{ii) } Ft(X , Y) = F[JX , hY] + F[hX , JY] - h[hX , hY] + [JX , JY] .$$

Enfin, puisque R est semi-basique :

$$R(X , Y) = -\frac{1}{2}[h , h](X , Y) = -\frac{1}{2}[h , h](hX , hY) .$$

C'est-à-dire :

$$\text{iii) } \quad R(X , Y) = -[hX , hY] + h[hX , hY] .$$

De i), ii) et iii) on tire :

$$\frac{1}{2} h^*[F , F] = F \circ t + R \tag{I.66}$$

où $h^*[F , F](X , Y) = [F , F](hX , hY)$. On en déduit que :

$$\frac{1}{2} J \circ h^*[F , F] = v \circ t = t$$

car t et R sont semi-basiques. Par conséquent $[F , F] = 0$ entraîne $t = 0$ et, en utilisant encore (I.66) aussi $R = 0$.

La condition est suffisante : $t = 0$ et $R = 0$ entraînent évidemment $h^*[F , F] = 0$. D'autre part, un calcul très simple montre que :

$$[F , F](hX , JY) = F \circ h^*[F , F](X , Y)$$
$$[F , F](JX , JY) = -h^*[F , F](X , Y)$$

c'est-à-dire que $h^*[F , F] = 0$ est équivalente à $[F , F] = 0$.

C.Q.F.D.

La proposition suivante donne d'autres conditions nécessaires et suffisantes pour que Γ soit "faiblement plate".

PROPOSITION I.67. – *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $[F, F] = 0$

b) $[J, F] = 0$

c) $[h, F] = 0$

d) $t = 0$, $R = 0$.

On sait déjà que a) est équivalente à d). Pour vérifier que b) est équivalente à c) on montre tout d'abord que :

$$[J, F] = i_F t - F \circ t - R . \tag{I.68}$$

Ce qui s'obtient sans difficultés.

D'autre part, on voit facilement que $[J, F](hX, JY) = t(X, Y)$, donc $[J, F] = 0$ entraîne $t = 0$ et, par (I.68) aussi $R = 0$. La réciproque est immédiate.

Pour montrer que c) est équivalente à d), on montrera d'abord, d'une manière analogue, que :

$$[h, F] = - i_F R - t . \tag{I.69}$$

Comme R et t sont semi-basiques, on en déduit :

$$[h, F](hX, JY) = - R(X, Y) .$$

d'où $[h, F] = 0$ entraîne $R = 0$ et, d'après (I.69) $t = 0$.

Expression de F en coordonnées locales.

Soit $U(x^\alpha, y^\alpha)$ un voisinage de TM de coordonnées locales naturelles. On a :

$$F \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = FJ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = h \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\alpha^\lambda \frac{\partial}{\partial y^\lambda}$$

$$- J \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = F\left(h \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = F\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}\right) =$$

$$= F \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\alpha^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu^\lambda \frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right)$$

d'où

$$F \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu_\alpha \Gamma^\lambda_\mu \frac{\partial}{\partial y^\lambda} - \frac{\partial}{\partial y^\alpha} .$$

Donc, sous forme matricielle :

$$F = \begin{pmatrix} \Gamma^\beta_\alpha & \delta^\beta_\alpha \\ -\Gamma^\beta_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha - \delta^\beta_\alpha & -\Gamma^\beta_\alpha \end{pmatrix} . \tag{I.70}$$

CHAPITRE II

CONNEXIONS D'UNE VARIETE FINSLERIENNE ET D'UN SYSTEME MECANIQUE (cf. [10])

1. Prolongement riemannien sur $\mathcal{T}$M d'une métrique sur le fibré vertical.

Soit $\overline{g}$ une métrique riemannienne sur le fibré vertical tangent à $\mathcal{T}$M.

On peut vérifier que pour tout $z \in \mathcal{T}M$ fixé, par la donnée d'une métrique $\overline{g}$ sur $V(\mathcal{T}M) \to \mathcal{T}M$, on définit une métrique riemannienne $\overline{g}_z$ sur M en posant :

$$\overline{g}_z(u\,,\,v) = \overline{g}(i(z\,,\,u)\,,\,i(z\,,\,v))$$

pour tous $u\,,\,v \in T_{\pi(z)}M$., i étant l'injection naturelle de $\pi^*(TM)$ dans TTM.

Une métrique $\overline{g}$ sur le fibré vertical peut donc être considérée comme une métrique sur M dépendant non seulement du point, mais aussi d'un vecteur non nul tangent en ce point à M.

Si sur M est donnée une connexion Γ, on peut prolonger $\overline{g}$ à tout le fibré $T\mathcal{T}M$, c'est-à-dire en une métrique riemannienne sur la variété $\mathcal{T}$M :

PROPOSITION II.1. — *On appelle prolongement riemannien de* $\overline{g}$ *suivant* Γ *la métrique* g_Γ *sur la variété* $\mathcal{T}$M *définie par*

$$g_\Gamma(X\,,\,Y) = \overline{g}(JX\,,\,JY) + \overline{g}(vX\,,\,vY)$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$.

PROPOSITION II.2. — *Une métrique riemannienne g sur la variété* $\mathcal{T}$M *est le prolongement riemannien d'une métrique* $\overline{g}$ *du fibré* $V(\mathcal{T}M)$ *suivant une connexion* Γ *si et seulement si*

1) $g(hX\,,\,vY) = 0$

2) $g(hX , hY) = g(JX , JY) = \bar{g}(JX , JY)$
pour tous $X , Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$.

La démonstration est immédiate.

PROPOSITION II.3. — *Par rapport à la structure presque-complexe* F *associée à* Γ, *tout prolongement riemannien suivant* Γ *est presque-hermitien et la forme de Kähler de la variété presque-hermitienne* (M , g_Γ , F) *est donnée par*

$$K_\Gamma(X , Y) = g_\Gamma(X , JY) - g_\Gamma(JX , Y) .$$

En effet, on vérifie facilement que

$$g_\Gamma(FX , Y) + g_\Gamma(X , FY) = 0 .$$

D'autre part, la forme de Kähler est

$$K_\Gamma(X , Y) = g_\Gamma(FX , Y)$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} g_\Gamma(FX , Y) &= g_\Gamma(FhX , hY) + g_\Gamma(FvX , hY) + g_\Gamma(FhX , vY) + g_\Gamma(FvX, vY) \\ &= - g_\Gamma(JX , hY) + g_\Gamma(hFX , hY) - g_\Gamma(JX, vY) + g_\Gamma(hFX, vY) \end{aligned}$$

car $Fv = hF$ et $Fh = - J$.

D'autre part :

$$g_\Gamma(JX , hY) = 0 \quad , \quad g_\Gamma(hFX , vY) = 0$$

et

$$\begin{aligned} g_\Gamma(hFX , hY) = g_\Gamma(JFX , JY) = g_\Gamma(vX , JY) = \\ = g_\Gamma(hX + vX , JY) = g_\Gamma(X , JY) . \end{aligned}$$

Donc :

$$g_\Gamma(FX , Y) = g_\Gamma(vX , JY) - g_\Gamma(JX , vY) = g_\Gamma(X , JY) - g_\Gamma(JX , Y).$$

C.Q.F.D.

2. Variétés semi-finslériennes et connexions simples.

DEFINITION II.4. — *On appelle variété semi-finslerienne un triplet* (M , E , π) où :

— M *est une variété différentiable,*

– E *une application* $E : TM \to \mathbf{R}^+$, *avec* $E(0) = 0$, $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathcal{T}M$, $\mathcal{C}^0$ *sur la section nulle et telle que* $dd_J E$ *ait un rang maximum* ; E *est dite énergie.*

– π *une 2-forme scalaire semi-basique antisymétrique sur* TM, $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathcal{T}M$; π *est dit tenseur force.*

Cas particuliers :

Variété riemannienne :

$(M, E, 0)$ avec $\theta_C E = 2E$ et E de classe $\mathcal{C}^2$ sur la section nulle.

Variété finslerienne :

$(M, E, 0)$ avec $\theta_C E = 2E$ et E de classe $\mathcal{C}^1$ sur la section nulle.

Système dynamique homogène [13] *:*

(M, E, π) avec $\theta_C E = 2E$ et $\theta_C \pi = \pi$.

Si l'on se donne un *système mécanique* d'énergie E et de champ de forces ω (cf. [8]), le triplet $(M, E, d_J \omega)$ est une variété semi-finslerienne.

Dans la suite, on posera :

$$\Omega = dd_J E + \pi \tag{II.5}$$

Ω sera dite *forme fondamentale* de la variété semi-finslerienne. On voit immédiatement que

$$i_J \Omega = 0 . \tag{II.6}$$

PROPOSITION II.7. – Ω *est de rang maximum.*

En effet, si X est un champ vertical, $i_X \Omega = 0$ équivaut à $i_X dd_J E = 0$ car π est semi-basique. Or, ceci est impossible car $dd_J E$ est de rang maximum. Si par contre $JX \neq 0$, c'est-à-dire si X n'est pas vertical, et si $i_X \Omega = 0$, on a aussi $i_{JX} \Omega = 0$ car $i_J i_X \Omega = i_X i_J \Omega - i_{JX} \Omega = - i_{JX} \Omega$ puisque $i_J \Omega = 0$. Donc si $i_X \Omega = 0$ $i_{JX} dd_J E = 0$, ce qui est impossible.

PROPOSITION II.8. – *Une structure semi-finslerienne sur* M *permet de définir une métrique* $\overline{g}$ *sur le fibré vertical* $V(\mathcal{T}M)$ *en posant :*

$$\overline{g}(JX, JY) = \Omega(JX, Y)$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$. *Une telle métrique sera dite semi-finslerienne.*

Démonstration :

1) $\overline{g}(JX\,,JY)$ est bien définie. En effet, si Y' est un champ sur TM tel que $JY' = JY$, $Y' - Y$ est vertical ; donc $\Omega(JX\,,Y' - Y) = 0$ (puisque $i_J\Omega = 0$), d'où $\Omega(JX\,,Y) = \Omega(JX\,,Y')$.

2) $$\overline{g}(JX\,,JY) = \overline{g}(JY\,,JX)\ .$$

En effet :

$$\overline{g}(JY\,,JX) = \Omega(JY\,,X) = -\,\Omega(X\,,JY)\ .$$

Or $i_J\Omega = 0$; donc : $\Omega(JX\,,Y) + \Omega(X\,,JY) = 0$

d'où :

$$\overline{g}(JY\,,JX) = \Omega(JX\,,Y) = \overline{g}(JX\,,JY)\ .$$

3) $\overline{g}$ est non dégénérée.

En effet, si $\overline{g}(JX\,,JY) = 0$ pour tout JY ceci voudrait dire que $\Omega(JX\,,Y) = 0$ pour tout Y, c'est-à-dire $i_{JX}\Omega = 0$ ce qui est impossible, car Ω est de rang maximum.

C.Q.F.D.

En *coordonnées locales naturelles :*

$$\Omega = dd_J E + \pi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta} - \frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha\,\partial x^\beta}\right) dx^\alpha \wedge dx^\beta$$
$$- \frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha\,\partial y^\beta}\, dx^\alpha \wedge dy^\beta + \frac{1}{2}\,\pi_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

d'où : $$\Omega(JX\,,Y) = Y^\alpha X^\beta\,\frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha\,\partial y^\beta}$$

En posant :

$$g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = \overline{g}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\,,\,\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)$$

on obtient :

$$\left|\,g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = \frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha\,\partial y^\beta}\right. \qquad \text{(II.9)}$$

PROPOSITION II.10. – *Soit* $\overline{g}$ *une métrique semi-finslerienne et* g_Γ *le prolongement de* $\overline{g}$ *suivant une connexion* Γ. *La forme de Kähler associée à* g_Γ (cf. (II .3) *est alors :*

$$K_\Gamma = i_v\,\Omega$$

On a en effet :

$$\begin{aligned} i_\nu \Omega(X , Y) &= \Omega(\nu X , Y) + \Omega(X , \nu Y) = \Omega(\nu X , Y) - \Omega(\nu Y , X) \\ &= g_\Gamma(\nu X , JY) - g_\Gamma(\nu Y , JX) = g_\Gamma(X , JY) - \\ &\qquad - g_\Gamma(JY , X) = K_\Gamma(X , Y) . \end{aligned}$$

Ceci dit nous posons la définition suivante :

DEFINITION II.11. – *Soit* (M , E , π) *une variété semi-finslerienne et* Ω *la forme fondamentale. On dit que* Γ *est une connexion "simple" associée à* (M , E , π) *si*

$$i_\Gamma \Omega = 0$$

PROPOSITION II.12. – *Soit* g_Γ *le prolongement riemannien suivant* Γ *de la métrique semi-finslerienne* $\overline{g}$ *associée à* (M , E , π). *Alors* Γ *est une connexion simple si et seulement si la forme de Kähler associée à* g_Γ *est égale à* Ω.

La démonstration est immédiate. On a, en effet :

$$K_\Gamma = i_\nu \Omega = i_{\frac{1}{2}(I - \Gamma)} \Omega = \frac{1}{2}\, i_I \Omega - \frac{1}{2}\, i_\Gamma \Omega = \Omega - \frac{1}{2}\, i_\Gamma \Omega$$

Donc $K_\Gamma = \Omega$ si et seulement si $i_\Gamma \Omega = 0$.

C.Q.F.D.

Nous verrons dans la suite qu'il existe toujours des connexions simples sur une variété semi-finslerienne. Leur intérêt résultera des propositions II.32-II.37 et d'une propriété de relèvement que nous donnerons dans le prochain article.

3. Semi-gerbe associée canoniquement à une structure semi-finslérienne.

Soit (M , E , π) une variété semi-finslerienne sur M. On posera dans la suite :

$$q = \theta_C E - 2E$$

$$q^* = \theta_C q - q$$

PROPOSITION II.13. – *On a*

$$d_J(E + q) \not\equiv 0$$

et en particulier

$$d(E + q) \not\equiv 0$$

En effet :

$$i_C dd_J E = -i_C d_J dE = d_J i_C dE - i_J dE = d_J \theta_C E - d_J E$$
$$= d_J(2E + q) - d_J E = d_J(E + q)$$

Or, $i_C dd_J E \not\equiv 0$ car $dd_J E$ est de rang maximum.

Donc : $d_J(E + q) \not\equiv 0$.

DEFINITION II.14. – *La fonction $\mathcal{E} = E + q$ est dite énergie principale.*

Elle joue un rôle important en mécanique analytique, car elle intervient dans l'intégrale première de Painlevé (cf. [8]).

PROPOSITION II.15. – Le champ S défini par

$$i_S \Omega = -d(E + q)$$

est une semi-gerbe sur M.

Démonstration. – Tout d'abord la relation II.15 définit bien un champ de vecteurs sur TM car Ω est de rang maximum et $d(E + q) \not\equiv 0$.

D'autre part, S est une semi-gerbe.

En effet, S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{T}$M, car Ω, E et q le sont. En outre :

$$i_{JS}\Omega = i_S i_J \Omega - i_J i_S \Omega = -i_J i_S \Omega = i_J d(E + q) = d_J(E + q)$$
$$= d_J \theta_C E - d_J E = \theta_C d_J E = i_C dd_J E = i_C \Omega$$

Comme Ω a un rang maximum, on en déduit que JS = C.

C.Q.F.D.

Expression en coordonnées locales de la semi-gerbe canonique.

Soit :

$$S = y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - 2G^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

On a :

$$i_S\Omega = i_S dd_J E + i_S \pi = y^\alpha \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} - \frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial x^\beta}\right) dx^\beta + y^\alpha \pi_{\alpha\beta} dx^\beta -$$

$$- 2G^\beta \frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} dx^\alpha - y^\alpha \frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} dx^\beta.$$

D'autre part :

$$- d(E + q) = dE - \theta_C dE = \left(\frac{\partial E}{\partial x^\alpha} - y^\gamma \frac{\partial^2 E}{\partial x^\alpha \partial y^\gamma}\right) dx^\alpha - y^\gamma \frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\gamma} dy^\alpha$$

Par conséquent, on a

$$i_S \Omega = - d(E + q)$$

si et seulement si :

$$y^\alpha \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^\beta \partial y^\alpha}\right) - 2G^\alpha g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} + y^\alpha \pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial E}{\partial x^\beta} - y^\alpha \frac{\partial^2 E}{\partial x^\beta \partial y^\alpha}$$

c'est-à-dire :

$$\left| \begin{array}{l} G_\beta = \dfrac{1}{2}\left(y^\alpha \dfrac{\partial^2 E}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} - \dfrac{\partial E}{\partial x^\beta} + \pi_{\alpha\beta} y^\alpha\right) \\ \text{où :} \qquad G_\beta = g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} G^\alpha \end{array} \right. \tag{II.16}$$

Compte-tenu du fait que les chemins de S vérifient l'équation

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + 2G^\alpha\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

On a, en posant $\qquad \dot{x}^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{dt}$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\beta} \ddot{x}^\alpha + \dot{x}^\alpha \frac{\partial^2 E}{\partial x^\alpha \partial \dot{x}^\beta} - \frac{\partial E}{\partial x^\beta} + \pi_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha = 0$$

c'est-à-dire :

PROPOSITION II.17. – *Les chemins de la semi-gerbe canonique sont les solutions des "équations de Lagrange" d'énergie* E *et tenseur force* π (cf. [12]).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}^\beta}\right) - \frac{\partial E}{\partial x^\beta} = \pi_{\beta\alpha} \dot{x}^\alpha .$$

4. Propriétés de la semi-gerbe canonique et de la forme fondamentale.

1) De l'équation

$$i_S\Omega = -d(\mathrm{E}+q) \tag{II.15}$$

on obtient, en multipliant par i_J :

$$i_C\Omega = d_J(\mathrm{E}+q) \tag{II.18}$$

d'où, en faisant le produit intérieur par S :

$$\overline{g}(\mathrm{C},\mathrm{C}) = \theta_C(\mathrm{E}+q) \tag{II.19}$$

or $\theta_C(\mathrm{E}+q) = 2\mathrm{E}+2q+q^*$ et donc :

$$\mathrm{E}+q = \frac{1}{2}\,\overline{g}(\mathrm{C},\mathrm{C}) - \frac{q^*}{2} \tag{II.20}$$

Enfin de $\theta_C\Omega = d\theta_C d_J\mathrm{E} + \theta_C\pi = dd_J\theta_C\mathrm{E} - dd_J\mathrm{E} + \theta_C\pi$, on obtient, en posant :

$$\theta_C\pi = \pi + \pi^* \tag{II.21}$$

$$\theta_C\Omega = \Omega + dd_Jq + \pi^* \tag{II.22}$$

2) Soit S la semi-gerbe canonique. De (II.15) en faisant le produit intérieur par S on déduit :

$$\theta_S(\mathrm{E}+q) = 0 \tag{II.23}$$

c'est-à-dire :

L'énergie principale est constante le long des courbes intégrales de S, *(elle est une intégrale première des équations de Lagrange (II.17)).*

De (II.15) on a aussi :

$$\theta_S\Omega = i_S d\pi \tag{II.24}$$

c'est-à-dire : *si* $d\pi = 0$, Ω *est invariante sous le flot de* S.

3) *Calcul de la déviation de la semi-gerbe canonique.*

De (II.22) :

$$i_S\theta_C\Omega = i_S\Omega + i_Sdd_Jq + i_S\pi^*$$

$$\theta_C i_S\Omega - i_{[C,S]}\Omega = -d(\mathrm{E}+q) + i_Sdd_Jq + i_S\pi^*$$

$$-\theta_C d(\mathrm{E}+q) - i_{S^*}\Omega = -2d(\mathrm{E}+q) + i_Sdd_Jq + i_S\pi^*$$

donc :

$$S_* = d(q - \theta_C q) - i_S dd_J q - i_S \pi^*$$

où $S_* = i_{S^*}\Omega$ est la 1-forme scalaire semi-basique qui correspond à S^* par l'isomorphisme défini par la métrique $\bar{g}$. On a donc :

$$S_* = - i_S dd_J q - i_S \pi^* - dq^* \tag{II.25}$$

Ceci montre que la semi-gerbe S est homogène de degré 2 si E est $h \cdot (2)$ et π est $h.(1)$.

En faisant le produit intérieur par S on obtient

$$\bar{g}(S^*, C) = - \theta_S q^* \tag{II.26}$$

Mais, $q^* = \bar{g}(C, C) - 2(E + q)$ et $\theta_S(E + q) = 0$.

Donc :

$$\bar{g}(S^*, C) = - \theta_S \bar{g}(C, C) \tag{II.27}$$

Or : $\bar{g}(C, C) = \bar{g}(i(z, z), i(z, z)) = \bar{g}_z(z, z)$ avec $z \in \mathscr{T}M$.

En appelant $\sqrt{\bar{g}_z(z, z)}$ *z-norme de z* on a :

PROPOSITION II.28. — *La z-norme d'un vecteur non nul z tangent à* M *se conserve le long des courbes intégrales de* S *si et seulement si la déviation de* S *est orthogonale au champ canonique.*

5. Cas particulier où l'énergie est poly-homogène.

DEFINITION II.29. — *Nous dirons que l'énergie est poly-homogène si*

$$\theta_C q^* = 0 .$$

Dans ce cas E est somme d'une fonction $h \cdot (2)$ d'une fonction $h \cdot (1)$ et d'une fonction $h \cdot (0)$:

$$E = \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_0$$

avec

$$\begin{cases} \mathscr{E}_2 = E + q + \dfrac{q^*}{2} = \dfrac{1}{2}\, \bar{g}(C, C) \\ \mathscr{E}_1 = - (q + q^*) \\ \mathscr{E}_0 = \dfrac{q^*}{2} \end{cases} \tag{II.30}$$

L'énergie principale (qui reste constante le long des chemins de la semi-gerbe canonique) est alors :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_0$$

Si en particulier $dq^* = 0$ l'énergie est dite poly-homogène "*réduite*". Dans ce cas, puisque $\mathrm{E}(0) = 0$ et E est $\mathcal{C}^0$ on a $q^* = 0$; donc

$$\mathrm{E} = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 \; .$$

Puisque $\overline{g}(\mathrm{S}^*, \mathrm{C}) = -\theta_{\mathrm{S}} q^*$, dans le cas poly-homogène on a $\overline{g}(\mathrm{S}^*, \mathrm{C}) = 0$ si et seulement si E est réduite. Par conséquent dans le cas où E est poly-homogène, la z-norme d'un vecteur non nul z tangent à M se conserve le long des courbes intégrales de S si et seulement si l'énergie est réduite.

L'intérêt du cas où l'énergie est réduite résultera de la propriété de relèvement citée au § 2.

Des cas particuliers d'énergie poly-homogène réduite sont les suivants :

1) *Cas finslerien et riemannien :*
$q = 0, \pi = 0$

On a :

$$\mathrm{E} = \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}\, \overline{g}(\mathrm{C}, \mathrm{C}) = \mathcal{E}$$

$$\mathrm{S}_* = 0 \quad \text{donc} \quad \mathrm{S}^* = 0$$

$$\theta_{\mathrm{C}} \Omega = 0 \quad \text{et} \quad \theta_{\mathrm{S}} \Omega = 0$$

Donc :

■ l'énergie est constante le long des chemins de S et fournit une intégrale première des "équations de Lagrange".

■ la *z-norme* d'un vecteur non nul z tangent à M est constante le long des chemins de S.

■ la forme fondamentale est invariante sous le flot de S.

2) *Cas "système dynamique homogène"* (cf. [12]) :
$q = 0, \pi\, h.(1)$.

On a dans ce cas :

$$E = \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}\,\overline{g}(C, C) = \mathcal{E}$$

$$S_* = 0 \quad \text{et donc} \quad S^* = 0$$

$$\theta_C \Omega = \Omega$$

6. Connexions conservatives associées à une structure semi-finslerienne.

DEFINITION II.31. — *On appelle connexion conservative une connexion sur une variété semi-finslerienne* (M, E, π) *telle que :*

$$d_h(E + q) = 0 .$$

Remarques :

1) Cette définition exprime le fait que l'énergie principale se conserve par transport parallèle (cf. (I.28)).

2) Si E est poly-homogène réduite, alors $d_h(E + q) = \frac{1}{2}\, d_h\, \overline{g}(C, C)$. Donc, dans ce cas, une connexion est conservative si et seulement si la z-norme d'un vecteur non nul z se conserve par transport parallèle. La notion de connexion conservative généralise donc celle de connexion métrique.

L'intérêt des connexions simples (cf. définition II.11) réside dans la proposition suivante :

PROPOSITION II.32. — *Une connexion simple est conservative si et seulement si sa semi-gerbe est la semi-gerbe canonique.*

Démonstration. — Puisque Γ est simple : $\Omega = K_\Gamma$, K_Γ étant la forme de Kähler. Soit donc S la semi-gerbe de Γ. On a :

$$i_S \Omega(X) = g_\Gamma(S, JX) - g_\Gamma(C, X) = -\, g_\Gamma(C, X) ,$$

car S est horizontal. Donc :

$$i_S \Omega(X) = -\, g_\Gamma(C, \nu X) = -\, g_\Gamma(C, JFX) = -\, i_C \Omega(FX)$$

c'est-à-dire :

$$i_S \Omega = - i_F i_C \Omega \ .$$

Or :

$$i_C \Omega = d_J(E + q) \ .$$

Donc :

$$i_S \Omega = - i_F i_J d(E + q) = - d_v(E + q) \ .$$

Par conséquent :

$$i_S \Omega = - d(E + q)$$

si et seulement si

$$d_h(E + q) = 0 \ .$$

C.Q.F.D.

7. Le théorème fondamental de la géométrie finslerienne.

THEOREME II.33. – *Sur une variété finslerienne, il existe une et une seule connexion conservative à torsion forte nulle.*

Il suffira de démontrer que $d_h E = 0$ et $T = 0$ entraînent que Γ est simple. En effet, d'après (II.32) ceci implique que la semi-gerbe de Γ est la semi-gerbe canonique, ce qui détermine la connexion en vertu du théorème de décomposition (I.55).

On a :

$$i_h \Omega = i_h dd_J E = - i_h d_J dE = - d_J i_h dE - d_J dE = dd_J E = \Omega$$

et

$$\frac{1}{2} i_\Gamma \Omega = \frac{1}{2} i_{(2h-1)} \Omega = i_h \Omega - \Omega = 0$$

ce qui montre que Γ est simple.

C.Q.F.D.

DEFINITION II.34. – *On appelle connexion canonique la connexion conservative à torsion forte nulle définie sur une variété finslerienne. Si* S *est la semi-gerbe canonique, elle est donnée par* $\Gamma = [J\ , S]$.

Expression en coordonnées locales de la connexion canonique.

$$G_\beta = \frac{1}{2}\left(y^\alpha \frac{\partial^2 E}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} - \frac{\partial E}{\partial y^\beta}\right) = \frac{y^\alpha}{4}\left(2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^\beta \partial y^\alpha}\right)$$

car $E = \frac{1}{2} g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} y^\alpha y^\beta$ est $h \cdot (2)$.

On a donc :

$$G_\beta = \frac{1}{4}\left(y^\alpha \frac{\partial(y^\lambda g_{\overline{\beta}\overline{\lambda}})}{\partial x^\alpha} + y^\lambda \frac{\partial(y^\alpha g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}})}{\partial x^\lambda} - y^\alpha \frac{\partial(y^\lambda g_{\overline{\alpha}\overline{\lambda}})}{\partial x^\beta}\right) = \frac{1}{2} y^\alpha y^\lambda \gamma_{\alpha\beta\lambda}$$

où

$$\gamma_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\overline{\beta}\overline{\lambda}}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\overline{\alpha}\overline{\lambda}}}{\partial x^\beta}\right)$$

En posant :

$$\gamma^\beta_{\alpha\lambda} = g^{\overline{\beta}\overline{\mu}} \gamma_{\alpha\mu\lambda}$$

on a :

$$G^\beta = \frac{1}{2} y^\alpha y^\lambda \gamma^\beta_{\alpha\lambda}$$

Or :

$$\Gamma^\beta_\mu = \frac{\partial G^\beta}{\partial y^\mu} = y^\lambda \gamma^\beta_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} y^\alpha y^\lambda \frac{\partial g^{\overline{\beta}\overline{\sigma}}}{\partial y^\mu} \gamma_{\alpha\sigma\lambda} + \frac{1}{2} y^\alpha y^\lambda g^{\overline{\beta}\overline{\sigma}} \frac{\partial \gamma_{\alpha\sigma\lambda}}{\partial y^\mu}$$

Mais :

$$\frac{1}{2} y^\alpha y^\lambda g^{\overline{\beta}\overline{\sigma}} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \gamma_{\alpha\sigma\lambda} = \frac{1}{4} y^\alpha y^\lambda g^{\overline{\beta}\overline{\sigma}} \left(\frac{\partial C_{\gamma\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial C_{\alpha\gamma\mu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial C_{\alpha\lambda\mu}}{\partial x^\gamma}\right) = 0$$

où :

$$C_{\gamma\mu\lambda} = \frac{\partial g_{\overline{\mu}\overline{\lambda}}}{\partial y^\gamma} = \frac{\partial^3 E}{\partial y^\gamma \, \partial y^\mu \, \partial y^\lambda}$$

et l'on a $y^\gamma C_{\gamma\mu\lambda} = 0$ à cause de l'homogénéité de E.

D'autre part, puisque $g^{\overline{\beta}\overline{\sigma}} g_{\overline{\sigma}\overline{\lambda}} = \delta^\beta_\lambda$; on a :

$$\frac{\partial g^{\overline{\beta}\overline{\sigma}}}{\partial y^\mu} g_{\overline{\sigma}\overline{\lambda}} = - g^{\overline{\beta}\overline{\sigma}} C_{\mu\sigma\lambda} = - C^\beta_{\mu\lambda}$$

D'où :

$$\Gamma^\beta_\mu = y^\lambda \gamma^\beta_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} y^\alpha y^\lambda \frac{\partial g^{\overline{\beta}\overline{\sigma}}}{\partial y^\mu} g_{\nu\sigma} \gamma^\nu_{\alpha\lambda}$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma^\beta_\mu = y^\lambda \gamma^\beta_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} y^\alpha y^\lambda C^\beta_{\mu\nu} \gamma^\nu_{\alpha\lambda} \qquad \text{(IV.35)}$$

On reconnaît là les coefficients. de la connexion de Barthel (cf. [16] p. 83 et 63) qui, dans le cas riemannien ($C^{\beta}_{\mu\lambda} = 0$) se réduisent aux coefficients de la connexion de Levi-Civita.

8. La connexion canonique d'une variété semi-finslerienne.

Nous nous proposons maintenant de construire canoniquement une connexion sur une variété semi-finslerienne (M, E, π) dont la semi-gerbe soit la semi-gerbe canonique. D'après la théorie du chapitre II, il faudra se donner une 1-forme vectorielle T sur TM en équilibre avec S. Nous nous proposons de montrer que l'on peut choisir canoniquement T de façon que la connexion soit simple (et donc conservative d'après (II.32).

En effet, $\Gamma = [J, S] + T$ est simple si et seulement si

$$i_{[J,S]+T}\Omega = 0.$$

Or,

$$i_{[J,S]}\Omega = i_J\theta_S\Omega - \theta_S i_J\Omega = i_J\theta_S\Omega = i_J i_S d\pi$$

car S est la semi-gerbe canonique (cf. II.24).

Donc Γ est simple si et seulement si

$$i_T\Omega = - i_J i_S d\pi$$

c'est-à-dire si :

$$\overline{g}(TX, JY) - \overline{g}(TY, JX) = - i_S d\pi(JX, Y) - i_S d\pi(X, JY) .$$

Si on pose :

i) $$\Theta(X, Y) = \overline{g}(TX, JY) + i_S d\pi(JX, Y)$$

cette condition peut s'exprimer en disant que la 2-forme scalaire semi-basique Θ est symétrique. Comme T doit être en équilibre avec S, le problème revient à chercher une 2-forme scalaire semi-basique et symétrique Θ telle que

$$\Theta^0(Y) = - \overline{g}(S^*, JY) + d\pi(S, C, Y)$$

c'est-à-dire telle que

ii) $$\Theta^0 = - S_* - (\theta_C\pi)^0 .$$

Une fois Θ fixée, on définira d'après i) la torsion forte par :

$$\overline{g}(\mathrm{TX}, \mathrm{JY}) = \Theta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) - i_{\mathrm{S}} d\pi(\mathrm{JX}, \mathrm{Y}) = \Theta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + (\theta_{\mathrm{JX}}\pi)^0 \mathrm{Y} .$$

Considérons les 2-formes Θ du type $i_{\mathrm{C}}\Omega \odot \omega$ où ω est une 1-forme scalaire semi-basique et $\odot$ désigne le produit symétrique.

Montrons que l'on peut choisir ω de façon que ii) soit satisfaite. ii) est vérifiée si et seulement si

iii) $$\omega^0 i_{\mathrm{C}}\Omega + \overline{g}(\mathrm{C}, \mathrm{C})\,\omega = - \mathrm{S}_* - (\theta_{\mathrm{C}}\pi)^0$$

d'où, en prenant le potentiel des deux membres :

$$2\,\omega^0 \overline{g}(\mathrm{C}, \mathrm{C}) = - \overline{g}(\mathrm{S}^*, \mathrm{C})$$

c'est-à-dire

$$\omega^0 = - \frac{1}{2} \frac{\overline{g}(\mathrm{S}^*, \mathrm{C})}{\overline{g}(\mathrm{C}, \mathrm{C})}$$

En reportant dans iii) on déduit l'expression de ω

$$\omega = \frac{1}{\overline{g}(\mathrm{C}, \mathrm{C})} \left[- \mathrm{S}_* - (\theta_{\mathrm{C}}\pi)^0 + \frac{\overline{g}(\mathrm{S}^*, \mathrm{C})}{2\overline{g}(\mathrm{C}, \mathrm{C})}\, i_{\mathrm{C}}\Omega \right] \quad \text{(II.36)}$$

ce qui détermine $\Theta = i_{\mathrm{C}}\Omega \odot \omega$ et, par conséquent T.

Nous pouvons donc énoncer.

THEOREME II.37. – *Soit* $(\mathrm{M}, \mathrm{E}, \pi)$ *une variété semi-finslerienne. On peut construire canoniquement une connexion* Γ *sur* M, *qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

a) *les chemins de* Γ *sont les solutions des équations de Lagrange d'énergie* E *et de tenseur force* π.

b) *l'énergie principale se conserve par transport parallèle (elle est donc constante sur les sous-variétés horizontales).*

Γ *est dite connexion canonique de la variété semi-finslerienne. Elle est donnée par* $\Gamma = [\mathrm{J}, \mathrm{S}] + \mathrm{T}$, *où* S *est la semi-gerbe canonique et* T *est définie par*

$$\overline{g}(\mathrm{TX}, \mathrm{JY}) = (\theta_{\mathrm{JX}}\pi)^0 (\mathrm{Y}) + (i_{\mathrm{C}}\Omega \odot \omega)(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

où ω *est donnée par* (II.36).

De (II.12) on déduit.

PROPOSITION II.38. — *Le prolongement riemannien de $\bar{g}$ suivant la connexion canonique est presque-kählerien si et seulement si $d\pi = 0$.*

Cas particuliers :

1) *Cas finslerien* (respect. : *riemannien*) :

Puisque $S^* = 0$ et $\pi = 0$, on en déduit $T = 0$; la connexion canonique est donc la connexion de Barthel (respect. : de Levi-Civita).

2) *Cas d'un système dynamique homogène* (E h. (2) et π h. (1)) ; on a

$$\bar{g}(TX, JY) = (\theta_{JX}\pi)^0(Y) - \frac{\pi^0(X)\,\bar{g}(C, JY) + \pi^0(Y)\,\bar{g}(C, JX)}{\bar{g}(C, C)}$$

Cette connexion sera appelée *connexion dynamique.*

3) *Cas où l'énergie est poly-homogène réduite :*

$$\bar{g}(TX, JX) = (\theta_{JX}\pi)^0(Y) + \\ + \frac{[dd_J q(S, X) - \pi^0(X)]\,\bar{g}(C, JY) + [dd_J q(S, Y) - \pi^0(Y)]\,\bar{g}(C, JX)}{\bar{g}(C, C)}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMBROSE-PALAIS-SINGER, *Sprays-Anais. Acad., Brasileira Ciencia,* 32, (1960), 163-170.

[2] W. BARTHEL, Nichtlineare Zusammenhänge und deren Holonomiengruppen, *J. Reine Angew. Math.,* 212, (1963), 120-149.

[3] M. BERGER, Lectures on geodesics in riemannian geometry, Tata Institute, Bombay 1965.

[4] R.S. CLARK et M.R. BRUCKHEIMER, *Comptes rendus* (251), A. (1960), p. 627.

[5] P. DAZORD, Propriétés globales des géodésiques des espaces de Finsler,Thèse (575), Publ. Dep. Math., Lyon (1969), chap. I, 5-38 et chap. II, 55-61.

[6] P. Dombrowski, On the geometry of the tangent bundle, *J. Reine Angew. Math.*, (210), (1962), 73-88.

[7] A. Frölicher and A. Nijenhuis, Theory of vector-valued differential forms, *Proc. Kon. Ned. Akad.* A, 59, (1956), 338-359.

[8] C. Godbillon, Géométrie différentiable et mécanique analytique, Hermann, Paris 1969.

[9] J. Grifone, *Comptes rendus* (270), A. (1970), 714-717.

[10] J. Grifone, *Comptes rendus* (272), A. (1971), 1 510-1 513.

[11] A. Kandatu, Tangent bundle of a manifold with a nonlinear connection, *Kodai Math. Sem. Rep.* 18, (1966), 250-270.

[12] J. Klein, Espaces variationnels et mécanique, Thèse, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 12, (1962), 1-124.

[13] J. Klein, Les systèmes dynamiques abstraits, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 13,2 (1963), 191-202.

[14] J. Klein et A. Voutier, Formes extérieures génératrices de sprays, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 18,2 (1968), 241-260.

[15] J.L. Koszul, Lectures on fiber bundles and differential geometry, Tata Inst. Bombay.

[16] M. Rund, The differential geometry of Finsler spaces, Springer, Berlin (1959).

Thèse, Université de Grenoble I, janvier 1971

Joseph Grifone
Institut de Mathématiques Pures
B.P. 116
Domaine universitaire
38 – St. Martin-d'Hères (France)