

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARC ROGALSKI

**Topologies faciales dans les convexes compacts.
Calcul fonctionnel et décomposition spectrale
dans le centre d'un espace $A(X)$**

Annales de l'institut Fourier, tome 22, n° 1 (1972), p. 1-66

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_1_1_0

© Annales de l'institut Fourier, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**TOPOLOGIES FACIALES
DANS LES CONVEXES COMPACTS :
CALCUL FONCTIONNEL
ET DÉCOMPOSITION SPECTRALE
DANS LE CENTRE D'UN ESPACE $A(X)$**

par **Marc ROGALSKI**

0. Introduction.

Alfsen et Andersen [2] ont étudié les faces fermées complémentables d'un convexe compact X , et la topologie faciale \mathcal{C} sur l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des points extrémaux de X dont les fermés sont les traces de ces faces. Ils ont aussi étudié le sous-espace H de l'espace $A(X)$ des fonctions affines continues sur X formé des fonctions dont les traces sur $\mathcal{E}(X)$ sont continues pour \mathcal{C} , et montré que la trace de H sur $\mathcal{E}(X)$ est exactement l'ensemble de toutes les fonctions continues sur \mathcal{E} pour \mathcal{C} .

Pour les simplexes, Effros d'abord [7], puis Nagel [12] et Fakhoury [8] avaient fait l'étude correspondante.

Nagel [12] et Goulet de Rugy [10] ont étendu la notion de topologies faciales en introduisant les faces fermées exposées pour un cône convexe de fonctions affines $SCI \geq 0$ stable par sup. dénombrable : de telles familles de faces définissent aussi des topologies faciales sur $\mathcal{E}(X)$, et Goulet de Rugy a montré que toute fonction sur $\mathcal{E}(X)$ semi-continue pour une telle topologie possède un prolongement affine semi-continu à X , unique.

Dans le travail qui suit, nous introduisons de façon géométrique ces topologies faciales, au moyen des faces parallélisables, généralisant les faces complémentables, et nous étudions systématiquement les topologies faciales. Nous caractérisons les fonctions affines sur X qui sont continues ou semi-continues pour une topologie faciale sur $\mathcal{E}(X)$,

et nous montrons que ces fonctions admettent des décompositions spectrales et un calcul fonctionnel, qu'on peut interpréter géométriquement. Nous étudions les relations entre topologies faciales et sous-espaces coréticulés de $A(X)$.

Plan.

Après quelques rappels sur les convexes compacts au § 1, nous introduisons au § 2 les faces complémentables et les faces parallélisables.

Au § 3, on étudie les topologies faciales sur $\mathcal{E}(X)$, associées à des familles convenables de faces parallélisables. Leur intérêt, par rapport à la famille des faces complémentables, est d'être stables par image réciproque "directe". On caractérise les topologies faciales uniformisables (ce sont celles associées à certains simplexes de Bauer), et on montre qu'elles correspondent exactement aux sous-espaces fermés H de $A(X)$, contenant les constantes, et coréticulés (c'est-à-dire tels que $\forall f, g \in H, f \vee g$ existe dans $A(X)$ et appartienne à H).

Au § 4, on caractérise en termes de topologies faciales les simplexes.

Au § 5, on interprète au moyen des topologies faciales un résultat de Nagel [12] concernant les topologies quasi-compactes sur $\mathcal{E}(X)$.

Puis, au § 6, on donne une condition pour qu'une fonction de $A(X)$ soit continue pour au moins une topologie faciale sur $\mathcal{E}(X)$. Pour une telle fonction f , on développe un calcul fonctionnel qui permet de définir une fonction $\psi(f)$ de $A(X)$ pour toute fonction continue ψ sur le "spectre" S_f de f . On montre que ce calcul fonctionnel est associé à une décomposition spectrale $f = \int_{S_f} \lambda de_\lambda$; cette décomposition spectrale permet de définir alors $\psi(f)$ pour ψ universellement intégrable sur le spectre S_f , et on peut caractériser directement l'espace des fonctions affines sur X que l'on obtient ainsi.

Au § 7, on étend l'étude du § 6 au cas d'une fonction affine semi-continue, semi-continue pour au moins une topologie faciale sur $\mathcal{E}(X)$.

Signalons enfin que ce travail n'aurait pas vu le jour sans les échanges fructueux que l'auteur a pu avoir avec H. Fakhoury et A. Goulet de Rugy.

1. Rappels et notations.

Nous noterons $A(X)$ l'espace des fonctions affines continues sur un convexe compact X , et $A^+(X)$ le cône positif de cet espace.

Nous rappelons que si μ, ν appartiennent à $M_1^+(X)$ (mesures positives de masse 1 sur X), on note $\mu < \nu$ la relation définie par $\mu(f) \leq \nu(f)$ pour toute f de S , cône des fonctions convexes continues sur X . Toute mesure est majorée par une mesure maximale pour cet ordre. Si x appartient à X , le barycentre de μ est x si, et seulement si, on a $\varepsilon_x < \mu$. On dit que X est un simplexe si, pour tout x de X , il existe une seule mesure maximale de barycentre x . Pour que X soit un simplexe, il faut et il suffit que $A(X)$, muni de son ordre naturel, vérifie le lemme de décomposition de Riesz. Si, de plus, l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des points extrémaux de X est fermé, on dit que X est un simplexe de Bauer. Pour qu'un convexe compact X soit un simplexe de Bauer, il faut et il suffit que l'espace $A(X)$ soit réticulé pour son ordre naturel. L'application-restriction de $A(X)$ dans $C[\mathcal{E}(X)]$ est alors une isométrie bijective transportant l'ordre. Inversement, si l'application-restriction de $A(X)$ dans $C[\mathcal{E}(X)]$ est surjective, X est un simplexe de Bauer.

Soit f une fonction majorée sur X . On pose

$$\hat{f}(x) = \inf_{\substack{h \geq f \\ h \in A(X)}} h(x) .$$

Si f est minorée sur X , on pose $\check{f}(x) = -(\widehat{-f})(x)$.

La fonction \hat{f} est concave semi-continue supérieurement (s.c.s.). On peut la définir de deux autres façons, si f est s.c.s.

LEMME 1. — *Soit f une fonction s.c.s. sur le convexe compact X .*

a) *Pour tout x de X , on a*

$$\hat{f}(x) = \sup_{\mu > \varepsilon_x} \mu(f) .$$

b) *Si $SSG(\hat{f})$ et $SSG(f)$ sont les sous-graphes de f et \hat{f} , on a la relation dans l'espace $X \times \mathbb{R}$:*

$$SSG(\hat{f}) = \overline{\text{conv}}[SSG(f)] .$$

$(\overline{\text{conv}}(B))$ désigne l'enveloppe convexe fermée de B ; $\text{SSG}(f)$ désigne le sous-ensemble de $X \times \mathbb{R} : \{(x, \lambda) \mid \lambda \leq f(x)\}$.

On déduit de ce résultat les trois propriétés suivantes.

LEMME 2. —

a) Soit f s.c.s. sur X . Alors f et \hat{f} coïncident sur $\mathcal{E}(X)$.

b) Soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille filtrante décroissante de fonctions s.c.s. sur X , telle que $\inf_{i \in I} f_i$ soit finie en tout point. Alors on a

$$\widehat{\inf_{i \in I} f_i} = \inf_{i \in I} \widehat{f_i}.$$

c) X est un simplexe si, et seulement si, \hat{f} est affine, $\forall f \in S$. Il en est alors de même pour toute f convexe s.c.s.

Le point b) n'est autre que le "théorème du minimax" pour les fonctions f_i , considérées comme fonctions s.c.s. sur le compact $M_x = \{\mu \in M_1^+(X) \mid \mu > \varepsilon_x\}$ muni de la topologie vague.

Nous rappelons enfin deux résultats qui servent fréquemment.

LEMME 3. — Soit X un convexe compact, et soit $\text{AS}(X)$ le cône des fonctions affines s.c.s. sur X .

a) Si $f \in \text{AS}(X)$, l'ensemble $\mathfrak{F}_f = \{h \in \text{AS}(X) \mid h > f\}$ est filtrant décroissant, et a pour enveloppe inférieure f . On a le même résultat en se bornant au sous-ensemble de \mathfrak{F}_f , formé des traces sur X des fonctions affines continues sur l'espace vectoriel localement convexe séparé "ambiant".

b) Soient f et g deux fonctions de l'espace vectoriel $\text{AS}(X) - \text{AS}(X)$. Si f et g coïncident sur $\mathcal{E}(X)$, alors $f \equiv g$.

Pour tous ces résultats sur les convexes compacts et les simplexes, on se reportera à [3], [5], [11], [13], [14] ⁽¹⁾.

2. Faces complémentables et faces parallélisables.

Si F est une face de X , et si f est une fonction définie sur F , nous noterons f_F la fonction sur X obtenue en prolongeant f par 0

⁽¹⁾ On pourra aussi consulter le livre récent de E. Alfsen : compact connex sets and boundary integrals, Springer, Verlag, Berlin, 1971.

sur $X \setminus F$. Le symbole 1_F représentera donc la fonction caractéristique de F . Le lemme suivant est dû à Alfsen et Andersen (cf. [2]).

LEMME 4. — Soient $f_1, \dots, f_n \in A^+(X)$, $g_1, \dots, g_m \in A^+(F)$, où F est une face fermée de X .

Alors, $\forall x \in X, \exists x_1, \dots, x_n \in X, y_1, \dots, y_m \in F$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$, nombres ≥ 0 vérifiant $\sum_i \lambda_i + \sum_j \mu_j = 1$, tels que

$$x = \sum_i \lambda_i x_i + \sum_j \mu_j y_j,$$

et

$$\sup(f_1, \dots, f_n, g_{1_F}, \dots, g_{m_F})(x) = \sum_i \lambda_i f_i(x_i) + \sum_j \mu_j g_j(y_j).$$

Ce lemme résulte facilement du lemme 1 b), si on remarque qu'on a la relation :

$$\text{SSG}[\sup(f_1, \dots, f_n, g_{1_F}, \dots, g_{m_F})] = [\cup_i \text{SSG}(f_i)] \cup [\cup_j \text{SSG}(g_j)],$$

et que, chacun de ces ensembles étant, au-dessus d'une certaine cote, convexe compact, leur enveloppe convexe est fermée (cf. fig. 1).

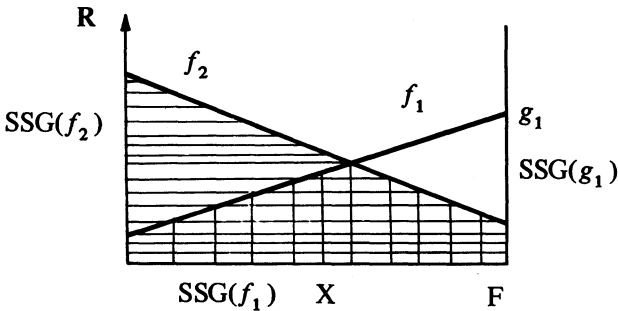


Fig. 1

LEMME 5. — Soit X un convexe compact, et soit $x \in X$. Notons $\text{face}(x)$ la plus petite face (non nécessairement fermée) contenant x . Alors on a l'égalité

$$\text{face}(x) = [\cup_{x \in]y, z[}]y, z]] \cup \{x\}$$

(où $]y, z[$ et $]y, z[$ désignent les segments fermés et ouverts d'extrémités y et z).

Ce lemme se ramène à une simple vérification géométrique dans \mathbf{R}^2 .

DEFINITION 6. — Soit F une face fermée d'un convexe compact X . On appelle ensemble supplémentaire de F , la réunion, notée F' , de toutes les faces de X disjointes de F ; autrement dit, $x \in F'$ signifie $\text{face}(x) \cap F = \phi$.

F' est une face si, et seulement si, c'est un ensemble convexe.

PROPOSITION 7. — Soit F une face fermée d'un convexe compact X . On a les relations suivantes :

$$\hat{1}_F^{-1}(1) = F ; \quad \hat{1}_F^{-1}(0) = F' ; \quad X = \text{conv}(F \cup F') .$$

L'ensemble F' est un G_δ .

Ce résultat se trouve dans [2], ainsi que la démonstration qui suit.

Démonstration.

a) La fonction $\hat{1}_F$ vérifie $0 \leq 1_F \leq \hat{1}_F \leq 1$; donc $F \subset \hat{1}_F^{-1}(1)$. D'autre part, si on applique le lemme 4, avec $f_1 \equiv 0$ et $g_1 \equiv 1$, on voit qu'on peut écrire $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$, avec $0 \leq \lambda \leq 1$, $z \in F$, de telle sorte que $\hat{1}_F(x) = \lambda$. Donc, si $\hat{1}_F(x) = 1$, $x \in F$. Donc $F = \hat{1}_F^{-1}(1)$.

b) De plus, si $\hat{1}_F(x) = \lambda \neq 0$, alors $y \in \text{face}(x) \cap F$ qui est donc non vide, et $x \notin F'$. Donc $F' \subset \hat{1}_F^{-1}(0)$.

Inversement, soit x tel que $\hat{1}_F(x) = 0$, et montrons que

$$\text{face}(x) \cap F = \phi .$$

Soit $u \in \text{face}(x)$. D'après le lemme 5, $\exists v \in \text{face}(x)$ et $\mu \neq 0$ tels que $x = \mu u + (1 - \mu)v$. La fonction $\hat{1}_F$ étant concave, positive, nulle en x , on en déduit que $\hat{1}_F(u) = 0$, donc $u \notin F$.

c) Reprenons la décomposition $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$, avec $z \in F$ et $\lambda = \hat{1}_F(x)$. Utilisant la concavité de $\hat{1}_F$, on obtient

$$\lambda \geq \lambda + (1 - \lambda) \hat{1}_F(z) ,$$

d'où on déduit, si $x \notin F$, que $z \in F'$. Donc $X = \text{conv}(F \cup F')$.

d) Enfin, la relation $F' = \hat{1}_F^{-1}(0)$ montre, puisque $\hat{1}_F$ est s.c.s., que F' est un G_δ .

C.Q.F.D.

Alfsen et Andersen ont introduit dans [2] la notion suivante, qui généralise celle de [1], [14].

DEFINITION 8. — On dit qu'une face fermée F d'un convexe compact X est complémentable, si :

1) F' est une face ;

2) Pour tout x de $X \setminus (F \cup F')$, la décomposition barycentrique de x selon F et F' est unique.

F' s'appelle alors la face complémentaire de F .

Remarque 9. — On voit facilement que ces deux conditions sont indépendantes (prendre par exemple pour F un point extrémal, ou bien pour X un quadrilatère plan).

D'autre part, il est équivalent de dire que F' est une face, ou que F' est convexe.

Exemple 1. — Soit Y un convexe compact dans un espace E (e.l.c.s.) ; dans $E \times \mathbf{R}$, considérons $X = \text{conv}[Y \times \{0\} \cup \{(0, 1)\}]$. Alors $Y \times \{0\}$ et $\{(0, 1)\}$ sont deux faces complémentables de X .

Exemple 2. — Soit Y un convexe compact dans un espace E , et soit Z un autre convexe compact dans un espace F . Dans $E \times F \times \mathbf{R}$, soit

$$X = \text{conv}[Y \times \{0\} \times \{0\} \cup \{0\} \times Z \times \{1\}] .$$

Alors $Y \times \{0\} \times \{0\}$ et $\{0\} \times Z \times \{1\}$ sont deux faces complémentables de X .

Exemple 3. — Considérons $X = M_1^+([0, 1])$, et

$$F = \left\{ \mu \in X \mid \mu \left(\left[0, \frac{1}{2} \right] \right) = 0 \right\} .$$

Alors F est une face complémentable, et F' est exactement l'ensemble des mesures portées par $\left[0, \frac{1}{2} \right]$. On a l'égalité :

$$\hat{1}_F(\mu) = \mu \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) ,$$

et μ se décompose de la façon suivante, si $\mu \notin F \cup F'$:

$$\mu = \mu \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) \times \mu \cdot 1_{\left[\frac{1}{2}, 1 \right]} + \mu \left(\left[0, \frac{1}{2} \right] \right) \times \mu \cdot 1_{\left[0, \frac{1}{2} \right]} .$$

PROPOSITION 10. — Soient X un convexe compact, et F et G deux faces complémentables.

a) $F \cap G$ est complémentable, et on a $(F \cap G)' = \text{conv}(F' \cup G')$.

b) $\text{conv}(F \cup G)$ est complémentable.

La démonstration se fait au moyen de calculs barycentriques naturels ; on commence par montrer que tout x de X s'écrit :

$$x = \lambda_{11}x_{11} + \lambda_{12}x_{12} + \lambda_{21}x_{21} + \lambda_{22}x_{22} ,$$

où

$$\lambda_{ij} \geq 0 , \quad \sum \lambda_{ij} = 1 ,$$

$$x_{11} \in F \cap G , \quad x_{12} \in F \cap G' , \quad x_{21} \in F' \cap G , \quad x_{22} \in F' \cap G' ,$$

une telle décomposition étant unique (pour des coefficients non nuls) ; la proposition s'ensuit facilement (cf. [2]).

Par contre, les faces complémentables ne sont pas stables par "image réciproque directe", c'est-à-dire que si $\varphi : X \rightarrow Y$ est affine continue surjective, et "directe" au sens où $\varphi[\mathcal{E}(X)] \subset \mathcal{E}(Y)$, et si F est une face complémentable dans Y , $\varphi^{-1}(F)$ n'est pas nécessairement une face complémentable dans X (c'est une face fermée de X , bien sûr).

Exemple. — On prend pour X un rectangle, pour Y un segment, et pour φ une projection (cf. Fig. 2).

On voit qu'on obtient bien $\varphi^{-1}(F') = \varphi^{-1}(F)'$, qui est une face, mais il n'y a plus unicité dans la décomposition $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$: y et z peuvent varier. Par contre, il y a unicité de λ . D'où l'idée d'introduire une notion plus faible que celle de face complémentable, et restant stable par image réciproque directe.

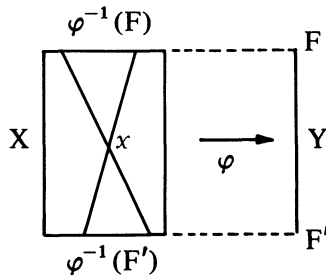


Fig. 2

DEFINITION 11. — *On dit qu'une face fermée F d'un convexe compact X est parallélisable, si :*

1) F' est une face ;

2) Pour tout x de $X \setminus (F \cup F')$, les décompositions barycentriques de x suivant F et F' ont mêmes coefficients barycentriques.

F' s'appelle alors la face parallèle à F .

Les conditions 1) et 2) sont manifestement indépendantes (cf. remarque 9). Remarquons que si $x \in \mathcal{G}(X)$, la face $\{x\}$ est complémenttable dès qu'elle est parallélisable.

Cette fois, les faces parallélisables ne sont stables, ni par intersection finie, ni par enveloppe convexe d'un nombre fini d'entre elles ; il suffit de considérer l'exemple d'un rectangle plan : ni $F \cap G$, ni $\text{conv}(F \cup G)$ ne sont parallélisables, si F et G en sont 2 faces adjacentes.

Mais nous allons voir qu'on a la stabilité par image réciproque directe.

Remarquons d'abord que, grâce au lemme 4 appliqué à $f_1 \equiv 0$ et $g_1 \equiv 1$, il revient au même de dire que la deuxième condition de parallélisabilité est vérifiée, ou que, pour toute décomposition barycentrique de x :

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z \quad (y \in F, z \in F'),$$

on a nécessairement $\lambda = \hat{1}_F(x)$.

Nous allons en déduire un critère pour qu'une face soit parallélisable.

PROPOSITION 12. — *Soit F une face fermée de X. F est parallélisable si, et seulement si, la fonction $\hat{1}_F$ est affine.*

Démonstration. — Si $\hat{1}_F$ est affine, soit $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$ une décomposition barycentrique de x suivant F et F' . On a

$$\hat{1}_F(x) = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 0 = \lambda,$$

donc λ est unique. De plus, $F' = \hat{1}_F^{-1}(0)$ est bien une face.

Réciproquement, supposons F parallélisable. Soit

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2.$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} x &= \lambda y + (1 - \lambda) z, & y \in F, & z \in F', & \lambda &= \hat{1}_F(x), \\ x_1 &= \mu y_1 + (1 - \mu) z_1, & y_1 \in F, & z_1 \in F', & \mu &= \hat{1}_F(x_1), \\ x_2 &= \nu y_2 + (1 - \nu) z_2, & y_2 \in F, & z_2 \in F', & \nu &= \hat{1}_F(x_2). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} x &= \left[\frac{\alpha \mu y_1 + (1 - \alpha) \nu y_2}{\alpha \mu + (1 - \alpha) \nu} \right] (\alpha \mu + (1 - \alpha) \nu) \\ &+ \left[\frac{\alpha(1 - \mu) z_1 + (1 - \alpha)(1 - \nu) z_2}{\alpha(1 - \mu) + (1 - \alpha)(1 - \nu)} \right] [\alpha(1 - \mu) + (1 - \alpha)(1 - \nu)] \\ &= a(\alpha \mu + (1 - \alpha) \nu) + b[\alpha(1 - \mu) + (1 - \alpha)(1 - \nu)], \end{aligned}$$

où $a \in F$, et $b \in F'$ (car F' est alors convexe). Donc on a

$$\lambda = \alpha \mu + (1 - \alpha) \nu,$$

c'est-à-dire $\hat{1}_F(x) = \alpha \hat{1}_F(x_1) + (1 - \alpha) \hat{1}_F(x_2)$, et la fonction $\hat{1}_F$ est affine.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 13. — Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une application affine continue surjective directe. Si F est une face parallélisable de Y , $\varphi^{-1}(F)$ est une face parallélisable de X , et on a

$$\varphi^{-1}(F)' = \varphi^{-1}(F') \quad \text{et} \quad \widehat{1_{\varphi^{-1}(F)}} = \hat{1}_F \circ \varphi.$$

Démonstration. — On a les relations suivantes :

$$u = \widehat{1_{\varphi^{-1}(F)}} = \inf_{\substack{h \in A(X) \\ h \geq 1_{\varphi^{-1}(F)}}} h \leq \inf_{\substack{g \in A(Y) \\ g \geq 1_F}} g \circ \varphi = \hat{1}_F \circ \varphi = v.$$

La fonction u est concave s.c.s., v est affine s.c.s., et $u \leq v$. Or u et v coïncident sur $\mathcal{E}(X)$, car, sur $\varphi^{-1}(F)$, elles valent 1, et, sur $\mathcal{E}(X) \setminus \varphi^{-1}(F)$, elles valent 0. On déduit alors facilement du lemme 3 b) que $u \equiv v$. Donc u est affine, et $\varphi^{-1}(F)$ est parallélisable. De plus, comme $(\hat{1}_F \circ \varphi)^{-1}(0) = \varphi^{-1}[\hat{1}_F^{-1}(0)]$, on voit que $\varphi^{-1}(F)' = \varphi^{-1}(F')$.

C.Q.F.D.

Ce résultat est faux si φ n'est pas *directe* : par exemple, considérer un parallélogramme plan à diagonales parallèles aux axes, et sa projection sur un axe.

LEMME 14. — Soit F une face parallélisable du convexe compact X . Soient $f_1, \dots, f_n \in A^+(X)$, et $g \in A^+(F)$. Alors, pour tout x de X , il existe une décomposition barycentrique de $x : x = \lambda y + (1 - \lambda)z$, avec $y \in F$, $z \in F'$, telle que, si $f = \sup(g_F, f_1, \dots, f_n)$, on ait

$$\hat{f}(x) = \lambda \hat{f}(y) + (1 - \lambda) \hat{f}(z) .$$

Bien sûr, si F est complémentable, cette relation est vraie pour la décomposition barycentrique de x .

Pour démontrer ce lemme, on utilise une décomposition de x , fournie par le lemme 4,

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i , \quad \text{où } x_0 \in F .$$

On décompose ensuite chaque x_i suivant F et F' , et un simple calcul barycentrique permet, compte tenu de la concavité de \hat{f} , de terminer la démonstration (cf. [2]).

La proposition suivante est l'analogie, pour les faces complémentables, de la proposition 12 ; elle est due à Alfsen et Andersen (cf. [2]).

PROPOSITION 15. — Soit F une face fermée de X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) F est complémentable ;
- b) $\forall f \in A^+(F)$, l'ensemble $\{g \in A(X) \mid g > f_F\}$ est filtrant décroissant ;
- c) $\forall f \in A^+(F)$, la fonction \hat{f}_F est affine.

Démonstration. — Compte tenu du lemme 3 a), b) \Leftrightarrow c) est immédiat.

a) \Rightarrow c). D'après le lemme 14, si $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ est la décomposition barycentrique d'un point x , on a

$$\hat{f}_F(x) = \lambda \hat{f}_F(y) + (1 - \lambda) \hat{f}_F(z) .$$

Or $\hat{f}_F = f_F$ sur F , donc \hat{f}_F est affine sur F .

De plus, on a $0 \leq \hat{f}_F \leq \widehat{1_F \times \sup f} = (\sup f) \times \hat{1}_F$. Cette dernière fonction étant nulle sur F' , \hat{f}_F est nulle sur F' , donc elle y est affine.

Alors, les applications $x \rightarrow y$, $x \rightarrow z$ étant *projectives* (par unicité), il en résulte que \hat{f}_F est affine (*se ramener à \mathbb{R}^3*).

c) \Rightarrow a). \hat{I}_F étant affine, on sait déjà que F est parallélisable. Soient deux décompositions de x , de même coefficient barycentrique, nécessairement :

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z = \lambda y' + (1 - \lambda) z' .$$

Soit f dans $A^+(F)$. On a $\hat{f}_F(x) = \lambda f(y) = \lambda f(y')$. Donc, $\forall f \in A^+(F)$, $f(y) = f(y')$. Comme $A^+(F)$ sépare les points de F , on en déduit que $y = y'$, et donc $z = z'$.

Donc F est complémentable.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 16. (Alfsen). — *Toute face fermée d'un simplexe est complémentable.*

En effet, f_F est convexe s.c.s. si $f \in A_F^+$. D'après le lemme 2 c), \hat{f}_F est alors affine.

Il résulte du lemme 2 b) et du lemme 3 a) que, si F est une face complémentable d'un convexe compact X , alors $\forall f \in AS^+(F)$, \hat{f}_F est affine s.c.s. sur X et prolonge f .

On trouvera, dans [2], le résultat suivant : si F est complémentable, toute fonction f de $A(F)$ se prolonge en une fonction \tilde{f} de $A(X)$ (et même, $\forall \varepsilon > 0$, on peut choisir \tilde{f} pour que

$$\|\tilde{f}\| \leq (1 + \varepsilon) \|f\| .$$

Ce résultat est faux pour les faces parallélisables. Voici un contre-exemple, dû à Phelps

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose

$$F = \{(x_n)_{n \geq 0} \mid x_0 = 0 \quad \text{et} \quad |x_n| \leq 2^{-n}, \forall n \geq 1\} ,$$

et

$$G = \{(x_n) \mid x_0 = 1 \quad \text{et} \quad |x_n| \leq n, \forall n \geq 1\} .$$

Alors F est une face fermée parallélisable du convexe compact $X = \text{conv}(F \cup G)$ (et $F' = G$). Si on définit f sur F par $f((x_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, f appartient à $A(F)$, mais ne possède aucun prolongement affine borné à X .

Ce contre-exemple peut être généralisé :

THEOREME 17. — *Tout convexe compact X de dimension infinie peut être réalisé comme face parallélisable d'un convexe compact Y tel que :*

a) *la face X' parallèle à X dans Y soit fermée ;*

b) *il existe f dans A(X) qui ne possède aucun prolongement affine borné à Y.*

Démonstration.

1) On peut considérer X comme base de $A(X)^{+'}$, cône positif de $A(X)'$. Muni de $\sigma(A', A)$ ce cône est complet. Soit \widehat{A}' le complété de A' muni de $\sigma(A', A)$. Le dual de \widehat{A}' est A , et le cône polaire de $A'^{+'}$ est A^+ . Il est saillant car $A'^{+'} - A'^{+'} = A'$, et il engendre A .

On sait qu'on peut identifier \widehat{A}' à A^* , et à \mathbf{R}^I en prenant une base algébrique $(e_i)_{i \in I}$ de A contenue dans A^+ , et par là-même $A'^{+'}$ à un sous-cône convexe fermé de \mathbf{R}_+^I , par l'application $x \rightsquigarrow (e_i(x))_{i \in I}^{(1)}$.

Soit e_0 l'élément de A^+ déterminant la base de $A'^{+'}$ qui contient X. On peut supposer que e_0 est dans la base algébrique $(e_i)_{i \in I}$ (c.a.d. $0 \in I$). Dire que X est de dimension infinie, c'est alors dire que A' l'est aussi, ou que A l'est aussi, ou que $I \setminus \{0\}$ contient une partie dénombrable que nous identifierons à \mathbf{N}_* .

2) Pour tout n de \mathbf{N}_* , il existe $\alpha_n > 0$ tel que pour tout x de X on ait $0 \leq e_n(x) \leq \alpha_n$. Posons

$$f_n(x) = \sum_{p \geq n} \frac{1}{2^p \alpha_p} e_p(x).$$

Les fonctions f_n appartiennent évidemment à A .

Si il existait n_1 et n_2 tels que $\text{osc}_X f_{n_1} = 0$ et $\text{osc}_X f_{n_2} = 0$ (où $\text{osc}_X f_i$ désigne l'oscillation de f_i sur X), on aurait

$$\sum_{n_1 < p \leq n_2} \frac{1}{2^p \alpha_p} e_p = f_{n_1} - f_{n_2} = \lambda e_0,$$

et ceci contredirait l'indépendance des vecteurs de la base $(e_i)_{i \in I}$.

(¹) Cf. G. Choquet — Ensembles et cônes convexes faiblement complets, C.R. Acad. Sc., Paris, t. 254, 1962, p. 2 123-2 125.

Donc il existe au plus un indice n_0 tel que $\operatorname{osc}_X f_{n_0} = 0$. Posons alors $f = f_{n_0+1}$. Pour tout $n > n_0$, la quantité

$$\omega_n = \operatorname{osc}_X f_n$$

est strictement positive.

3) Soit E l'espace $\widehat{A}' \times \mathbf{R}$, identifié à $\mathbf{R}^I \times \mathbf{R}$.

On pose $F = X \times \{0\}$. Soit $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite strictement croissante telle que pour tout $p \geq n > n_0$ on ait $\frac{\beta_p}{\alpha_p} > \frac{n}{\omega_n}$.

On définit alors F' dans $\mathbf{R}^{I \setminus \mathbf{N}^*} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}^*} \times \mathbf{R}$ par

$$F' = \{0\} \times \prod_{n \in \mathbf{N}^*} [0, \beta_n] \times \{1\}.$$

Alors l'ensemble $Y = \operatorname{co}(F \cup F')$ est un convexe compact de E dont F est une face fermée parallélisable isomorphe à X , face dont la face parallèle F' est fermée.

Appelons F_n la projection de F sur $\{0\} \times \{0\}^{n-1} \times \mathbf{R}^{\{n, n+1, \dots\}} \times \{0\}$. Alors, pour tout $n > n_0$, F' contient un translaté-homothétique dans un rapport $\frac{n}{\omega_n}$ de F_n . Or, sur F_n , f oscille comme f_n , c.a.d. de ω_n .

Donc tout prolongement affine \tilde{f} de f à Y oscille d'au moins $\frac{n}{\omega_n} \times \omega_n = n$ sur F' , ceci pour tout $n > n_0$. Donc un tel prolongement \tilde{f} ne pourrait être borné sur F' , donc sur Y .

C.Q.F.D.

Nous donnons maintenant une propriété des faces parallélisables et des faces complémentables, essentielle pour la notion de topologie faciale. La démonstration qui figure ci-dessous est plus simple que celle de [2].

PROPOSITION 18. —

a) Soit (F_α) une famille filtrante décroissante de faces parallélisables de X . Alors $F = \bigcap F_\alpha$ est parallélisable.

b) Soit (F_α) une famille quelconque de faces complémentables. Alors $F = \bigcap F_\alpha$ est vide ou complémentable.

Démonstration.

a) D'après le lemme 2 b), on a les relations

$$\hat{1}_F = \widehat{\inf 1_{F_\alpha}} = \inf \hat{1}_{F_\alpha} .$$

Les $\hat{1}_{F_\alpha}$ sont affines filtrantes décroissantes. Donc $\hat{1}_F$ est affine, et F est parallélisable.

b) Si F est non vide, on peut, d'après la proposition 10, supposer (F_α) filtrante décroissante.

Soit f une fonction affine continue sur l'espace E "ambiant", $f \geq 0$ sur X, et soit f_{F_α} la fonction qui vaut f sur F_α , et 0 sur $X \setminus F_\alpha$; on définit de même f_F . On a alors, d'après le lemme 2 b),

$$\hat{f}_F = \widehat{\inf f_{F_\alpha}} = \inf \hat{f}_{F_\alpha} .$$

Les \hat{f}_{F_α} sont affines filtrantes décroissantes. Donc \hat{f}_F est affine.

Puis, si $f \in A_F^+$, il existe g_ϵ affine continue sur E, telle que $f < g < f + \epsilon$ sur F (Hahn-Banach dans $E \times \mathbf{R}$). Alors, on a encore $g_\epsilon > 0$ sur un ouvert U contenant F. Il existe α_0 tel que $\forall \alpha \geq \alpha_0$, $F_\alpha \subset U$. Alors on voit, comme ci-dessus, que $\hat{g}_{\epsilon F}$ est affine. Comme l'application $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}(x)$ est continue pour la norme uniforme, et que $\hat{g}_{\epsilon F} \rightarrow f_F$ uniformément, $\hat{g}_{\epsilon F}(x) \rightarrow \hat{f}_F(x)$, et \hat{f}_F est affine. Donc F est complémentable (cf. Fig. 3).

C.Q.F.D.

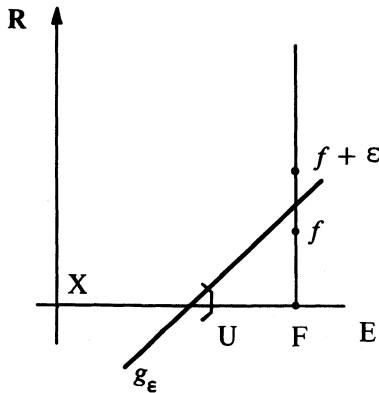


Fig. 3

COROLLAIRE 19 (Alfsen et Andersen). — *Les ensembles $F \cap \mathfrak{E}(X)$, où F est une face complémentable de X , sont les fermés d'une topologie sur $\mathfrak{E}(X)$, qui est quasi-compacte.*

Cette topologie, appelée *la \mathcal{A} -topologie*, sera notée $\mathcal{A}(X)$.

Les ensembles $F \cap \mathfrak{E}(X) = \mathfrak{E}(F)$ forment une topologie, d'après la proposition 10 et la proposition 18 b).

Cette topologie est quasi-compacte, car si (F_α) est une famille filtrante décroissante de faces complémentables, $F = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$ est complémentable, et

$$\bigcap [F_{\alpha} \cap \mathfrak{E}(X)] = F \cap \mathfrak{E}(X) = \mathfrak{E}(F) \neq \emptyset .$$

COROLLAIRE 20 (Effros ; cf. [6]). — *Si X est un simplexe, les ensembles $F \cap \mathfrak{E}(X)$, où F est une face fermée, sont les fermés d'une topologie sur X , qui est quasi-compacte. Cette topologie est notée $\max(X)$ (elle coïncide avec $\mathcal{A}(X)$). Si X est un simplexe de Bauer, $\max(X)$ n'est autre que la topologie induite par celle de X .*

Si on utilise les faces parallélisables, leur non stabilité par intersection finie et l'opération d'enveloppe convexe d'un nombre fini d'entre-elles exclut un résultat analogue au corollaire 19. Par contre, un tel résultat est possible pour des familles particulières de faces parallélisables (les faces complémentables en forment un exemple !). C'est ainsi que Goulet de Rugy [10] et Nagel [12] (sous des formes particulières et d'ailleurs différentes) ont introduit des "familles topologiques de faces parallélisables", que nous allons étudier maintenant.

Signalons, avant de poursuivre, que les notions de faces parallélisables et de faces complémentables ont été étendues par Goulet de Rugy aux cônes convexes saillants faiblement complets (cf. [9], [10]).

D'autre part, pour l'étude détaillée des faces complémentables d'un convexe compact, on se reportera à [2].

3. Familles topologiques de faces parallélisables et topologies faciales.

LEMME 21. — *Soit $\mathfrak{F} = (F_{\alpha})$ une famille de faces parallélisables, stable par intersection finie et l'opération d'enveloppe convexe d'un*

nombre fini d'entre-elles. Alors la famille $\delta(\mathfrak{F})$, obtenue en rajoutant à \mathfrak{F} les intersections filtrantes décroissantes d'éléments de \mathfrak{F} , est encore stable par les deux opérations précédentes, et pour l'intersection de familles filtrantes décroissantes.

Démonstration.

Soient $F = \bigcap_I F_i$ et $G = \bigcap_J F_j$ deux éléments de $\delta(\mathfrak{F})$. Alors

$$F \cap G = \bigcap_{I \times J} (F_i \cap F_j) \text{ appartient à } \delta(\mathfrak{F})$$

(elle est vide éventuellement).

Soient $F = \bigcap_I F_i$ et $G = \bigcap_J F_j$ deux éléments de $\delta(\mathfrak{F})$. Posons $K = \text{conv}(F \cup G)$. Alors

$$H = \bigcap_{I \times J} \text{conv}(F_i \cup F_j) \in \delta(\mathfrak{F}), \text{ et } H \supset K.$$

Soit $x \in H$. Alors, $\forall i, j, \exists y_{i,j} \in F_i, z_{i,j} \in F_j, \lambda_{i,j} \in [0, 1]$, tels que $x = \lambda_{i,j} y_{i,j} + (1 - \lambda_{i,j}) z_{i,j}$. Soit \mathfrak{U} un ultrafiltre sur $I \times J$ plus fin que le filtre des sections. Alors

$$y_{i,j} \xrightarrow{\mathfrak{U}} y \in F, \quad z_{i,j} \xrightarrow{\mathfrak{U}} z \in G, \quad \lambda_{i,j} \xrightarrow{\mathfrak{U}} \lambda \in [0, 1],$$

et on a $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$. Donc $H \subset K$, et $H = K$.

Enfin, soit (F_α) une famille filtrante décroissante d'éléments de $\delta(\mathfrak{F})$. Pour tout α , soit $(F_\alpha^{i_\alpha})_{i_\alpha \in I_\alpha}$ une famille filtrante décroissante d'éléments de \mathfrak{F} , d'intersection F_α . Alors la famille des faces de la forme $F_{\alpha_1}^{i_{\alpha_1}} \cap F_{\alpha_2}^{i_{\alpha_2}} \cap \dots \cap F_{\alpha_n}^{i_{\alpha_n}}$ est contenue dans \mathfrak{F} , filtrante décroissante, et a $\bigcap_\alpha F_\alpha$ pour intersection. Donc, $\bigcap_\alpha F_\alpha$ appartient à $\delta(\mathfrak{F})$.

C.Q.F.D.

DEFINITION 22. — Une famille $\mathfrak{F} = (F_\alpha)$ de faces parallélisables est dite topologique, si elle est stable par intersection finie, enveloppe convexe d'un nombre fini d'entre-elles, intersection filtrante décroissante, et si elle contient ϕ et X .

PROPOSITION 23. — Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une application affine continue surjective directe. Si \mathfrak{F} est une famille topologique de faces paral-

lélisables sur Y , les $\varphi^{-1}(F)$ pour $F \in \mathfrak{F}$ forment une famille topologique de faces parallélisables sur X .

Démonstration. — Il est clair que les $\varphi^{-1}(F)$ sont stables par intersection quelconque, et que ce sont des faces parallélisables (proposition 13). Il y a juste à montrer la stabilité par enveloppe convexe de deux telles faces.

Soient donc $F, G \in \mathfrak{F}$. L'ensemble $\text{conv}(F \cup G)$ appartient à \mathfrak{F} . Montrons que, si $H = \varphi^{-1}[\text{conv}(F \cup G)]$ et $K = \text{conv}[\varphi^{-1}(F) \cup \varphi^{-1}(G)]$, on a $H = K$ (le résultat sera ainsi prouvé). L'inclusion $K \subset H$ est immédiate. Inversement, soit x dans $\mathcal{E}(H)$. Puisque H est une face, $x \in \mathcal{E}(X)$. Donc $\varphi(x) \in \mathcal{E}(Y) \cap \text{conv}(F \cup G)$. Donc $\varphi(x) \in \mathcal{E}(F) \cup \mathcal{E}(G)$, donc $x \in \varphi^{-1}(F) \cup \varphi^{-1}(G)$, et $x \in K$.

C.Q.F.D.

La proposition 23 fournit ainsi un moyen commode pour construire des familles topologiques de faces parallélisables sur X . En particulier, si Y est un simplexe *image directe* de X , les $\varphi^{-1}(F)$, où F est une face fermée quelconque de Y , forment une famille topologique de faces parallélisables sur X .

PROPOSITION 24. — *Soit \mathfrak{F} une famille topologique de faces parallélisables. Alors les ensembles $F \cap \mathcal{E}(X)$, pour $F \in \mathfrak{F}$, sont les fermés d'une topologie quasi-compacte sur $\mathcal{E}(X)$.*

C'est immédiat. Une telle topologie sur $\mathcal{E}(X)$ sera dite *topologie faciale*. Il résulte de la proposition 23 que *l'image réciproque directe d'une topologie faciale est une topologie faciale*.

Le résultat suivant, de Goulet de Rugy, permet de retrouver de façon extrêmement simple les théorèmes de prolongement de Effros (cas des simplexes ; cf. [7]) et de Alfsen et Andersen (cas de la \mathcal{A} -topologie du corollaire 19 ; cf. [2]).

Si \mathcal{T} est une topologie quasi-compacte sur $\mathcal{E}(X)$, nous noterons $CS^+(\mathcal{T})$ le cône des fonctions positives sur $\mathcal{E}(X)$, s.c.s. pour \mathcal{T} , et $C(\mathcal{T})$ l'espace des fonctions sur $\mathcal{E}(X)$, continues pour \mathcal{T} .

THEOREME 25 (Goulet de Rugy). — *Soit \mathcal{T} une topologie faciale sur $\mathcal{E}(X)$.*

a) *Tout élément f de $CS^+(\mathcal{T})$ se prolonge en une fonction \tilde{f} unique de $AS^+(X)$. Nous écrirons en abrégé : $CS^+(\mathcal{T}) \subset AS^+(X)$.*

b) Toute fonction facialement continue f se prolonge en une fonction \tilde{f} unique de $A(X) : C(\mathfrak{G}) \subset A(X)$.

Démonstration.

a) Soit $f \in CS^+(\mathfrak{G})$, $0 \leq f \leq 1$. Soit n un entier ≥ 1 . L'ensemble

$$A_K = \left\{ x \in \mathfrak{G}(X) \mid f \geq \frac{K}{n} \right\}$$

est un fermé facial ($K = 1, 2, \dots, n$). Donc il existe une face parallélisable F_K , unique, telle que $A_K = \mathfrak{G}(X) \cap F_K$. Sur $\mathfrak{G}(X)$, on a $1_{A_K} = \hat{1}_{F_K}$. Soit

$$\varphi_n = \sum_1^n \frac{1}{n} \hat{1}_{F_K}.$$

La fonction φ_n appartient à $AS^+(X)$, et on a $|\varphi_n|_{\mathfrak{G}} - f| \leq \frac{1}{n}$. Donc

on a $\|\varphi_n - \varphi_p\| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ (car l'inégalité a lieu sur $\mathfrak{G}(X)$). Donc φ_n converge uniformément vers une fonction \tilde{f} de $AS^+(X)$, et $\tilde{f}|_{\mathfrak{G}} = f$.

L'unicité de \tilde{f} résulte du lemme 3 b).

b) Il existe a et b , constantes, telles que $f + a \geq 0$ et $b - f \geq 0$. Soient $u = \widetilde{f + a} \in AS^+(X)$, et $v = \widetilde{b - f} \in AS^+(X)$. Alors $u - a$ et $b - v$ sont affines respectivement s.c.s. et s.c.i., et coïncident avec f sur $\mathfrak{G}(X)$. Donc $\tilde{f} = u - a = b - v$ est affine continue, et prolonge f (lemme 3 b)).

Enfin, \tilde{f} est unique, grâce au lemme 3 b).

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 26 (Effros, Alfsen et Andersen). —

a) Si X est un convexe compact, toute fonction définie sur $\mathfrak{G}(X)$, et continue pour la \mathcal{A} -topologie, se prolonge en une fonction de $A(X)$.

b) Si X est un simplexe, toute fonction sur $\mathfrak{G}(X)$, continue pour $\max(X)$, se prolonge en une fonction de $A(X)$.

COROLLAIRE 27. — Pour toute topologie faciale \mathfrak{G} , il existe un sous-espace fermé $H_{\mathfrak{G}}$ de $A(X)$, contenant les constantes, et coréticulé pour son ordre propre (c'est-à-dire si $f, g \in H_{\mathfrak{G}}$, la borne su-

périeure $f \vee g$ de f et g dans $A(X)$ existe, et appartient à $H_{\mathfrak{C}}$, tel que $H_{\mathfrak{C}}|_{\mathfrak{E}(X)} = C(\mathfrak{C})$. L'application $\mathfrak{C} \rightarrow H_{\mathfrak{C}}$ est croissante.

Démonstration. — Il est clair que l'espace $H_{\mathfrak{C}}$ des prolongements des fonctions de $C(\mathfrak{C})$ est fermé, et contient les constantes.

Si f et $g \in H_{\mathfrak{C}}$,

$$\inf_{\substack{h \in A(X) \\ h \geq f \text{ et } g}} h = \widehat{\sup(f, g)}$$

est affine continue si, et seulement si, $f \vee g$ existe dans $A(X)$, et on a alors $f \vee g = \widehat{\sup(f, g)}$.

Or, $\varphi = \sup(f|_{\mathfrak{E}}, g|_{\mathfrak{E}}) \in C(\mathfrak{C})$. Son prolongement $\tilde{\varphi}$ appartient à $H_{\mathfrak{C}}$, est affine continu, et coïncide avec $\widehat{\sup(f, g)}$ sur $\mathfrak{E}(X)$. On a alors $\tilde{\varphi} \geq \widehat{\sup(f, g)}$, et cette dernière fonction est concave s.c.s. Il en résulte que

$$\tilde{\varphi} = \widehat{\sup(f, g)} = f \vee g .$$

C.Q.F.D.

Remarque 28. — Deux topologies faciales différentes peuvent avoir le même espace de fonctions continues, c'est-à-dire le même sous-espace H de $A(X)$ associé. Nous préciserons ce point plus loin.

COROLLAIRE 29. — Pour toute topologie faciale \mathfrak{C} , il existe un simplexe de Bauer $Y_{\mathfrak{C}}$, et $\varphi : X \rightarrow Y_{\mathfrak{C}}$ affine continue surjective directe, tels que

$$\varphi|_{\mathfrak{E}(X)} : \mathfrak{E}(X) \rightarrow \mathfrak{E}(Y_{\mathfrak{C}})$$

soit continue pour \mathfrak{C} et la topologie induite par celle de $Y_{\mathfrak{C}}$, et tels que l'on ait

$$C(\mathfrak{C}) = C[\mathfrak{E}(Y_{\mathfrak{C}})] \circ \varphi ,$$

c'est-à-dire telle que l'application $f \mapsto f \circ \varphi$ de $C[\mathfrak{E}(Y_{\mathfrak{C}})]$ dans $C(\mathfrak{C})$ soit un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés.

Démonstration. — Soit $H_{\mathfrak{C}}$ le sous-espace de $A(X)$ associé à \mathfrak{C} . Posons par définition $Y_{\mathfrak{C}} = (H'_{\mathfrak{C}})_1^+ = \{l \in H'_{\mathfrak{C}} \mid l \geq 0 \text{ et } \|l\| = 1\}$, et munissons $Y_{\mathfrak{C}}$ de $\sigma(H'_{\mathfrak{C}}, H_{\mathfrak{C}})$. Alors $Y_{\mathfrak{C}}$ est un convexe compact, et l'application $\varphi : x \rightarrow \varepsilon_x$ de X dans $Y_{\mathfrak{C}}$ permet d'identifier $H_{\mathfrak{C}}$ à $A(Y_{\mathfrak{C}})$

(cf. [14]). Le caractère réticulé de H montre que $Y_{\mathfrak{C}}$ est un simplexe de Bauer. La surjectivité de φ se montre par le théorème de Hahn-Banach appliqué au convexe compact $\varphi(X)$ inclus dans $Y_{\mathfrak{C}}$.

Montrons que $\varphi(\mathfrak{E}(X)) \subset \mathfrak{E}(Y_{\mathfrak{C}})$. Soit $x \in \mathfrak{E}(X)$. Si on a

$$\varphi(x) = \varepsilon_x = \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{2}$$

sur $H_{\mathfrak{C}}$, et si ε_y et ε_z sont distincts de ε_x sur $H_{\mathfrak{C}}$, il existe $f \in H_{\mathfrak{C}}$ telle que $f(x) = 0, f(y) > 0, f(z) < 0$. La fonction $g = f \vee 0$ appartient à $H_{\mathfrak{C}}$, et coïncide sur $\mathfrak{E}(X)$, donc au point x , avec $\sup(f, 0) = f^+$ (cf. démonstration du corollaire 27). Donc

$$0 = g(x) = \frac{g(y) + g(z)}{2} \geq \frac{f(y) + 0}{2} > 0,$$

ce qui est absurde. Donc $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_x$ sur $H_{\mathfrak{C}}$, et $\varphi(x) \in \mathfrak{E}(Y_{\mathfrak{C}})$.

On sait que la restriction $A(Y_{\mathfrak{C}}) \rightarrow C[\mathfrak{E}(Y_{\mathfrak{C}})]$ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés. Pour montrer que $\varphi|_{\mathfrak{E}(X)} : \mathfrak{E}(X) \rightarrow \mathfrak{E}(Y_{\mathfrak{C}})$ est continue si on munit $\mathfrak{E}(X)$ de la topologie \mathfrak{C} , il suffit de montrer que, $\forall f \in A(Y_{\mathfrak{C}})$, $f \circ \varphi|_{\mathfrak{E}(X)}$ est continue. Or $f \circ \varphi|_{\mathfrak{E}(X)}$ n'est autre que la trace sur $\mathfrak{E}(X)$ de la fonction f considérée comme élément de $H_{\mathfrak{C}}$, et cette trace est bien continue pour \mathfrak{C} .

C.Q.F.D.

Remarque 30. – Il en résulte, la topologie $\sigma(H', H)$ sur $\mathfrak{E}(Y_{\mathfrak{C}})$ coïncidant avec $\max(Y_{\mathfrak{C}})$, que la topologie \mathfrak{C}^* sur $\mathfrak{E}(X)$ définie par $\mathfrak{C}^* = \varphi|_{\mathfrak{E}(X)}^{-1}[\max(Y_{\mathfrak{C}})]$ est une topologie faciale moins fine que \mathfrak{C} , pour laquelle $C(\mathfrak{C}^*) = C(\mathfrak{C})$.

En général, \mathfrak{C}^* est strictement moins fine que \mathfrak{C} . Nous allons préciser ces questions de comparaison de topologies faciales.

DEFINITION 31. –

a) Soient deux topologies faciales \mathfrak{C} et \mathfrak{C}' sur $\mathfrak{E}(X)$. On dit que \mathfrak{C} et \mathfrak{C}' sont équivalentes, et on écrit $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{C}'$, si on a

$$C(\mathfrak{C}) = C(\mathfrak{C}').$$

La relation $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{C}'$ est une relation d'équivalence entre topologies faciales.

b) *On dit qu'une topologie faciale \mathfrak{C} sur $\mathfrak{E}(X)$ est irréductible, si toute topologie faciale équivalente à \mathfrak{C} , et moins fine que \mathfrak{C} , coïncide avec \mathfrak{C} .*

Nous noterons Φ_X l'ensemble des topologies faciales sur $\mathfrak{E}(X)$, et nous l'ordonnerons par la relation de finesse entre topologies.

PROPOSITION 32. —

a) *La borne inférieure d'une famille de topologies faciales est encore une topologie faciale.*

b) *Toute classe d'équivalence de topologies faciales possède une topologie minimum, qui est irréductible ; une topologie faciale est irréductible si, et seulement si, c'est le minimum de sa classe d'équivalence.*

c) *La borne supérieure d'une famille filtrante croissante de topologies faciales est une topologie faciale.*

d) *L'ensemble ordonné Φ_X est inductif vers le haut, et possède donc des topologies faciales maximales.*

Les convexes suivants fournissent des exemples de topologies faciales maximales non maximum : un carré du plan, un prisme de \mathbf{R}^3 à base triangulaire, une pyramide de \mathbf{R}^3 à base carrée.

Démonstration. —

a) est évident.

b) résulte de a) trivialement.

c) Soient (\mathfrak{C}_i) une famille filtrante croissante de topologies faciales, associées à une famille filtrante croissante (\mathfrak{F}_i) de familles topologiques de faces parallélisables. Soit $\mathfrak{G} = \delta(\cup_i \mathfrak{F}_i)$ définie comme au lemme 21.

Alors \mathfrak{G} définit une topologie faciale \mathfrak{C}_0 , plus fine que chaque \mathfrak{C}_i , et moins fine que toute topologie \mathfrak{S} plus fine que chaque \mathfrak{C}_i .

Donc $\mathfrak{C}_0 = \sup \mathfrak{C}_i$, et $\mathfrak{C}_0 \in \Phi_X$.

d) résulte trivialement de c).

C.Q.F.D.

THEOREME 33. — *Les propriétés suivantes, pour une topologie*

faciale \mathfrak{C} sur $\mathfrak{E}(X)$, définie par une famille \mathfrak{F} de faces parallélisables, sont équivalentes :

a) \mathfrak{C} est irréductible ;

b) Il existe un simplexe de Bauer $Y_{\mathfrak{C}}$, et une application affine continue surjective directe $\varphi : X \rightarrow Y_{\mathfrak{C}}$, telle que

$$\mathfrak{C} = \varphi_{|\mathfrak{E}(X)}^{-1}[\max(Y_{\mathfrak{C}})] ;$$

c) Pour toute F de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$, $\hat{1}_F$ est enveloppe inférieure de fonctions de $H_{\mathfrak{C}}$;

d) Toute fonction s.c.s. ≥ 0 sur $\mathfrak{E}(X)$, muni de \mathfrak{C} , est enveloppe inférieure de fonctions continues pour \mathfrak{C} ;

e) \mathfrak{C} est uniformisable.

Démonstration. —

a) \Rightarrow b). On a vu, à la remarque 30, que si $Y_{\mathfrak{C}}$ est le simplexe de Bauer associé à \mathfrak{C} par le corollaire 29, et φ l'application canonique de X sur $Y_{\mathfrak{C}}$, alors on a $\mathfrak{C}_0 = \varphi_{|\mathfrak{E}(X)}^{-1}[\max(Y_{\mathfrak{C}})] \prec \mathfrak{C}$, et que $\mathfrak{C}_0 \sim \mathfrak{C}$. Si \mathfrak{C} est irréductible, on a donc $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$.

b) \Rightarrow c). Si $\mathfrak{C} = \varphi_{|\mathfrak{E}(X)}^{-1}[\max(Y_{\mathfrak{C}})]$, alors toute face F de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$ est de la forme $\varphi^{-1}(G)$, où G est une face fermée de $Y_{\mathfrak{C}}$, et, d'après la proposition 16, on a $\hat{1}_F = \hat{1}_G \circ \varphi$. Or

$$\hat{1}_G = \inf_{\substack{h \in A(Y_{\mathfrak{C}}) \\ h \geq 1_G}} h .$$

Donc on a les égalités :

$$\hat{1}_F = \inf_{\substack{h \in A(Y_{\mathfrak{C}}) \\ h \geq 1_G}} h \circ \varphi = \inf_{\substack{g \in H_{\mathfrak{C}} \\ g \geq 1_F}} g .$$

c) \Rightarrow d). Si G est un fermé de \mathfrak{C} , alors $G = F \cap \mathfrak{E}(X)$, pour une face F de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$. On a donc

$$1_G = \hat{1}_{F|\mathfrak{E}(X)} = \inf_{h_i \in H_{\mathfrak{C}}} h_i|_{\mathfrak{E}(X)} = \inf_{g_i \in C(\mathfrak{C})} g_i \quad (g_i = h_i|_{\mathfrak{E}(X)}) .$$

Si, maintenant, f est s.c.s. pour \mathfrak{C} , et $0 \leq f \leq 1$, on pose

$$A_K^n = \left\{ x \mid f(x) \geq \frac{K}{n} \right\} \quad (K = 1, 2, \dots, n) , \quad \text{et} \quad \varphi_n = \sum_1^n \frac{1}{n} 1_{A_K^n} .$$

Alors, il est clair que $\inf(\varphi_n, \varphi_p) \geq \varphi_{np}$. Donc (φ_n) est une suite filtrante décroissante, d'enveloppe inférieure f . Comme chaque fonction étagée φ_n est enveloppe inférieure de fonctions de $C(\mathfrak{C})$, il en est de même de f .

d) \Rightarrow a). Un fermé G de \mathfrak{C} est défini par

$$1_G = \inf_{\substack{h \in C(\mathfrak{C}) \\ h \geq 1_G}} h.$$

Donc 1_G est s.c.s. pour toute \mathfrak{C}' telle que $C(\mathfrak{C}) = C(\mathfrak{C}')$, donc G est fermé pour une telle topologie, donc $\mathfrak{C} < \mathfrak{C}'$, $\forall \mathfrak{C}' \sim \mathfrak{C}$. Donc \mathfrak{C} est irréductible.

d) \Leftrightarrow e). C'est là un résultat classique de topologie générale (cf. [4]).

C.Q.F.D.

PROPOSITION 34. — *Si X est un simplexe, alors Φ_X possède un maximum : la topologie $\max(X)$.*

Par contre, la \mathcal{A} -topologie d'un convexe compact X peut n'être même pas maximale dans Φ_X . La pyramide de \mathbb{R}^3 à base carrée fournit un contre-exemple.

Remarque 35. — Considérons les trois propriétés suivantes :

- a) X est un simplexe ;
- b) Si des faces F, G sont parallélisables, $F \cap G$ et $\text{conv}(F \cup G)$ sont des faces parallélisables ;
- c) Φ_X possède un maximum.

Alors a) \Rightarrow b) \Leftrightarrow c).

Mais la réciproque b) \Rightarrow a) est fautive, comme le montre l'exemple du trapèze dans \mathbb{R}^2 .

Remarque 36. — En général, ni $\max(X)$ si X est un simplexe, ni la \mathcal{A} -topologie si X est un convexe compact quelconque, ne sont irréductibles. Un exemple de Fakhoury, associé à un simplexe "primaire", montre que $H_{\max(X)}$ peut être réduit aux constantes, c'est-à-dire que Φ_X peut comporter une seule classe, et une seule topologie irréductible, la topologie grossière (cf. [8]). En effet, un simplexe primaire est un

simplexe tel que $A(X)$ soit "anti-réticulé", c'est-à-dire que $f \vee g$ n'existe dans $A(X)$ que si $f \geq g$ ou $g \geq f$. Il en résulte que, pour un tel simplexe, $H_{\max(X)}$ est réduit aux constantes (corollaire 27). Un exemple simple de simplexe primaire est donné dans [8] : soit A le sous-espace de $C([0, 1])$ formé des fonctions vérifiant $\int_0^1 f(t) dt = f(1)$. Alors A_1^{t+} est un simplexe primaire, dont l'ensemble des points extrémaux est isomorphe à $[0, 1[$.

Dans le cas d'un simplexe X , Fakhoury a étudié $H_{\max(X)}$ directement, en utilisant la notion de relation d'équivalence simpliciale. Nous renvoyons le lecteur, pour cette étude, à [8], [14].

L'introduction des topologies faciales irréductibles permet de donner une réciproque satisfaisante au corollaire 27.

Notons Φ_X^* l'ensemble des topologies faciales irréductibles sur X , ordonné par la relation de finesse. Et notons \mathcal{H}_X l'ensemble, ordonné par l'inclusion, des sous-espaces fermés de $A(X)$, contenant les constantes, coréticulés pour leur ordre propre.

PROPOSITION 37. — L'application $\mathcal{C} \mapsto H_{\mathcal{C}}$ de Φ_X^* dans \mathcal{H}_X est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Démonstration. —

a) Pour montrer que l'application $\mathcal{C} \mapsto H_{\mathcal{C}}$ est bijective, il suffit de montrer que tout espace H de \mathcal{H}_X est associé à une topologie faciale. Pour cela, si on reprend le simplexe de Bauer $Y = H_1^{t+}$ de la démonstration du corollaire 29, on voit immédiatement que H est associé à la topologie faciale $\varphi_{|_{\mathcal{C}(X)}}^{-1}[\max(Y)]$, où $\varphi : X \rightarrow Y$ est l'application canonique $x \mapsto \varepsilon_x$ de X dans H_1^{t+} (cette topologie est d'ailleurs irréductible).

b) Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux éléments de Φ_X^* , et supposons que $H_{\mathcal{C}} \subset H_{\mathcal{C}'}$.

Soit G un fermé de \mathcal{C} . On a

$$1_G = \inf \{ h \mid h \in C(\mathcal{C}), h \geq 1_G \}.$$

Or $C(\mathcal{C}) \subset C(\mathcal{C}')$. Donc 1_G est s.c.s. pour \mathcal{C}' , et G est un fermé de \mathcal{C}' . Donc $\mathcal{C} < \mathcal{C}'$.

C.Q.F.D.

Une autre méthode consisterait à mettre en évidence un diagramme commutatif avec les convexes X , $Y_{\mathfrak{C}}$ et $Y_{\mathfrak{C}^*}$.

COROLLAIRE 38. — *Considérons les trois propriétés suivantes :*

- a) Φ_X a un maximum ;
- b) Φ_X^* a un maximum ;
- c) \mathfrak{H}_X a un maximum.

Alors on a les implications :

$$a) \Rightarrow b) \Leftrightarrow c).$$

COROLLAIRE 39 (Fakhoury, Nagel). — *Si X est un simplexe, $H_{\max(X)}$ est le maximum de \mathfrak{H}_X .*

COROLLAIRE 40. — *L'ensemble ordonné Φ_X^* vérifie le théorème de la borne inférieure : toute partie non vide de Φ_X^* possède une borne inférieure.*

En effet, cela est clair pour \mathfrak{H}_X .

COROLLAIRE 41. — *L'ensemble \mathfrak{H}_X est inductif vers le haut, et possède des éléments maximaux.*

En effet, on voit facilement, à partir de la proposition 37 et de la proposition 32 d), que Φ_X^* est inductif. Il en est donc de même de \mathfrak{H}_X .

Le problème de la caractérisation "intrinsèque" des éléments maximaux de Φ_X^* , ou de \mathfrak{H}_X , est actuellement ouvert.

Un convexe compact X de dimension infinie peut n'avoir aucune face complémentale, bien que \mathfrak{H}_X possède un maximum. Prenons, par exemple, un simplexe K de dimension infinie, et soit G le graphe d'une fonction affine continue strictement positive sur K . L'ensemble $X = \text{conv}(K \cup G)$ répond à la question.

Nous allons donner, dans la suite de ce paragraphe, quelques propriétés des topologies faciales.

Si \mathfrak{C} est une topologie faciale, nous noterons \mathfrak{C}^* la topologie faciale irréductible équivalente à \mathfrak{C} .

LEMME 42. — Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une application directe, et soit \mathfrak{C} une topologie faciale sur Y . Alors on a, si \mathfrak{C} est irréductible,

$$C[\varphi^{-1}(\mathfrak{C})] = C(\mathfrak{C}) \circ \varphi ,$$

c'est-à-dire que l'application $f \mapsto f \circ \varphi$ de $C(\mathfrak{C})$ dans $C[\varphi^{-1}(\mathfrak{C})]$ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach réticulés.

Démonstration. — Le seul problème est de montrer que l'application $f \mapsto f \circ \varphi$ est surjective. Posons $\mathfrak{D} = \varphi^{-1}(\mathfrak{C})$, et soient \tilde{X} et \tilde{Y} les simplexes de Bauer associés à \mathfrak{D} et \mathfrak{C} par le corollaire 29, et $\psi : Y \rightarrow \tilde{Y}$ et $\theta : X \rightarrow \tilde{X}$ les applications directes correspondantes.

On sait que $\tilde{X} = (H_{\mathfrak{D}})'_1^+$, et que $\tilde{Y} = (H_{\mathfrak{C}})'_1^+$.

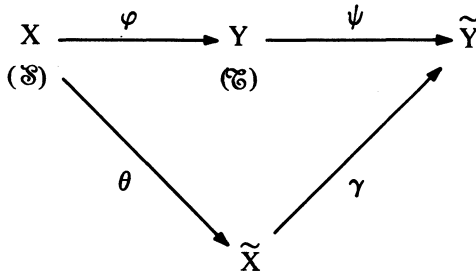


Fig. 4

L'espace $H_{\mathfrak{C}} \circ \varphi$ est un sous-espace fermé de $H_{\mathfrak{D}}$. Soit γ la restriction à \tilde{X} de l'application transposée de l'injection de $H_{\mathfrak{C}} \circ \varphi$ dans $H_{\mathfrak{D}}$. Si $\tilde{x} \in \tilde{X}$, il est clair que $\gamma(\tilde{x}) \in \tilde{Y}$. Donc γ est une application affine continue de \tilde{X} dans \tilde{Y} . Si $x \in X$, on a évidemment

$$\gamma[\theta(x)] = (\psi \circ \varphi)(x) .$$

Donc γ est surjective. De plus, le caractère direct de θ , φ et ψ montre que γ est directe. Si \mathfrak{C} est irréductible, on voit que γ est injective sur $\mathfrak{E}(\tilde{X})$, donc sur \tilde{X} .

Il en résulte alors que l'on a $A(\tilde{X}) = A(\tilde{Y}) \circ \gamma$. Soit alors f dans $H_{\mathfrak{C}}$. On peut écrire $f = \tilde{f} \circ \theta$, où $\tilde{f} \in A(\tilde{X})$. Mais alors $f = g \circ \gamma$, où $g \in A(\tilde{Y})$. Donc on a

$$f = \tilde{g} \circ \gamma \circ \theta = \tilde{g} \circ \psi \circ \varphi = (\tilde{g} \circ \psi) \circ \varphi = h \circ \varphi ,$$

où $h \in H_{\mathfrak{C}}$, et $H_{\mathfrak{C}} \circ \varphi = H_{\mathfrak{D}}$.

C.Q.F.D.

LEMME 43. — Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une application directe. Si \mathfrak{C} est une topologie faciale irréductible sur Y , $\varphi^{-1}(\mathfrak{C})$ est irréductible.

Il serait intéressant de préciser les relations entre $\varphi^{-1}(\mathfrak{C}^*)$ et $[\varphi^{-1}(\mathfrak{C})]^*$, dans le cas où \mathfrak{C} est une topologie faciale sur $\mathfrak{E}(Y)$, non nécessairement irréductible. En particulier, on peut se demander si l'irréductibilité de $\varphi^{-1}(\mathfrak{C})$ entraîne celle de \mathfrak{C} .

Donnons, pour terminer ce paragraphe, une propriété des topologies faciales irréductibles.

PROPOSITION 44. — Soit X un convexe compact.

a) Toute topologie faciale sur $\mathfrak{E}(X)$, irréductible, est tamisable, donc de Baire.

b) Ce résultat est faux, en général, pour une topologie faciale non irréductible.

Démonstration. —

a) C'est une propriété générale des topologies quasi-compactes uniformisables.

b) Reprenons l'exemple de la remarque 36 (cf. [8]). Le simplexe $X = A_1^+$ a l'ensemble de ses points extrémaux isomorphe à $[0, 1[$, et on voit facilement que les fermés de $\max(X)$ sont les compacts ordinaux de $[0, 1[$ et $[0, 1[$. Si on pose alors $U_n =]1 - \frac{1}{n}, 1[$, c'est une suite d'ouverts partout denses de $\max(X)$, dont l'intersection est vide. Donc $\max(X)$ n'est pas un espace de Baire.

C.Q.F.D.

Remarque 45. — On peut signaler un résultat qui généralise une proposition de [8] : Si \mathfrak{C} est une topologie faciale sur X , si $Y_{\mathfrak{C}}$ est le simplexe de Bauer associé, et $\varphi : X \rightarrow Y_{\mathfrak{C}}$ l'application directe correspondante, alors, en désignant par R la relation d'équivalence sur $\mathfrak{E}(X)$ définie par

$$x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y), \quad \forall f \in C(\mathfrak{C}),$$

on voit facilement que :

$$x R y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y);$$

$\mathcal{E}(X)/R$, muni de \mathcal{T}/R ou de \mathcal{T}^*/R , est isomorphe à $\max(Y_{\mathcal{T}})$; \mathcal{T}^* a pour fermé les fermés de \mathcal{T} saturés pour R .

4. Topologies faciales et simplexes.

Nous allons étudier ce qui se passe lorsqu'une topologie faciale sur X est séparée. Notre méthode sera celle de [2].

LEMME 46. — *Soit X un convexe compact, dont l'ensemble des points extrémaux n'est pas fermé. Soit \mathcal{T} une topologie faciale associée à une famille \mathcal{F} de faces parallélisables. Soit $x \in \overline{\mathcal{E}(X)} \setminus \mathcal{E}(X)$, et soit F_x la plus petite face de \mathcal{F} contenant x . Alors, si u et $v \in \mathcal{E}(F_x)$, et $u \neq v$, pour tout couple d'ouverts U et V de \mathcal{T} contenant respectivement u et v , on a $U \cap V \neq \emptyset$.*

Démonstration. — On raisonne par l'absurde. Si $U \cap V = \emptyset$ pour un certain couple U, V , il existerait deux faces G et H de \mathcal{F} , telles que $\mathcal{E}(X) \setminus U = \mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}(X) \setminus V = \mathcal{E}(H)$, et $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(G) \cup \mathcal{E}(H)$.

On aurait donc $\overline{\mathcal{E}(X)} = \overline{\mathcal{E}(G)} \cup \overline{\mathcal{E}(H)}$, et x appartiendrait à G ou H . Si, par exemple, $x \in G$, alors $F_x \subset G$. Donc $\mathcal{E}(F_x) \subset \mathcal{E}(G)$, et alors

$$u \in \mathcal{E}(F_x) \subset \mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(X) \setminus U,$$

ce qui serait absurde, car $u \in U$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 47. — *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un convexe compact X :*

- a) X est un simplexe de Bauer ;
- b) Il existe une topologie faciale séparée \mathcal{T} sur $\mathcal{E}(X)$.

Si ces conditions sont vérifiées, il n'y a qu'une seule topologie faciale séparée : $\max(X)$ (qui n'est autre, alors, que la topologie ordinaire de $\mathcal{E}(X)$).

Démonstration. —

a) \Rightarrow b) est trivial, car $\max(X)$ est séparée si a) est vraie.

b) \Rightarrow a). D'après le lemme 46, $\mathcal{E}(X)$ est fermé, donc compact pour sa topologie ordinaire σ . Or \mathcal{C} est compacte, et $\mathcal{C} \prec \sigma$. Donc $\mathcal{C} = \sigma$. Soit $f \in C(\sigma)$. Alors $f \in C(\mathcal{C})$, donc f se prolonge en $\tilde{f} \in A(X)$. Il en résulte (cf. [3]) que X est un simplexe de Bauer.

Et, de plus, on a $\mathcal{C} = \sigma = \max(X)$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 48. — *Soit X un convexe compact. Alors :*
ou bien X est un simplexe de Bauer,

ou bien il n'existe aucune topologie faciale irréductible sur X pour laquelle les points extrémaux sont fermés.

En effet, si x est fermé, $\forall x \in \mathcal{E}(X)$, pour une \mathcal{C} irréductible, donc uniformisable, \mathcal{C} est alors séparée, et X est un simplexe de Bauer.

En particulier, si X est un convexe compact tel que sa \mathcal{A} -topologie soit *accessible* (exemples donnés dans [2] et [15]), et qui n'est pas un simplexe de Bauer, alors la \mathcal{A} -topologie n'est pas irréductible, c'est-à-dire n'est pas uniformisable.

COROLLAIRE 49. — *Soit X un simplexe. X est de Bauer si, et seulement si, $\max(X)$ est irréductible.*

DEFINITION 50. — *Soit X un convexe compact. On note $\mathcal{K}(X)$ la topologie sur $\mathcal{E}(X)$, dont les fermés sont les compacts ordinaires de $\mathcal{E}(X)$, et $\mathcal{E}(X)$. Cette topologie est quasi-compacte et accessible.*

Il résulte de ce qui précède le corollaire suivant.

COROLLAIRE 51. —

1) *Soit X un convexe compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *X est un simplexe de Bauer ;*

b) *$\mathcal{K}(X)$ est une topologie faciale irréductible.*

2) Si X est un simplexe, $\mathfrak{K}(X)$ est une topologie faciale.

Le deuxième point résulte du corollaire 20, et de ce que, si K est compact dans $\mathfrak{E}(X)$, $\overline{\text{conv}}(K)$ est une face F_K , et que $F_K \cap \mathfrak{E}(X) = K$.

Achevons cette partie en donnant une réciproque partielle au deuxième point du corollaire précédent qui étend un résultat de [15].

DEFINITION 52. — *Un convexe compact X est dit standard, si $\mathfrak{E}(X)$ porte toute mesure maximale sur X .*

Par exemple, un convexe compact métrisable est standard. Il en est de même d'un convexe compact dont l'ensemble des points extrémaux est K -analytique (cf. [5]).

THEOREME 53. — *Soit X un convexe compact standard. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) X est un simplexe ;

b) $\mathfrak{K}(X)$ est une topologie faciale (c'est-à-dire, $\forall K$ compact de $\mathfrak{E}(X)$, $\overline{\text{conv}}(K)$ est une face parallélisable).

Démonstration. —

a) \Rightarrow b). C'est le corollaire 51.

b) \Rightarrow a). Si $\overline{\text{conv}}(K) = F_K$ est une face parallélisable, alors il résulte de l'affinité de \hat{I}_{F_K} (cf. [15]) que l'on a

$$F_K = \{b(\mu) \mid \mu \in M_1^+(K)\} ; F'_K = \{b(\mu) \mid \mu \in M_1^+[\mathfrak{E}(X) \setminus K]\}$$

(où $b(\mu)$ désigne le barycentre de μ).

Raisonnons alors par l'absurde : si X n'est pas un simplexe, il existe $x \in X$ et deux mesures μ et ν positives de masse 1, portées par $\mathfrak{E}(X)$, de barycentre x , et distinctes. Il existe donc un compact $K \subset \mathfrak{E}(X)$ tel que $\mu(K) \neq \nu(K)$.

Si $\mu(K)$ et $\nu(K)$ sont tous deux distincts de 0 et 1, on a alors deux décompositions de x à coefficients barycentriques distincts :

$$x = \mu(K) b \left[\frac{\mu|_K}{\mu(K)} \right] + [1 - \mu(K)] b \left[\frac{\mu|_{\mathfrak{E}(X) \setminus K}}{\mu[\mathfrak{E}(X) \setminus K]} \right] ,$$

et

$$x = \nu(K) b \left[\frac{\nu|_K}{\nu(K)} \right] + [1 - \nu(K)] b \left[\frac{\nu|_{\mathcal{E}(X) \setminus K}}{\nu[\mathcal{E}(X) \setminus K]} \right],$$

et $F_K = \overline{\text{conv}}(K)$ ne serait pas parallélisable.

Les cas où l'un des nombres $\mu(K)$ ou $\nu(K)$ vaut 0 ou 1 sont encore plus faciles à étudier, et mènent aussi à une contradiction.

C.Q.F.D.

Remarque 54. — Un certain nombre de questions se posent en ce qui concerne les relations entre simplexes et topologies faciales :

1) Si X est un simplexe, on a $\mathcal{K}(X) \prec \max(X)$. A-t-on

$$\mathcal{K}(X) \sim \max(X) ?$$

Peut-on caractériser la topologie faciale irréductible $\mathcal{K}^*(X)$ équivalente à $\mathcal{K}(X)$? On peut constater que, dans l'exemple de la remarque 36, on a $\mathcal{K}(X) = \max(X)$, et $\mathcal{K}^*(X)$ est grossière.

2) Si X est un convexe compact *quelconque*, le fait que $\mathcal{K}(X)$ soit faciale implique-t-il que X est un simplexe ?

3) Peut-on caractériser les topologies faciales, sur un convexe compact X , qui sont image réciproque *directe* d'une topologie $\max(Y)$, où Y est un simplexe *non de Bauer* ?

En particulier, une telle topologie sur $\mathcal{E}(X)$ peut-elle être irréductible ? en d'autres termes une topologie faciale peut-elle être image réciproque de $\max(Y)$ et de $\max(Z)$, où Y est un simplexe *non* de Bauer et Z un simplexe de Bauer ?

5 Topologies quasi-compactes prolongeables sur $\mathcal{E}(X)$.

DEFINITION 55. — Une topologie quasi-compacte \mathcal{C} sur $\mathcal{E}(X)$ est dite prolongeable, si toute fonction continue pour \mathcal{C} se prolonge en une fonction de $A(X)$, c'est-à-dire si $C(\mathcal{C}) \subset A(X)$.

Nous dirons toujours que \mathcal{C} est équivalente à \mathcal{C}' , si $C(\mathcal{C}) = C(\mathcal{C}')$. L'ensemble des topologies équivalentes à une topologie donnée possède un minimum.

On doit à Nagel l'équivalence a) \Leftrightarrow c) dans le résultat suivant (cf. [12]). Nous suivrons sa démonstration.

PROPOSITION 56. — Soit \mathfrak{C} une topologie quasi-compacte sur $\mathfrak{E}(X)$, et soit \mathfrak{C}_0 la topologie la moins fine équivalente à \mathfrak{C} (elle est quasi-compacte). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) \mathfrak{C} est prolongeable ;
- b) \mathfrak{C}_0 est faciale ;
- c) \mathfrak{C}_0 vérifie la propriété (P.U.) suivante (dite de "partition de l'unité") :

Pour tout recouvrement fini de $\mathfrak{E}(X)$ par des ouverts U_1, \dots, U_n de \mathfrak{C}_0 , $\exists f_1, \dots, f_n \in A^+(X)$, telles que

$$\sum_{p=1}^n f_p = 1, \text{ et } \mathfrak{E}(X) \cap \{x \mid f_p(x) > 0\} \subset U_p, \text{ pour } p = 1, \dots, n.$$

Démonstration. —

a) \Rightarrow b), car alors il est clair que $\mathfrak{C}_0 = \varphi^{-1}(\max(Y))$ où $Y = H_1^+$, et $\varphi : X \rightarrow Y$ est l'application $x \mapsto \varepsilon_x$ (H étant l'espace des prolongements à X des fonctions de $C(\mathfrak{C})$).

b) \Rightarrow a), d'après le théorème 25.

a) \Rightarrow c). On a encore $\mathfrak{C}_0 = \varphi^{-1}(\max(Y))$.

Si les $U_p = \varphi^{-1}(V_p)$, $p = 1, \dots, n$, V_p ouverts de $\max(Y)$, sont des ouverts recouvrant $\mathfrak{E}(X)$, les V_p recouvrent $\max(Y)$, qui est compacte. Il existe $g_1, \dots, g_n \in A^+(Y)$, tels que

$$\{x \mid g_p(x) > 0\} \cap \mathfrak{E}(Y) \subset V_p, \quad \text{et} \quad \sum_1^n g_p = 1.$$

Alors les $f_p = g_p \circ \varphi$ sont telles que

$$\sum_1^n f_p = 1, \quad f_p \in A^+(X), \quad \text{et} \quad \{x \mid f_p(x) > 0\} \cap \mathfrak{E}(X) \subset U_p.$$

c) \Rightarrow a). Soit $f \in C^+(\mathfrak{C}_0) = C^+(\mathfrak{C})$.

Soient U_1, \dots, U_n des ouverts de \mathfrak{C}_0 , sur lesquels f oscille de moins de ε , et tels que $\bigcup_{p=1}^n U_p = \mathfrak{E}(X)$.

Soient f_1, \dots, f_n , fournis par la condition (P.U.), et soit $x_p \in U_p$.

Alors, si $g_\varepsilon = \sum_{p=1}^n f_p(x_p) \times f_p$, g_ε appartient à $A(X)$, et $\|g_\varepsilon|_{\mathcal{S}(X)} - f\| \leq \varepsilon$. Il en résulte que les g_ε convergent vers une fonction g de $A(X)$, et que $g|_{\mathcal{S}(X)} = f$.

C.Q.F.D.

Une question concernant les convexes compacts se pose : La topologie $\mathcal{K}(X)$ est-elle toujours prolongeable, c'est-à-dire la topologie $\mathcal{K}_0(X)$ la moins fine parmi les topologies équivalentes à $\mathcal{K}(X)$ est-elle faciale ? Il n'en est rien : il suffit de regarder le cas où X est un polyèdre de dimension finie qui n'est pas un simplexe.

6. Fonctions facialement continues, calcul fonctionnel sur le centre de $A(X)$; décomposition spectrale.

DEFINITION 57. — *Nous dirons qu'une fonction f de $A(X)$ est facialement continue, s'il existe une topologie faciale pour laquelle elle est continue. L'ensemble des fonctions facialement continues s'appelle le centre de $A(X)$, et se note Z_X . On a donc la relation*

$$Z_X = \bigcup_{H \in \mathcal{H}_X} H.$$

En général, Z_X n'est pas un sous-espace vectoriel de $A(X)$.

Si X est un simplexe, Z_X coïncide avec $H_{\max(X)}$.

Si \mathcal{H}_X a un maximum H_m , $Z_X = H_m$.

Pour un convexe compact X , nous appellerons *centre strict* de $A(X)$, l'espace $H_{\alpha(X)}$ associé aux faces complémentables. En particulier, si toute face parallélisable de X est complémentable (et Goulet de Ruyg a montré que c'est le cas du convexe compact formé par les "états" d'une C^* -algèbre unitaire), \mathcal{H}_X a un maximum qui est $H_{\alpha(X)}$, et le centre strict de X n'est autre, alors, que son centre.

Nous allons d'abord donner des critères "individuels" de continuité faciale.

PROPOSITION 58. — Soit X un simplexe, et soit $f \in A(X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) f appartient à Z_X ;
- b) Pour tout λ réel, $f \vee \lambda$ existe dans $A(X)$;
- c) Pour tout λ réel, $\widehat{\sup(f, \lambda)}$ est continue ;
- d) Pour tout λ réel, les ensembles

$$A_\lambda = \{x \mid f(x) \geq \lambda\} \quad \text{et} \quad B_\lambda = \{x \mid f(x) \leq \lambda\}$$

contiennent, chacun, une plus grande face fermée.

L'équivalence a) \Leftrightarrow b) est due à Nagel (cf. [12]).

Démonstration. —

a) \Rightarrow b) est clair, puisque $Z_X = F_{\max(X)}$ est fortement réticulé.

b) \Rightarrow c) est évident, car

$$\widehat{\sup(f, \lambda)} = \inf\{h \mid h \in A(X), h \geq f \text{ et } h \geq \lambda\}.$$

c) \Rightarrow d). On a

$$A_\lambda = \{x \mid \sup(f, \lambda)(x) = f(x)\} \quad \text{et} \quad B_\lambda = \{x \mid \sup(f, \lambda)(x) = \lambda\}.$$

Appelons F_λ la face définie par

$$F_\lambda = \{x \mid \widehat{\sup(f, \lambda)}(x) = f(x)\}.$$

C'est une face, car $\widehat{\sup(f, \lambda)}$ est affine continue supérieure à f . Or (lemme 2 a)), $\sup(f, \lambda) = \widehat{\sup(f, \lambda)}$ sur $\mathfrak{E}(X)$. Donc $A_\lambda \cap \mathfrak{E}(X) = \mathfrak{E}(F_\lambda)$. Soit alors G une face fermée incluse dans A_λ . On a nécessairement $\mathfrak{E}(G) \subset \mathfrak{E}(F_\lambda)$, donc $G \subset F_\lambda$.

On fait un raisonnement analogue pour B_λ .

d) \Rightarrow a). Soient F_λ et G_λ les plus grandes faces fermées incluses respectivement dans A_λ et B_λ . Alors il est clair que $A_\lambda \cap \mathfrak{E}(X) = \mathfrak{E}(F_\lambda)$, donc $\{x \in \mathfrak{E}(X) \mid f(x) \geq \lambda\}$ est un fermé de $\max(X)$. Donc $f|_{\mathfrak{E}}$ est s.c.s. pour $\max(X)$. On voit de même que $f|_{\mathfrak{E}}$ est s.c.i., et f appartient donc à Z_X (cf. Fig. 5).

C.Q.F.D.

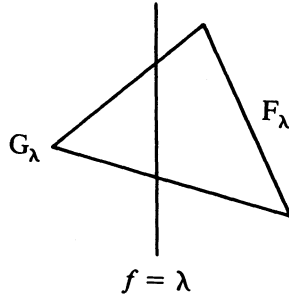


Fig. 5

Si X n'est pas un simplexe, l'équivalence a) \Leftrightarrow d) subsiste pour les fonctions continues pour une topologie faciale donnée \mathfrak{C} , à condition de modifier d).

PROPOSITION 59. — Soient X un convexe compact, et \mathfrak{C} une topologie faciale associée à une famille \mathfrak{F} de faces parallélisables. Les conditions suivantes sont équivalentes pour une fonction f de $A(X)$:

a) $f|_{\mathfrak{C}}$ est continue pour \mathfrak{C} ;

b) Pour tout λ réel, les ensembles A_λ et B_λ contiennent, chacun, une plus grande face fermée, et ces faces appartiennent à \mathfrak{F} .

La démonstration est analogue à celle qui précède ; nous la laissons au lecteur.

Par contre, une caractérisation analogue de l'appartenance d'une fonction donnée f à Z_X semble plus difficile à prouver. L'idée naturelle est de dire que, $\forall \lambda$ réel, A_λ et B_λ contiennent, chacun, une plus grande face F_λ et G_λ , et que ces faces sont parallélisables.

On voit alors facilement que les familles $\mathfrak{F} = \{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ et $\mathfrak{G} = \{G_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ définissent deux topologies faciales \mathfrak{C} et \mathfrak{S} , pour lesquelles f est respectivement s.c.s. et s.c.i. La difficulté, alors, est qu'il peut ne pas exister, a priori, de topologie faciale plus fine que \mathfrak{C} et \mathfrak{S} . Une autre voie s'offre cependant, dans un cas très particulier : si \mathfrak{C} (ou \mathfrak{S}) est irréductible, alors f est continue pour \mathfrak{C} (ou \mathfrak{S}). Cela résulte du lemme suivant.

LEMME 60. — Soit \mathfrak{C} une topologie faciale irréductible sur $\mathfrak{E}(X)$. Si f est affine continue sur X , et telle que $f|_{\mathfrak{C}}$ est s.c.s. (resp. s.c.i.) pour \mathfrak{C} , alors $f|_{\mathfrak{C}}$ est continue pour \mathfrak{C} .

Démonstration. — En effet, si f , par exemple, est s.c.s., on a

$$f = \inf_{\substack{h \in H_{\mathfrak{C}} \\ h \geq f}} h ,$$

puisque \mathfrak{C} est irréductible. L'ensemble $M_f = \{h \in H_{\mathfrak{C}} \mid h \geq f\}$ est filtrant décroissant, converge simplement vers f , et f est continue. D'après le théorème de Dini, M_f converge uniformément vers f . Donc $M_{f|_{\mathfrak{C}}}$ converge uniformément vers $f|_{\mathfrak{C}}$. Comme chaque $h|_{\mathfrak{C}}$ de $M_{f|_{\mathfrak{C}}}$ est continue pour \mathfrak{C} , il en est de même de $f|_{\mathfrak{C}}$.

C.Q.F.D.

On peut d'ailleurs poser le problème de savoir si cette propriété est caractéristique des topologies irréductibles.

L'équivalence a) \Leftrightarrow b) de la proposition 58 n'est pas vraie, en général, pour un convexe compact quelconque (bien que a) \Rightarrow b) soit vraie). Voici comment il faut modifier l'énoncé.

PROPOSITION 61. — *Soit X un convexe compact, soit f dans A(X). Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- a) f appartient à Z_X ;
- b) Pour toute famille finie de couples de réels (a_p, b_p) ,

$$\bigvee_{p=1}^n (a_p f + b_p)$$

existe dans $A(X)$;

- c) Pour toute famille finie de couples de réels (a_p, b_p) ,

$$\widehat{\sup_{p=1, \dots, n} \{a_p f + b_p\}}$$

est affine continue.

Si on désigne alors par H_f le plus petit espace de \mathfrak{H}_X contenant f , H_f n'est autre que le sous-espace vectoriel fermé engendré par les fonctions du type $\bigvee_{p=1}^n (a_p f + b_p)$.

Démonstration. —

- b) \Leftrightarrow c) est évident, et on a

$$\bigvee_{p=1}^n (a_p f + b_p) = \widehat{\sup_{p=1, \dots, n} \{a_p f + b_p\}} .$$

a) \Rightarrow b) est immédiat.

b) \Rightarrow a). Soit Γ l'ensemble des fonctions de la forme

$$\bigvee_{p=1}^n (a_p f + b_p) .$$

Si $f \in \Gamma$, et $\lambda \geq 0$, alors $\lambda f \in \Gamma$.

Si $f, g \in \Gamma$, $f \vee g$ existe dans $A(X)$, et $f \vee g \in \Gamma$.

Si $f, g \in \Gamma$, $f + g \in \Gamma$: en effet, si $f = \bigvee_{p=1}^n (a_p f + b_p)$ et $g = \bigvee_{q=1}^m (\alpha_q f + \beta_q)$, alors

$$\bigvee_{\substack{p=1, \dots, n \\ q=1, \dots, m}} [(a_p + \alpha_q) f + (b_p + \beta_q)] \quad \text{existe dans } A(X),$$

et c'est $f + g$.

Enfin, si $f, g, h \in \Gamma$, alors $(f + h) \vee (g + h)$ existe dans $A(X)$, appartient à Γ , et vaut $f \vee g + h$.

Il en résulte que $W = \Gamma - \Gamma$ est un sous-espace vectoriel *co-réticulé* de $A(X)$, contenant les constantes ; et, bien sûr, $f \in W$.

Il est alors facile de voir que $H_f = \overline{W}$ appartient à \mathfrak{H}_X , et contient f . Donc f est continue pour la topologie faciale associée à H_f . De plus, H_f est bien le plus petit espace de \mathfrak{H}_X contenant f .

C.Q.F.D.

Nous allons retrouver l'espace H_f d'une autre façon, en introduisant le calcul fonctionnel sur Z_X .

DEFINITION 62. — Soit f un élément du centre Z_X de X . On appellera spectre de f , le sous-ensemble $S_f = f[\mathcal{E}(X)]$ de \mathbb{R} . C'est un compact dont les bornes inférieures et supérieures sont $\inf_X f$ et $\sup_X f$.

Nous noterons en abrégé λ , la fonction $\lambda \rightarrow \lambda$ définie sur S_f .

THEOREME 63. — Il existe un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach *réticulés* Φ_f , unique, de $C(S_f)$ sur l'espace H_f , tel que $\Phi_f(1) = 1$ et $\Phi_f(\lambda) = f$. Si $\psi \in C(S_f)$, on notera $\psi(f)$ la fonction $\Phi_f(\psi)$.

Démonstration. — Soit \mathfrak{T} une topologie faciale pour laquelle $f|_{\mathfrak{b}}$ est continue. $\mathcal{E}(X)$ étant quasi-compact pour \mathfrak{T} , il est clair que

S_f est compact. Notons \bar{g} le prolongement à X d'une fonction g de $C(\mathcal{C})$. Pour toute ψ de $C(S_f)$, la fonction $\psi \circ (f|_{\mathcal{C}})$ appartient à $C(\mathcal{C})$, donc on peut définir $\overline{\psi \circ (f|_{\mathcal{C}})}$, qui appartient à Z_X .

Soit Φ_f l'application $\psi \mapsto \overline{\psi \circ (f|_{\mathcal{C}})}$. En tant qu'application de $C(S_f)$ dans $A(X)$, elle est linéaire et isométrique : on a en effet

$$\begin{aligned} \|\Phi_f(\psi)\| &= \sup_{\mathcal{E}(X)} |\Phi_f(\psi)| = \sup_{\mathcal{E}(X)} |\overline{\psi \circ (f|_{\mathcal{C}})}| = \sup_{\mathcal{E}(X)} \psi \circ (f|_{\mathcal{C}}) = \\ &= \sup_{S_f} |\psi| = \|\psi\|. \end{aligned}$$

Son image est donc un sous-espace fermé de $A(X)$ isométrique à $C(S_f)$. Comme il est clair que $\Phi_f(1) \equiv 1$ et $\Phi_f(\lambda) = f$, ce sous-espace contient f et la fonction 1.

Si $\psi \geq 0$, on a évidemment $\Phi_f(\psi) \geq 0$, et la réciproque est immédiate. Soient $a_1\lambda + b_1, \dots, a_n\lambda + b_n$ n fonctions affines sur S_f . Alors on voit facilement que

$$\Phi_f \left[\sup_{p=1, \dots, n} \{a_p \lambda + b_p\} \right] = \bigvee_{p=1}^n (a_p f + b_p),$$

car il est évident que l'on a

$$\Phi_f[\sup(\psi, \theta)] = \Phi_f(\psi) \vee \Phi_f(\theta).$$

Si on note Γ_0 le cône des fonctions sur S_f qui sont traces de fonctions convexes affines par morceaux (c'est-à-dire du type $\sup_{p=1, \dots, n} \{a_p \lambda + b_p\}$), et si on pose $W_0 = \Gamma_0 - \Gamma_0$, on a donc $\Phi_f(\Gamma_0) = \Gamma$, et $\Phi_f(W_0) = W$, en reprenant les notations de la démonstration de la proposition 61.

Remarquons que la donnée de $\Phi_f(1)$ et de $\Phi_f(\lambda)$ nous a imposé Φ_f sur W_0 .

Il n'y a plus qu'à remarquer que W_0 est dense dans $C(S_f)$ pour conclure que $\Phi_f[C(S_f)] = H_f = \bar{W}$, et Φ_f est uniquement défini sur $C(S_f)$.

C.Q.F.D.

La correspondance $\psi \rightarrow \psi(f) = \Phi_f(\psi)$ s'appelle le *calcul fonctionnel sur f* .

COROLLAIRE 64. — *Soit f une fonction du centre de $A(X)$. Alors l'espace H_f est séparable, et la topologie faciale la moins fine rendant*

f *facialement continue*, qui est la topologie faciale irréductible \mathfrak{C}_f associée à H_f , est à base dénombrable.

Puisque H_f est isomorphe à $C(S_f)$, où S_f est un compact de \mathbf{R} , il est clair que H_f est séparable. D'autre part, il existe un simplexe de Bauer Y et une application directe $\varphi : X \rightarrow Y$, tels que

$$\mathfrak{C}_f = \varphi^{-1}(\max(Y)) ,$$

et que H_f soit isomorphe à $C[\max(Y)]$. Il en résulte que $\max(Y)$ est homéomorphe à S_f , donc est à base dénombrable. Il en est donc de même de \mathfrak{C}_f .

COROLLAIRE 65. — *La topologie faciale \mathfrak{C}_f n'est autre que l'image réciproque par $f_{|\mathfrak{E}(X)}$ de la topologie de S_f .*

Démonstration. — Si Y est le simplexe de Bauer précédemment défini, et φ l'application directe de X sur Y , il existe $g \in A(Y)$ telle que

$$g \circ \varphi = f .$$

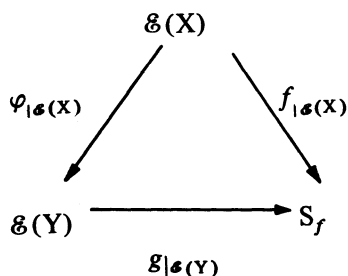


Fig. 6

On a donc $g[\mathfrak{E}(Y)] = S_f$, et la relation

$$f_{|\mathfrak{E}(X)} = g_{|\mathfrak{E}(Y)} \circ \varphi_{|\mathfrak{E}(X)} .$$

Donc, si $\psi \in C(S_f)$, on a

$$\psi \circ (f_{|\mathfrak{E}(X)}) = [\psi \circ g_{|\mathfrak{E}(Y)}] \circ \varphi_{|\mathfrak{E}(X)} .$$

Comme la correspondance $\psi \mapsto \psi \circ f_{|\mathfrak{E}(X)}$ est un isomorphisme, et qu'il en est de même de l'application $h \mapsto h \circ \varphi_{|\mathfrak{E}(X)}$ de $C[\mathfrak{E}(Y)]$ dans $C(\mathfrak{C}_f)$, il en résulte que l'application $\psi \mapsto \psi \circ g_{|\mathfrak{E}(Y)}$ est un isomorphisme de $C(S_f)$ sur $C[\mathfrak{E}(Y)]$. Donc $g_{|\mathfrak{E}(Y)}$ est un isomorphisme.

Donc l'image réciproque par $g_{|\mathfrak{E}}(Y) \circ \varphi_{|\mathfrak{E}}(X)$ de la topologie de S_f est \mathfrak{G}_f . Or c'est aussi l'image réciproque de la topologie de S_f par $f_{|\mathfrak{E}}(X)$.

C.Q.F.D.

On peut donc prendre comme simplexe de Bauer associé à H_f le simplexe $M_1^+(S_f)$. C'est ce que nous allons voir directement par la "décomposition spectrale" de f .

THEOREME 66. — *Il existe une application affine continue surjective directe*

$$de_\lambda : X \rightarrow M_1^+(S_f) = Y_f ,$$

unique, telle que, pour toute ψ de $C(S_f)$, on ait

$$\psi(f)(x) = \int_{S_f} \psi(\lambda) de_\lambda(x) .$$

L'application de_λ prolonge à X l'application $f_{|\mathfrak{E}} : \mathfrak{E}(X) \rightarrow S_f$. Elle s'appelle la décomposition spectrale de f . La mesure $de_\lambda(x)$ est la mesure spectrale de x associée à f .

On a, en particulier, la formule

$$f(x) = \int_{S_f} \lambda de_\lambda(x) .$$

On écrira, en abrégé,

$$\psi(f) = \int_{S_f} \psi(\lambda) de_\lambda , \quad f = \int_{S_f} \lambda de_\lambda .$$

Démonstration. — Pour tout x de X , l'application

$$\psi \mapsto \psi(f)(x) \quad \text{de} \quad C(S_f) \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}$$

est linéaire, positive, et vaut 1 sur la fonction 1. Il existe donc une mesure de Radon positive, de masse 1, sur S_f , unique, notée $de_\lambda(x)$, telle que

$$\psi(f)(x) = \int_{S_f} \psi(\lambda) de_\lambda(x) .$$

L'application $x \mapsto de_\lambda(x)$ est évidemment affine ; elle est continue, car si on la compose avec une fonction affine continue sur Y_f , dont on note ψ la restriction à $\mathfrak{E}(Y_f) = S_f$, on obtient précisément $\psi(f)(x)$, qui est continue en x .

Si $x \in \mathfrak{E}(X)$, on a $\int_{S_f} \psi(\lambda) de_\lambda(x) = \psi(f)(x) = \psi[f(x)]$. Donc la mesure $de_\lambda(x)$ est $\varepsilon_{f(x)}$, qu'on peut identifier à $f(x)$.

Donc $de_{\lambda|_{\mathfrak{E}(X)}} = f_{|_{\mathfrak{E}(X)}}$; il en résulte que de_λ est surjective et directe.

Le convexe $M_1^+(S_f)$ est alors tel que $A[M_1^+(S_f)] \circ de_\lambda = H_f$, c'est-à-dire que c'est le simplexe de Bauer associé à H_f ; et on a bien

$$\mathfrak{C}_f = de_{\lambda|_{\mathfrak{E}(X)}}^{-1}[\max\{M_1^+(S_f)\}] .$$

C.Q.F.D.

Nous allons voir qu'on peut se ramener à la formulation traditionnelle de la décomposition spectrale, avec une "famille spectrale étalée sur un intervalle", comme dans la théorie des opérateurs sur les espaces de Hilbert. Mais les projecteurs E_λ sont ici remplacés par des fonctions affines s.c.s., dont les restrictions à $\mathfrak{E}(X)$ sont des fonctions caractéristiques de fermés faciaux.

DEFINITION 67. — Une fonction f du centre de $A(X)$ étant donnée, appelons famille spectrale étalée sur le segment $[m, M]$, subordonnée à \mathfrak{C}_f , une famille de fonctions affines s.c.s. sur $X, \{e_\lambda\}$, dépendant du paramètre réel λ , chaque e_λ ayant pour restriction à $\mathfrak{E}(X)$ la fonction caractéristique d'un fermé \mathfrak{C}_f , et telle que :

- a) $\{e_\lambda\}_\lambda$ est croissante ($\lambda \leq \mu \Rightarrow e_\lambda \leq e_\mu$) ;
- b) $\{e_\lambda\}$ est continue à droite ($\forall \lambda, \forall x, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e_{\lambda+\varepsilon}(x) = e_\lambda(x)$) ;
- c) $e_\lambda \equiv 0$ pour $\lambda < m$, $e_\lambda \equiv 1$ pour $\lambda \geq M$.

PROPOSITION 68. — Pour toute fonction f du centre de $A(X)$, de bornes m et M , il existe une famille spectrale étalée sur le segment $[m, M]$, subordonnée à \mathfrak{C}_f , telle que, pour tout x de X , la mesure de Stieltjes $\delta e_\lambda(x)$ associée à la fonction $\lambda \mapsto e_\lambda(x)$ coïncide avec la mesure spectrale $de_\lambda(x)$ du point x , c'est-à-dire telle que, pour toute ψ de $C(S_f)$, on ait

$$\psi(f)(x) = \int \psi(\lambda) \delta e_\lambda(x) .$$

De plus, une telle famille spectrale est unique, si on impose seulement que l'on ait

$$f(x) = \int \lambda \delta e_\lambda(x) .$$

Démonstration. — Quite à paramétrer la droite réelle en écrivant un point $\lambda M + (1 - \lambda) m$, nous supposons, pour simplifier l'écriture, que $m = 0$ et $M = 1$.

1) Posons, pour tout λ réel,

$$e_\lambda(x) = \overbrace{1_{\text{conv}[f^{-1}(-\infty, \lambda)] \cap \mathfrak{G}(X)}}(x) .$$

La fonction $e_\lambda(x)$ est donc le prolongement affine s.c.s. à X de la fonction caractéristique du fermé de $\mathfrak{G}(X)$ pour \mathfrak{G}_f formé par l'ensemble des points où $f|_{\mathfrak{G}(X)}$ est inférieure ou égale à λ .

Il est clair que $e_\lambda \leq e_\mu$ si $\lambda \leq \mu$, que $e_\lambda \equiv 0$ si $\lambda < 0$, et que $e_\lambda \equiv 1$ si $\lambda \geq 1$.

De plus, il est évident que, si $x \in \mathfrak{G}(X)$, on a

$$e_\lambda(x) = 1_{[f(x), +\infty[}(\lambda) .$$

Sous cette forme, la fonction $\lambda \mapsto e_\lambda(x)$ est évidemment continue à droite pour tout x de $\mathfrak{G}(X)$. Si on considère alors la fonction affine s.c.s. $e_{\lambda+}$ définie par

$$e_{\lambda+} = \inf_{\mu > \lambda} e_\mu ,$$

cette fonction coïncide avec e_λ sur $\mathfrak{G}(X)$, donc sur X . Donc $\lambda \mapsto e_\lambda(x)$ est continue à droite pour tout x de X .

Soit $\delta e_\lambda(x)$ la mesure de Stieltjes associée à la fonction $e_\lambda(x)$. Il est clair que $\delta e_\lambda(x) \geq 0$, et que $\int 1 \cdot \delta e_\lambda(x) = 1$. De plus, si $]a, b[\subset \mathbb{C} S_f$, $e_\lambda(x)$ est constante sur $]a, b[$. Donc $\delta e_\lambda(x)$ est portée par S_f . D'autre part, on peut écrire

$$\int \lambda \delta e_\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{K=-1}^{n-1} \frac{K}{n} [e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) .$$

La fonction $\varphi_n(x)$ est différence de deux fonctions affines s.c.s. (nous verrons ci-dessous qu'elle est, en fait, s.c.i.). Or, si $x \in \mathfrak{G}(X)$, on a évidemment, *par définition des e_λ* ,

$$|\varphi_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} .$$

Donc cette égalité a lieu partout sur X , et on a à la limite

$$f(x) = \int \lambda \delta e_\lambda(x) .$$

2) Supposons que nous ayons montré qu'il résulte *formellement* des hypothèses a), b), c), et de l'égalité $f(x) = \int \lambda \delta e_\lambda(x)$ que, pour toute ψ de $C(S_f)$, on a

$$\psi(f)(x) = \int \psi(\lambda) \delta e_\lambda(x) .$$

Alors, puisque les prolongements de ψ au complémentaire de S_f sont, dans une grande mesure, arbitraires, on voit d'abord que $\delta e_\lambda(x)$ est portée par S_f . Donc, elle coïncide avec la mesure spectrale $de_\lambda(x)$. Alors, il y a une seule fonction $e_\lambda(x)$ croissante continue à droite et vérifiant c), dont la mesure de Stieltjes associée soit $de_\lambda(x)$.

On voit ainsi que la famille spectrale est unique.

3) Montrons maintenant ce que nous avons annoncé ci-dessus. Soit Γ_1 le cône des fonctions continues affines par morceaux *croissantes* et convexes sur \mathbf{R} . Toute fonction ψ de Γ_1 s'écrit

$$\psi(\lambda) = \sup_{p=1, \dots, n} \{a_p \lambda + b_p\} \quad (\text{où } a_p \geq 0) .$$

Comme il est clair que $\Gamma_1 - \Gamma_1$ est dense dans $C(S_f)$, il suffit de montrer l'égalité $\psi(f)(x) = \int \psi(\lambda) \delta e_\lambda(x)$ pour ψ dans Γ_1 .

Or elle est vraie si $\psi(\lambda) = a\lambda + b$, avec $a \geq 0$ (car $\int \delta e_\lambda(x) \equiv 1$, d'après c)). Il suffit donc de montrer que, si ψ, θ appartiennent à Γ_1 , et si la relation cherchée est vraie pour ψ et θ , elle l'est pour $\sup(\psi, \theta)$, c'est-à-dire qu'on a

$$[\psi(f) \vee \theta(f)](x) = \int [\sup(\psi, \theta)](\lambda) \delta e_\lambda(x) .$$

Remarquons d'abord que, si $x \in \mathcal{E}(X)$, $e_\lambda(x)$ vaut 0 ou 1. Il en résulte que $\lambda \rightarrow e_\lambda(x)$ est une fonction caractéristique. Comme elle est croissante et continue à droite, elle est donc de la forme

$$\lambda \mapsto 1_{[\alpha(x), +\infty[}(\lambda) .$$

Dans les deux quantités

$$\sum_{K=1}^{n-1} \sup \left[\psi \left(\frac{K}{n} \right), \theta \left(\frac{K}{n} \right) \right] [e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x)]$$

et

$$\sup \left[\sum_{K=-1}^{n-1} \psi \left(\frac{K}{n} \right) [e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x)], \right. \\ \left. \sum_{K=-1}^{n-1} \theta \left(\frac{K}{n} \right) [e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x)] \right],$$

on a donc, si $x \in \mathfrak{E}(X)$, et si q est tel que $\frac{q}{n} \leq \alpha(x) < \frac{q+1}{n}$,

$$e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } K \neq q, \\ 1, & \text{si } K = q. \end{cases}$$

Il en résulte que les deux quantités précédentes sont égales si $x \in \mathfrak{E}(X)$.

Or, si $\varphi(\lambda)$ est une fonction de Γ_1 , on a, en posant

$$I_{\varphi}^n(x) = \sum_{K=-1}^{n-1} \varphi \left(\frac{K}{n} \right) [e_{(K+1)/n}(x) - e_{K/n}(x)],$$

$$I_{\varphi}^n(x) = \varphi \left(\frac{n-1}{n} \right) - \sum_{K=0}^{n-1} e_{K/n}(x) \left[\varphi \left(\frac{K}{n} \right) - \varphi \left(\frac{K-1}{n} \right) \right].$$

Donc $I_{\varphi}^n(x)$ est affine s.c.i. De plus, il est clair que la sous-suite $I_{\varphi}^{2^p}(x)$ est croissante (cela se voit par un calcul immédiat).

Donc $\int \varphi(\lambda) \delta e_{\lambda}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\varphi}^n(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} I_{\varphi}^{2^p}(x)$ est affine s.c.i.

Or nous avons montré, si ψ et θ appartiennent à Γ_1 , que

$$I_{\sup(\psi, \theta)}^n(x) = \sup [I_{\psi}^n(x), I_{\theta}^n(x)] \quad \text{sur } \mathfrak{E}(X).$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int \sup(\psi, \theta)(\lambda) \delta e_{\lambda}(x) = \sup [\psi(f)(x), \theta(f)(x)] \quad \text{sur } \mathfrak{E}(X).$$

La première fonction est affine s.c.i. sur X , la deuxième est la trace sur $\mathfrak{E}(X)$ de la fonction $\psi(f) \vee \theta(f)$, qui est affine continue. Ces deux fonctions coïncident sur $\mathfrak{E}(X)$; elles coïncident donc partout, et on a bien

$$\sup(\psi, \theta)(f)(x) = \int \sup(\psi, \theta)(\lambda) \delta e_{\lambda}(x),$$

si ψ et θ appartiennent à Γ_1 et vérifient déjà $\psi(f) = \int \psi(\lambda) \delta e_\lambda$,
 $\theta(f) = \int \theta(\lambda) \delta e_\lambda$.

C.Q.F.D.

La décomposition spectrale d'une fonction du centre de $A(X)$ nous permet d'étendre le calcul fonctionnel à des fonctions qui ne sont plus nécessairement continues. Nous obtiendrons des fonctions affines sur X , non continues, mais vérifiant le calcul barycentrique, et "approchables" en un certain sens par des fonctions de H_f .

DEFINITION 69. —

1) Nous noterons H_f^1 (resp. H_f^S) le cône des fonctions bornées sur X qui sont enveloppes supérieures de familles filtrantes croissantes (resp. enveloppes inférieures de familles filtrantes décroissantes) de fonctions de H_f . Les fonctions de H_f^1 seront dites affines f - s.c.i. (et celles de H_f^S , affines f - s.c.s.).

2) Nous noterons U_f l'espace vectoriel des fonctions v sur X vérifiant :

$$\forall \mu \text{ de } M_1^+(X), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in H_f^S, \exists h \in H_f^1,$$

telles que $g \leq v \leq h$, et $\int (h - g) d\mu < \varepsilon$.

Les fonctions de U_f sont dites f -universellement-intégrables.

Nous allons montrer que les fonctions f -semi-continues, d'abord, puis les fonctions f -universellement-intégrables, sont exactement celles que l'on peut atteindre par le calcul fonctionnel, généralisé au moyen des mesures spectrales.

PROPOSITION 70. — Soit g une fonction numérique sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) g appartient à H_f^1 (resp. H_f^S) ;
- b) $g|_{\mathcal{G}(X)}$ est s.c.i. (resp. s.c.s.) pour \mathcal{G}_f , et g est affine s.c.i. (resp. s.c.s.) ;
- c) Il existe φ définie sur S_f , s.c.i. majorée (resp. s.c.s. minorée), telle que

$$g = \int \varphi(\lambda) de_\lambda.$$

La fonction φ de la condition c) est alors unique.

Démonstration. —

a) \Rightarrow b) est évident, car si $\{g_\alpha\}$ est une famille filtrante croissante de fonctions de H_f , telles que $g = \sup_\alpha g_\alpha$, alors

$$g_{|_{\mathcal{E}(X)}} = \sup_\alpha g_{\alpha|_{\mathcal{E}(X)}} ,$$

qui est s.c.i. majorée pour \mathfrak{C}_f .

b) \Rightarrow a) résulte de ce que la topologie \mathfrak{C}_f est irréductible (cf. théorème 33).

a) \Rightarrow c). Chaque $\{g_\alpha\}$ de la famille introduite ci-dessus est de la forme

$$g_\alpha = \psi_\alpha(f) ,$$

où $\psi_\alpha \in C(S_f)$. La famille ψ_α est filtrante croissante, majorée par $\sup g$. Soit $\varphi = \sup_\alpha \psi_\alpha$, s.c.i. majorée sur S_f . Alors, pour tout x de X , on a

$$\int \varphi(\lambda) de_\lambda(x) = \sup_\alpha \int \psi_\alpha(\lambda) de_\lambda(x) = \sup g_\alpha(x) = g(x) .$$

c) \Rightarrow a). Soit $\{\psi_\alpha\}$ une famille filtrante croissante de fonctions de $C(S_f)$, telle que $\sup \psi_\alpha = \varphi$. Alors, si $g_\alpha = \psi_\alpha(f)$, on a, pour tout x de X ,

$$g(x) = \int \varphi(\lambda) de_\lambda(x) = \sup_\alpha \int \psi_\alpha(\lambda) de_\lambda(x) = \sup g_\alpha(x) ,$$

et la famille $\{g_\alpha\}$ est filtrante croissante majorée, et incluse dans H_f .

L'unicité de φ résulte de l'égalité $g(x) = \varphi[f(x)]$, si $x \in \mathcal{E}(X)$.

C.Q.F.D.

En particulier, on voit facilement qu'on a la relation

$$e_\mu = \int 1_{]1-\infty, \mu]}(\lambda) de_\lambda .$$

THEOREME 71. —

1) *Soit ν une fonction numérique sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) ν appartient à U_f ;

b) Il existe u définie sur S_f , universellement intégrable, telle que

$$\nu = \int u(\lambda) de_\lambda .$$

2) Si ν appartient à U_f , $\forall \mu \in M_1^+(X)$, de barycentre b , $\exists h_n \in H_f$ telles que $h_n \rightarrow \nu$ dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ quand $n \rightarrow \infty$, et $h_n(b) \rightarrow \nu(b)$.

3) Toute fonction ν de U_f vérifie le calcul barycentrique modulo H_f , c'est-à-dire que, $\forall \mu, \mu'$ de $M^+(X)$, on a $\{\mu = \mu' \text{ sur } H_f\} \Rightarrow \{\mu = \mu' \text{ sur } U_f\}$.

4) L'application $u \rightarrow \int u(\lambda) de_\lambda$ est bijective de l'espace des fonctions universellement intégrables sur S_f , sur U_f .

Démonstration. —

1) b) \Rightarrow a). Il est clair que la fonction

$$u(f)(x) = \int u(\lambda) de_\lambda(x)$$

est affine. Soit μ dans $M_1^+(X)$, et soit b le barycentre de μ . Puisque u est universellement intégrable, u est intégrable pour $de_\lambda(b)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe ψ s.c.i. et θ s.c.s., sur S_f , que l'on peut supposer bornées puisque u l'est (considérer les mesures ε_{λ_0} , $\lambda_0 \in S_f$), telles que

$$\theta \leq u \leq \psi \quad \text{et} \quad \int (\psi - \theta) de_\lambda(b) < \varepsilon .$$

On en déduit

$$\theta(f) \leq u(f) \leq \psi(f) , \quad \text{et} \quad \psi(f)(b) - \theta(f)(b) < \varepsilon .$$

Mais comme $\psi(f)$ et $\theta(f)$ sont affines semi-continues, elles vérifient le calcul barycentrique. Donc on a

$$\int [\psi(f) - \theta(f)] d\mu < \varepsilon .$$

Il résulte alors de la proposition 70 que $u(f)$ appartient à U_f .

a) \Rightarrow b). Montrons d'abord que, si ν appartient à U_f , et si x et y sont deux points de $\mathcal{G}(X)$ tels que $f(x) = f(y)$, alors $\nu(x) = \nu(y)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe ψ et θ dans $C(S_f)$, telles que

$$\theta(f) \leq \nu \leq \psi(f) \quad \text{et} \quad \int (\psi - \theta) de_x < \varepsilon .$$

Donc on a :

$$\theta(f)(x) \leq \nu(x) \leq \psi(f)(x) ,$$

$$\theta(f)(y) \leq \nu(y) \leq \psi(f)(y) ,$$

et

$$\psi(f)(x) - \theta(f)(x) < \varepsilon .$$

Mais si $f(x) = f(y)$, on a

$$\theta(f)(x) = \theta(f)(y) \quad \text{et} \quad \psi(f)(x) = \psi(f)(y) .$$

Donc $|\nu(x) - \nu(y)| \leq \varepsilon$, et ceci $\forall \varepsilon > 0$. Donc $\nu(x) = \nu(y)$. On peut donc définir une fonction u sur $S_f = f[\mathcal{E}(X)]$, unique, telle que $u \circ f_{1\mathcal{E}} = \nu_{1\mathcal{E}}$.

Mais alors, on voit que, $\forall de_\lambda(x)$, et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \theta$ s.c.s. minorée et ψ s.c.i. majorée, sur S_f , telles que

$$\theta \leq u \leq \psi \quad \text{et} \quad \int (\psi - \theta) de_\lambda(x) < \varepsilon$$

(il suffit de considérer la restriction à $\mathcal{E}(X)$ de l'inégalité correspondante sur X).

Ceci signifie exactement que u est $de_\lambda(x)$ -intégrable, et ceci pour tout x . Donc u est universellement intégrable sur S_f .

On peut alors trouver, pour x fixé, une suite de fonctions s.c.i. majorées ψ_n , et une suite de fonctions s.c.s. minorées θ_n , telles que

$$\theta_n(f) \leq \nu \leq \psi_n(f) \quad \text{et} \quad \int (\psi_n - \theta_n) de_\lambda(x) < \frac{1}{n} .$$

Alors on a bien (puisqu'il résulte de ce qui précède que $\theta_n \leq u \leq \psi_n$) :

$$\int u(\lambda) de_\lambda(x) = \lim_n \int \psi_n(\lambda) de_\lambda(x) = \lim_n \psi_n(f)(x) = \nu(x) .$$

2) Soit $\mu \in M_1^+(X)$, de barycentre b . Soient $g_n \in H_f^S$, $h_n \in H_f^I$, telles que

$$g_n \leq \nu \leq h_n \quad \text{et} \quad \int (h_n - g_n) d\mu < \frac{1}{n} .$$

On a

$$g_n = \theta_n(f) , \quad h_n = \psi_n(f) ,$$

où θ_n est s.c.s. et ψ_n s.c.i., avec $\theta_n \leq \psi_n$. On sait qu'il existe alors une fonction *continue* φ_n , telle que $\theta_n \leq \varphi_n \leq \psi_n$. Donc

$$\int |v - \varphi_n(f)| d\mu \leq \int (h_n - g_n) d\mu < \frac{1}{n}, \text{ et } |v(b) - \varphi_n(f)(b)| < \frac{1}{n}.$$

Donc $\varphi_n(f)$, qui appartient à H_f , converge vers v dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, et

$$\varphi_n(f)(b) \rightarrow v(b).$$

D'ailleurs, la condition " $h_n(b) \rightarrow v(b)$ " résulte de celle sur la convergence dans \mathcal{L}^1 , appliquée à la mesure $\frac{1}{2}(\mu + \varepsilon_b)$.

3) résulte trivialement de 2) appliqué à $\pi = \frac{\mu + \mu'}{2}$.

4) résulte de l'égalité $u(f)(x) = u[f(x)]$ si $x \in \mathcal{E}(X)$, et de 1).
C.Q.F.D.

Si, au moyen de $f|_{\mathcal{E}}$, on "identifie" $\mathcal{E}(X)$ muni de \mathcal{C}_f avec S_f (car S_f est le compact séparé de l'espace quasi-compact uniformisable \mathcal{C}_f), le théorème 71 signifie, en quelque sorte, que toute fonction "universellement intégrable sur $\mathcal{E}(X)$ muni de \mathcal{C}_f " se prolonge en une fonction vérifiant le calcul barycentrique, et "approchable au sens des $\mathcal{L}^1(\mu)$ " par des fonctions de H_f . Le problème se pose d'ailleurs de savoir si les propriétés 2) et 3) du théorème 71 sont équivalentes au fait que v appartienne à U_f . De plus, on a un théorème analogue au théorème 71 en remplaçant l'espace H_f par l'espace $H_{\mathfrak{F}}$ associé à une topologie faciale irréductible \mathfrak{F} .

7. Calcul fonctionnel et décomposition spectrale pour les fonctions facialement semi-continues.

Nous noterons $AI(X)$ le cône des fonctions affines s.c.i. sur X .

DEFINITION 72. — Nous noterons Z_X^1 (resp. Z_X^S) l'ensemble des fonctions f affines s.c.i. (resp. s.c.s.) sur X , dont la trace sur $\mathcal{E}(X)$ est s.c.i. (resp. s.c.s.) pour une topologie faciale. C'est aussi l'ensemble des prolongements affines s.c.i. (resp. s.c.s.) à X des fonctions bornées sur $\mathcal{E}(X)$, qui sont s.c.i. (resp. s.c.s.) pour une topologie faciale (théo-

rème 25). Une fonction de Z_X^1 (resp. Z_X^s) sera dite *facialement s.c.i.* (resp. *s.c.s.*).

Z_X^1 n'est pas, en général, un cône convexe. C'est le cas si X est un simplexe, ou si Φ_X a un maximum.

Remarque 73. —

a) Il résulte des commentaires qui suivent la proposition 59 qu'une fonction f de $AI(X)$ appartient à Z_X^1 si, et seulement si, pour tout réel λ , l'ensemble $B_\lambda = \{x \mid f(x) \leq \lambda\}$ contient une plus grande face fermée, qui est parallélisable. Ce fait sera utilisé plus loin.

b) Si X est un simplexe, f affine s.c.i. est dans $Z_X^1 \Leftrightarrow \forall \lambda, f \vee \lambda$ existe dans $AI(X)$, et coïncide avec $\sup(f, \lambda)$ sur $\mathcal{G}(X)$.

DEFINITION 74. — On appellera famille spectrale de faces parallélisables étalée sur le segment $[m, M]$, une famille $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de faces parallélisables vérifiant les trois conditions suivantes :

- a) L'application $\lambda \mapsto F_\lambda$ est croissante ;
- b) L'application $\lambda \mapsto F_\lambda$ est "continue à droite", c'est-à-dire que, $\forall \lambda, F_\lambda = \bigcap_{\mu > \lambda} F_\mu$;
- c) Pour $\lambda < m, F_\lambda = \emptyset$, et pour $\lambda \geq M, F_\lambda = X$.

DEFINITION 75. — On appelle famille spectrale de fonctions affines s.c.s. étalée sur le segment $[m, M]$, une famille $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de fonctions affines s.c.s. sur X , dont les restrictions à $\mathcal{G}(X)$ sont les fonctions caractéristiques de l'ensemble des points extrémaux de faces parallélisables, et vérifiant les trois conditions suivantes :

- a) L'application $\lambda \mapsto e_\lambda(x)$ est croissante pour tout x ;
- b) L'application $\lambda \mapsto e_\lambda(x)$ est continue à droite ;
- c) Pour $\lambda < m, e_\lambda \equiv 0$, et pour $\lambda \geq M, e_\lambda \equiv 1$.

DEFINITION 76. — On appelle topologie spectrale sur $\mathcal{G}(X)$, une topologie faciale \mathcal{T} telle qu'il existe une fonction f facialement s.c.i., pour laquelle \mathcal{T} est la topologie faciale la moins fine rendant $f|_{\mathcal{G}(X)}$ s.c.i.

Toutes ces notions sont reliées par la résultat suivant.

PROPOSITION 77. —

1) Il y a équivalence (et bijection) entre la donnée :

a) d'une fonction f de Z_X^I , comprise entre m et M ;

b) d'une famille spectrale de faces parallélisables $(F_\lambda)_\lambda$ étalée sur $[m, M]$;

c) d'une famille spectrale de fonctions affines s.c.s. $(e_\lambda)_\lambda$ étalée sur $[m, M]$.

2) La famille $(F_\lambda)_\lambda$ de faces parallélisables définit alors une topologie faciale \mathfrak{G}_f , qui est la moins fine rendant la fonction f associée à $(F_\lambda)_\lambda$ facialement s.c.i. ; cette topologie \mathfrak{G}_f est donc spectrale.

Précisons comment on passe de l'une de ces données à l'autre :

Si $f \in Z_X^I$, on pose $F_\lambda = \overline{\text{conv}}[\{x \mid f(x) \leq \lambda\} \cap \mathfrak{G}(X)]$;

Si $(F_\lambda)_\lambda$ est une famille spectrale, on pose $e_\lambda = \widehat{1}_{F_\lambda}$;

Si (e_λ) est une famille spectrale de fonctions affines s.c.s., on a, pour x dans $\mathfrak{G}(X)$, $e_\lambda(x) = 1_{[f(x), +\infty[}(\lambda)$; alors $f \in Z_X^I$.

Démonstration. —

1) Soit f dans Z_X^I . Pour tout λ réel, $\{x \mid f(x) \leq \lambda\} \cap \mathfrak{G}(X)$ est un fermé d'une topologie faciale pour laquelle f est s.c.i. Donc il existe une face fermée parallélisable F_λ , telle que

$$F_\lambda = \overline{\text{conv}}[\{x \mid f(x) \leq \lambda\} \cap \mathfrak{G}(X)] .$$

Si $m \leq f \leq M$, il est clair que $F_\lambda = \emptyset$ si $\lambda < m$, et $F_\lambda = X$ si $\lambda \geq M$. De plus, $\lambda \leq \mu$ implique $F_\lambda \subset F_\mu$.

Enfin, soit $F_{\lambda^+} = \bigcap_{\mu > \lambda} F_\mu$. C'est une face fermée de X , dont l'ensemble des points extrémaux $\mathfrak{G}(F_{\lambda^+})$ n'est autre que $\bigcap_{\mu > \lambda} \mathfrak{G}(F_\mu)$. Mais on a évidemment

$$\bigcap_{\mu > \lambda} \mathfrak{G}(F_\mu) = \{x \in \mathfrak{G}(X) \mid f(x) \leq \lambda\} = \mathfrak{G}(F_\lambda) .$$

Donc $F_\lambda = F_{\lambda^+}$.

Soit (F_λ) une famille spectrale de faces parallélisables étalée sur $[m, M]$. Posons $e_\lambda = \widehat{1}_{F_\lambda}$. Alors les (e_λ) sont affines s.c.s. ; la famille

(e_λ) est croissante. Soit $e_{\lambda^+} = \inf_{\mu > \lambda} e_\mu$; cette fonction est affine s.c.s., et coïncide sur $\mathfrak{E}(X)$ avec e_λ . Donc $e_\lambda = e_{\lambda^+}$. On a bien $e_{\lambda|_{\mathfrak{E}(X)}} = 1_{\mathfrak{E}(F_\lambda)}$, et enfin $e_\lambda \equiv 0$ si $\lambda < m$, $e_\lambda \equiv 1$ si $\lambda \geq M$.

Soit (e_λ) une famille spectrale de fonctions affines s.c.s. étalée sur $[m, M]$. Si $x \in \mathfrak{E}(X)$, la fonction $\lambda \mapsto e_\lambda(x)$ est croissante continue à droite, et ne prend que les valeurs 0 et 1. Donc il existe $f(x)$ unique, tel que

$$e_\lambda(x) = 1_{[f(x), +\infty[}(\lambda) .$$

La fonction f , définie sur $\mathfrak{E}(X)$, est telle que

$$\{x \mid f(x) \leq \lambda\} = \{x \mid e_\lambda(x) = 1\} .$$

Cet ensemble est donc l'ensemble des points extrémaux d'une face parallélisable F_λ .

Alors la famille (F_λ) est croissante, donc elle définit une topologie faciale sur $\mathfrak{E}(X)$, pour laquelle f est évidemment s.c.i. Il existe un prolongement de f à X , que nous noterons encore f , affine s.c.i., et unique. Et la relation $e_\lambda(x) = 1_{[f(x), +\infty[}(\lambda)$ montre que f est comprise entre m et M sur $\mathfrak{E}(X)$, donc partout. Elle montre aussi que f coïncide avec la fonction dont on est parti pour fabriquer la famille (F_λ) initiale, puis la famille (e_λ) .

2) Ce point a été en partie montré dans ce qui précède, et est d'ailleurs évident.

C.Q.F.D.

Nous allons voir qu'un calcul fonctionnel est possible sur une fonction f de Z_X^1 , en restant dans le cadre de Z_X^1 . Ceci s'interprètera par une décomposition spectrale de la fonction f , et les mesures spectrales correspondantes nous permettront de prolonger le calcul fonctionnel.

Par la même occasion, nous allons donner un critère, analogue à celui de la proposition 61, pour qu'une fonction affine s.c.i. soit facialement s.c.i.

Nous noterons $\forall \varphi_i$ une fonction quelconque obtenue à partir d'une suite de fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ par composition finie d'opérations du type \vee et \wedge , dans le cône $AI(X)$ des fonctions affines s.c.i. sur X , lorsque ces opérations ont un sens. Nous noterons $IS \varphi_i$ une fonction obtenue de façon analogue au moyen des inf et sup ponctuels.

PROPOSITION 78. — Soit f une fonction affine s.c.i. sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) f appartient à Z_X^I ;
 b) Pour tout réel λ , l'ensemble $B_\lambda = \{x \mid f(x) \leq \lambda\}$ contient une plus grande face fermée, et cette face est parallélisable ;
 c) Pour toute suite finie de couples de réels $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ où $a_p \geq 0$, $\forall p$, toutes les fonctions $\forall \wedge (a_p f + b_p)$ existent dans $AI(X)$, et, de plus, $\forall \lambda$ réel, $f \vee \lambda$ coïncide avec $\sup(f, \lambda)$ sur $\mathcal{E}(X)$.

Si on désigne alors par N_f le cône convexe formé par les fonctions du type $\forall \wedge (a_p f + b_p)$ ($a_p \geq 0$), et par C_f^I l'ensemble des fonctions majorées, enveloppes supérieures de familles filtrantes croissantes de fonctions de N_f , C_f^I est le plus petit cône convexe de fonctions affines s.c.i. contenant les constantes, fortement stable⁽¹⁾ par \wedge fini et \vee quelconque majoré dans $AI(X)$, et contenant f .

De plus, $\forall g_1, g_2 \in C_f^I$, $g_1 \vee g_2$ et $g_1 \wedge g_2$ coïncident sur $\mathcal{E}(X)$ avec $\sup(g_1, g_2)$ et $\inf(g_1, g_2)$.

Démonstration. —

a) \Leftrightarrow b), d'après la remarque 73.

b) \Rightarrow c) est évident, car si g, h sont facialement s.c.i. pour \mathcal{C} , alors les fonctions $\sup(g|_{\mathcal{E}(X)}, h|_{\mathcal{E}(X)})$ et $\inf(g|_{\mathcal{E}(X)}, h|_{\mathcal{E}(X)})$ sont s.c.i. sur $\mathcal{E}(X)$ muni de \mathcal{C} . Elles ont donc des prolongements affines s.c.i. u et v à X . Il est alors clair que $g \vee h = u$ et $g \wedge h = v$ dans $AI(X)$ (de plus, on a $g \wedge h = \inf(g, h)$).

c) \Rightarrow b). Soit N_f le cône convexe formé par les fonctions du type $\forall \wedge (a_p f + b_p)$ ($a_p \geq 0$), et soit C_f^I le cône formé des fonctions majorées, enveloppes supérieures de familles filtrantes croissantes d'éléments de N_f . Alors il est clair que, $\forall g, h$ de C_f^I , $g \vee h$ et $g \wedge h$ existent dans $AI(X)$, et appartiennent à C_f^I . Donc C_f^I est le plus petit cône convexe de $AI(X)$ qui contienne f , et qui soit fortement stable par \wedge fini et \vee quelconque majoré dans $AI(X)$ (pour les \vee quelconques, on se ramène aux familles filtrantes croissantes).

(¹) Fortement stable est pris au sens de : coréticulé vers le bas et complètement coréticulé vers le haut dans $AI(X)$.

Nous allons construire une topologie faciale pour laquelle toutes les fonctions de C_f^I , et en particulier f , seront s.c.i. Pour cela nous nous inspirons d'une méthode de Goulet de Rugy (cf. [10]).

Soit \mathfrak{F} la famille des faces C_f^I -exposées, c'est-à-dire de la forme $F = g^{-1}(0)$, où g est ≥ 0 et $g \in C_f^I$. Une telle face est fermée. Montrons qu'elle est parallélisable.

Posons $\varphi_F = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (ng \wedge 1)$. Cette fonction appartient à C_f^I , donc est affine s.c.i. De plus, elle vaut 0 sur $\mathcal{E}(F)$, et 1 sur $\mathcal{E}(X) \setminus F$ (cf. lemme 2). Donc elle coïncide avec la fonction $\widehat{1}_{C_F}$, c'est-à-dire que $1 - \varphi_F = \widehat{1}_F$ est affine s.c.s. Donc F est parallélisable.

Soient maintenant F et G dans \mathfrak{F} . Alors, si $F = g^{-1}(0)$ et $G = h^{-1}(0)$, on a $\text{conv}(F \cup G) = (g \wedge h)^{-1}(0)$ (car $g \wedge h = \inf(g, h)$ sur $\mathcal{E}(X)$, car $g \wedge h = \widehat{\inf(g, h)}$), et $F \cap G = (f + g)^{-1}(0)$. Donc $F \cap G$ et $\text{conv}(F \cup G)$ appartiennent à \mathfrak{F} .

Enfin, soit (F_α) une famille filtrante décroissante de faces de \mathfrak{F} . Alors $\sup \varphi_{F_\alpha} = \bigvee_\alpha \varphi_{F_\alpha} \in C_f^I$, et vaut 0 sur F , et 1 sur $\mathcal{E}(X) \setminus F$. Donc c'est $\widehat{1}_{C_F}$, c'est-à-dire φ_F , qui appartient à C_f^I ; et $F = \varphi_F^{-1}(0)$, donc $F \in \mathfrak{F}$. Donc \mathfrak{F} définit bien une topologie faciale \mathfrak{C} .

Montrons que toute fonction de C_f^I est s.c.i. pour \mathfrak{C} . Pour cela, il suffit de le montrer pour les fonctions de N_f .

De plus, si $g, h \in N_f$, l'égalité $(g \wedge h)_{|_{\mathcal{E}(X)}} = \inf(g_{|_{\mathcal{E}(X)}}, h_{|_{\mathcal{E}(X)}})$ montre que, si g et h sont s.c.i. pour \mathfrak{C} , il en est de même de $g \wedge h$. Compte tenu du procédé de construction de N_f , il suffit donc de montrer que :

- 1) Si $g, h \in N_f$, $g_{|_{\mathcal{E}}}$ et $h_{|_{\mathcal{E}}}$ s.c.i. pour \mathfrak{C} , alors $(g \vee h)_{|_{\mathcal{E}}}$ est s.c.i. pour \mathfrak{C} .
- 2) $f_{|_{\mathcal{E}}}$ est s.c.i. pour \mathfrak{C} .

Le point 1) est facile : $\sup(g_{|_{\mathcal{E}}}, h_{|_{\mathcal{E}}})$ est s.c.i. pour \mathfrak{C} , donc admet un prolongement affine s.c.i. φ . On a $\varphi \leq g \vee h$ sur $\mathcal{E}(X)$. Donc $\varphi \leq g \vee h$ sur X . Donc $\varphi = g \vee h$, et $(g \vee h)_{|_{\mathcal{E}(X)}}$ est s.c.i. pour \mathfrak{C} .

Donc, la seule chose à montrer est que $f_{|_{\mathcal{E}}}$ est s.c.i. pour \mathfrak{C} . Soit $B_\lambda = \{x \mid f(x) \leq \lambda\}$. Posons $g_\lambda = f \wedge \lambda - \lambda$. Alors $g_\lambda \in C_f^I$, et $g_\lambda \geq 0$. Or, puisque $f \vee \lambda = \sup(f, \lambda)$ sur $\mathcal{E}(X)$, on a l'égalité

$$B_\lambda \cap \mathcal{E}(X) = g_\lambda^{-1}(0) \cap \mathcal{E}(X) .$$

Or $g_\lambda^{-1}(0)$ appartient à \mathfrak{F} . Donc $f_{|\mathfrak{E}}^{-1}([-\infty, \lambda])$ est un fermé de \mathfrak{E} , et $f_{|\mathfrak{E}}$ est s.c.i. pour \mathfrak{E} .

C.Q.F.D.

Remarquons que la nécessité de l'hypothèse " $f \vee \lambda = \sup(f, \lambda)$ sur $\mathfrak{E}(X)$ " tient au fait que, si $u, \nu \in \text{AI}(X)$, et si $u \vee \nu$ existe dans $\text{AI}(X)$, on ne peut affirmer que cette fonction coïncide avec $\sup(u, \nu)$ sur $\mathfrak{E}(X)$ (alors que c'est vrai pour $u \wedge \nu$ et $\inf(u, \nu)$).

DEFINITION 79. — Soit f une fonction facialement s.c.i., $m \leq f \leq M$, et soit $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la famille spectrale de fonctions affines s.c.s. associée à f . On appelle décomposition spectrale de f , l'application

$$de_\lambda : X \rightarrow M_1^+(\overline{S_f})$$

(où $S_f = f[\mathfrak{E}(X)]$) qui, à un point x , fait correspondre la mesure de Stieltjes $de_\lambda(x)$ associée à la fonction croissante $\lambda \mapsto e_\lambda(x)$. S_f s'appelle le spectre de f , et $de_\lambda(x)$ s'appelle la mesure spectrale du point x associée à f (on voit facilement que $de_\lambda(x)$ a son support dans $\overline{S_f}$).

THEOREME 80. — Il existe un isomorphisme isométrique Φ_f du cône ordonné Γ_f^1 des fonctions croissantes s.c.i. bornées sur S_f sur le cône ordonné C_f^1 défini à la proposition 78. Si ψ appartient à Γ_f^1 , on notera $\psi(f)$ la fonction correspondante de C_f^1 .

Démonstration. — Soit ψ dans Γ_f^1 . Alors la fonction $\psi \circ (f_{|\mathfrak{E}(X)})$ est s.c.i. bornée sur $\mathfrak{E}(X)$, pour la topologie faciale \mathfrak{E} pour laquelle f est s.c.i. D'après le théorème 25, il existe $\overline{\psi \circ (f_{|\mathfrak{E}(X)})}$ unique, prolongement affine s.c.i. de $\psi \circ (f_{|\mathfrak{E}(X)})$ à X . Nous poserons

$$\psi(f) = \overline{\psi \circ (f_{|\mathfrak{E}(X)})}.$$

L'application $\Phi_f : \psi \mapsto \psi(f)$ est additive et positivement homogène. Si $\psi(f) = \theta(f)$, il est clair que $\psi \equiv \theta$; donc Φ_f est injective. Si $\psi \geq \theta$, il est clair que $\psi(f) \geq \theta(f)$, et la réciproque est immédiate. De plus, on a

$$\|\psi(f) - \theta(f)\| = \sup_{\mathfrak{E}(X)} |\psi(f) - \theta(f)| = \|\psi - \theta\|_{S_f};$$

donc Φ_f est une isométrie.

L'image de Γ_f^I par Φ_f est un sous-cône convexe de $AI(X)$ contenant les constantes ($\psi \equiv 1$) et la fonction f ($\psi(\lambda) \equiv \lambda$), fortement stable par \wedge fini et v quelconque majoré dans $AI(X)$. Donc cette image contient C_f^I .

Soit Γ_0 le sous-cône de Γ_f^I formé par les restrictions à S_f des fonctions croissantes continues affines par morceaux. Une fonction ψ de Γ_0 s'écrit

$$\psi(\lambda) = IS(a_p \lambda + b_p), \quad \text{où } a_p \geq 0, \quad \forall p.$$

Il résulte alors de la proposition 78 que l'on a

$$\psi(f) = V\wedge (a_p f + b_p).$$

Donc l'image de Γ_0 est le cône N_f .

Pour montrer que l'image de Γ_f^I n'est autre que C_f^I , il suffit de montrer que toute fonction ψ de Γ_f^I est enveloppe supérieure d'une famille filtrante croissante de fonctions de Γ_0 .

Pour cela, remarquons que ψ peut être prolongée en une fonction croissante continue à gauche sur tout \mathbf{R} : si $\lambda \in \overline{S_f} \setminus S_f$, on pose

$$\psi(\lambda) = \sup_{\substack{\mu < \lambda \\ \mu \in S_f}} \psi(\mu)$$

(ceci est possible, car $\inf S_f \in S_f$). Puis on prolonge ψ à un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{C} \overline{S_f}$, en posant

$$\psi(\lambda) = \psi(b) \quad (b \in \overline{S_f}).$$

Enfin, si $\lambda > \sup S_f$, on pose

$$\psi(\lambda) = \psi[\sup S_f].$$

Si θ est une fonction croissante continue sur \mathbf{R} , on voit facilement que θ est enveloppe supérieure d'une suite filtrante croissante de fonctions θ_n de Γ_0 , convergeant d'ailleurs uniformément.

Comme Φ_f est une isométrie, on voit d'ailleurs que l'image de $\overline{\Gamma_0}$, c'est-à-dire du cône des fonctions croissantes continues, est exactement $\overline{N_f}$, et est incluse dans C_f^I .

Si on retourne maintenant à la fonction ψ , celle-ci est le sup d'une famille filtrante croissante de fonctions continues *et croissantes* (cf. Lemme 81).

Admettons pour l'instant ce lemme. Alors ψ sera enveloppe supérieure de fonctions de $\bar{\Gamma}_0$ (et même de Γ_0), et $\psi(f)$ sera donc dans C_f^I . Donc $\Phi_f(\Gamma_f^I) \subset C_f^I$, donc on a l'égalité.

C.Q.F.D.

On a utilisé le lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur.

LEMME 81. — *Toute fonction croissante continue à gauche sur \mathbf{R} est limite croissante d'une suite de fonctions croissantes continues.*

COROLLAIRE 82. — *Le cône C_f^I est fermé pour la convergence uniforme. De plus, tout élément de C_f^I est limite d'une suite croissante d'éléments de N_f .*

En effet, l'application $\psi \mapsto \psi(f)$ est une isométrie, et Γ_f^I est manifestement fermé, donc complet, pour la distance uniforme. Le deuxième point résulte facilement du lemme 81 et du théorème 80.

Nous allons voir que le calcul fonctionnel peut, comme dans le cas des fonctions facialement continues, s'interpréter au moyen des mesures spectrales.

THEOREME 83. — *Pour toute fonction ψ de Γ_f^I , on a la relation*

$$\psi(f)(x) = \int \tilde{\psi}(\lambda) de_\lambda(x),$$

où $\tilde{\psi}$ est un prolongement croissant s.c.i. quelconque de ψ à \mathbf{R} .

Démonstration. — Supposons d'abord ψ croissante continue sur \mathbf{R} . En reprenant le point 3) de la démonstration de la proposition 68, on voit que la fonction

$$I_\psi^\Delta(x) = \sum_{K=-1}^{n-1} \psi(\lambda_K) [e_{\lambda_{K+1}}(x) - e_{\lambda_K}(x)]$$

est affine s.c.i. (Δ désigne la subdivision $\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, où $\lambda_{-1} < \inf S_f$, $\lambda_{n-1} = \sup S_f$). De plus, si une subdivision Δ' est plus fine que Δ , $I_\psi^{\Delta'}(x) \leq I_\psi^\Delta(x)$. Donc

$$\lim_{\Delta} I_\psi^\Delta(x) = \int \psi(\lambda) de_\lambda(x)$$

est affine s.c.i. Or, si $x \in \mathcal{G}(X)$, on a $e_\lambda(x) = 1_{[f(x), +\infty[}(\lambda)$, donc $de_\lambda(x) = \varepsilon_{f(x)}$. Donc

$$\int \psi(\lambda) de_\lambda(x) = \psi[f(x)] = \psi(f)(x), \quad \text{si } x \in \mathcal{G}(X).$$

Les fonctions affines s.c.i. $\psi(f)$ et $\int \psi(\lambda) de_\lambda$ coïncidant sur $\mathcal{G}(X)$, elles coïncident partout.

Si maintenant $\tilde{\psi}$ est croissante s.c.i., alors $\tilde{\psi} = \lim \psi_n$, où les ψ_n sont croissantes continues, la suite (ψ_n) étant croissante. Alors

$$\int \tilde{\psi}(\lambda) de_\lambda = \sup \int \psi_n(\lambda) de_\lambda = \sup \psi_n(f) = \psi(f).$$

C.Q.F.D.

On peut déduire de ce résultat que, $\forall \mu \in \bar{S}_f \setminus S_f$, non adhérent à $S_f \cap]-\infty, \mu[$, aucune mesure spectrale $de_\lambda(x)$ ne charge le point μ .

Nous allons étendre le calcul fonctionnel aux fonctions croissantes sur S_f .

DEFINITION 84. — Nous noterons V_f le cône convexe des fonctions v sur X vérifiant :

- 1) v est universellement intégrable (donc bornée) ;
- 2) $\forall \mu \in M_1^+(X), \forall \varepsilon > 0, \exists h \in C_f^1$ telle que $v \leq h$ et

$$\int (h - v) d\mu < \varepsilon ;$$

- 3) L'implication (D) : $\{h \in C_f^1, h \geq v \text{ sur } \mathcal{G}(X)\} \Rightarrow \{h \geq v\}$.

Par ailleurs, nous noterons Δ_f le cône convexe des fonctions croissantes bornées sur S_f .

Nous allons montrer sur V_f un résultat analogue au théorème 71. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur.

LEMME 85. — Toute fonction croissante bornée sur \mathbf{R} est limite décroissante d'une suite de fonctions croissantes s.c.i. bornées.

THEOREME 86. —

1) Soit v une fonction minorée sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Il existe $u \in \Delta_f$, telle que

$$v(x) = \int \tilde{u}(\lambda) de_\lambda(x) ,$$

où \tilde{u} est le plus petit prolongement croissant de u à S_f ;

b) 1) Il existe une suite décroissante (h_n) de fonctions de C_f^I convergeant simplement vers v ;

2) v vérifie l'implication (D) (cf définition 84) ;

c) v appartient à V_f .

2) Toute fonction v de V_f vérifie le calcul barycentrique modulo N_f .

3) L'application $u \rightarrow \int \tilde{u}(\lambda) de_\lambda$ est une bijection de Δ_f sur V_f .

Démonstration. —

1) a) \Rightarrow b). On suppose que $v = \int \tilde{u}(\lambda) de_\lambda$, où \tilde{u} est un prolongement croissant borné à \mathbf{R} de $u \in \Delta_f$. D'après le lemme 85, il existe une suite décroissante (ψ_n) de fonctions croissantes s.c.i. bornées qui converge vers \tilde{u} .

Soit $h_n = \psi_n(f) = \int \psi_n(\lambda) de_\lambda$. La suite (h_n) est décroissante, chaque h_n appartient à C_f^I , et $\forall x$ de X , on a

$$\lim_n h_n(x) = \lim_n \int \psi_n(x) de_\lambda(x) = \int \tilde{u}(\lambda) de_\lambda(x) = v(x) .$$

De plus, soit $h \in C_f^I$, avec $h \geq v$ sur $\mathcal{E}(X)$. Soit $\psi \in \Gamma_f^I$, telle que $h = \psi(f)$. Si $x \in \mathcal{E}(X)$, on a

$$\psi[f(x)] = h(x) \geq v(x) = \int \tilde{u}(\lambda) d\varepsilon_{f(x)}(\lambda) = u[f(x)] .$$

Donc $\psi \geq u$ sur S_f . Par suite, si \tilde{u} est le plus petit prolongement croissant de u à \bar{S}_f , $\psi \geq \tilde{u}$ sur \bar{S}_f . Par intégration sur \bar{S}_f , on en déduit $h \geq v$ sur X , et v vérifie l'implication (D).

b) \Rightarrow c). Si $v = \lim h_n$, avec $m \leq v \leq h_1$, il est clair que v est universellement intégrable. De plus, d'après le théorème de Lebesgue,

$$\lim_n \int h_n d\mu = \int v d\mu , \quad \forall \mu \in M_1^+(X) .$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists h_n \in C_f^I$ telle que $v \leq h_n$ et $\int (h_n - v) d\mu < \varepsilon$.

c) \Rightarrow a) A) Soient deux points x et y de $\mathcal{E}(X)$, tels que $f(x) = f(y)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h \in C_f^I$, telle que $v \leq h$ et $\int (h - v) d\varepsilon_x < \varepsilon$.

Or, si $f(x) = f(y)$, on a $h(x) = h(y), \forall h \in C_f^I$. Donc on a les inégalités

$$v(y) \leq h(y) = h(x) \leq v(x) + \varepsilon ,$$

soit

$$v(y) \leq v(x) + \varepsilon , \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

Donc $v(y) \leq v(x)$. Par symétrie, il en résulte que $v(x) = v(y)$. Donc on peut définir une fonction u sur S_f , unique, telle que

$$v_{|_{\mathcal{E}(X)}} = u \circ [f_{|_{\mathcal{E}(X)}}] .$$

B) Montrons que u est croissante sur S_f . Soient x et y dans $\mathcal{E}(X)$, tels que $f(x) \leq f(y)$. Alors, $\forall h \in C_f^I, h(x) \leq h(y)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe h dans C_f^I , telle que $v \leq h$ et $\int (h - v) d\varepsilon_y < \varepsilon$, soit

$$v(x) \leq h(x) \leq h(y) \leq v(y) + \varepsilon .$$

Donc $v(x) \leq v(y) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, et par suite $v(x) \leq v(y)$.

C) Soit \tilde{u} , prolongement de u à \mathbf{R} , défini ainsi :

Si $\mu \in \overline{S_f} \setminus S_f$, on pose

$$\tilde{u}(\mu) = \sup_{\substack{\lambda < \mu \\ \lambda \in S_f}} u(\lambda) ;$$

Si $]a, b[\subset \overset{\circ}{C} \overline{S_f}, b \in \overline{S_f}$, on pose

$$\tilde{u}(\lambda) = \tilde{u}(b) , \quad \text{si } \lambda \in]a, b[;$$

Si $\lambda \geq \sup S_f$, on pose

$$\tilde{u}(\lambda) = \tilde{u}[\sup S_f] .$$

D'après le lemme 85, il existe une suite décroissante ψ_n de fonctions croissantes s.c.i. bornées, telles que $\lim \psi_n = \tilde{u}$ sur \mathbf{R} .

Soit w la fonction définie par

$$w(x) = \int \tilde{u}(\lambda) de_\lambda .$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $x \in X$. Il existe h dans C_f^1 , telle que

$$v \leq h \quad \text{et} \quad \int (h - v) d\varepsilon_x < \varepsilon ,$$

donc $v(x) \leq h(x) \leq v(x) + \varepsilon$. Alors il existe θ croissante bornée s.c.i., telle que $h = \int \theta d\varepsilon_\lambda = \theta(f)$. Remplaçons θ par la fonction $\tilde{\theta}$ obtenue en prolongeant $\theta|_{S_f}$ par le même procédé que celui utilisé pour prolonger u . Alors on a encore $h = \int \tilde{\theta} d\varepsilon_\lambda$.

L'inégalité $v \leq h$, restreinte à $\mathfrak{E}(X)$, prouve que $u \leq \theta|_{\mathfrak{E}(X)}$, donc $\tilde{u} \leq \tilde{\theta}$.

Soient $\theta_n = \inf(\tilde{\theta}, \psi_n)$. Alors la suite θ_n décroît vers \tilde{u} . Donc

$$\theta_n(f)(x) = \int \theta_n d\varepsilon_\lambda(x) \rightarrow \int \tilde{u} d\varepsilon_\lambda(x) = w(x) .$$

Or on a $\theta_n(f)(x) \leq h(x) \leq v(x) + \varepsilon$. Mais, sur $\mathfrak{E}(X)$, on a $v \leq \theta_n(f)$ (puisque, si $y \in \mathfrak{E}(X)$, $v(y) = u[f(y)] \leq \theta_n(y)$). Donc $v \leq \theta_n(f)$ sur X , et, en particulier, $v(x) \leq \theta_n(f)(x)$. Quand n tend vers l'infini, on obtient

$$v(x) \leq w(x) \leq v(x) + \varepsilon , \quad \forall \varepsilon > 0 ,$$

donc $v(x) = w(x) = \int \tilde{u}(\lambda) d\varepsilon_\lambda(x)$.

Et il est clair que $\tilde{u}|_{\bar{S}_f}$ est le plus petit prolongement croissant de u à \bar{S}_f .

2) Cela résulte immédiatement de la propriété b).

3) C'est bien clair, d'après ce qui précède : la correspondance $u \mapsto \tilde{u}$ étant bijective, si $\int \tilde{u} d\varepsilon_\lambda = \int \tilde{u}' d\varepsilon_\lambda$, alors il y a égalité sur $\mathfrak{E}(X)$, donc $u = u'$ (et par suite $\tilde{u} = \tilde{u}'$).

C.Q.F.D.

Remarque 87. — Si le convexe compact X est standard, l'implication (D) peut être supprimée dans la définition de V_f et dans la condition b) du théorème 86.

Dans le premier cas, soit en effet $\mu \in M_1^+(X)$, de barycentre x . Soit $\mu' = \frac{\mu + \varepsilon_x}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h \in C_f^1$, telle que $h \geq v$ et

$\int (h - v) d\mu' < \varepsilon/2$. Donc on a à la fois

$$0 \leq \int h d\mu - \int v d\mu < \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq h(x) - v(x) < \varepsilon .$$

Or les fonctions de C_f^1 vérifient le calcul barycentrique. Donc

$$\int h d\mu = h(x) .$$

Par suite $|\int v d\mu - v(x)| < 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, donc $\int v d\mu = v(x)$. Donc v vérifie le calcul barycentrique. Soit alors $h \in C_f^1, h \geq v$ sur $\mathfrak{G}(X)$. Si h et v vérifient le calcul barycentrique, et si toute mesure maximale est portée par $\mathfrak{G}(X)$, il est clair que $h \geq v$ sur X .

Dans le deuxième cas, si (h_n) est une suite de fonctions de C_f^1 , et si $h_n \searrow v$, avec $v \geq m$, le théorème de Lebesgue prouve que v vérifie le calcul barycentrique. On conclue alors comme précédemment.

Achevons en explicitant la liaison entre le cône C_f^1 et la topologie \mathfrak{G}_f associée à f .

PROPOSITION 88. — Soit g une fonction affine s.c.i. sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) g appartient au cône C_f^1 ;
- b) $g|_{\mathfrak{G}(X)}$ est s.c.i. pour la topologie \mathfrak{G}_f .

Démonstration. —

a) \Rightarrow b) est évident.

b) \Rightarrow a). Si $F_\lambda = \overline{\text{conv}}[\{x \mid f(x) \leq \lambda\} \cap \mathfrak{G}(X)]$, on sait que les F_λ , pour $\lambda \in \mathbf{R}$, sont exactement les fermés de \mathfrak{G}_f .

Si nous montrons que $\varphi_{F_\lambda} = \widehat{1_{C_{F_\lambda}}}$ appartient à C_f^1 , alors g appartiendra à C_f^1 , car d'après la démonstration du théorème 25, g est limite croissante de combinaisons linéaires à coefficients positifs de fonctions du type φ_{F_λ} (à une constante fixe près).

Or $\mathfrak{G}(F_\lambda)$ est l'ensemble des points où $(f - \lambda)^+$ est nulle. Comme on a $0 \leq (f - \lambda)^+ \leq (f - \lambda) \vee 0$, et comme ces deux dernières fonctions coïncident sur $\mathfrak{G}(X)$, on voit que

$$F_\lambda = ((f - \lambda) \vee 0)^{-1}(0) .$$

Alors, il en résulte facilement qu'on a l'égalité

$$\varphi_{F_\lambda} = \bigvee_n \{n[(f - \lambda) \vee 0] \wedge 1\}$$

(cf. démonstration de la proposition 78). Par suite, φ_{F_λ} appartient à C_f^1 .
C.Q.F.D.

Appendice : un exemple type

Soit dx la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, et $\bar{\omega}$ la mesure $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} \delta_{x_n}$

où $n \rightarrow x_n$ est une numérotation bijective des rationnels de $[0,1]$.

Soit π la mesure $dx - \bar{\omega}$. Le sous-espace $H = \pi^{-1}(0)$ de $c([0,1])$ s'identifie aux fonctions affines continues sur le convexe compact $X = H_1^+$. On voit dans [15] que $[0,1]$ s'identifie à $\mathcal{E}(X)$; les faces fermées de X sont donc de la forme $F_K = \overline{\text{conv}}(K)$, où K est un compact de $[0,1]$ (si $K \neq [0,1]$, F_K est isomorphe à $M_1^+(K)$).

On peut alors voir que F_K est parallélisable si et seulement si $\pi(K) = 0$, et que F_K est complémentable si et seulement si $|\pi|(K) = 0$, en utilisant des résultats récents de B. Hirsberg.

(A measure theoretic characterization of parallel-and split faces and their corrections with function spaces and Algebras, Aarhus University, Various publications series, n° 16, septembre 1970).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Erik ALFSEN, On the decomposition of a Choquet simplex into a direct convex sum of complementary faces, *Math. Scand.*, t. 17, (1965), 169-176.
- [2] Erik ALFSEN and Tage Bai ANDERSEN, Split faces of compact convex sets, *Aarhus Universitat*, Reprint series, (1968/69), n° 32.
- [3] Heinz BAUER, Kennzeichnung kompakter Simplexe mit abgeschlossener Extrempunktmenge, *Archiv der Math.*, t. 14, (1963), 415-421.

- [4] Nicolas BOURBAKI, *Topologie générale*, Chapitre 9. 2^e édition. — Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).
- [5] Gustave CHOQUET et Paul-André MEYER, Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 13, (1963), 139-154.
- [6] Edwards EFFROS, Structure in simplexes, *Acta Math.*, Uppsala, t. 117, (1967), 103-121.
- [7] Edwards EFFROS, Structure in simplexes, II, *J. of funct. Anal.*, t. 1, (1967), 379-391.
- [8] Hachim FAKHOURY, Solution d'un problème posé par Effros, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, (1969), Série A, 77-79.
- [9] Alain GOULLET de RUGY, *Géométrie des simplexes*. Paris, Centre de Documentation universitaire, (1968).
- [10] Alain GOULLET de RUGY, Faces parallélisables et topologies faciales sur l'espace des états d'une algèbre stellaire, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 270, (1970), série A, 376-379.
- [11] Gabriel MOKOBODZKI, Quelques propriétés des fonctions numériques convexes (s.c.i. ou s.c.s.) sur un ensemble convexe compact, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6^e année, (1961/62), n° 9, 3 p.
- [12] Rainer NAGEL, Ideal theorie in geordneten lokalkonvexen Vektorräumen, Dissertation, *Eberhard-Karls-Universität*, Tübingen, (1969).
- [13] Robert PHELPS, Lecture on Choquet's theorem — Princeton, D. Van Nostrand mathematical Studies, 7).
- [14] Marc ROGALSKI, Etude du quotient d'un simplexe par une face fermée, et application à un théorème de Alfsen ; quotient par une relation d'équivalence, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12^e année, 1967/68, n° 2, 25 p.
- [15] Marc ROGALSKI, Caractérisation des simplexes par des propriétés portant sur les faces fermées et sur les ensembles compacts de points extrémaux, *Math. Scand.* 28 (1971), 159-181.

- [16] Marc ROGALSKI, Quelques problèmes concernant une caractérisation des simplexes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, (1969), Série A, p. 645-647.

Manuscrit reçu le 9 février 1971,
accepté par G. Choquet

Marc ROGALSKI
1 rue Montbrun
75 – Paris 14