ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL PARREAU

Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann

Annales de l'institut Fourier, tome 3 (1951), p. 103-197

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1951__3__103_0>

SUR LES MOYENNES DES FONCTIONS HARMONIQUES ET ANALYTIQUES ET LA CLASSIFICATION DES SURFACES DE RIEMANN

par M. **PARREAU** (à Paris)

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des moyennes des fonctions harmoniques et analytiques sur les surfaces de Riemann ouvertes, et l'application qu'on peut en faire au problème de la classification de ces surfaces. La théorie des surfaces de Riemann ouvertes, considérées comme variétés abstraites, a fait de grands progrès au cours de ces quinze dernières années, surtout grâce aux travaux de l'école finlandaise, notamment de R. Nevanlinna, P. J. Myrberg, L. Ahlfors, L. Sario, K. I. Virtanen, auxquels il faut joindre A. Pfluger, M. Heins, etc... ([1]). Ces divers auteurs ont étudié particulièrement les fonctions bornées ou à intégrale de Dirichlet finie, et ont pris comme critères pour la classification l'existence ou la non-existence de fonctions harmoniques ou analytiques non constantes appartenant à l'une de ces catégories. J'ai essayé ici de montrer qu'on peut obtenir des résultats intéressants en imposant aux fonctions f étudiées la condition de borne suivante : $|f|^{\alpha}$ admet une majorante harmonique (avec $\alpha \geqslant 1$, et même $\alpha > 0$ pour les fonctions analytique). C'est surtout des fonctions harmoniques qu'il sera question ici ; on leur imposera souvent la condition plus générale : étant donné une fonction $\Phi(t)$ convexe dans $[0, +\infty[$, $\Phi(|f|)$ admet une majorante harmonique ([2]).

([1]) Voir la bibliographie placée à la fin de ce mémoire. Les numéros entre crochets qui suivent le nom d'un auteur renvoient à cette bibliographie.

([2]) L'introduction des classes plus générales (HM_{Φ}) est due à R. Nevanlinna [8]. La plupart des résultats établis ici sont encore valables pour les fonctions harmoniques définies dans un *espace de Green* (cf. M. Brelot et G. Choquet [1]).

Dans le premier chapitre, après avoir rappelé un certain nombre de définitions, je reprends la solution du problème de Dirichlet pour un domaine relativement compact, par la méthode de Perron-Brelot, qui s'étend sans difficulté à une surface de Riemann, car les propriétés des fonctions harmoniques ou sous-harmoniques qui y sont utilisées sont essentiellement des propriétés locales. L'exposé de cette méthode, dans le cas plus général des espaces de Green, est fait par M. Brelot et G. Choquet dans un Mémoire qui va paraître en même temps que celui-ci dans les Annales de l'Institut Fourier ; je me borne donc à en indiquer les grandes lignes, traitant d'abord le cas régulier, puis, à l'aide du procédé alterné, le cas général (qu'on peut d'ailleurs atteindre directement au moyen d'un lemme de M. Brelot).

Au chapitre II, je rappelle la définition et les propriétés immédiates des surfaces et des domaines hyperboliques ou paraboliques (un domaine étant dit hyperbolique s'il existe une fonction harmonique bornée non constante qui s'annule en tout point-frontière régulier). Je donne ensuite un procédé de construction de la fonction de Green $g(p, q)$ d'une surface hyperbolique, et j'étudie son comportement à la frontière idéale ; je montre que pour tout a fixe de S et tout $\lambda > 0$, le domaine $D_{a,\lambda} = \{g(p, a) > \lambda\}$ [3] est relativement compact ou parabolique. Cette propriété, et le fait qu'une surface de Riemann est réunion dénombrable de compacts, permettent d'étendre aux potentiels de Green sur une surface hyperbolique les principaux résultats de la théorie du potentiel newtonien : théorème de Gauss sur le flux, représentation potentielle des fonctions surharmoniques, extrémisation et balayage. En outre, on peut résoudre, pour le complémentaire d'un compact d'une surface hyperbolique, un problème de Dirichlet extérieur dans lequel on assigne la valeur 0 à la frontière idéale (en imposant une majoration par $Kg(p, a)$).

Au chapitre III, j'étudie les espaces (HM_α) (resp. les classes (HM_Φ)) des fonctions harmoniques sur une surface de Riemann S telles que $|u|^\alpha$ (resp. $\Phi(|u|)$) ait une majorante harmonique. Toutes ces classes sont contenues dans l'espace (HM_1) des différences de fonctions harmoniques positives. Je montre qu'elles ne dépendent pas (à un isomorphisme près) des propriétés de la surface « à distance finie », mais seulement de celles de la « frontière idéale »

(3) P étant une propriété quelconque, nous désignerons par $\{P(x)\}$ l'ensemble des points x où la propriété P est vraie.

(cf. théorème 7). Réciproquement, les fonctions harmoniques positives sur une surface de Riemann hyperbolique permettent de préciser la notion de frontière idéale, et d'en donner une définition ponctuelle, celle de R. S. Martin [1], dans laquelle les éléments-frontière sont définis par les fonctions $K(p, s)$ limites de $g(p, q)/g(a, q)$ quand q « s'éloigne à l'infini » sur S. Toute fonction u harmonique positive sur S, donc toute fonction de (HM_Φ), admet alors une représentation intégrale unique de la forme $u(p) = \int_\Gamma K(p, s)\,d\mu(s)$, où μ est une mesure canonique sur la frontière de Martin.

J'appelle $\mathcal{C}_{HM_\Phi}$ (resp. $\mathcal{C}_{HM_\alpha}$) la classe des surfaces de Riemann telles que (HM_Φ) (resp. (HM_α)) ne contienne que les constantes, et $\mathcal{C}_{HB}$ la classe définie de façon analogue à partir des fonctions bornées. Je montre que s'il existe dans un domaine D une fonction harmonique u s'annulant sur la frontière de D et telle que $\Phi(|u|)$ ait une majorante harmonique, pour une fonction Φ satisfaisant à

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty, \tag{1}$$

D est hyperbolique. Il en résulte que $\mathcal{C}_{HM_\Phi} = \mathcal{C}_{HB}$ lorsque Φ vérifie (1), en particulier que $\mathcal{C}_{HM_\alpha} = \mathcal{C}_{HB}$ pour $\alpha > 1$.

J'interprète ensuite ce résultat au moyen de la théorie des espaces de Riesz : (HM_1) étant un espace complètement réticulé, je considère la famille complète engendrée par les fonctions bornées, et j'appelle ses éléments fonctions quasi-bornées ; une fonction quasi-bornée positive est la limite d'une suite croissante de fonctions harmoniques $\geqslant 0$ bornées. Si Φ vérifie (1), toute fonction $u \in (HM_\Phi)$ est quasi-bornée, et la plus petite majorante harmonique U de $\Phi(|u|)$ l'est aussi ; u est de la forme $\int_\Gamma K(p, s) f(s)\,d\nu_0(s)$, où ν_0 est la mesure canoniqne associée à la fonction 1, et on a

$$U(p) = \int_\Gamma K(p, s)\,\Phi(|f(s)|)\,d\nu_0(s),$$

(HM_α), normé, est donc isomorphe à $L^\alpha(\Gamma, \nu_0)$.

Une autre façon d'atteindre certains des résultats précédents (celle que j'avais employée primitivement, en collaboration avec R. Bader) consiste à chercher la fonction qui réalise le minimum de la norme, parmi les $u \in (HM_\alpha)$ qui satisfont à $u(q) = 1$, pour q donné ; on constate que cette fonction extrémale est bornée. Pour $\alpha = 2$, ce problème de minimum conduit à une *fonction-noyau* du genre de celle de Bergman.

Le chapitre IV est consacré aux fonctions analytiques ; j'y définis les espaces(AM_α) de fonctions holomorphes « à moyennes d'ordre α bornées », qui correspondent aux classes de Hardy dans le cercle unité ; j'appelle (AM_0) la classe des fonctions *méromorphes* f telles que $\log |f|$ soit la différence des deux fonctions surharmoniques positives, et j'introduis pour toute fonction méromorphe sur une surface de Riemann une fonction caractéristique $T(G, f)$ analogue à celle de Nevanlinna, mais dont la variable G est un domaine. L'appartenance de f à (AM_0) équivaut au fait que $T(G, f)$ reste bornée. Pour une fonction méromorphe à caractéristique non bornée, on a encore le théorème du défaut de Frostman, et celui de Valiron-Ahlfors-Nevanlinna sur le défaut supérieur.

J'indique enfin certaines relations entre les classes $\mathcal{C}_{AM_\alpha}$, $\mathcal{C}_{AB}$, $\mathcal{C}_{AD}$ (définies de façon évidente) : je montre en particulier que $\mathcal{C}_{AB} \subset \mathcal{C}_{AD}$.

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans plusieurs notes aux Comptes rendus ([4]). Certains d'entre eux ont été obtenus en même temps et indépendamment par divers auteurs, M. Ohtsuka [1] en ce qui concerne le problème de Dirichlet, R. Nevanlinna [8] pour les classes (HM_Φ), P. J. Myrberg [3] pour les fonctions à caractéristique bornée, H. L. Royden [1] pour l'inclusion $\mathcal{C}_{AB} \subset \mathcal{C}_{AD}$; en outre, A. Mori [1] a développé et complété certains résultats annoncés par R. Bader et moi.

Je suis heureux d'avoir ici l'occasion de manifester ma gratitude envers M. G. Valiron, qui m'a orienté vers mon sujet de recherches, et dont les conseils m'ont été précieux. Je tiens à remercier M. Paul Montel, qui a bien voulu présenter mes notes aux Comptes rendus, et qui me fait l'honneur de présider mon Jury, et M. Henri Cartan, qui a eu l'obligeance de me donner le sujet de ma seconde thèse. Je dois également témoigner ma reconnaissance à M. Marcel Brelot, qui a mis à ma disposition une abondante documentation, et qui a accepté de publier ce mémoire dans les Annales de l'Institut Fourier. Je remercie enfin mon ami R. Bader, avec qui j'ai eu de fructueuses conversations, des suggestions qu'il m'a faites.

([4]) M. Parreau, *Comptes Rendus,* 230, p. 709 et 914 ; 231, p. 679 et 751 ; 234, p. 286 ; R. Bader et M. Parreau, *Comptes Rendus,* 232, p. 138.

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

1. — Notion de surface de Riemann

1. Nous rappellerons tout d'abord la notion de surface de Riemann « abstraite », due essentiellement à Hermann Weyl et maintenant classique (5).

Une surface de Riemann S est définie par la donnée d'un espace topologique connexe, plus précisément d'une variété topologique à deux dimensions réelles, et d'une structure analytique complexe sur cette variété. On définit une telle structure en associant à tout point p de S une classe $\mathcal{A}(p)$ de fonctions à valeurs complexes, dont chacune est définie dans un voisinage de p, de façon que soit vérifiée la condition suivante :

Pour tout point $p_0 \in S$, il est possible de trouver une fonction $t \in \mathcal{A}(p_0)$ et un voisinage V de p_0, tels que :

1° L'application $p \to t(p)$ soit un homéomorphisme de V sur un ouvert du plan complexe, qu'on peut toujours supposer être le cercle unité $\{|t| < 1\}$. On peut également supposer que $t(p_0) = 0$.

2° La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f à valeurs complexes, définie au voisinage de $p \in V$, appartienne à $\mathcal{A}(p)$, est que $f(p(t))$ soit une fonction analytique de t, au voisinage de $t(p)$.

Une fonction $f \in \mathcal{A}(p)$ est dite analytique en p ; t est l'uniformisante locale, ou paramètre local.

2. Il est facile de passer de cette définition intrinsèque à la définition « géométrique » de Rado, dans laquelle la structure analytique

(5) Cf. H. Weyl [1], T. Rado [1], et pour des variétés quelconques, C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, I, Princeton, 1944.

complexe est donnée au moyen d'un recouvrement (V) de S par des *domaines élémentaires* V, dont chacun est appliqué par une transformation topologique T_V sur le cercle unité $\{|t| < 1\}$, de façon que soit satisfaite la condition de conformité :

Si $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, et si G est un domaine contenu dans $V_1 \cap V_2$, $T_{V_2} \circ T_{V_1}^{-1}$ est une application biunivoque et conforme directe de $T_{V_1}(G)$ sur $T_{V_2}(G)$.

D'après un théorème important de T. Rado, selon lequel toute surface de Riemann est réunion dénombrable d'ensembles compacts, on peut se borner à considérer des recouvrements (V) dénombrables, chaque V étant relativement compact. On obtient alors la définition de R. Nevanlinna ([3], [4]).

Rappelons qu'une surface de Riemann est dite close quand elle est compacte (et alors recouvrable par un nombre fini de domaines V), ouverte dans le cas contraire.

Étant donné une surface ouverte S, nous appellerons exhaustion de S une suite de domaines relativement compacts S_n, tels que $\overline{S}_n \subset S_{n+1}$, et que tout compact de S soit contenu dans S_n à partir d'un certain rang.

Il est à peu près évident qu'on peut imposer aux S_n diverses conditions de régularité (différentiabilité ou analyticité des courbes frontières ; absence de « frontière intérieure »).

Dans la pratique, on use souvent de la même notation pour désigner un point de la surface de Riemann et le paramètre correspondant. De même, on appelle cercle sur la surface un domaine élémentaire au sens de Rado, c'est-à-dire un domaine qui admet pour image un cercle dans le plan d'un paramètre. On peut ainsi considérer une surface de Riemann ouverte comme la réunion d'une infinité dénombrable de « cercles-paramètres », reliés entre eux par des relations d'incidence.

3. Soient S et S' deux surfaces de Riemann, et soit φ une application de S dans S'. On dira que φ est une application conforme si :

1° φ est continue

2° quel que soit $p \in S$, on a, pour toute $f' \in \mathcal{A}'(\varphi(p))$ $f' \circ \varphi \in \mathcal{A}(p)$, avec des notations évidentes.

Si φ est une application biunivoque de S sur S', telle que φ^{-1} soit également conforme, les surfaces S et S' seront dites conformément équivalentes, et on ne les considèrera pas comme distinctes.

Étant donné une application conforme φ de S dans S', on dit encore que (S, φ) définit un recouvrement de S' (6), $p' = \varphi(p)$ est alors considéré comme la projection de p sur S'. Si t et t' sont les paramètres locaux en p et p' respectivement, t' est une fonction analytique de t, d'après la condition 2° précédente. Si $\frac{dt'}{dt} \neq 0$ en p, t' est univalente au voisinage de $t(p)$, donc inversible, et la correspondance $p \rightarrow p'$ est localement biunivoque et bicontinue ; si $\frac{dt'}{dt} = 0$, on dit que p est un *point de ramification* du recouvrement, son ordre est celui du zéro de la dérivée.

4. Un recouvrement non ramifié constituera un revêtement, au sens topologique du terme, s'il est régulier (c'est-à-dire si pour tout domaine D' de S', toute composante connexe de $\varphi^{-1}(D')$ est appliquée par φ sur D') Inversement, tout revêtement topologique d'une surface de Riemann est susceptible d'une structure analytique complexe, par image réciproque. D'une façon plus générale, soit S une variété topologique à deux dimensions réelles, S' une surface de Riemann, φ une application continue de S dans S'. Pour qu'on puisse définir par S une structure analytique complexe, pour laquelle φ soit une application conforme, il faut et il suffit que φ soit une transformation intérieure au sens de Stoïlow : l'image d'un ouvert doit être un ouvert, celle d'un continu non ponctuel doit être un continu non ponctuel. La suffisance de ces conditions résulte des travaux de Stoïlow ([1], p. 116 : inversion locale des transformations intérieures). On voit ainsi la possibilité de doter d'une structure de surface de Riemann toute surface de recouvrement (ramifié) du plan complexe, définie à priori par la donnée des points de ramification et des lignes de passage. On peut appliquer aussi le résultat précédent au problème de l'uniformisation (on obtient le « principe de Kœbe », qui ramène le problème analytique à un problème topologique).

2. — Problème de Dirichlet

5. Une fonction à valeurs réelles, définie au voisinage d'un point p d'une surface de Riemann, sera dite harmonique en ce point si elle coïncide au voisinage de p avec la partie réelle d'une fonction de

(6) Le terme recouvrement ayant un sens différent en théorie des ensembles, il vaudrait mieux l'éviter et dire revêtement ramifié. Toutefois, nous nous conformerons à la terminologie consacrée par l'usage, réservant le mot revêtement au cas non ramifié.

$\mathcal{A}(p)$; il revient au même de dire que c'est une fonction harmonique du paramètre local. Une fonction harmonique en tout point d'un ensemble ouvert sera dite harmonique dans cet ouvert.

On définira les fonctions surharmoniques ou sousharmoniques sur la surface de Riemann de la même façon que dans le plan (cf. Rado [2]); par exemple une fonction surharmonique dans un ouvert G de S est une fonction f semi-continue inférieurement, qui n'est identique à $+\infty$ dans aucune composante connexe de G, et qui possède la propriété suivante : pour tout domaine D complètement intérieur à G, toute fonction harmonique dans $\overline{D}$ (*) majorée par f sur la frontière de D est majorée par f dans D. Pour que f soit surharmonique dans G, il faut et il suffit qu'elle le soit au voisinage de tout point de G ; on se ramène ainsi à des critères locaux, qu'on peut exprimer au moyen du paramètre.

De ce fait, et grâce au théorème de Harnack, on étend immédiatement aux familles de fonctions harmoniques ou surharmoniques sur une surface de Riemann certaines propriétés classiques dans le plan ; par exemple une suite croissante ou un ensemble filtrant croissant de fonctions surharmoniques (resp. harmoniques) a pour limite la constante $+\infty$ ou une fonction surharmonique (resp. harmonique); une famille de fonctions harmoniques dans un domaine et bornées dans leur ensemble sur tout compact est équicontinue, donc normale (c'est-à-dire relativement compacte pour la convergence compacte) et la convergence simple y est équivalente à la convergence compacte.

6. Le problème le plus important qui se pose dans l'étude des surfaces de Riemann est celui de l'existence de certaines fonctions harmoniques ou analytiques sur ces surfaces. On a donc à se poser, dès le début de la théorie, le problème de Dirichlet. Nous allons en rappeler brièvement la solution, qui ne diffère pas essentiellement de celle du problème plan.

Tout d'abord, pour un domaine élémentaire D (conformément équivalent à un cercle), la solution sera donnée d'une façon évidente par l'intégrale de Poisson. On peut ensuite passer à des cas plus généraux au moyen du procédé alterné de Schwarz. Mais il est préférable d'envisager directement la solution la plus générale au moyen de la méthode de Perron-Brelot (7).

(*) C'est-à-dire dans un voisinage de $\overline{D}$.

(7) Cf. O. Perron [1], et surtout M. Brelot [1], [4]. M. Heins [1] a également signalé

Rappelons tout d'abord le lemme suivant :

Soit f une fonction sousharmonique dans un ouvert G, D un domaine élémentaire complètement intérieur à G ; la fonction f_D égale à f dans G — D, et à l'intégrale de Poisson de f dans D, est encore sousharmonique dans G.

7. Familles de Perron. — Soit D un domaine relativement compact [8] d'une surface de Riemann ouverte S, F la frontière de D, f une fonction réelle donnée sur F. Soit $\mathcal{F}_i$ la famille des fonctions u sousharmoniques dans D, bornées supérieurement, et vérifiant $\limsup_{p\in D,\, p\to q} u(p) \leqslant f(q)$ pour tout point $q \in F$; nous poserons

$$\underline{H}_f^D(p) = \sup_{u \in \mathcal{F}_i} u(p),$$

si $\mathcal{F}_i$ n'est pas vide, $= -\infty$ sinon. Si $\underline{H}_f^D$ est $\neq \pm\infty$, c'est une fonction harmonique, car pour tout domaine élémentaire Δ tel que $\overline{\Delta} \subset D$, les u_Δ forment une famille filtrante croissante de limite $\underline{H}_f^D$.

On définit de même la famille $\mathcal{F}_s$ des fonctions v surharmoniques dans D, bornées inférieurement, telles que $\liminf_{p\in D,\, p\to q} v(p) \geqslant f(q)$ pour tout $q \in F$, et l'enveloppe inférieure $\overline{H}_f^D$ (égale à $+\infty$ si $\mathcal{F}_s$ est vide).

Comme $v - u \geqslant 0$ pour toute $u \in \mathcal{F}_i$ et toute $v \in \mathcal{F}_s$, $\underline{H}_f^D \leqslant \overline{H}_f^D$. S'il y a égalité (les fonctions étant finies), on note H_f^D leur valeur commune, et f est dite résolutive. H_f^D est appelée fonction de Wiener pour D et f.

Points réguliers. — On dit qu'un point $q \in F$ est un point frontière régulier s'il existe une fonction ω surharmonique dans D et telle que $\lim_{p\in D,\, p\to q} \omega(p) = 0$, tandis que $\liminf_{p\in D,\, p\to r} \omega(p) > 0$ pour tout $r \in F$ et $\neq p$.

Il suffit d'ailleurs que la fonction ω possédant ces propriétés existe dans $D \cap V$, où V est un voisinage de q, pour qu'on puisse en trouver une qui existe dans tout D. Nous supposerons désormais que le domaine D considéré a tous ses points frontières réguliers. La régularité est ainsi une propriété locale.

Nous utiliserons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si f est bornée supérieurement et si le point frontière q est régulier,* $\limsup_{p\in D,\, p\to q} \overline{H}_f^D(p) \leqslant \limsup_{r\in F,\, r\to q} f(r)$.

la possibilité de l'extension de cette méthode aux surfaces de RIEMANN, et M. OHTSUKA [1] en a donné un exposé tout à fait analogue à celui du présent mémoire.

(8) On pourrait également supposer que D est un ouvert relativement compact quelconque.

Soit l le second membre ; pour K assez grand, $l+\varepsilon+K\omega(p)$ appartient à $\mathcal{F}_s$.

Corollaire. — *Si tout point frontière de* D *est régulier, le problème de Dirichlet est résoluble pour toute f continue bornée.*

En effet, on a alors $\lim\limits_{p\in D,\, p\to q} \underline{H}_f^D(p) = \lim\limits_{p\in D,\, p\to q} \overline{H}_f^D(p) = f(q)$ pour tout $q\in F$. Donc H_f^D existe et est la solution du problème de Dirichlet.

Plus généralement, supposons que f soit semi-continue inférieurement et bornée inférieurement sur F. *Alors, si* $\overline{H}_f^D < +\infty$, *f est résolutive ;* $\overline{H}_f^D$ *est l'enveloppe supérieure des* H_g^D *pour g continue bornée* $\leqslant f$.

Le théorème précédent montre immédiatement que $\overline{H}_f^D \in \mathcal{F}_i$ donc est $\leqslant \underline{H}_f^D$, d'où le résultat ; de même pour sup $\underline{H}_g^D$.

Soit maintenant f une fonction quelconque ; $\overline{H}_f^D$ est l'enveloppe inférieure des $\overline{H}_\psi^D$ pour les ψ semi-continues inférieurement sur F et $\geqslant f$. En effet, soit $v\in\mathcal{F}_s$ et $\psi_v = \lim\inf v$ à la frontière ; ψ_v est $\geqslant f$, donc $v \geqslant H_{\psi_v}^D \geqslant \overline{H}_f^D$; or $v \to \overline{H}_f^D$. De même $\underline{H}_f^D$ est l'enveloppe supérieure de $\underline{H}_\varphi^D$ pour φ semi-continue supérieurement et $\leqslant f$.

On en déduit (cf. M. Brelot, loc. cit.) *la représentation intégrale de* H_f^D ; pour tout point $p\in D$, il existe une mesure de Radon et une seule, μ_p, telle que $H_f^D(p) = \int_F f(q)\,d\mu_p(q)$, pour toute f résolutive sur F ; μ_p est la mesure harmonique (au sens des distributions de masses). Pour une fonction quelconque f, $\underline{H}_f^D(p)$ et $\overline{H}_f^D(p)$ sont respectivement l'intégrale inférieure et l'intégrale supérieure par rapport à μ_p. La mesure harmonique en p d'un ensemble $E \subset F$ est, quand elle existe, l'intégrale de la fonction caractéristique de E par rapport à μ_p ; c'est une fonction harmonique de p.

8. Cas d'une frontière très régulière. — Dans la plupart des applications, il suffira de considérer des domaines D à frontière « très régulière » (par exemple, constituée d'arcs de courbes analytiques, ou suffisamment différentiables). Dans ce cas, on peut préciser l'allure de la fonction de Wiener au voisinage d'un point-frontière, en ne tenant compte que des propriétés locales de f.

Nous rappellerons simplement le résultat suivant [9] :

Théorème. — *Si* D *est à frontière très régulière, et si f est résolutive et s'annule sur un arc ouvert* A *de* F, H_f^D *s'annule sur* A.

Remarquons tout d'abord que si D_1, de frontière F_1, est contenu

[9] Cf. M. Brelot [8], qui introduit la notion plus générale d'*activité* d'un point-frontière. Un point-frontière suffisamment régulier est inactif.

dans D, et si la fonction f est résolutive sur F, la fonction f_1 égale à f sur $F_1 \cap F$ et à H_f^D sur $F_1 \cap D$ est également résolutive ; de plus $H_{f_1}^{D_1} = H_f^D$ dans D_1. C'est évident pour f continue bornée et on passe de là à f semi-continue, puis quelconque.

Employons alors le procédé de symétrie de M. Brelot ([6], p. 217). On peut toujours se ramener à $f \geqslant 0$. Soit L un arc analytique tracé dans D, dont les extrémités sont situées sur A, et qui limite avec un arc A′ de A un domaine D_1 dont le symétrique par rapport à L est tout entier contenu dans D. On appellera $\tilde{p}$ le symétrique d'un point p par rapport à L, et pour toute fonction g on posera $\tilde{g}(p) = g(\tilde{p})$. La remarque préliminaire montre que $\tilde{H}_f^D$ est la fonction de Wiener relative au domaine $\tilde{D}_1$ et à la donnée frontière 0 sur $\tilde{A}'$ et H_f^D sur L. On a donc dans $\tilde{D}_1$: $\tilde{H}_f^D \leqslant H_\varphi^{D-D_1} \leqslant H_f^D$, où φ désigne la fonction égale à H_f^D sur L, à 0 sur $F \cap \complement F_1$. On en conclut que H_f^D est bornée au voisinage de tout arc compact de A, donc s'y annule.

De plus, au voisinage de tout point de A, on a $H_f^D \leqslant M . H_f^D(a)$, pour $a \in D$, M étant une constante qui ne dépend pas de f.

Corollaire. — *Si* D *est à frontière très régulière, et si f résolutive sur* F *continue et bornée au voisinage de* $q \in F$, *on a*

$$\lim_{p \to q,\, p \in D} H_f^D(p) = f(q).$$

9. La solution du problème de Dirichlet obtenue, on en déduit les théorèmes fondamentaux d'existence de la théorie des fonctions sur une surface de Riemann. Grâce au procédé alterné de Neumann-Sario (10), on peut établir l'existence de fonctions harmoniques ayant des singularités données. Plus précisément, on peut, sous certaines conditions, « prolonger » à la surface entière (à une fonction harmonique bornée près) des fonctions harmoniques définies au voisinage d'un certain ensemble de singularités, ou hors d'un compact. On voit ainsi qu'il existe sur toute surface de Riemann des différentielles abéliennes, et des fonctions méromorphes (quotients de deux différentielles abéliennes). Ceci montre en particulier que toute surface de Riemann est conformément équivalente à une surface de Riemann « concrète » de la théorie des fonctions.

10. Ensembles polaires. — Soit une surface de Riemann S. On

(10) C. Neumann, *Vorlesungen uber Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*, Leipzig, 1884, R. Nevanlinna [8], et L. Sario [3].

dira qu'un ensemble E de points de S est *polaire* si son intersection avec tout « cercle » de la surface est un ensemble polaire, c'est-à-dire de capacité nulle. On sait qu'il existe alors une fonction surharmonique > 0 dans le cercle qui prend aux points de E la valeur $+\infty$.

Il est immédiat que toute partie d'un ensemble polaire est polaire ; de même la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles polaires est polaire, puisque c'est vrai dans tout cercle paramètre.

On dira qu'un ensemble E est *intérieurement polaire* si tout compact contenu est polaire ; pour que E soit intérieurement polaire, il faut et il suffit que son intersection avec tout cercle de S le soit.

M. G. Choquet a montré récemment que les deux notions coïncidaient pour les ensembles boréliens. En se ramenant à des considérations locales, on voit que ce résultat s'étend aux surfaces de Riemann.

Sur une surface ouverte, un ensemble polaire est caractérisé par le fait qu'il existe une fonction surharmonique sur la surface qui y prend la valeur $+\infty$. Pour le voir, supposons tout d'abord que E, polaire, soit complètement intérieur à un « cercle » V de S ; on peut toujours supposer que la fonction surharmonique u associée à E dans V est harmonique au voisinage de la frontière C de V, et qu'elle s'y annule. D'autre part, on peut toujours trouver hors d'un compact à frontière très régulière C' contenant V une fonction harmonique $h < 0$, nulle sur C', et dont le flux à travers C' soit opposé à celui de u à travers C (cf. Sario [3], lemme 2). On est alors dans les conditions d'application du théorème de Sario sur le procédé alterné, de sorte qu'il existe une fonction U telle que $U - u$ soit harmoniquement prolongeable dans V et $U - h$ harmonique à l'extérieur de C' et bornée. U est donc partout surharmonique, et vaut $+\infty$ sur E.

Dans le cas général, E est la réunion d'ensemble E_n de l'espèce indiquée. Soit (S_n) une exhaustion de S ; on peut toujours supposer que la fonction surharmonique u_n associée à E_n est > 0 sur S_n, et $\neq +\infty$ en un point a fixé de S_1. On choisira alors des constantes $c_n > 0$ telles que $\Sigma c_n u_n(a) < +\infty$ et $\Sigma c_n u_n = U$ répond à la question.

Les raisonnements précédents montrent plus généralement que si un ensemble E est contenu dans un ouvert G, et s'il existe une fonction surharmonique dans G valant $+\infty$ sur E, E est polaire.

Comme dans le plan, on dira *qu'une propriété a lieu quasi partout* (*resp. à peu près partout*) si l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est polaire (resp. intérieurement polaire).

Enfin, on étend immédiatement aux surfaces de Riemann le théorème suivant de M. H. Cartan [1]:

La limite d'une suite décroissante (ou d'une famille filtrante décroissante) de fonctions surharmoniques, bornées inférieurement dans leur ensemble sur tout compact, est une fonction *quasi surharmonique* (c'est-à-dire supérieure ou égale, et quasi partout égale à une fonction surharmonique déterminée).

En effet, soit φ cette limite ; la régularisée semi-continue inférieurement de φ est localement surharmonique, et l'ensemble des points où elle diffère de φ est localement polaire.

11. Problème de Dirichlet généralisé (11). — Nous sommes maintenant en mesure d'étendre les résultats du n° 7 à un domaine relativement compact D quelconque. On sait en effet que les points irréguliers de la frontière de D forment, dans chaque cercle paramètre, un ensemble polaire, d'ailleurs réunion dénombrable de compacts, ce qui permet de construire localement une fonction harmonique qui tend vers $+\infty$ aux points irréguliers. On en déduit, par une application du procédé alterné analogue à celle du n° précédent, l'existence d'une fonction harmonique $h > 0$ dans D qui tend vers $+\infty$ en tout point-frontière irrégulier. On considérera alors les familles plus générales $\mathcal{F}'_i$ (resp. $\mathcal{F}'_s$) des fonctions u (resp. v) qui vérifient lim sup $u \leqslant f$ (resp. lim inf $v \geqslant f$) seulement aux points réguliers. Les enveloppes sont les mêmes, car si $u \in \mathcal{F}'_i$, $u - \varepsilon h \in \mathcal{F}_i$ pour tout $\varepsilon > 0$. Le théorème du n° 7 montre encore que toute fonction continue bornée est résolutive ; on a encore une représentation intégrale de la solution, au moyen de la mesure harmonique.

Dans ces conditions, on peut faire sur les surfaces de Riemann comme dans le plan ou l'espace toute la théorie de la mesure harmonique des ensembles, des ensembles négligeables et absolument négligeables (12).

Nous nous bornerons ici à signaler l'énoncé suivant :

Pour qu'un ensemble E fermé dans un domaine D soit polaire, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit remplie :

a) E est de mesure harmonique (extérieure) nulle pour D-E,

b) tous les points-frontière de E sont irréguliers pour D-E,

c) toute fonction harmonique bornée dans D-E est prolongeable harmoniquement sur E.

(11) Un lemme de M. Brelot [4] permet d'atteindre le cas général sans passer par l'intermédiaire du procédé alterné.

(12) M. Brelot [3], [4].

CHAPITRE II

SURFACES HYPERBOLIQUES. FONCTION DE GREEN. POTENTIEL.

I. — Surfaces Hyperboliques

1. Soit K un compact non polaire d'une surface de Riemann S. L'enveloppe supérieure des fonctions sousharmoniques u dans S-K qui sont $\leqslant 1$ et ont une limite supérieure $\leqslant 0$ en tout point-frontière de K (ou simplement en tout point-frontière régulier de S-K) est une fonction harmonique ω (l'harmonicité se démontre de la même façon que celle de $\underline{H}_f^D$ pour le problème de Dirichlet). Comme la fonction 0 appartient à la famille, on a $0 \leqslant \omega < 1$.

Si S est un domaine relativement compact d'une surface de Riemann S*, ω n'est autre que la mesure harmonique, par rapport à S-K, de la frontière Γ de S. Dans le cas général, on dit souvent que ω est la mesure harmonique de la « frontière idéale » de S par rapport à S-K (13).

Si S_n est une exhaustion de S telle que $S_1 \supset K$, et si $\omega_n = H_{\varphi_n}^{S_n - K}$, avec $\varphi_n = 0$ sur la frontière de K et $\varphi_n = 1$ sur la frontière de S_n, $\omega = \lim\limits_{n \to \infty} \omega_n$. En effet, la suite (ω_n) est décroissante ; chaque ω_n majore toute fonction u de la famille considérée, et $\lim \omega_n$ appartient à cette famille.

Il est bien évident que si une fonction u sousharmonique dans S-K vérifie $u < M$ partout, et $\lim\sup u \leqslant m < M$ en tout point frontière (régulier) de S-K, on a dans S-K

$$u \leqslant m + (M - m)\omega. \tag{1}$$

2. Classe $\mathcal{C}_0$. — La fonction ω étant positive, elle est soit identi-

(13) Cette définition de ω a été donnée également par M. OHTSUKA [1].

quement nulle, soit > 0 dans une composante connexe de S-K. Selon que l'une ou l'autre de ces circonstances se présente, on dit que la frontière idéale de S est de mesure harmonique nulle ou > 0, ou encore que S est *parabolique ou hyperbolique*.

La distinction ainsi établie ne dépend pas du compact K *choisi*. En effet, soient K et K′ deux compacts non polaires, ω et ω' les fonctions correspondantes. Supposons d'abord $K \subset K'$. La fonction ω', prolongée par 0 dans K′, sauf aux points-frontière irréguliers de S-K′, où on la prend égale à sa limite supérieure dans S-K′, est sousharmonique ; elle est nulle en tout point-frontière régulier de S-K, car si un tel point est sur la frontière de K′, il est a fortiori régulier pour S-K′. On a donc $\omega' \leqslant \omega$. D'autre part, si $m(< 1)$ est le maximum de ω sur un compact contenant K′ à son intérieur, on a, d'après l'inégalité (1), $\omega \leqslant m + (1 - m)\omega'$. Par conséquent, $\omega = 0$ entraîne $\omega' = 0$; $\omega' = 0$ entraîne $\omega \leqslant m < 1$, d'où $\omega \leqslant m\omega$, $\omega \leqslant 0$, et finalement $\omega = 0$. S'il n'y a pas inclusion, on comparera à $K \cup K'$.

En particulier, on voit qu'on peut se borner à considérer des compacts K à frontière très régulière.

DÉFINITION. — *Nous appellerons $\mathcal{C}_0$ la classe des surfaces de Riemann paraboliques.*

CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE D'HYPERBOLICITÉ (M. Brelot). — *Pour que* S *soit hyperbolique, il faut et suffit qu'il existe une fonction surharmonique* > 0 *non constante* (*).

En effet, soit v une telle fonction, K un compact non polaire. On peut toujours s'arranger pour que $\inf\limits_{S} v = 0$, $\min\limits_{K} v = 1$. La fonction sousharmonique $u = 1 - v$ appartient alors à la famille considérée plus haut, et elle est > 0 en certains points de $S - K$; donc $\omega > 0$.

Inversement, si ω est > 0, on a vu plus haut qu'on peut la prolonger sousharmoniquement à la surface entière, de façon qu'elle reste comprise entre 0 et 1 ; on en déduit la fonction surharmonique annoncée.

Principe du maximum pour les surfaces paraboliques : Si $\omega = 0$, l'inégalité (1) exprime le fait suivant : *Si* K *est un compact de* S, *et si* u, *sousharmonique dans* $S - K$ *et bornée supérieurement, vérifie* lim sup $u \leqslant m$ *en tout point frontière régulier, on a* $u \leqslant m$.

Réciproquement, la validité du principe du maximum entraîne la nullité de ω.

(*) Ce critère a été donné par M. BRELOT dans une conférence au séminaire d'Analyse (Paris, mai 1950).

3. Domaines hyperboliques ou paraboliques. — Soit D un domaine de la surface de Riemann S, tel que $\overline{D}$ ne soit pas compact et $\complement D$ ne soit pas polaire (nous dirons souvent, pour abréger, que D est un « domaine non compact »). Les fonctions sousharmoniques u dans D qui sont $\leqslant 1$ et vérifient $\limsup_{p \to q} u(p) \leqslant 0$ en tout point-frontière (régulier) de D ont encore une enveloppe supérieure harmonique ω comprise entre 0 et 1. La fonction ω est en somme la mesure harmonique par rapport à S de la « portion de frontière idéale de S » contiguë à D.

Comme plus haut, on voit que la fonction ω est la limite des fonctions analogues relatives aux ouverts $D \cap G$, lorsque G est un domaine relativement compact qui tend vers S. Si $\omega \doteq 0$, on dira que D est parabolique ; si $\omega > 0$, que D est hyperbolique.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine soit parabolique est que le principe du maximum y soit valable. Si le domaine est hyperbolique, on a, avec les mêmes notations, l'inégalité (1).

Si D′ ne diffère de D que sur un compact, les deux domaines ont même type (démonstration tout à fait analogue à celle du n° précédent pour l'invariance par rapport à K). Si $D' \subset D$, et si D est parabolique, D′ l'est aussi ; si D′ est hyperbolique, D l'est aussi. En particulier, si $S \in \mathcal{C}_0$, tout domaine est parabolique.

Dans la plupart des cas, les domaines D considérés seront très réguliers ; ω s'annule alors régulièrement à la frontière C de D, et la propriété pour un domaine d'être hyperbolique s'exprime de la façon suivante : il existe dans D une fonction harmonique bornée non constante nulle sur C.

2. — Fonction de Green.

4. Définition. — Soit S une surface de Riemann ouverte. Considérons tout d'abord sur S un domaine relativement compact, D, de frontière F. Quel que soit $q \in D$, il existe dans D une fonction de pôle q, c'est-à-dire une fonction harmonique > 0 dans $D - \{q\}$, ayant en q un pôle logarithmique d'ordre 1, et s'annulant en tout point régulier de F. On peut la construire au moyen du procédé alterné, ou de la façon suivante, qui présente l'avantage de la rattacher directement à la notion de mesure harmonique : supposons D très régulier, et soit t un paramètre local en q, tel que $t(q)=0$, et que le cercle $V_0=\{|t|<1\}$ soit complètement intérieur à D ; soit $V_k=\{|t|<e^{-k}\}$, et C_k la frontière de V_k (k entier $\geqslant 0$). Soit ω_k la mesure harmonique de C_k par rapport à $D-\overline{V}_k$, et $h_k=k\omega_k$. On voit aisément que h_k majore $u=\log\frac{1}{|t|}$ dans $V_0-\overline{V}_k$, de sorte que $h_{k+1}\geqslant h_k$ dans $D-\overline{V}_k$. Une double application de la formule de Green (à h_k et ω_0, puis h_k et u) montre que :

$$(2)\int_{C_0} h_k\frac{\partial\omega_0}{\partial\nu}ds=\int_{C_0}\frac{\partial h_k}{\partial\nu}ds=2\pi-\frac{1}{k}\int_{C_0}h_k d\theta\leqslant 2\pi \quad (\theta=\arg t)$$

de sorte de h_k ne peut tendre vers $+\infty$. $h=\lim\limits_k h_k$ est alors la fonction de Green cherchée : elle s'annule sur F, étant majorée dans $D-V_0$ par $M\omega_0$, où $M=\operatorname{Max}\limits_{C_0} h$; elle a un pôle logarithmique d'ordre 1 en q, car $h-u=\lim(h_k-u)$ est régulière dans V_0. Nous la noterons $g(p, q; D)$. On sait qu'elle est symétrique en p et q.

5. Les domaines D très réguliers et contenant q forment un ensemble filtrant croissant pour l'inclusion, et g croît avec D. Par conséquent, la limite des fonctions $g(p, q; D)$, quand D tend vers S en décrivant l'ensemble précité (ou simplement une exhaustion (S_n) de S) est, soit la constante $+\infty$, soit une fonction $g(p, q)$ harmonique >0 dans $S-\{q\}$ ayant un pôle logarithmique d'ordre 1 en q.

L'existence ou la non-existence d'une fonction de Green de pôle q ne dépend pas de q. En effet ([14])

Théorème (Myrberg). — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur une surface de Riemann* S *une fonction de Green de pôle q (pour un point $q\in$S ou pour tout q) est que* S *soit hyperbolique.*

Si $g(p, q)$ existe, c'est une fonction surharmonique >0, donc S est hyperbolique. Inversement, supposons que S le soit ; si D_0 est un domaine relativement compact très régulier, de frontière C_0, et contenant q, et D un domaine analogue, de frontière C, tel que $\overline{D}_0\subset D$, soit $g_D=g(p, q; D)$, et ω_D la mesure harmonique de C par rapport à $D-\overline{D}_0$; la formule de Green montre que

$$\int_{C_0} g_D\frac{\partial\omega_D}{\partial\nu}ds=2\pi,$$

([14]) P. J. Myrberg [1].

de sorte que si lim $\omega_D = \omega (> 0$ par hypothèse), on a :

$$\int_{C_0} g_D \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds \leqslant 2\pi ;$$

donc g_D reste finie ([15]).

D'ailleurs, la construction de g comme limite des fonctions h_k, donnée au n° 4 pour un domaine relativement compact, s'étend immédiatement aux surfaces hyperboliques, h_k y étant définie par $h_k = k(1 - \omega'_k)$, où ω'_k est la mesure harmonique de la frontière idéale de S par rapport à $S - \overline{V}_k$. Pour constater la convergence de h_k, il suffit d'étendre au cas présent l'inégalité (2), qui résulte de l'inégalité initiale par passage à la limite, quand D tend vers S.

6. Comportement de la fonction de Green à la frontière. — Il résulte de la définition même de la fonction de Green que $g(p, q)$ existe s'il y a sur S des fonctions h harmoniques > 0 sur $S - \{q\}$, ayant en q la singularité indiquée ; c'est alors la plus petite de ces fonctions, car pour tout D relativement compact de S, $g(p, q ; D)$ minore toute fonction h.

Cette *propriété minimale* s'exprime encore de la façon suivante :

Théorème 1. — *Si une fonction u sousharmonique sur* S *est majorée sur* S (*ou hors d'un compact*) *par* $kg(p, a)$ ($k > 0$, *a fixe sur* S), *on a* $u \leqslant 0$. *Il en est de même si u, sousharmonique hors d'un compact* K, *satisfait à la même condition de majoration, et à* $\limsup_{p \to q} u(p) \leqslant 0$ *pour tout point-frontière q de* K *régulier pour* $S - K$.

En effet, soit D très régulier, relativement compact, contenant a et éventuellement K ; on a dans D (ou D-K) :

$$u(p) \leqslant k[g(p, a) - g(p, a ; D)],$$

de sorte qu'à la limite $u \leqslant 0$.

Pour $\lambda > 0$, appelons alors $D_{a, \lambda}$ le domaine de S défini par $g(p, a) > \lambda$, et $C_{a, \lambda}$ sa frontière (ensemble des courbes de niveau $g(p, a) = \lambda$).

Théorème 2. — *Le domaine* $D_{a, \lambda}$ *est relativement compact ou parabolique.*

([15]) Cette démonstration, qui simplifie celle que j'avais donnée dans les *Comptes Rendus*, 230, p. 709, est à peu près la même que celle de K. I. Virtanen [1]. Voir aussi P. J. Myrberg [1], R. Nevanlinna [3], L. Sario [4], M. Ohtsuka [1].

Si $\overline{D}_{a,\lambda}$ n'est pas compact, soit ω la mesure harmonique de sa « frontière idéale » ; la fonction ω, prolongée par o hors de $D_{a\lambda}$, est sousharmonique dans S ; si $\tilde{\omega}$ désigne la fonction prolongée, on a $\tilde{\omega} < \frac{1}{\lambda} g(p, q)$, de sorte que $\tilde{\omega}$ est $\leqslant 0$, donc nulle. Ainsi $\omega = 0$.

7. Problème de Dirichlet extérieur. — Soit K un compact non polaire d'une surface de Riemann S. Si S est parabolique, le problème de Dirichlet relatif à S — K est soluble dans les mêmes conditions que pour un ouvert relativement compact, du fait de la validité du principe du maximum. Si S est hyperbolique, une fonction harmonique dans S — K n'est pas déterminée par les valeurs qu'elle prend à la frontière de K (on peut déjà lui ajouter un multiple quelconque de ω), mais elle le sera si on lui impose en outre de s'annuler à la frontière idéale. Précisons d'abord ce qu'il faut entendre par là :

Définition. — *On dit qu'une fonction harmonique h, définie hors d'un compact* K *d'une surface de Riemann hyperbolique* S *est associée à zéro à la frontière idéale lorsqu'il existe un point $a \in$ S et une constante $k > 0$ tels que $|h(p)| < kg(p, a)$ au voisinage de la frontière idéale* (c'est-à-dire hors d'un autre compact).

D'après le principe de Harnack, la condition imposée est remplie pour tout a (avec un k convenable) dès qu'elle l'est pour un seul. On peut encore lui donner la forme suivante : Soit Q un compact de S, ω_Q la mesure harmonique de la frontière idéale par rapport à S — Q ; pour que h soit associée à zéro, il faut et il suffit que $|h| < k(1 - \omega_Q)$ au voisinage de la frontière idéale (pour voir l'équivalence et l'indépendance vis-à-vis de Q on appliquera l'inégalité (1) du n° 1).

Soit alors F la frontière de notre compact K non polaire, et f une fonction réelle donnée sur F. Le problème de Dirichlet extérieur consiste à trouver une fonction harmonique h dans S — K qui prenne sur F les valeurs f (plus généralement, qui vérifie $\liminf f \leqslant \liminf h \leqslant \limsup h \leqslant \limsup f$ en tout point frontière régulier) et qui soit associée à zéro à la frontière idéale. Lorsque f est continue, une telle fonction, si elle existe, est unique, d'après le théorème 1.

On peut adapter au cas présent la méthode de Perron-Brelot. Soit $\mathcal{G}_i$ la famille des fonctions u définies et bornées supérieurement dans S — K, sousharmoniques ou égales à $-\infty$ dans chaque composante connexe, et satisfaisant aux conditions suivantes : il existe k et a (dépendant de u) tels que $u(p) \leqslant kg(p, a)$ dans S — K ;

$\limsup_{p \to q} u(p) \leqslant f(q)$ en tout point frontière q de K régulier pour S — K. On pose $\underline{H}_f^{S-K}(p) = \sup_{u \in \mathcal{G}_i} u(p)$. Si $\underline{H}_f^{S-K} \neq \pm \infty$, c'est une fonction harmonique. On définit de même la famille $\mathcal{G}_s$, et l'enveloppe $\overline{H}_f^{S-K}$; v appartient à $\mathcal{G}_s$ si $-v$ appartient à la famille $\mathcal{G}_i$ relative à $-f$.

On a $u \leqslant v$ pour toute $u \in \mathcal{G}_i$ et toute $v \in \mathcal{G}_s$, car $u - v$ est sousharmonique dans S — K, de limite supérieure $\leqslant 0$ aux points frontières réguliers, et minore $kg\,(a,\,p)$. Donc $\underline{H}_f^{S-K} \leqslant \overline{H}_f^{S-K}$. Si ces deux fonctions sont $< +\infty$ et égales, on dit que f est résolutive, et la valeur commune H_f^{S-K} sera la fonction de Wiener relative à S — K et f.

Comme dans le cas classique, on voit que si $q \in F$ est régulier pour S — K, et si f est bornée supérieurement,

$$\limsup_{p \in S-K,\, p \to q} H_f^{S-K}(p) \leqslant \limsup_{r \in F,\, r \to q} f(r).$$

Par conséquent, si f est continue bornée sur F, *elle est résolutive*, car si $|f| < B$, $\underline{H}_f^{S-K}$ et $\overline{H}_f^{S-K}$ sont bornées en valeur absolue par $B(1 - \omega)$; leur différence est donc associée à zéro et de limite nulle en tout point régulier, donc nulle (théorème 1). H_f^{S-K} est la solution du problème de Dirichlet extérieur.

Si f est semi-continue inférieurement et bornée inférieurement, $\overline{H}_f^{S-K}$ est l'enveloppe supérieure des H_g^{S-K} pour les g continues bornées $\leqslant f$, car cette enveloppe appartient à $\mathcal{G}_s$, d'après l'inégalité ci-dessus rappelée. Donc, si $\overline{H}_f^{S-K} < +\infty$, f est résolutive, car $\underline{H}_f^{S-K}$ majore toute H_g^{S-K} ; de plus H_f^{S-K} est associée à zéro, car si Q est un compact très régulier contenant K à son intérieur, et de frontière C, on a dans S — Q $H_f^{S-K} \leqslant M(1 - \omega_Q)$, où $M = \operatorname{Max}_C H_f^{S-K}$, puisque cette majoration est valable pour toute H_g^{S-K}.

Enfin, pour f quelconque, $\overline{H}_f^{S-K}$ est l'enveloppe inférieure de $\overline{H}_\varphi^{S-K}$ pour les φ semi-continues inférieurement, bornées inférieurement, qui majorent f. Elle est donc associée à zéro, dès qu'elle n'est pas infinie (on supposera d'abord $f \geqslant 0$).

Ces résultats permettent une représentation intégrale de la solution de Wiener ; $H_f^{S-K}(p) = \int_K f d\mu_p$. La masse totale de μ_p n'est plus égale à 1, mais à $1 - \omega(p)$.

On peut également définir (au moins pour f continue ou semi-continue) H_f^{S-K} au moyen d'une exhaustion. Par exemple, soit

$f \geqslant 0$, continue ou semi-continue inférieurement, et soit (S_n) une exhaustion de S, dans laquelle chaque S_n est un domaine relativement compact très régulier, de frontière Γ_n; on suppose que $S_1 \supset K$. Si l'on appelle f_n la fonction égale à f sur F, à o sur Γ_n, il est visible que $H_{f_n}^{S_n-K}$ croît avec n, et est $\leqslant H_f^{S-K}$; d'autre part, on constate aisément que sa limite appartient à la famille supérieure $\mathcal{G}_s$. Donc $H_f^{S-K} = \lim\limits_{n\to\infty} H_{f_n}^{S_n-K}$. On passe ensuite à f de signe quelconque.

8. **Extension à un domaine « non compact » quelconque.** — Soit D un domaine à fermeture non compacte, dont le complémentaire n'est pas polaire. S'il est hyperbolique, on pourra dire qu'*une fonction harmonique bornée h dans* D *s'annule à la frontière idéale de* D *si elle satisfait à la condition* (3) $|h| < k(1 - \omega)$, *où* ω *est la fonction du* n° 3.

On peut alors, comme au numéro précédent, définir les familles $\mathcal{G}_i$ et $\mathcal{G}_s$, la condition exprimée au moyen de la fonction de Green étant alors remplacée par $u \leqslant k(1 - \omega)$ (resp. $v \geqslant -k(1-\omega)$). On obtient ainsi les enveloppes $\underline{H}_f^D$ et $\overline{H}_f^D$ et éventuellement la fonction de Wiener H_f^D, qui ont les mêmes propriétés que les H^{S-K}, sauf peut-être celle de vérifier (3). En effet, le raisonnement fait précédemment n'est plus applicable. Toutefois, on aura la majoration indiquée, au moins hors d'un compact, lorsque la frontière F de D est compacte, ou lorsque f est bornée.

Pour les mêmes raisons que plus haut, $H_f^D(p)$ admet une représentation intégrale. Enfin, si f est semi-continue inférieurement et $\geqslant 0$, on voit que $H_f^D = \lim\limits_{n\to\infty} H_{f_n}^{S_n \cap D}$, pour toute exhaustion (S_n) de D, f_n valant f sur $F \cap \overline{S}_n$ et o ailleurs.

Domaines à frontière très régulière. — Si D est limité par des courbes très régulières, la solution du problème de Dirichlet extérieur (ou ordinaire, s'il s'agit d'un domaine parabolique) peut s'exprimer au moyen de la fonction de Green de D ([16]).

Considérons par exemple un domaine D limité par un ensemble localement fini de courbes analytiques ou suffisamment différentiables ; soit (S_n) une exhaustion de S par des domaines du même genre, tels que $D \cap S_n$ soit toujours connexe. Soit C la frontière de D, Γ_n celle de S_n, et $C_n = C \cap \overline{S}_n$; soit $g(p, q)$ la fonction de Green

([16]) Cf. R. Nevanlinna [6].

de D, $g_n(p, q)$ celle de $D \cap S_n$. Soit alors h une fonction harmonique $\geqslant 0$ dans D, continue dans $\overline{D}$, h_n la fonction harmonique dans $D \cap S_n$ qui prend les valeurs h sur C_n, o sur $\Gamma_n \cap D$; si $n \to \infty$, $h_n(p) \to H_h^D(p)$. Or, la formule de Green nous donne pour $a \in D$

$$h_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_n} h(p)\frac{\partial g_n(p, a)}{\partial \nu}ds \qquad (\nu \text{ normale intérieure})$$

d'où pour $m < n$:

$$h_m(a) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{C_m} h(p)\frac{\partial g_n(p, a)}{\partial \nu}ds \leqslant h_n(a)$$

En faisant tendre n, puis m, vers l'infini, on obtient :

$$H_h^D(a) = \frac{1}{2\pi}\int_C h(p)\frac{\partial g(p, a)}{\partial \nu}ds$$

Par conséquent, si f sur C est sommable par rapport à $\frac{\partial g(p, a)}{\partial \nu}ds$, elle est résolutive et la fonction de Wiener correspondante est donnée par :

$$H_f^D(q) = \frac{1}{2\pi}\int_C f(p)\frac{\partial g(p, q)}{\partial \nu}ds$$

Remarque. — Dans le cas d'un domaine D parabolique, il est intéressant de noter que les résultats ci-dessus nous donnent, lorsque h est harmonique *bornée dans* D

$$h(a) = \frac{1}{2\pi}\int_C h(p)\frac{\partial g(p, a)}{\partial \nu}ds$$

(on aurait $\geqslant$, pour h bornée inférieurement).

D'autre part, en appliquant ceci à $h = 1$, on voit que : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine « non compact » très régulier D de frontière C soit parabolique est que, pour $a \in D$:

$$\int_C \frac{\partial g(p, a)}{\partial \nu}ds = 2\pi.$$

2. — Potentiels. Fonctions surharmoniques [17].

9. Potentiels. — Soit S une surface de Riemann hyperbolique, $g(p, q)$ sa fonction de Green En prenant $g(p, q)$ comme fonction

[17] Cf. H. Cartan [1], [2], M. Brelot [3], [4], L. Ahlfors [4], R. Bader [1], Kuramochi [1].

fondamentale, on peut édifier sur S une théorie du potentiel analogue à celle de l'espace R^n ou d'un domaine admettant une fonction de Green. Cette possibilité repose essentiellement sur le fait qu'une surface de Riemann est réunion dénombrable de compacts, et sur le comportement de g à la frontière (théorèmes 1 et 2).

Nous nous bornerons ici à rappeler les principaux résultats et à indiquer leur démonstration si elle diffère de celle de la théorie classique. Le potentiel d'une mesure de Radon positive μ est la fonction $U^\mu(p)=\int g(p, q)d\mu(q)$. U^μ est $\geqslant 0$ et semi-continue inférieurement. Si elle n'est pas partout infinie, elle est surharmonique. En effet, soit $a \in S$, et $\varepsilon_{a,\lambda}$ la distribution de masses $\frac{1}{2\pi}\frac{\partial g(p, a)}{\partial \nu}ds$ sur $C_{a,\lambda}$ (notations du n° 6); $U^{\varepsilon_{a,\lambda}}=\inf(\lambda, g(p, a))$, d'après le théorème 2 et la remarque qui termine la section précédente. De ce fait, et en raison de la loi de réciprocité :

$$\int U^\mu d\varepsilon_{a,\lambda}=\int U^{\varepsilon_{a,\lambda}}d\mu \leqslant U^\mu(a);$$

si λ est assez grand pour que $D_{a,\lambda}$ soit simplement connexe, on retombe sur le critère local bien connu de surharmonicité. De plus, U^μ est harmonique dans tout ouvert de μ mesure nulle.

Comportement d'un potentiel à la frontière. — Si U^μ n'est pas identiquement infini, son comportement est analogue à celui de la fonction de Green. On a en effet :

Théorème 1 *bis*. — *Une fonction u sousharmonique dans* S *et majorée par* U^μ *est* $\leqslant 0$.

Supposons tout d'abord μ portée par un compact K. Soit D un domaine relativement compact contenant K ; d'après le principe de Harnack, il existe, pour $a \in K$, une constante k telle que

$$g(p, q) \leqslant kg(p, a)$$

quels que soient $q \in K$ et $p \in \complement D$. Donc $U^\mu(p) \leqslant k\mu(K)\, g(p, a)$ hors de D, ce qui entraîne le résultat indiqué (théorème 1).

Si μ est quelconque, soit (S_n) une exhaustion de S, μ_n la restriction de μ à $\overline{S}_n$, et $\mu'_n=\mu-\mu_n$. Quand $n \to \infty$, U^{μ_n} tend en croissant vers U^μ, et $U^{\mu'_n} \to 0$. Si $u \leqslant U^\mu$, on a $u-U^{\mu'_n} \leqslant U^{\mu_n}$; or μ_n est portée par un compact, et $u-U^{\mu'_n}$ est encore sousharmonique, de sorte qu'on a $u \leqslant U^{\mu'_n}$, et, à la limite, $u \leqslant 0$.

On est déduit immédiatement le :

THÉORÈME 2 *bis*. — *Quelque soit* $\varepsilon > 0$, *l'ouvert* $\{U^\mu > \varepsilon\}$ *est relativement compact ou parabolique.*

10. Formules de Gauss et de Poisson. — Détermination des masses par les potentiels. — Soit D un domaine relativement compact, très régulier, de frontière C. Si le potentiel U^μ d'une distribution positive μ est continuement différentiable au voisinage de C, on a, en intégrant la formule : $\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial g(p,q)}{\partial \nu_i} ds = 1$, pour p parcourant C, et $q \in D$

$$\mu(D) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial U^\mu}{\partial \nu_i} ds \quad \text{(formule de Gauss).}$$

Si U^μ est deux fois continument différentiable, on a la formule de Poisson :

$\mu(D) = -\frac{1}{2\pi}\int_D \Delta U^\mu d\sigma$ ($d\sigma$ étant l'élément d'aire dans le plan du paramètre).

Dans le cas général, on peut déterminer la masse située dans un ouvert au moyen de la méthode de F. Riesz (18), en introduisant les flux généralisés.

Il en résulte que si deux mesures de Radon ont même potentiel (ou des potentiels qui diffèrent d'une fonction harmonique) elles sont identiques.

11. Représentation potentielle des fonctions surharmoniques. — Le théorème fondamental de F. Riesz est encore valable sur une surface de Riemann :

THÉORÈME. — *Soit f une fonction surharmonique sur une surface de Riemann hyperbolique* S. *Il existe une mesure de Radon positive μ et une seule telle que, pour tout compact* K, *la restriction de μ à* K *ait un potentiel dont la différence avec f soit harmonique à l'intérieur de* K. *Si U^μ n'est pas identique à $+\infty$, $f - U^\mu$ est harmonique ; c'est la plus grande minorante harmonique de f.*

Soit (V_n) une famille dénombrable de « cercles » recouvrant S. Dans chaque V_n, le théorème de Riesz permet d'associer à f une mesure μ_n ; si $V_m \cap V_n \neq \emptyset$, μ_m et μ_n y coïncident, puisque la masse de

(18) F. RIESZ [1], M. BRELOT (*Act. Sci. Ind.*, n° 139, Hermann, 1934), T. RADO [2].

tout ouvert, pour μ_m ou μ_n, se détermine au moyen du flux généralisé de f. Par conséquent, les mesures μ_n définissent sur S une mesure de Radon μ (« principe du recollement des morceaux »).

On peut également remarquer que la mesure μ est donnée par $d\mu = -\frac{1}{2\pi}\Delta f d\sigma$, lorsque f est deux fois continument différentiable ; si f est quelconque, la formule ci-dessus est encore valable, $\Delta f d\sigma$ étant alors une distribution-forme différentielle de L. Schwartz.

Si $\mu_{(K)}$ est la restriction de μ à K, $f - U^{\mu(K)}$ a dans $\mathring{K}$ un flux nul à travers toute courbe ou ensemble de courbes C qui est un bord, donc est harmonique dans $\mathring{K}$; lorsque K tend vers S, les fonctions $f - U^{\mu(K)}$ forment un ensemble filtrant décroissant, leur limite est $-\infty$ si $U^{\mu} = +\infty$, et $f - U^{\mu}$ dans le cas contraire ; $h = f - U^{\mu}$ est alors harmonique dans S, et il résulte immédiatement du théorème 1 *bis*, que toute fonction harmonique (ou sousharmonique) dans S inférieure à f est aussi inférieure à h,

En particulier : si f est surharmonique $\geqslant 0$ sur S, $f = U^{\mu} + h$, μ étant la mesure de Radon associée, et h une fonction harmonique positive.

On a encore : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction surharmonique sur* S *soit le potentiel d'une mesure positive est que sa plus grande minorante harmonique soit nulle*. De ce fait, une fonction surharmonique positive inférieure à un potentiel est un potentiel.

12. Extrémisation et balayage. — La possibilité d'étendre la théorie du balayage à une surface de Riemann a été signalée par R. Bader [1]. La méthode de minimum de Gauss-Frostman-H. Cartan (19) s'applique d'ailleurs sans modification, et conduit aux mêmes résultats que dans le cas classique, ce qui permet de définir le balayage indépendamment du problème de Dirichlet et de la notion de capacité. Mais comme il nous a fallu résoudre le problème de Dirichlet pour définir la fonction fondamentale, et comme nous avons déjà utilisé divers résultats concernant les ensembles polaires qui sont établis dans le plan au moyen de la théorie du potentiel, nous ne procéderons pas ainsi, et nous nous appuierons sur les propriétés des familles de fonctions surharmoniques, comme le fait M. Brelot dans son mémoire du Journal de Mathématiques [5].

(19) Cf. O. Frostman [1], H. Cartan [1], [2].

Remarquons d'abord qui si E est un ensemble polaire d'une surface de Riemann *hyperbolique* S, on peut toujours supposer que la fonction surharmonique associée (qui vaut $+\infty$ sur E) est positive, et même que c'est un potentiel.

Soit donc S une surface hyperbolique, A un ensemble de points de S, et f une fonction surharmonique positive sur S. L'enveloppe inférieure des fonctions g surharmoniques positives sur S qui majorent f sur A est une fonction quasi surharmonique (chap. 1, n° 10) ; sa régularisée f_A^e majore f quasi partout sur A. C'est la plus petite fonction surharmonique $\geqslant 0$ ayant cette propriété, car si g_1 majore f quasi partout sur A et si $\varepsilon > 0$, $g_1 + \varepsilon U^\mu$ majore f sur A, si U^μ est un potentiel associé à l'ensemble (polaire) des points de A où $g_1 < f$. f_A^e est appelée l'*extrémale extérieure de f pour* A (*).

Les propriétés de l'extrémale extérieure sont les mêmes que dans le cas classique : f_A^e est égale à f dans $\mathring{A}$, est harmonique dans $\complement \overline{A}$; elle croît avec f et A, et plus généralement si $f \leqslant g$ quasi partout sur A, $f_A^e \leqslant g_A^e$; de même, si $A \subset B$ a un ensemble polaire près (c'est-à-dire si $A \cap \complement B$ est polaire), $f_A^e \leqslant f_B^e$. Si $|f - g| \leqslant \varepsilon$, $|f_A^e - g_A^e| \leqslant \varepsilon$, si f_n tend vers f en croissant, $(f_n)_A^e$ tend vers f_A^e.

Lorsque f est un potentiel U^μ, f_A^e, qui est plus petite, est également un potentiel $U^{\mu_A^e}$. μ_A^e est le résultat du balayage extérieur de μ sur A.

Si on prend pour A un compact K, on voit que f_K^e est la fonction surharmonique égale à f sur K, sauf aux points-frontière irréguliers pour S — K, et à H_f^{S-K} dans S — K (aux points irréguliers, elle vaut donc lim inf H_f^{S-K}). En effet, la fonction f_1 ainsi définie majore f quasi partout sur K ; d'autre part, si g est surharmonique $\geqslant 0$ et majore f sur K elle appartient à la famille $\mathcal{G}_s$ du n° 7, donc majore H_f^{S-K} dans S — K ; par conséquent, inf g et sa régularisée majorent f_1.

Pour A quelconque, on appellera *extrémale intérieure* de f pour A l'enveloppe supérieure des f_K^e pour tous les compacts K contenus dans A. On la notera f_A^i. C'est encore la plus petite fonction surharmonique $\geqslant 0$ sur S qui majore f à peu près partout sur A. En effet, soit φ une telle fonction ; pour tout compact $K \subset A$, l'ensemble $\{\varphi < f\} \cap K$ est intérieurement polaire et borélien, donc polaire (théorème de G. Choquet), de sorte que $\varphi \geqslant f_K^e$; donc $\varphi \geqslant f_A^i$.

(*) M. M. Brelot, à qui est due la notion d'extrémale (cf. *Bull. Sci. Math.*, 68, 1944, et [5]) appelle f_A^e l'extrémale de f pour $\complement A$.

Inversement, si K_1 est un compact contenu dans $\{f^i_A < f\} \cap A$, on a $f^e_{K_1} \leqslant f^i_A < f$ sur K_1, qui est donc polaire; $\{f^i_A < f\} \cap A$ est donc intérieurement polaire.

Si f est le potentiel d'une mesure μ, f^i_A est celui d'une mesure μ^i_A, qui est par définition le résultat du balayage intérieur de μ sur A.

Lorsque $f^i_A = f^e_A$, leur valeur commune notée f_A et appelée extrémale de f pour A. Cette égalité a lieu pour toute f si A est *borélien*, puisque l'ensemble $\{f^i_A < f\} \cap A$, borélien lui aussi, est alors polaire.

Remarquons que si $\mathcal{B}$ est la famille des ensembles boréliens B tels que $A \cap \complement B$ soit polaire, on a $f^e_A = \inf\limits_{B\in\mathcal{B}} f_B$. En effet, $f^e_A \leqslant f^e_B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$; d'autre part, l'ensemble $B_0 = \{f^e_A = f\}$ appartient à la famille, et $f_{B_0} = f^e_A$.

Lorsque A est fixé, les extrémales f^i_A et f^e_A sont additives en f. On le voit aisément pour A compact, puisque alors f_A vaut H^{S-A}_f dans $S - A$, et f dans A sauf aux points-frontière irréguliers pour $S - A$; si f et g sont surharmoniques sur S, on a ainsi

$$(f+g)_A = f_A + g_A$$

quasi partout, donc partout, On passe de là au cas de l'extrémale intérieure (donc de A borélien), puis au cas général en utilisant la remarque de l'alinéa précédent.

L'additivité, et la continuité évidente de f^i_A et f^e_A par rapport à f, *permettent une représentation intégrale des extrémales*. Comme la famille de fonctions $(U^{\varepsilon_a,\lambda} - U^{\varepsilon_a,\lambda'})$($a \in S$, $\lambda' < \lambda < +\infty$, avec $\overline{D}_{a,\lambda}$ compact) est totale [20], on voit que l'application $f \to f^e_A(p)$, par exemple, induit sur l'espace vectoriel engendré par cette famille une forme linéaire qui se prolonge par continuité sur l'espace des fonctions continues nulles en dehors d'un compact; elle définit donc une mesure de Radon positive ν_p, de masse totale $\leqslant 1$, telle que

$$\int f d\nu_p = f^e_A(p)$$

pour toute fonction surharmonique f continue et bornée. Pour passer au cas général, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

LEMME. — *Toute fonction surharmonique f positive sur* S *est la*

(20) H. CARTAN [1], p. 80. Si $\int (U^{\varepsilon_a,\lambda} - U^{\varepsilon_a,\lambda'})d\mu = 0$, quelque soit a, pour λ et λ' assez grands, U^μ est harmonique, donc $\mu = 0$.

limite d'une suite croissante de fonctions surharmoniques continues et bornées.

Supposons d'abord que f est un potentiel de Green U^{μ}. Pour $\lambda > 0$ fixé, nous poserons $f_{\lambda}(p) = \int f(q) d\varepsilon_{p,\lambda}(q)$. Nous avons encore $f_{\lambda}(p) = \int U^{\mu}(q) d\varepsilon_{p,\lambda}(q) = \int U^{\varepsilon_{p,\lambda}}(q) d\mu(q) = \int g_{\lambda}(p, q) d\mu(q)$, en posant $g_{\lambda}(p, q) = \inf[g(p, q), \lambda]$. On en déduit que f_{λ} est surharmonique; en effet, pour tout $a \in S$ et tout nombre $l > 0$,

$$\int f_{\lambda}(p) d\varepsilon_{a,l}(p) = \iint g_{\lambda}(p, q) d\mu(q) d\varepsilon_{a,l}(p) = \int \left[\int g_{\lambda}(p, q) d\varepsilon_{a,l}(p)\right] d\mu(q)$$
$$\leqslant \int g_{\lambda}(a, q) d\mu(q) = f_{\lambda}(a).$$

D'autre part, la continuité en p de $g_{\lambda}(p, q)$ est uniforme par rapport à $q \in S$. En effet, si $p \to p_0$, $g(p, q)$, considérée comme fonction de q, tend vers $g(p_0, q)$ uniformément sur tout compact de $S - \{p_0\}$, d'après le théorème de Harnack. Si C est le bord d'un voisinage compact de p_0, contenu dans $D_{p_0, \lambda+\varepsilon}$, on aura

$$|g(p, q) - g(p_0, q)| < \varepsilon$$

pour $q \in C$, dès que p appartiendra à un voisinage V_{ε} de p_0; mais alors $|g_{\lambda}(p, q) - g_{\lambda}(p_0, q)|$ est $< \varepsilon$ sur toute la surface. Il en résulte que f_{λ} est continu, car soit un point a voisin de p_0 et tel que $U^{\mu}(a) < \infty$; si $g(a, q) \geqslant m > 0$ sur C, on a

$$|f_{\lambda}(p) - f_{\lambda}(p_0)| < \frac{\varepsilon}{m} U^{\mu}(a)$$

pour $p \in V_{\varepsilon}$.

Soit alors (S_n) une exhaustion de S, et (λ_n) une suite croissante de nombres positifs tendant vers $+\infty$. Posons $f_n(p) = f_{\lambda_n}(p)$ pour $p \in \overline{S}_n$, et $f_n(p) = H^{S-\overline{S}_n}_{f_{\lambda_n}}$ pour $p \in S - \overline{S}_n$. La fonction f_n ainsi définie est surharmonique continue; c'est d'ailleurs un potentiel de Green U^{μ_n}. Elle est bornée par $\lambda_n \mu(\overline{S}_n)$; pour $n \to \infty$, elle tend en croissant vers f.

Lorsque $f = U^{\mu} + h$ (h harmonique $\geqslant 0$), on posera

$$f_n = U^{\mu_n} + \inf(h, n).$$

Il nous reste enfin à montrer que la mesure qui effectue la représentation intégrale de $f^e_A(p)$[resp. $f^i_A(p)$] est $(\varepsilon_p)^e_A$[resp. $(\varepsilon_p)^i_A$]. Cela résulte immédiatement de la formule de réciprocité

$$g(p, q)^e_A = g(q, p)^e_A (\text{resp. } g(q, p)^i_A = g(q, p)^i_A),$$

qu'on établit comme dans le mémoire cité de M. Brelot, en se ramenant au cas de A compact. Si p et q appartiennent à $S-A$, on a en effet $g(p, q)_A = g(p, q) - g(p, q; S-A)$, d'après la propriété extrémale de la fonction de Green.

Plus généralement, on a encore sur une surface de Riemann

$$\int f_A^e(p)d\mu(p) = \int f(p)d\mu_A^e(p) \text{ et } \int f_A^i(p)d\mu(p) = \int f(p)d\mu_A^i(p).$$

13. Potentiels sur les surfaces paraboliques. — Sur une surface parabolique on ne peut définir des potentiels possédant toutes les propriétés indiquées plus haut (puisque, par exemple, une fonction surharmonique ne peut avoir de minorantes harmoniques). Toutefois, *ou peut obtenir une partie des résultats précédents en partant d'une fonction fondamentale $h(p, q)$ de signe variable mais toujours symétrique en p et q, harmonique en p pour q fixe et $p \neq q$, et ayant en q un pôle logarithmique d'ordre* 1.

Pour établir *l'existence* de $h(p, q)$, nous nous appuierons sur les deux faits suivants :

1° Soit (S_n) une exhaustion de la surface parabolique S, $g_n(p, q)$ la fonction de Green de S_n. Pour q et q_0 fixes sur S, la famille des fonctions $\chi_n(p; q, q_0) = g_n(p, q) - g_n(p, q_0)$ est normale, d'après un lemme de Johansson [1] selon lequel les $\chi_n(p; q, q_0)$ sont bornées dans leur ensemble hors de tout voisinage de q et q_0. De plus, la limite d'une suite partielle convergente est harmonique sur S sauf en q et q_0, où elle a les singularités de χ_n, et est bornée hors d'un voisinage de ces points. Deux quelconques de ces fonctions limites diffèrent donc d'une constante, de sorte que, pour p_0 fixe, la suite $\chi_n(p; q, q_0) - \chi_n(p_0; q, q_0)$ converge ; sa limite $\chi(p, p_0; q, q_0)$ n'est autre que la partie réelle de l'intégrale normale de 3^e espèce dont toutes les périodes réelles sont nulles. On peut encore dire qu'une suite partielle $\chi_{n_k}(p; q, q_0)$ est convergente, uniformément sur tout compact de $S - \{q, q_0\}$, dès qu'elle converge en un point.

2° Lorsque p_0 et q sont fixes sur S, la famille des fonctions $\psi_n(p; p_0, q) = g_n(p, q) - g_n(p_0, q)$ est également normale. En effet, M. Heins [1] a montré qu'il existe des constantes μ_n telles que les fonctions $u_n(p) = g_n(p, q) - \mu_n$ soient bornées dans leur ensemble sur tout compact $S - \{q\}$. Il en est alors de même pour les ψ_n, puisque $\psi_n(p; p_0, q) = u_n(p) - u_n(p_0)$.

Prenons alors sur S deux points fixes p_0 et q_0. Par une double extraction, on peut trouver des entiers $n_k \to \infty$ tels que les suites de fonctions $\psi_{nk}(p\,;\,p_0,\,q_0)$ et $\psi_{nk}(p\,;\,q_0,\,p_0)$ soient convergentes. En remplaçant p et q dans la dernière, et en remarquant que

$$\psi_n(q\,;\,q_0,p_0)=\chi_n(p_0\,;\,q,\,q_0),$$

on voit que la suite $\chi_{nk}(p\,;\,q,\,q_0)$ converge pour $p=p_0$ et q quelconque, donc pour tout couple $(p,\,q)$ de points de S. Posons alors $h_k(p,q)=\chi_{nk}(p\,;q,q_0)+\psi_{nk}(p\,;p_0,q_0)=g_{nk}(p,q)-g_{nk}(p_0,q_0)$. Pour $k\rightarrow\infty$, $h_k(p,\,q)$ tend vers une limite $h(p,\,q)$ qui satisfait à toutes les conditions indiquées plus haut, et en outre à la suivante : quand p varie seul, $h(p,\,q)-h(p,\,q')$ reste bornée hors d'un voisinage de q et q' ; autrement dit, le comportement de $h(p,\,q)$ à la frontière ne dépend pas de q.

La fonction $h(p,\,q)$ n'est d'ailleurs pas déterminée de façon unique par ses propriétés, même si l'on tient compte de celle que nous venons d'exprimer. En effet, si $u(p)$ est harmonique sur S,

$$h^*(p,\,q)=h(p,\,q)+u(p)+u(q)$$

possède les mêmes propriétés que h ; inversement, toute fonction qui satisfait aux conditions imposées à h peut être mise sous cette forme.

Le potentiel $-h$ d'une mesure μ (c'est-à-dire la fonction $U^\mu(p)=h(p,\,q)d\mu(q)$) ne sera donc en général déterminée qu'à une fonction harmonique près. Toutefois, si μ est de masse totale nulle, $U^\mu(p)$ est déterminé à une constante près ; $U^\mu(p)-U^\mu(p_0)$ ne dépend pas de h. On retrouve là un résultat signalé par L. Ahlfors [4] pour les potentiels définis sur les surfaces closes.

CHAPITRE III

CLASSIFICATION DES SURFACES DE RIEMANN
CRITÈRES HARMONIQUES

1. Fonctions harmoniques à moyennes bornées.

1. Moyenne d'une fonction harmonique dans un ouvert annulaire. — Nous dirons, avec A. Pfluger [1], qu'un domaine relativement compact G d'une surface de Riemann S est un *domaine annulaire* si sa frontière se compose d'un nombre fini de courbes régulières, réparties en deux ensembles disjoints C_0 et C_1.

Dans un tel domaine G, nous appellerons x la fonction harmonique uniforme qui s'annule sur C_0 et prend sur C_1 une valeur constante $\Lambda > 0$ choisie de façon que $\int_{C_0} \frac{\partial x}{\partial \nu} ds = 1$ (ν désigne la normale intérieure à G). Si y est la fonction harmonique conjuguée de x (en général multiforme), ceci s'écrit encore $\int_{C_0} dy = 1$.

Plus généralement, soit G un ouvert, limité par un nombre fini de courbes régulières, dont les composantes connexes G_i (en nombre fini) sont des domaines annulaires ; nous dirons que G est un ouvert annulaire. Si nous appelons C_0 (resp. C_1) la réunion des C_0^i (resp C_1^i) relatifs aux divers C_i, nous pouvons encore définir une fonction x associée à G, nulle sur C_0, et valant Λ sur C_1 ; on aura, avec des notations évidentes, $\frac{1}{\Lambda} = \sum_i \frac{1}{\Lambda_i}$.

Moyenne. — *Nous appellerons moyenne dans* G *d'une fonction u sousharmonique dans* $\overline{G}$ *la fonction de* λ *définie, pour* $0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda$, par :

$$m(\lambda) = m(\lambda, u ; G) = \int_{x=\lambda} u dy.$$

Si u est harmonique dans $\overline{G}$, $|u|^\alpha$ y est sousharmonique pour $\alpha \geqslant 1$;

nous appellerons moyenne d'ordre α de u dans G la fonction :

$$m_\alpha(\lambda) = m_\alpha(\lambda, u; \mathrm{G}) = \left(\int_{x=\lambda} |u|^\alpha dy\right)^{1/\alpha}.$$

2. La moyenne d'une fonction harmonique étant linéaire, celle d'une fonction sousharmonique est une fonction convexe de λ. Plus précisément, la moyenne d'ordre α d'une fonction harmonique possède les propriétés suivantes, établies par R. Nevanlinna [5] pour $\alpha = 2$.

THÉORÈME 3. — *Si u est harmonique dans $\overline{\mathrm{G}}$, $m_\alpha(\lambda, u)$ est une fonction convexe de λ lorsque $\alpha \geqslant 1$; pour $\alpha > 1$, $m_\alpha(\lambda)$ ne peut être linéaire que si $u > 0$ est une fonction linéaire de x.*

Si de plus u est nulle sur C_0 et vérifie la condition $\int_{\mathrm{C}_0} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds = 1$, on a $m_\alpha(\lambda, u) \geqslant \lambda$, l'égalité n'ayant lieu que pour $\omega = \pm x$ lorsque $\alpha > 1$.

On peut toujours supposer $u > 0$ (en considérant au besoin la meilleure majorante harmonique de $|u|$ dans $\mathrm{G}(\lambda_0, \lambda_1) = \{\lambda_0 < x < \lambda_1\}$ pour $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \Lambda$). Si l'on pose pour simplifier $m_\alpha = m$, on obtient, en dérivant deux fois, intégrant par parties, et appliquant l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} m^{\alpha-1} m'' &= \int_{x=\lambda} u^{\alpha-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dy + (\alpha - 1)\left[\int_{x=\lambda} u^{\alpha-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dy \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{m^\alpha}\left(\int_{x=\lambda} u^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x} dy\right)^2\right] \\ &= (\alpha - 1)\left[\int_{x=\lambda} u^{\alpha-2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dy \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{m^\alpha}\left(\int_{x=\lambda} u^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x} dy\right)^2\right] \\ &\geqslant (\alpha - 1) \int_{x=\lambda} u^{\alpha-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dy ; \end{aligned}$$

d'où la première partie du théorème. Si $\omega = 0$ sur C_0 et $\int_{\mathrm{C}_0} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds = 1$ on a $m_\alpha(0) = \left(\int_{\mathrm{C}_0} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^\alpha dy\right)^{1/\alpha} \geqslant 1$ (inégalité de Hölder), d'où $m_\alpha(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda > 0$. Quand $\alpha > 1$, l'inégalité précédente ne peut se transformer en égalité que si $\frac{\partial u}{\partial x}$ est constant sur C_0, donc égal à ± 1, ce qui exige $\omega = \pm x$.

Remarques : 1) $m_1(\lambda)$ est linéaire si u (toujours harmonique dans $\bar{G}$) est >0 dans G, et est constante si de plus $\int_{C_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0$, ce qui a lieu en particulier lorsque u est harmonique sur toute la surface et que C_0 est le bord d'un compact.

2) Pour $\alpha \leqslant \beta$, $m_\alpha(\lambda) \leqslant m_\beta(\lambda)$; la seconde partie du théorème est donc vraie dès qu'elle l'est pour $\alpha = 1$. Soit alors U_λ la meilleure majorante harmonique de $|u|$ dans $G(0, \lambda)$:

$$m_1(\lambda ; u) = m_1(\lambda ; U_\lambda) = \lambda \int_{C_0} \frac{\partial U_\lambda}{\partial \nu} ds ; \text{ or } \frac{\partial U_\lambda}{\partial \nu} \geqslant \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|.$$

Moyennes définies à partir de la fonction de Green : Soit G_1 un domaine relativement compact très régulier de S, et a un point de G. Pour Λ assez grand, la partie de G_1 où $g(p, a ; G_1) < \Lambda$ est un domaine annulaire G, pour lequel la fonction x associée est $\frac{1}{2\pi}(\Lambda - g)$. On peut donc définir la moyenne d'une fonction u sousharmonique dans $\bar{G}_1$ à partir de g ; il est immédiat que la moyenne correspondant à la courbe de niveau $g = \lambda$ est égale à la valeur en a de la meilleure majorante harmonique de u dans $G_1(\lambda) = \{g > \lambda\}$.

3. Fonctions à moyennes bornées. — Considérons, sur une surface de Riemann ouverte S, *un domaine relativement compact* S_0 dont le bord C_0 est composé d'un nombre fini de courbes régulières, et qui n'a pas de « frontière intérieure » (nous entendons par là qu'aucune partie de C_0 n'est le bord d'un compact de S situé dans $S - S_0$). *Nous dirons* pour abréger que S_0 *est un domaine canonique*, et nous appellerons *exhaustion canonique* une exhaution formée de domaines canoniques.

Définition. — *Soit u une fonction sousharmonique dans $S - \bar{S}_0$; nous dirons que u est à moyennes bornées dans $S - \bar{S}_0$ si pour tout domaine canonique $S_1 \supset S_0$ la moyenne de u dans l'ouvert $G = S_1 - \bar{S}_0$ reste bornée par un nombre k qui ne dépend que de S_0 et u.*

Si u est sousharmonique sur S, et si la propriété indiquée est vraie pour tout domaine canonique S_0 (k pouvant varier avec S_0), on dira que u a ses moyennes bornées sur S.

Théorème 4. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction sousharmonique positive sur S soit à moyennes bornées sur S est qu'elle y admette une majorante harmonique.*

En effet, si u sousharmonique > 0 sur S admet la majorante harmonique U, on a pour tout $G = S_1 - \overline{S}_0$

$$m_1(\lambda, u) \leqslant m_1(\lambda, U) = m_1(0, U) \leqslant \operatorname*{Max}_{C_0} u,$$

donc u est à moyennes bornées. Réciproquement, supposons u à moyennes bornées sur $S - \overline{S}_0$, pour un domaine S_0 particulier; soit U_{S_1} la meilleure majorante harmonique de u dans un domaine canonique $S_1 \supset \overline{S}_0$. On a $\int_{C_0} U_{S_1}\, dy = \int_{C_1} U_{S_1}\, dy = \int_{C_1} u\, dy \leqslant k$; comme $\int_{C_0} dy = 1$, on en déduit que $\min\limits_{C_0} U_{S_1} \leqslant k$, et, d'après le principe de Harnack, que $\max\limits_{C_0} U_{S_1} \leqslant k'$, de sorte que quand $S_1 \to S$, U_{S_1} tend vers une limite finie, qui est la plus petite majorante harmonique $\widehat{u}$ de u sur S [21].

Le théorème précédent montre que pour une fonction u sousharmonique sur S tout entière, la propriété d'avoir ses moyennes bornées sur $S - S_0$ est indépendante de S_0. On pourra donc se borner à considérer des moyennes définies à partir des fonctions de Green; pour celles-ci, l'équivalence de la propriété indiquée et de l'existence d'une majorante harmonique est immédiate.

4. Fonctions s'annulant sur C_0. — Outre les fonctions sousharmoniques sur la surface entière, il est intéressant d'étudier celles qui sont définies sur $S - S_0$, et qui s'annulent sur C_0.

Théorème 5. — *Pour qu'il existe des fonctions sousharmoniques positives dans $S - S_0$, nulles sur C_0, et à moyennes bornées dans $S - \overline{S_0}$, qui ne soient pas identiquement nulles, il faut et il suffit que S soit une surface hyperbolique. Les fonctions en question sont alors celles qui admettent une majorante harmonique.*

Soit u sousharmonique > 0 dans $S - \overline{S}_0$, nulle sur C_0; soit S_1 un domaine canonique contenant $\overline{S}_0$, $G = S_1 - \overline{S}_0$, x_G la fonction associée, Λ_G son maximum; soit enfin U_G la meilleure majorante harmonique de u dans G. Une application simple de la formule de Green nous donne:

$$\int_{C_0} u\, dy_G = \int_{C_1} U_G\, dy_G = -\Lambda_G \int_{C_1} \frac{\partial U_G}{\partial \nu} ds = \Lambda_G \int_{C_0} \frac{\partial U_G}{\partial \nu} ds.$$

[21] Dans toute la suite de ce mémoire, nous noterons $\widehat{u}$ la plus petite majorante harmonique d'une fonction sous-harmonique u.

Or, Λ_G et $\int_{C_0} \frac{\partial U_G}{\partial \nu} ds$ croissent avec G; leur produit, à moins d'être constamment nul, ne peut rester borné que si tous deux le restent, ce qui implique : 1° que S est hyperbolique ([22]), 2° que pour $S_1 \to S$, U_G tend vers une limite finie (lemme de Johansson).

Inversement, si S est hyperbolique, Λ_G est $\leqslant \Lambda < +\infty$; si u admet une majorante harmonique U, on peut toujours supposer que celle-ci s'annule également sur C_0, et dans ces conditions

$$\int_{C_1} u dy_G \leqslant \Lambda \int_{C_0} \frac{\partial U}{\partial \nu} ds,$$

donc u est à moyennes bornées.

5. Classes (HM_α). — Soit S une surface de Riemann ouverte. Pour tout nombre $\alpha \geqslant 1$, *nous appellerons* (HM_α) *la classe des fonctions harmoniques uniformes* u *régulières sur* S *et qui y ont leurs moyennes d'ordre* α *bornées, ou encore telles que* $|u|^\alpha$ *ait une majorante harmonique* $\widehat{|u|^\alpha}$ (ce qui revient au même, d'après le théorème 4). L'égalité $|u+v|^\alpha \leqslant 2^{\alpha-1}(|u|^\alpha + |v|^\alpha)$ montre que (HM_α) est un espace vectoriel réel; si a est un point fixe de S, $\|u\|_\alpha = [\widehat{|u|^\alpha}(a)]^{1/\alpha}$ est une norme sur (HM_α), et pour cette norme, (HM_α) est un espace de Banach. En effet, soit (S_n) une exhaustion canonique de S, telle que $a \in S_1$, et soit Γ_n la frontière de S_n; posons

$$g(p, a; S_n) = g_n(p, a).$$

On a

$$\|u\|_\alpha = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{C_n} |u(p)|^\alpha \frac{\partial g_n(p, a)}{\partial \nu} ds \right)^{1/\alpha}$$

et l'inégalité de Minkowski pour les intégrales entraîne à la limite

$$\|u+v\|_\alpha \leqslant \|u\|_\alpha + \|v\|_\alpha.$$

D'autre part, soit (u_j) une suite de Cauchy dans (HM_α) ; si nous désignons par $U_{j,k}$ la plus petite majorante harmonique de $|u_j - u_k|^\alpha$, cela signifie que $U_{j,k}(a)$ tend vers o quand j et $k \to \infty$; d'après le principe de Harnack, $U_{j,k}(p)$ tend alors vers o uniformément sur

([22]) En effet, $\frac{1}{\Lambda_G} = \int_{C_0} \frac{\partial \omega_G}{\partial \nu} ds$ tend vers $\int_{C_0} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds$, qui est nul ou > 0 selon que $\omega = 0$ ou $\omega \neq 0$.

tout compact de S. Comme $|u_j(p) - u_k(p)|^\alpha \leqslant U_{j,k}(p)$, la suite (u_j) converge, uniformément sur tout compact, vers une fonction u harmonique sur S. Reste à voir que $u \in (HM_\alpha)$. Or, en vertu de la convergence uniforme, on a :

$$\int_{C_n} |u(p)|^\alpha \frac{\partial g(p, a)}{\partial \nu} ds = \lim_{j \to \infty} \int_{C_n} |u_j(p)|^\alpha \frac{\partial g(p, a)}{\partial \nu} ds \leqslant 2\pi \lim_{j \to \infty} \|u_j\|_\alpha^\alpha ;$$

la meilleure majorante harmonique de $|u|^\alpha$ dans S_n a donc, lorsque $n \to \infty$, une limite finie.

Nous considérerons également, après L. Ahlfors et L. Sario, *les classes* (HB) et (HD) *des fonctions harmoniques uniformes sur* S *qui sont bornées ou qui ont une intégrale de Dirichlet finie* (c'est-à-dire telles que $D_S(u) = \iint_S |\text{grad } u|^2 d\sigma < \infty$). On sait que ce sont également des espaces de Banach, si l'on prend comme normes $\sup_{p \in S} |u(p)|$ dans (HB), $|u(a)| + \sqrt{D(u)}$ dans (HD).

Il est évident que $(HB) \subset (HM_\alpha)$ pour tout α. D'autre part, (HD) est contenu dans (HM_2), car la condition $D_S(u) < \infty$ signifie que la mesure de Radon μ définie par $d\mu = |\text{grad } u|^2 d\sigma$ est de masse totale finie ; or, on constate aisément que μ est la mesure associée à la fonction surharmonique $-u^2$ dans la décomposition de F. Riesz ; si $\mu(S) < \infty$, le potentiel de Green U^μ ne peut être identiquement infini, et par conséquent $u^2 + U^\mu$ est finie, harmonique et majore u^2, donc $u \in (HM_2)$ (23).

Enfin, pour $\alpha \leqslant \beta$, on a $|u|^\alpha \leqslant 1 + |u|^\beta$, donc $(HM_\alpha) \supset (HM_\beta)$. En particulier, (HM_1) contient toutes les classes de fonctions précédemment envisagées. Remarquons à ce propos qu'on peut encore définir (HM_1) comme l'espace des différences de fonctions harmoniques positives. En effet, si $|u|$ a une majorante harmonique U, on a $u = U - (U - u)$; inversement, si $u = u_1 - u_2$, avec u_1 et u_2 harmoniques et $\geqslant 0$, on a : $|u| \leqslant u_1 + u_2$.

Si $u \in (HM_1)$, u^+ et u^- admettent des majorantes harmoniques $\widehat{u^+} = u'$ et $\widehat{u^-} = u''$, et on a $u = u' - u''$. Cette décomposition de u en différence de fonctions harmoniques positives possède la propriété extrémale suivante : pour toute autre décomposition $u = u_1 - u_2$ (u_1 et $u_2 \geqslant 0$), on a $u' \leqslant u_1$ et $u'' \leqslant u_2$. Il en résulte que (HM_1) est un espace vectoriel réticulé : si u et v sont deux fonctions de (HM_1),

(23) Cela résulte encore d'une inégalité de R. Nevanlinna ([5], p. 6).

elles admettent dans cet espace une borne supérieure et une borne inférieure, qui ne sont autres que $\widehat{\sup(u, v)}$ et $\widehat{\inf(u, v)}$ [24].

Lorsque $u \in (HM_\alpha)$, (HB) ou (HD), il en est de même de u' et u''. Dans les deux premiers cas, c'est évident. Pour (HD) cela résulte du lemme bien connu suivant lequel une fonction harmonique dans un domaine relativement compact G a une intégrale de Dirichlet inférieure à celle de toute fonction continue dans $\overline{G}$, continûment dérivable dans G sauf sur un nombre fini d'arcs ou de points, et qui prend les mêmes valeurs sur la frontière de G [25]. En effet, soit $u \in (HD)$, (S_n) une exhaustion de S, u'_n la meilleure majorante harmonique de u^+ dans S_n. Pour $m < n$, on a

$$D_{S_m}(u'_n) \leqslant D_{S_n}(u'_n) \leqslant D_{S_n}(u^+) \leqslant D_{S_n}(u).$$

Si m reste fixe et $n \to \infty$, ceci nous donne $D_{S_m}(u') \leqslant D_S(u)$, d'où finalement $D_S(u') \leqslant D_S(u) < \infty$.

6. **Classes (H_0M_α).** — Soit S_0 un domaine canonique de S, de frontière C_0. *Les fonctions harmoniques uniformes dans* $S - \overline{S}_0$ *nulles sur* C_0 *peuvent également être rangées en diverses classes, selon que leurs moyennes d'ordre* α *sont bornées, qu'elles sont bornées, ou qu'elles ont une intégrale de Dirichlet finie. Nous noterons* (H_0M_α), (H_0B), (H_0D) les classes « relatives » ainsi déterminées. Elles possèdent les mêmes propriétés que les classes « absolues » : si l'on y introduit des normes analogues aux précédentes, ce sont des espaces de Banach [26] ; elles vérifient les mêmes relations d'inclusion : $(H_0B) \subset (H_0M_\alpha)$ pour $1 \leqslant \alpha < \beta$, $(H_0D) \subset (H_0M_2)$.

Toutefois, si (H_0M_1) est contenue dans la classe des différences de fonctions harmoniques positives s'annulant sur C_0, elle ne se confond avec cette dernière que lorsque S est une surface hyperbolique ; si S est parabolique, (H_0M_1) se réduit à la constante 0, alors qu'il existe dans $S - S_0$ des fonctions harmoniques positives nulles sur C_0.

(24) Par abus de langage, nous noterons encore $\hat{f}$ la plus grande minorante harmonique d'une fonction harmonique f (c'est $-(-\hat{f})$).

(25) Voir par exemple H. Weyl [1], Fatou (*Fonctions automorphes*, Paris, 1931), S. Stoilow [1].

(26) Pour avoir une véritable norme, il faut ici choisir un point a_i dans chaque composante connexe G_i de $S - \overline{S}_0$, et poser $\|u\|_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left[\widehat{|u|^\alpha}(a_i)\right]^{1/\alpha}$.

Mais cette distinction n'a plus lieu pour $\alpha > 1$. On a en effet :

THÉORÈME 6. — *Soit* S *une surface de Riemann ouverte,* S_0 *un domaine canonique de* S, *u une fonction harmonique dans* $S - S_0$ *nulle sur* C_0, *mais non identiquement nulle. Si pour* $\alpha > 1$, $|u|^\alpha$ *admet une majorante harmonique,* S *est hyperbolique, donc* $u \in (H_0 M_\alpha)$.

On peut toujours supposer que u vérifie $\int_{C_0} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds = 1$. Soit alors U une majorante harmonique de $|u|^\alpha$ nulle sur C_0, et soit S_1 un domaine canonique contenant $\bar{S}_0$, et $G = S_1 - \bar{S}_0$. Avec les notations déjà employées, on a, en tenant compte de la propriété extrémale signalée dans le théorème 3 :

$$\Lambda_G^\alpha \leqslant \int_{C_1} |u|^\alpha dy_G \leqslant \int_{C_1} U dy_G = \Lambda_G \int_{C_0} \frac{\partial U}{\partial \nu} ds.$$

Il en résulte que Λ_G reste inférieur à $\left(\int_{C_0} \frac{\partial U}{\partial \nu} ds\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}$, ce qui implique, comme nous l'avons déjà vu, que S est hyperbolique.

7. Généralisation. Moyennes d'ordre Φ ; classes (HM_Φ) et (H_0M_Φ). — Selon une idée de M. R. Nevanlinna [8], on peut généraliser la notion de moyenne d'ordre α, et la notion correspondante de classe (HM_α), ou $(H_0 M_\alpha)$, de la façon suivante. Soit $\Phi(t)$ une fonction *convexe* et strictement croissante de la variable réelle positive t, telle que $\Phi(0) = 0$ (cette dernière hypothèse n'ayant d'ailleurs rien d'essentiel). Pour toute fonction sousharmonique positive u, on sait [27] que $\Phi(u)$ est elle-même sousharmonique. Soit alors G un ouvert annulaire (cf. n° 1) d'une surface de Riemann S, x la fonction harmonique associée à G, u une fonction harmonique uniforme dans $\bar{G}$. Nous appellerons moyenne de u dans G relativement à Φ (ou moyenne d'ordre Φ de u dans G) la fonction de λ définie, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda$, par

$$m_\Phi(\lambda) = m_\Phi(\lambda\,;\ u) = \Phi^{-1}\left(\int_{x=\lambda} \Phi(|u|) dy\right).$$

La première partie du théorème 3 ne subsiste pas obligatoirement pour ce genre de moyennes. Toutefois, la propriété de minimum exprimée par la seconde partie est encore vraie ; en effet :

[27] P. MONTEL [1], M. BRELOT (*Act. Sci. Ind.*, n° 139, Hermann, 1934).

Théorème 3^{bis}. — *Soit u une fonction harmonique dans* $\overline{G}$, *nulle sur* C_0, *et telle que* $\int_{C_0} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| ds = 1$. *On a alors* $m_\Phi(\lambda\,;\,u) \geqslant \lambda$, *et l'égalité ne peut avoir lieu que si* $u = \pm x$, *lorsque* $\Phi(t)$ *n'est linéaire dans aucun intervalle.*

La démonstration est fondée sur l'*inégalité de Jensen :* soit μ une mesure positive sur un espace compact E, f une fonction μ-sommable définie dans E, et Φ une fonction convexe pour toute valeur prise par f. Dans ces conditions,

$$\Phi\left(\frac{\int f d\mu}{\int d\mu}\right) \leqslant \frac{\int \Phi(f) d\mu}{\int d\mu} \text{ (28)}$$

Soit alors U_λ la meilleure majorante harmonique de $|u|$ dans $G(\lambda) = \{x < \lambda\}$; on a $\Phi\left(\int_{x=\lambda} U_\lambda dy\right) \leqslant \int \Phi(U_\lambda) dy = \Phi(m_\Phi(\lambda))$.

Or, $\int_{x=\lambda} U_\lambda dy = \lambda \int_{C_0} \frac{\partial U_\lambda}{\partial \nu} ds \geqslant \lambda$, car en tout point de C_0 $\frac{\partial U_\lambda}{\partial \nu} \geqslant \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|$; donc $m_\Phi(\lambda) \geqslant \lambda$, puisqu'on a supposé Φ strictement croissante. Enfin, l'inégalité de Jensen ne peut se transformer en égalité, lorsque f est continue, que si Φ est linéaire dans l'ensemble des valeurs prises par f sur le support de μ ; par conséquent, si Φ n'est linéaire dans aucun intervalle, et si $m_\Phi(\lambda, u) = \lambda$, on doit avoir $|u| = \lambda$ sur $\{x = \lambda\}$, donc $u = \pm x$.

Soit maintenant S_0 un domaine canonique. Si pour tout $S_1 \supset \overline{S}_0$ $m_\Phi(\lambda, u\,;\, S_1 - \overline{S}_0)$ reste inférieur à une constante ne dépendant que de S_0 (ou encore si $\Phi(|u|)$ est à moyennes bornées dans $S - \overline{S}_0$, ce qui revient au même puisque $\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = +\infty$) nous dirons que u a ses moyennes Φ bornées dans $S - \overline{S}_0$.

Définition. — *Nous appellerons* (HM_Φ) l'ensemble des fonctions harmoniques u définies sur la surface S tout entière et *qui possèdent la propriété ci-dessus indiquée pour un (ou pour tout) domaine canonique* S_0. *Si* S_0 *est fixé, nous appellerons* (H_0M_Φ) *l'ensemble des fonctions harmoniques dans* $S - \overline{S}_0$, *qui s'annulent sur le bord* C_0 *de* S_0 *et qui ont leurs moyennes d'ordre* Φ *bornées dans* $S - \overline{S}_0$.

(28) J. V. L. Jensen [1], p. 186 ; A. Zygmund [1], chap. IV.

En vertu du théorème 4 (n° 3), (HM_Φ) est encore l'ensemble des fonctions harmoniques u sur S pour lesquelles $\Phi(|u|)$ admet une majorante harmonique. Quelle que soit Φ, on a

$$(\mathrm{HB}) \subset (\mathrm{HM}_\Phi) \subset (\mathrm{HM}_1);$$

en effet toute fonction bornée est a fortiori à moyennes bornées, d'autre part, si $\Phi(|u|)$ est majorée par la fonction harmonique U, on a $|u| \leqslant \Phi^{-1}(\mathrm{U})$, et $\Phi^{-1}(\mathrm{U})$ est surharmonique, donc $|u|$ admet une majorante harmonique. Toute fonction de (HM_Φ) est ainsi la différence de deux fonctions harmoniques positives (dont on peut toujours supposer qu'elles appartiennent aussi à (HM_Φ)). Soient enfin Φ et Ψ deux fonctions convexes et croissantes dans $\{0 \leqslant t < +\infty\}$; si $\Phi \leqslant \Psi$, $(\mathrm{HM}_\Psi) \subset (\mathrm{HM}_\Phi)$; si $\Phi \leqslant \Psi \leqslant k\Phi + k_1$ (k, k_1 étant des constantes), $(\mathrm{HM}_\Psi) = (\mathrm{HM}_\Phi)$.

La classe $(\mathrm{H}_0\mathrm{M}_\Phi)$ ne se confond pas en général avec celle des fonctions u harmoniques dans $\mathrm{S} - \mathrm{S}_0$, nulles sur C_0, et telles que $\Phi(|u|)$ ait une majorante harmonique ; il en sera ainsi seulement si S est hyperbolique (théorème 5). Toutefois cette restriction est superflue pour une catégorie importante de fonctions Φ. En effet :

Théorème 6^{bis}. — *Soit $\Phi(t)$ une fonction croissante et convexe pour $t \geqslant 0$ telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\Phi(t)}{t} = +\infty$. Soit S une surface de Riemann, S_0 un domaine canonique de S. S'il existe dans $\mathrm{S} - \mathrm{S}_0$ une fonction harmonique u nulle sur C_0 et telle que $\Phi(|u|)$ admette une majorante harmonique, la surface S est hyperbolique, et $u \in (\mathrm{H}_0\mathrm{M}_\Phi)$.*

La démonstration est la même que celle du théorème 6, et utilise la propriété extrémale exprimée par le théorème 3 *bis*.

Remarque. — En général, (HM_Φ) n'est pas un espace vectoriel. En effet, si u et v sont harmoniques sur S et telles que $\Phi(|u|)$ et $\Phi(|v|)$ soient des majorantes harmoniques, il n'en résulte pas forcément que $\Phi(|u+v|)$ en admette une. Supposons par exemple que S soit le demi-plan $\{\mathcal{R}z > 0\}$, et que $u = \frac{1}{2}\log|z|$, $\Phi(t) = e^t$. Il est facile de voir que $e^u \leqslant \sqrt{2}\,\mathcal{R}(z^{1/2})$, donc que

$$e^{|u|} \leqslant \sqrt{2}\left[\mathcal{R}(z^{1/2}) + \mathcal{R}\left(\frac{1}{z^{1/2}}\right)\right];$$

mais e^{2u} (et a fortiori $e^{2|u|}$) n'admet pas de majorante harmonique dans le demi-plan, car s'il existait une fonction $h(z)$ harmonique dans $\{\Re z > 0\}$ et supérieure à $|z|$, $\frac{h(z)}{\Re z}$ tendrait pour $z \to \infty$, sur tout rayon $\arg z = \theta\left(|\theta| < \frac{\pi}{2}\right)$, vers $c = \inf \frac{h(z)}{\Re z}$ (théorème de Julia-Carathéodory, sous la forme donnée par Landau et Valiron [1]), ce qui est absurde, puisque $\frac{|z|}{\Re z} = \frac{1}{\cos\theta}$.

Pour que (HM_Φ) soit un espace vectoriel, il suffit que

$$\Phi(2t) \leqslant A.\,\Phi(t)$$

pour t assez grand, puisque Φ est convexe. Dans le cas général, on peut considérer à la place de (HM_Φ) l'espace vectoriel (HM_Φ^*) engendré par (HM_Φ) ; c'est encore l'ensemble des fonctions harmoniques u sur S pour lesquelles il existe une constante $\rho \neq 0$ telle que $\rho u \in (HM_\Phi)$.

8. Interprétation des fonctions de (HM_Φ) au moyen de l'uniformisation (29). — Soit S une surface de Riemann ouverte, $\widehat{S}$ son revêtement universel. Sauf en deux cas exceptionnels (surfaces paraboliques simplement ou doublement connexes), $\widehat{S}$ est une surface de Riemann hyperbolique, qu'on peut identifier au cercle unité $\{|z| < 1\}$. Nous supposerons cette identification faite une fois pour toutes, et nous appellerons $p(z)$ la projection de $z \in \widehat{S}$ sur S. Les automorphismes T du cercle unité qui satisfont à l'équation fonctionnelle $p(Tz) = p(z)$ forment un groupe proprement discontinu $\mathcal{G}$ de substitutions linéaires, dépourvu de substitutions elliptiques, et les fonctions harmoniques (resp. analytiques) sur S correspondent d'une façon biunivoque aux fonctions harmoniques (resp. analytiques) dans $\{|z| < 1\}$ *automorphes* par rapport au groupe $\mathcal{G}$. Si $u \in (HM_\Phi)_S$, il est clair que $u(p(z)) \in (HM_\Phi)_{\widehat{S}}$; réciproquement, si v est une fonction harmonique dans $\widehat{S}$, automorphe par rapport à $\mathcal{G}$, et telle que $\Phi(|v|)$ admette une majorante harmonique, $V = \widehat{\Phi(|v|)}$ est elle-même automorphe (car $V(Tz) \geqslant V(z)$ pour toute $T \in \mathcal{G}$), de sorte que la fonction harmonique sur S à laquelle est associée v appartient à $(HM_\Phi)_S$. Or, on sait que si $\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$, $(HM_\Phi)_{\widehat{S}}$ est la classe des fonctions harmo-

(29) Cf. R. Nevanlinna [8].

niques représentables par une intégrale de Poisson-Lebesgue

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}f(\varphi)d\varphi,$$

avec $f\in\mathcal{L}_\Phi$. Pour que la fonction (1) soit automorphe par rapport à $\mathcal{G}$, il faut que f le soit, c'est-à-dire que $f(\mathrm{T}\varphi)=f(\varphi)$ presque partout, pour toute $\mathrm{T}\in\mathcal{G}$ (en posant $\arg(\mathrm{T}e^{i\varphi})=\mathrm{T}\varphi$, pour simplifier les notations). Si $\lim\frac{\Phi(t)}{t}<+\infty$, on peut remplacer $\Phi(t)$ par t; la fonction $u(p(re^{i\theta}))$ est alors représentable par une intégrale de Poisson-Stieltjes

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}d\mu(\varphi),$$

où μ est une mesure vérifiant $d\mu(\mathrm{T}\varphi)=\frac{d(\mathrm{T}\varphi)}{d\varphi}\cdot d\mu(\varphi)$ pour toute $\mathrm{T}\in\mathcal{G}$.

2. Fonctions harmoniques positives et frontière idéale.

9. Comparaison des classes (HM_Φ) et $(\mathrm{H_0M}_\Phi)$. — Il est intéressant de savoir si les espaces de fonctions harmoniques à moyennes bornées (resp. bornées, à intégrale de Dirichlet finie) dépendent des propriétés de S « à distance finie » ou ne dépendent que des propriétés de la surface « au voisinage de la frontière idéale ». Ceci nous amène à comparer les classes (HM_Φ) et $(\mathrm{H_0M}_\Phi)$. Nous avons à ce sujet le théorème suivant :

Théorème 7. — *Soit* S *sur une surface de Riemann hyperbolique, et* S_0 *un domaine canonique de* S, *de frontière* C_0. *Il existe entre les fonctions harmoniques positives sur* S *et les fonctions harmoniques positives dans* $\mathrm{S}-\overline{\mathrm{S}_0}$ *nulles sur* C_0 *une correspondance biunivoque, linéaire, continue, croissante, et qui conserve la propriété pour une fonction harmonique d'être bornée, d'avoir ses moyennes d'ordre* Φ *bornées, ou son intégrale de Dirichlet finie. Cette correspondance se prolonge aux différences de fonctions harmoniques positives ; elle applique* (HM_Φ) *sur* $(\mathrm{H_0M}_\Phi)$. *En particulier, les espaces de Banach* (HM_α) *et* $(\mathrm{H_0M}_\alpha)$ [*resp* (HB) *et* $(\mathrm{H_0B})$, (HD) *et* $(\mathrm{H_0D})$] *sont isomorphes.*

Démonstration. — Soit u une fonction harmonique positive sur S ;

nous lui associerons la fonction $\mathring{u} = u - H_u^{S-\overline{S}_0}$, qui est nulle sur C_0 et qui vaut en quelque sorte u à la frontière idéale, puisque la solution du problème de Dirichlet extérieur y est associée à zéro. Si (S_n) est une exhaustion canonique de S, telle que $S_1 \supset \overline{S}_0$, $\mathring{u}$ est d'ailleurs la limite de la suite décroissante $\left(H_{u_{0,n}}^{S_n - \overline{S}_0}\right)$, en notant $u_{0,n}$ la fonction définie sur $C_n \cup C_0$ qui vaut u sur C_n et o sur C_0. $\mathring{u}$ est encore la plus grande fonction harmonique (ou sousharmonique) dans $S - S_0$, nulle sur C_0, qui minore u.

Inversement, soit v une fonction harmonique positive dans $S - \overline{S}_0$ s'annulant sur C_0. On sait que la fonction (v, o) égale à v dans $S - \overline{S}_0$ et à o dans S_0 est sousharmonique sur S ; nous allons voir que sa plus petite majorante harmonique $\bar{v}$ existe, c'est-à-dire que la suite des fonctions $v_n = H_v^{S_n}$ a une limite finie quand $n \to \infty$. Soit ω_n la mesure harmonique de C_n par rapport à $S_n - \overline{S}_0$; comme S est hyperbolique, $\omega = \lim\limits_{n} \omega_n$ est $> o$ au moins dans une composante connexe de $S - \overline{S}_0$. Une double application de la formule de Green (à v_n et ω_n, puis à v et ω_n) nous conduit aux égalités suivantes, dans lesquelles ν désigne la normale intérieure à $S_n - \overline{S}_0$:

$$\int_{C_0} v_n \frac{\partial \omega_n}{\partial \nu} ds + \int_{C_n} v_n \frac{\partial \omega_n}{\partial \nu} ds = \int_{C_n} \frac{\partial v_n}{\partial \nu} ds = o,$$

puisque v_n est harmonique dans S_n ;

$$\int_{C_n} v \frac{\partial \omega_n}{\partial \nu} ds = \int_{C_n} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = -\int_{C_0} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds.$$

Mais $v_n = v$ sur C_n ; par conséquent, $\displaystyle\int_{C_0} v_n \frac{\partial \omega_n}{\partial \nu} ds = \int_{C_0} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = \text{Cte}.$

Comme $v_n > o$ si $v \neq o$, et $o \leqslant \dfrac{\partial \omega}{\partial \nu} \leqslant \dfrac{\partial \omega_n}{\partial \nu}$ sur C_0, avec $o < \dfrac{\partial \omega}{\partial \nu}$ sur une composante connexe de C_0 au moins, $\displaystyle\int_{C_0} v_n \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds$ est bornée, de sorte que v_n ne peut tendre vers $+\infty$ uniformément sur tout compact [30].

[30] On peut également définir $\bar{v}$ au moyen du procédé alterné de Schwarz. Soit $S'_0 \supset \overline{S}_0$. Si $v_0 = v$, $w_n = H_{v_{n-1}}^{S'_0}$, $v_n = v + H_{w_n}^{S - \overline{S}_0}$, on voit à l'aide d'un lemme de Sario ([3], lemme 2) que les suites (v_n) et (w_n) convergent uniformément, la limite étant la même dans $S'_0 - \overline{S}_0$. La fonction harmonique ainsi définie sur S majore (v, o) mais est inférieure à toute majorante harmonique de cette fonction ; c'est donc $\bar{v}$.

Les applications $u \to \mathring{u}$ et $v \to \bar{v}$ sont visiblement additives et croissantes ; nous allons montrer qu'elles sont biunivoques et réciproques l'une de l'autre. Il suffit pour cela d'établir que $\bar{\mathring{u}} = u$ et $\mathring{\bar{v}} = v$. Tout d'abord, $v \leqslant \bar{v}$ entraîne $v \leqslant \mathring{\bar{v}} \leqslant \bar{v}$, donc $\bar{\mathring{\bar{v}}} = \bar{v}$; si $v_1 = \mathring{\bar{v}} - v$, on a $\overline{v + v_1} = \bar{v} + \bar{v}_1 = \bar{v}$, d'où $\bar{v}_1 = 0$ et $v_1 = 0$; ainsi $\mathring{\bar{v}} = v$. D'autre part, $\bar{\mathring{u}} \leqslant u$, car u majore $(\mathring{u}, 0)$; ce qui précède montre que $\mathring{\bar{\mathring{u}}} = \mathring{u}$, donc $(u - \bar{\mathring{u}})^{\circ} = 0$. Or $\mathring{u} = 0$ implique $u = 0$, car cela équivaut à $u = H_u^{S - S_0}$, et u, définie sur S tout entière, ne peut être associée à zéro à la frontière idéale que si elle est identiquement nulle (théorème 1). Par conséquent, $\bar{\mathring{u}} = u$.

Si u (resp. v) est bornée, $\mathring{u}$ (resp. $\bar{v}$) l'est également, et a même borne. Si $\Phi(t)$ satisfait aux conditions du début du n° 7, et si $\Phi(u)$ admet une majorante harmonique U, $\Phi(\mathring{u})$ est majorée par $\mathring{U}$; inversement, si $\Phi(v)$ est majorée par V nulle sur C_0, on a

$$v \leqslant \Phi^{-1}(V) \leqslant \Phi^{-1}(\bar{V}) ;$$

cette dernière fonction étant surharmonique et positive,

$$(v, 0) \leqslant \Phi^{-1}(\bar{V})$$

entraîne $\bar{v} \leqslant \Phi^{-1}(\bar{V})$, ou $\Phi(\bar{v}) \leqslant \bar{V}$. Enfin, si $D_S(u) < +\infty$, $D_{S-\bar{S}_0}(\mathring{u})$ est également $< +\infty$, et réciproquement ; on a plus précisément, en posant $M = \max\limits_{C_0} u$:

$$(1) \qquad D_S(u) \leqslant D_{S-\bar{S}_0}(\mathring{u}) \leqslant D_S(u) + M^2 D_{S-\bar{S}_0}(\omega).$$

Nous supposerons tout d'abord que S est un domaine canonique d'une autre surface de Riemann S*. Soit C la frontière de S ; $u = \mathring{u}$ sur C, tandis que $\mathring{u} \leqslant u \leqslant \mathring{u} + M(1 - \omega)$ dans $S - \bar{S}_0$ (ceci est d'ailleurs vrai quelle que soit S). On en déduit que sur C

$$\frac{\partial \mathring{u}}{\partial \nu} \leqslant \frac{\partial u}{\partial \nu} \leqslant \frac{\partial \mathring{u}}{\partial \nu} - M \frac{\partial \omega}{\partial \nu}$$

Or, $D_S(u) = -\int_C u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$, $D_{S-\bar{S}_0}(\mathring{u}) = -\int_{C+C_0} \mathring{u} \frac{\partial \mathring{u}}{\partial \nu} ds = -\int_C u \frac{\partial \mathring{u}}{\partial \nu} ds$. On a donc, puisque $u > 0$,

$$D_S(u) \leqslant D_{S-\bar{S}_0}(\mathring{u}) \leqslant D_S(u) - M \int_C u \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds$$
$$= D_S(u) + M \int_{C_0} u \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds \leqslant D_S(u) + M^2 \int_C \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds. \text{ C. Q. F. D.}$$

Lorsque S est quelconque, on applique (1) aux domaines d'approximation S_n, et on voit sans peine que la double inégalité est encore vraie à la limite.

La correspondance $u \to \mathring{u}$ s'étend de manière évidente aux différences de fonctions harmoniques positives, et ne cesse pas d'être biunivoque (car si $\mathring{u}_1 = \mathring{u}_2$, $u_1 = u_2$, et si $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$, $v_1 = v_2$). Elle applique (HM_Φ) sur (H_0M_Φ), puisque $u \in (HM_\Phi)$ équivaut à $\widehat{|u|} \in (HM_\Phi)$, et que la propriété est vraie pour les fonctions positives ; c'est donc un isomorphisme algébrique de (HM_α) sur (H_0M_α) (resp. de (HB) sur (H_0B), de (HD) sur (H_0D)). Nous allons voir que c'est même un isomorphisme d'espaces normés. Pour cela, il suffit, d'après un théorème de Banach ([31]), de montrer que c'est une application continue. Or, quand $S - \bar{S}_0$ est connexe, c'est évident, parce que $\|\mathring{u}\|_\alpha \leqslant \|u\|_\alpha$ si les deux normes sont définies à partir du même point $a \in S - \bar{S}_0$; dans le cas général, il existe donc une constante K_α telle que $\|\mathring{u}_\alpha\| \leqslant K_\alpha \|u\|_\alpha$; pour les fonctions à intégrale de Dirichlet finie, la définition de $\|u\|_D$ et les inégalités (1) montrent qu'on a encore $\|\mathring{u}\|_D \leqslant K_D \|u\|_D$.

Remarque I. — *L'application $u \to \mathring{u}$ est également bicontinue sur toute boule de* (HM_1) *ou de* (H_0M_1) *pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

En effet, une boule de (HM_1) est compacte pour cette topologie ([32]), et $u \to \mathring{u}$, qui est biunivoque et visiblement continue, d'après la formule $\mathring{u} = u - H_u^{S-S_0}$, est alors un homéomorphisme de la boule sur son image. En particulier, si une *suite* de fonctions positives $v_n \in (H_0M_1)$ converge uniformément sur tout compact vers v, $\bar{v}_n$ tend vers $\bar{v}$, puisqu'une suite convergente de fonctions harmoniques est nécessairement bornée sur tout compact.

Remarque II. — Soient S_1 et S_2 deux surfaces de Riemann hyperboliques, V_1 (resp. V_2) un « cercle » de S_1 (resp. S_2), et $\tilde{S}_2$ la surface de Riemann symétrique de S_2 (c'est-à-dire définie par le paramétrage conjugé). On peut raccorder S_1 et $\tilde{S}_2$ en une surface de Riemann S,

([31]) S. Banach, *Théorie des Opérations linéaires*, Warszawa, 1932, chap. III, théorème 5, p. 41. L'inégalité $\|\mathring{u}\|_\alpha \geqslant k_\alpha \|u\|_\alpha$ peut d'ailleurs se démontrer au moyen de la formule de Green.

([32]) En effet, les fonctions de (HM_1) qui vérifient $\widehat{|u|}(a) \leqslant M$ sont bornées dans leur ensemble sur tout compact, d'après le principe de Harnack. D'autre part, si u_0 est limite uniforme sur tout compact d'une suite (ou d'un filtre) de telles fonctions u, il existe une suite partielle (ou un filtre plus fin), pour laquelle $\widehat{|u|}$ converge, de sorte que $\widehat{|u_0|}$ existe, et que $\widehat{|u_0|}(a) \leqslant M$.

telle qu'une courbe simple C la morcelle en deux domaine G_1 et G_2 conformément équivalents l'un à $S_1 - V_1$, l'autre à $\tilde{S}_2 - \tilde{V}_2$. Le théorème précédent montre alors que $(HM_\alpha)_S$ est la somme directe de deux sous-espaces isomorphes à $(HM_\alpha)_{S_1}$ et $(HM_\alpha)_{S_2}$ respectivement. Par exemple, à partir d'une surface hyperbolique pour laquelle (HM_α) est de dimension 1, on peut obtenir des surfaces telles que dim (HM_α) soit un entier quelconque.

10. Frontière idéale. Frontière de Martin. — Le théorème 7 nous amène à chercher une définition plus précise de la frontière idéale d'une surface de Riemann hyperbolique S, afin que la connaissance de cette frontière nous renseigne sur les classes de fonctions harmoniques positives sur S. D'une façon générale, il est avantageux de considérer la frontière idéale non plus globalement comme nous l'avons fait jusqu'ici, mais comme un ensemble Γ de points-frontière idéaux, dont l'adjonction à S donne un nouvel espace topologique $\bar{S}$ (qui ne sera pas forcément l'espace sous-jacent d'une autre surface de Riemann). Les éléments-frontière peuvent être définis de diverses manières : comme limites « idéales » de filtres sans point adhérent sur S, ou plus particulièrement par complétion de S pour une structure uniforme compatible avec la topologie de S, ou par immersion de S dans un espace compact E tel que la topologie induite sur S par celle de E coïncide avec la topologie de S ; dans ce dernier cas, $\bar{S}$ est l'adhérence de S dans E, et $\Gamma = \bar{S} - S$ est la frontière de S dans $\bar{S}$, puisque S, localement compacte, est ouverte dans $\bar{S}$ (33).

Ainsi posé, le problème d'ajouter à S une frontière idéale est susceptible de nombreuses solutions. On peut prendre par exemple $\Gamma = \{A\}$, où A est le *point à l'infini* d'Alexandroff (34) ; c'est ce qu'on fait implicitement lorsqu'on considère la frontière idéale de façon globale, sans la différencier en points. M. Brelot (35) a montré qu'au moyen de ce point A on peut ramener la solution du problème de Dirichlet extérieur à celle du problème de Dirichlet ordinaire.

Les méthodes précédentes conduisent également à la frontière idéale de Kerekjarto-Stoïlow (36), dans laquelle chaque point-frontière

(33) N. Bourbaki, *Top, gén.*, I, § 10, propos. 12.

(34) *Ibid.*, § 10, th. 4.

(35) Cf. M. Brelot [4] pour l'espace R^n, et M. Brelot et G. Choquet [1] pour un espace de Green.

(36) B. von Keréjártó [1], et S. Stoilow [1].

est défini par un filtre sans point adhérent ayant une base formée de *domaines* « non compacts » à frontière compacte. Γ est alors un ensemble totalement discontinu, et $\overline{S}$ est connexe et localement connexe.

Mais toute définition purement topologique de la frontière idéale présente l'inconvénient de ne pas tenir compte de la « force » de la frontière (37), c'est-à-dire de la plus ou moins grande abondance des fonctions harmoniques ou analytiques de catégories données au voisinage de la frontière ou d'une de ses composantes. C'est ainsi par exemple qu'elle ne permet pas de distinguer la frontière idéale du cercle unité de celle du plan complexe fini, alors que la première de ces surfaces est hyperbolique et la seconde parabolique.

Pour obtenir une réalisation ponctuelle de la frontière idéale qui soit satisfaisante à ce point de vue, il nous faut faire appel à la topologie de R. S. Martin (38), qui introduit des éléments-frontière définis par les fonctions harmoniques elles-mêmes. Ce procédé conduit à une représentation intégrale des fonctions de (HM_1) dans laquelle chacune d'elles est associée de manière unique à une mesure de Radon sur Γ portée par un sous-espace Γ_1 de Γ. *La méthode et les démonstrations de R. S. Martin s'étendent sans modification aux surfaces de Riemann hyperboliques*, lorsqu'on dispose des résultats du chapitre précédent concernant le problème de Dirichlet extérieur et le balayage ; aussi n'en rappellerons-nous que les grandes lignes.

Soit donc S une surface de Riemann hyperbolique, a un point fixe de S, et soit $K(p, q)$ la « fonction de Green normalisée » de pôle q, définie pour $q \neq a$ par $K(p, q) = \dfrac{g(p, q)}{g(a, q)}$; si $q = a$, on pose $K(p, a) = 0$ lorsque $p \neq a$, et $K(a, a) = 1$. Pour $q \in S$, ces fonctions forment une famille F normale dans $S - \{a\}$ (39), donc relativement compacte dans l'espace $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_c(S - \{a\}, \overline{R}_+)$ des fonctions continues sur $S - \{a\}$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, muni de la topologie de la convergence compacte. Or, F est homéomorphe à S, car si l'on pose $f_q(p) = K(p, q)$, l'application biunivoque $q \rightarrow f_q$ de S sur F fait

(37) Cf. L. Sario [2], Introduction.

(38) R. S. Martin [1]. Voir aussi J. Deny [1], M. Brelot [7]. Dans la suite l'indice supérieur $\mathcal{M}$ indiquera que les notions correspondantes sont prises dans la topologie de Martin. Par exemple, $\overline{A}^{\mathcal{M}}$ sera l'adhérence-Martin de A (dans $\overline{S}$).

(39) L'ensemble des valeurs prises par les fonctions $K(p, q)$ est le segment fermé $[0, +\infty]$; l'équicontinuité des $K(p, q)$ est relative à cet espace de valeurs ; elle équivaut à l'équicontinuité au sens ordinaire des fonctions $e^{-K(p, q)}$.

correspondre au voisinage $\{K(q_0, q) > \lambda\}$ de $q_0 \in S$ l'ensemble des f_q telles que $f_q(q_0) > \lambda$, qui est un voisinage de f_{q_0} dans le sous-espace F de $\mathcal{C}_c$ ([40]).

Si l'on identifie S et F, on peut prendre comme frontière idéale de S l'ensemble $\overline{F} - F$ ($\overline{F}$ étant l'adhérence de F dans $\mathcal{C}_c$) ; chaque élément-frontière idéal $s \in \Gamma$ est donc défini par une fonction harmonique positive $K(p, s)$, limite uniforme sur tout compact de fonctions $K(p, q)$, pour des $q \in S$ (et dont on dira justement qu'ils tendent vers s). La fonction $K(p, r)$ est donc définie pour $p \in S$ et $r \in \overline{S} = S \cup \Gamma$; elle est harmonique en p pour r fixe (et $\neq a$), et continue en r pour p fixe (puisque obtenue en prolongeant $K(p, q)$ par continuité). On peut remarquer que la structure uniforme $\overline{S}$ est métrisable (par exemple, par la distance $\delta(r_1, r_2) = \sup\limits_{p \in S} \left| \frac{K(p, r_1)}{1 + K(p, r_1)} - \frac{K(p, r_2)}{1 + K(p, r_2)} \right|$, r_1 et $r_2 \in \overline{S}$), ce qui permet de définir Γ également par complétion : *on appellera suite déterminante* d'un élément $s \in \Gamma$ une suite de Cauchy dans S (munie de la structure uniforme induite) qui a pour limite s.

Soit maintenant u une fonction harmonique positive sur S et A un compact de S. L'extrémale u_A (cf. chap. II, n° 12), associée à zéro à la frontière idéale, est un potentiel de Green ; elle peut donc se mettre sous la forme $u_A(p) = \int K(p, q) d\mu_A(q)$, où μ_A est une mesure positive portée par la frontière de A, et de masse totale $u_A(a) \leqslant u(a)$. Lorsque A tend vers S, u_A tend vers u, et μ_A, considérée comme mesure de Radon sur $\overline{S}$, a au moins une limite vague μ, portée par Γ ; on a ainsi $u(p) = \int_\Gamma K(p, a) d\mu(s)$. Il peut exister plusieurs mesures positives μ sur Γ qui vérifient l'égalité précédente, mais R. S. Martin a montré qu'il y en a toujours une et une seule (dite mesure canonique associée à u) qui ne charge que l'ensemble Γ_1 des *points minimaux* (on dit qu'un point $s \in \Gamma$ est minimal si $K(p, s)$ est une fonction harmonique minimale, c'est-à-dire si toute fonction harmonique positive qui la minore lui est proportionnelle ([41])) ; lorsque μ est la mesure canonique associée à u, $\int_\Gamma K(p, s) d\mu(s)$ est appelée la représentation canonique de u. *La possibilité d'une représentation intégrale et l'unicité de la représentation canonique s'étendent*

([40]) Cf. N. Bourbaki, *Top. Gén.*, X, § 2, propos. 7.

([41]) Réciproquement, toute fonction harmonique positive minimale est une fonction $K(p, s)$ (Martin, *loc. cit.*).

de façon évidente aux fonctions de (HM_1); on notera que l'ordre des mesures canoniques est le même que celui des fonctions, puisqu'à une fonction positive est associée une mesure positive : (HM_1) est isomorphe à l'espace vectoriel ordonné des mesures canoniques.

Lorsque S est un domaine relativement compact d'une autre surface de Riemann S^*, et que sa frontière C par rapport à S^* est très régulière, on peut idendifier la frontière de Martin Γ à C (cf. de la Vallée Poussin [1], et J. Deny (loc. cit.)); si $s \in C$, la fonction associée est $K(p, s) = \left[\frac{\partial g(p, q)}{\partial \nu_q} \Big/ \frac{\partial g(a, q)}{\partial \nu_q}\right]_{q=s}$. Mais si la frontière de S est quelconque, il n'en est plus de même ; on sait du reste que deux domaines plans conformément équivalents peuvent avoir des frontières très différentes (par exemple, un domaine dont la frontière est totalement discontinue peut être appliqué sur un domaine borné ([42])). Si S est simplement connexe, les éléments-frontière de Martin coïncident avec les bouts-premiers ; d'une façon générale, la frontière de Martin apparaît comme la « frontière conforme » de la surface de Riemann S. Aussi est-ce à elle que nous réserverons dans la suite la notation Γ et le nom de frontière idéale ([43]).

11. D'autre part, le théorème 7 nous montre que la frontière de Martin d'une surface de Riemann S ne dépend pas de la surface tout entière, mais seulement de l'extérieur d'un compact (d'ailleurs arbitraire) de S : si l'on peut trouver, sur deux surfaces de Riemann S^1 et S^2 des domaines canoniques $S_0^1 \subset S^1$ et $S_0^2 \subset S^2$ tels que $S^1 - S_0^1$ et $S^2 - S_0^2$ soient en correspondance biunivoque et conforme, S^1 et S^2 ont même frontière de Martin. Cela résulte de la proposition plus générale suivante :

Soit S_0 un domaine canonique d'une surface de Riemann hyperbolique S ; soient G_i ($1 \leqslant i \leqslant m$) les domaines composants de $S - \overline{S_0}$, et soit $C_0^{(i)}$ la frontière de G_i dans S. La frontière de Martin Γ de S est la réunion d'ensembles fermés disjoints Γ_i dont chacun est homéomorphe

([42]) Cf. L. Ahlfors et A. Beurling [1], remarques finales.

([43]) Il est à remarquer que la frontière de Martin ne dépend qu'en apparence du point a choisi sur S. En effet, si on remplace a par b, on obtient comme limites de fonctions de Green normalisées les fonctions $K_b(p, s) = \frac{K_a(p, s)}{K_a(b, s)}$. L'espace topologique Γ est donc indépendant du point a. Si μ_a est la mesure canonique associée à u, lorsque le point de référence est a, on a $d\mu_b(s) = K_a(b, s) d\mu_a(s)$, de sorte que la mesure $K_a(p, s) d\mu_a(s)$ ne dépend pas de a.

à la partie $\Gamma^{(i)}$ *de la frontière de Martin de* G_i *qui n'est pas identifiable à* $C_0^{(i)}$.

Remarquons d'abord que les résultats du théorème 7 et de la remarque 1 qui le suit s'étendent aux fonctions harmoniques positives sur S régulières sauf en des singularités isolées (il suffit d'appliquer ce théorème à la surface obtenue en ôtant de S ces singularités). Par exemple, si $q \in S - \overline{S}_0$, $\mathring{g}(p, q)$ se trouve ainsi définie par

$$g(p, q) - H^{S-\overline{S}_0}_{g(p, q)}(p),$$

et est égale, comme nous l'avons vu plus haut, à la fonction de Green de pôle q de $S - \overline{S}_0$; elle est donc nulle dans tout G_i ne contenant pas q. Si (q_n) est une suite déterminante d'un élément $s \in \Gamma$, $\mathring{K}(p, q_n) = \dfrac{\mathring{g}(p, q_n)}{g(a, q_n)}$ tend vers $\mathring{K}(p, s)$, puisque $K(p, q_n)$ tend vers $K(p, s)$ uniformément sur tout compact. Or, $\mathring{K}(p, q_n) = 0$ si p n'appartient pas à la composante connexe de q_n dans $S - \overline{S}_0$; par conséquent, les points q_n appartiennent au même domaine G_i à partir d'un certain rang, car s'il y avait deux domaines G_i contenant une infinité de q_n, $\mathring{K}(p, s)$ serait identiquement nulle, donc aussi $K(p, s)$, ce qui est absurde, puisque $K(a, s) = 1$.

On en déduit que, pour $i \neq j$, $\overline{G}_i^{\mathcal{M}} \cap \overline{G}_j^{\mathcal{M}} = \emptyset$ (sans quoi il existerait un $s \in \Gamma$ qui aurait une suite déterminante dans G_i et une autre dans G_j) ; si l'on pose $\Gamma_i = \Gamma \cap \overline{G}_i^{\mathcal{M}}$, $(\Gamma_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ constitue une partition de Γ en ensembles fermés disjoints (qui sont donc ouverts dans Γ).

Si nous appliquons ce qui précède à un domaine G_i, nous voyons que la frontière de Martin de la surface de Riemann G_i se décompose en deux ensembles fermés disjoints, dont l'un est homéomorphe à $C_0^{(i)}$; nous appellerons l'autre $\Gamma^{(i)}$. Soit alors (q_n) une suite déterminante dans S, qui tend vers $s \in \Gamma_i$; nous supposerons que tous les q_n sont dans G_i, ainsi que le point a. Comme $\dfrac{\mathring{g}(p, q_n)}{\mathring{g}(a, q_n)} = \dfrac{\mathring{K}(p, q_n)}{\mathring{K}(a, q_n)}$ tend vers $\dfrac{\mathring{K}(p, s)}{\mathring{K}(a, s)}$, on voit que (q_n) est également une suite déterminante dans G_i, et qu'à l'élément-frontière $s \in \Gamma_i$ correspond un élément-frontière $s' \in \Gamma^{(i)}$, défini par la fonction $\dfrac{\mathring{K}(p, s)}{\mathring{K}(a, s)}$. Inversement, on peut voir, par un raisonnement tout à fait analogue, que toute suite déterminante dans G_i qui ne tend pas vers un point de $C_0^{(i)}$ est une suite déterminante dans S, et qu'à tout $s' \in \Gamma^{(i)}$ est associé un élément s de Γ_i. La correspondance biunivoque ainsi établie entre Γ_i et $\Gamma^{(i)}$ est visiblement bicontinue ; on peut identifier ces deux ensembles.

Plus généralement, soit D un domaine de S. On peut définir la « frontière idéale de D relativement à S » (au sens de Martin) par $\Gamma(D) = \Gamma \cap \overline{D}^{\mathcal{M}}$; c'est un sous-ensemble fermé de Γ, qui est vide si D est relativement compact, et qui est également ouvert dans Γ, d'après ce qui précède, si D est « non compact », mais à frontière compacte.

Revenons alors à la frontière idéale de Kerekjarto-Stoïlow ; soit α un élément de cette frontière, défini par une base de filtre $\mathfrak{D}(\alpha)$ formée de domaines « non compacts » à frontière compacte. Nous poserons $\Gamma(\alpha) = \bigcap_{D \in \mathfrak{D}(\alpha)} \Gamma(D)$; comme $\bigcap_{D \in \mathfrak{D}(\alpha)} \overline{D} = \emptyset$, on a aussi $\Gamma(\alpha) = \bigcap_{D \in \mathfrak{D}(\alpha)} \overline{D}^{\mathcal{M}}$. La première égalité montre que $\Gamma(\alpha)$ est l'intersection d'ensembles à la fois ouverts et fermés dans Γ ; la dernière, que $\Gamma(\alpha)$ est connexe. Il en résulte que $\Gamma(\alpha)$ est une composante connexe de Γ. En outre, si $\alpha \neq \beta$, $\Gamma(\alpha) \cap \Gamma(\beta) = \emptyset$, car on peut toujours trouver $D_1 \in \mathfrak{D}(\alpha)$ et $D_2 \in \mathfrak{D}(\beta)$ tels que $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 = \emptyset$ (44), ce qui entraîne, comme nous l'avons vu, que $\overline{D}_1^{\mathcal{M}} \cap \overline{D}_2^{\mathcal{M}} = \emptyset$. *La frontière de Kerekjarto-Stoïlow est donc l'espace quotient de* Γ *par la relation d'équivalence dont les classes sont les composantes connexes de* Γ.

12. Si α est un élément de première espèce, c'est-à-dire si $\mathfrak{D}(\alpha)$ contient un domaine quasi simple D, le théorème de représentation conforme de Kœbe (45) permet de prolonger S en une surface de Riemann S′ pour laquelle l'élément-frontière α a disparu : $\Gamma(\alpha)$ est ainsi identifiable à la frontière de Martin du complémentaire d'un compact du plan complexe. En particulier, si α est isolé, on peut choisir D doublement connexe, de sorte que $\Gamma(\alpha)$ se réduira à un point isolé si D est parabolique, et sera homéomorphe à une courbe simple fermée si D est hyperbolique (on dira que α est parabolique dans le premier cas, hyperbolique dans le second).

Considérons maintenant la surface de revêtement universel $\widehat{S}$ de S, et le groupe automorphe $\mathcal{G}$ correspondant (nous supposerons que $\widehat{S}$ est

(44) En effet, si (S_n) est une exhaustion canonique de S, on peut toujours prendre pour $\mathfrak{D}(\alpha)$ un ensemble de domaines composants d'ouverts $\complement S_n$ cf. Stoïlow [1], p. 87).

(45) Kœbe [1]. Voir aussi Fatou (*Fonctions automorphes*, Paris, 1931), etc...

le cercle unité $\{|z|<1\}$, cf. n° 8). On sait[46] que les éléments-frontière isolés de Kerekjarto-Stoïlow sont associés de façon biunivoque aux classes mod $\mathcal{G}$ de points doubles de substitutions paraboliques, s'ils sont paraboliques, aux classes d'arcs complètement réguliers de $\{|z|=1\}$, s'ils sont hyperboliques (un point-frontière de $\widehat{S}$ est dit régulier si $\mathcal{G}$ y est encore proprement discontinu et un arc ouvert de $\{|z|=1\}$ est dit complètement régulier si tous ses points sont réguliers et si ses extrémités sont les points doubles d'une même substitution hyperbolique de $\mathcal{G}$).

Plus généralement, *nous allons montrer qu'à toute classe de points réguliers de* $\{|z|=1\}$, *et à toute classe de points doubles de substitutions paraboliques, correspond un point-frontière de Martin.* Nous utiliserons pour cela le lemme suivant, dans lequel $\hat{g}(z, \zeta)$ et $\widehat{K}(z, \zeta)$ désignent la fonction de Green et la fonction de Martin relatives à S[47] :

LEMME. — *Soit* ζ_0 *un point-frontière du cercle unité. Pour* $0<\rho<r<1$, *il existe une constante* A, *ne dépendant que de* r *et* ρ, *telle que pour* $|z|<1$, $|z-\zeta_0|>r$, *et* $|\zeta|\leqslant 1$, $|\zeta-\zeta_0|<\rho$ *on ait.*

$$(1) \qquad \widehat{K}(z, \zeta) \leqslant A.\, \hat{g}(z, 0).$$

Si ζ_0 est un point régulier, il existe un voisinage de ζ_0 dans $\widehat{S}$ où la fonction $p(z)$ (projection de $\widehat{S}$ sur S) est univalente ; pour z donné, on pourra supposer, en restreignant au besoin ce voisinage, qu'il ne contient pas les points $Tz(T\in\mathcal{G})$. Comme $g(p(z),\ p(0)) = \sum_{T\in\mathcal{G}} \hat{g}(Tz,\ 0) < +\infty$, la série (2) $\sum_{T\in\mathcal{G}} \widehat{K}(Tz,\ \zeta)$, où z est fixé, converge uniformément en ζ pour $|\zeta|\leqslant 1$ et $|\zeta-\zeta_0|$ assez petit, d'après (1); elle représente donc une fonction harmonique de z. Lorsque $|\zeta|<1$ on a (3) $\dfrac{\widehat{K}(Tz,\ \zeta)}{\widehat{K}(T(0),\ \zeta)} = K(p(z),\ p(\zeta))$, si l'on prend pour a le point $p(0)$. Si $\zeta \to \zeta_0$, la fonction (3) converge simplement (donc uniformément sur tout compact de $\widehat{S}$) vers $\dfrac{\widehat{K}(Tz,\ \zeta_0)}{\widehat{K}(T(0),\ \zeta_0)}$, donc $p(\zeta)$ tend

(46) Cf. KŒBE (*Acta Math.*, 40, 1916, p. 250), L. BIEBERBACH (*Lehrbuch der Funktionen-theorie*, II, Berlin, 1927), G. JULIA (*Leçons sur la représentation conforme des domaines multiplement connexes*, Paris, 1934) pour les domaines plans, M. OHTSUKA [1] pour les surfaces de RIEMANN.

(47) Ce lemme se rattache aux considérations de M. BRELOT [8] sur l'activité de la frontière. Nous la démontrerons plus loin sous une forme plus générale (n° 17, inégalité 1).

vers un point-frontière de Martin $s(\zeta_0)$. De plus, le même raisonnement montre que si $|\zeta| = 1$ et $\zeta \to \zeta_0$, $s(\zeta)$ tend vers $s(\zeta_0)$. Enfin, si ζ appartient au même arc régulier que ζ_0, et n'est pas équivalent à ζ_0 suivant G, $s(\zeta) \neq s(\zeta_0)$, car l'inégalité (1) permet encore de voir que $\widehat{K}(p(z), s(\zeta))$ reste bornée quand $z \to \zeta_0$. Il en résulte que les $s(\zeta)$ associés aux points d'un même arc régulier forment un sous-ensemble de Γ homéomorphe à un arc de courbe simple.

Si ζ_0 est le point double d'une substitution parabolique T_0 (dont nous supposerons qu'elle engendre le sous-groupe $\mathcal{G}_0$ des substitutions paraboliques de G ayant pour point double ζ_0), on a (4) $\widehat{K}(T_0 z, \zeta_0) = \widehat{K}(z, \zeta_0)$. La série (2) ne converge plus, mais il suffira de considérer la série (5) $\sum_{T \in \mathcal{H}} \widehat{K}(Tz, \zeta_0)$, où $\mathcal{H}$ est un ensemble de substitutions linéaires ayant un représentant et un seul dans chaque classe à droite modulo $\mathcal{G}_0$ Or, la série (5) converge, car si z est donné, on peut toujours choisir $\mathcal{H}$ de façon que Tz reste hors d'un voisinage de ζ_0, lorsque $T \in \mathcal{H}$. La fonction harmonique représentée par (5), automorphe d'après (4), est une fonction harmonique minimale de $p(z)$, donc définit un point-frontière de Martin, dont on vérifie aisément qu'il est isolé.

4. — Application à la Classification

13. Classes absolues. — Nous allons maintenant appliquer des résultats du début de ce chapitre à la classification des surfaces de Riemann, en définissant de nouvelles classes et en examinant leurs relations avec celles que nous connaissons déjà [48]. Nous commencerons par les classes « absolues », c'est-à-dire définies au moyen de fonctions harmoniques sur la surface entière. Dans tout ce qui suit, Φ *désignera une fonction convexe et strictement croissante dans* $[0, +\infty[$, *et* α *un exposant* ≥ 1.

Définition 1. — *Nous dirons qu'un surface de Riemann* S *appartient à la classe* $\mathcal{C}_{HM_\Phi}$ (*resp.* $\mathcal{C}_{HM_\alpha}$, $\mathcal{C}_{HB}$, $\mathcal{C}_{HD}$) *si toute fonction harmonique uniforme qui a ses moyennes d'ordre* Φ *bornées sur* S (*resp. qui a ses moyennes d'odre* α *bornées, qui est bornée, qui a une intégrale de Dirichelet finie*) *est constante, autrement dit si* (HM_Φ^*) (*resp.* (HM_α), (HB), (HD)), *est de dimension* 1.

$\mathcal{C}_{HM_1}$ est encore la classe des surfaces de Riemann sur lesquelles

[48] Voir Sario [2].

toute fonction harmonique positive est constante. D'après le critère d'hyperbolicité de Brelot, (chap. II, n° 2), toute surface parabolique possède cette propriété, de sorte que $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_{HM_1}$ ([49]); d'autre part, on a vu plus haut que $(HB) \subset (HM_\Phi) \subset (HM_1)$ pour toute fonction Φ du type indiqué, et que $(HM_\alpha) \supset (HM_\beta)$ pour $\alpha \leqslant \beta$, et $(HD) \subset (HM_2)$, donc $\mathcal{C}_{HM_\alpha} \subset \mathcal{C}_{HM_\beta}$ si $\alpha \leqslant \beta$, et $\mathcal{C}_{HM_2} \subset \mathcal{C}_{HD}$.

Il est clair que Φ et $k\Phi + l$ (k et l constantes) définissent la même classe de surfaces ; en particulier, si $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\Phi(t)}{t} < +\infty$, $\mathcal{C}_{HM_\Phi} = \mathcal{C}_{HM_1}$.

14. Classes « relatives ». — A chaque classe « absolue » on peut associer une classe relative définie de façon analogue, mais à partir de fonctions qui n'existent que dans un voisinage de la frontière idéale, et qui s'annulent sur le bord de ce voisinage.

Définition 2. — *Soit* S *une surface de Riemann,* S_0 *un domaine canonique de* S, *de bord* C_0. *On dira que* S *appartient à la classe « relative »* $\mathcal{C}_{H_0M}$ (*resp.* $\mathcal{C}_{H_0M_\alpha}$, $\mathcal{C}_{H_0B}$, $\mathcal{C}_{H_0D}$) *si l'espace vectoriel* $(H_0M_\Phi^*)$ (*resp.* (H_0M_α), (H_0B), (H_0D)) *est réduit à* $\{0\}$, *c'est-à-dire si toute fonction harmonique dans* $S - S_0$ *nulle sur* C_0 *et à moyennes d'ordre* Φ *bornées dans* $S - \overline{S_0}$ (*resp. à moyennes d'ordre* α *bornées, bornée, à intégrale de Dirichlet finie*) *est identiquement nulle.*

Les théorèmes 5 et 7 montrent que cette propriété ne dépend pas du domaine S_0 choisi. Plus précisement, le théorème 5 est équivalent au suivant :

Théorème. — *Les classes relatives* $\mathcal{C}_{H_0M_\Phi}$, $\mathcal{C}_{H_0B}$, $\mathcal{C}_{H_0D}$ *sont identiques à la classe* $\mathcal{C}_0$ *des surfaces de Riemann paraboliques.*

Corollaire. — *Les classes relatives sont contenues dans les classes absolues correspondantes.*

Cela peut d'ailleurs se voir directement, car $u \in (HM_\Phi)$ implique $\dfrac{1}{2}\left(\omega - H_u^{S-\overline{S}_0}\right) \in (H_0M_\Phi)$.

Remarquons que le théorème précédent ne serait plus vrai pour $\mathcal{C}_{H_0M_1}$, si l'on avait défini (H_0M_1) comme l'espace vectoriel des fonctions harmoniques dans $S - S_0$ nulles sur C_0 et telles que $|u|$ admette une majorante harmonique.

Revenons aux classes absolues. Si $S \in C_{HM_\Phi}$, deux cas se présentent : ou $S \in \mathcal{C}_0$, et $(H_0M_\Phi) = \{0\}$, ou S est hyperbolique, et, en vertu du

([49]) Cette inégalité est due à P. J. Myrberg [1].

théorème 7, $(H_0M_\Phi^*)$ est isomorphe à (HM_Φ^*), donc est de dimension 1. Dans les deux cas, si ω est la « mesure harmonique de la frontière idéale » par rapport à $S-\overline{S}_0$, (H_0M_Φ) est l'ensemble des fonctions $k\omega$, où k est une constante réelle. Nous sommes ainsi conduits aux critères suivants, donnés par R. Nevanlinna [6] et L. Sario [4] pour $\mathcal{C}_{HB}$ et $\mathcal{C}_{HD}$.

Critère 1 (Nevanlinna). — *Pour qu'une surface de Riemann* S *appartienne à* $\mathcal{C}_{HM_\Phi}$, *il faut et il suffit que toute fonction harmonique dans* $S-S_0$ *nulle sur* C_0 *et à moyennes d'ordre* Φ *bornées dans* $S-\overline{S}_0$ *soit proportionnelle à* ω.

Critère 2 (Sario). — *Pour qu'une surface de Riemann* S *appartienne à* $\mathcal{C}_{HM_\Phi}$ *il faut et il suffit que toute fonction* $u \in (H_0M_\Phi)$ *telle que* $\int_{C_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0$ *soit identiquement nulle.*

En effet, $\int_{C_0} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds \neq 0$ si $\omega \neq 0$. D'autre part, si la condition est remplie, et si S est hyperbolique, soit $u \in (H_0M_\Phi)$; il existe une constante k telle que $u-k\omega$ ait un flux nul à travers C_0. On a alors $u = k\omega$, car $\frac{1}{2}(u-k\omega) \in (H_0M_\Phi)$.

15. Surfaces de genre fini. — Lorsque S est de genre fini, on peut toujours la considérer comme immergée dans une surface de Riemann close S^*. On sait qu'il y a alors équivalence entre l'appartenance de S à une classe relative et la possibilité de prolonger harmoniquement sur $S^*-S=E$ toute fonction harmonique définie au voisinage de E dans S et possédant la propriété de borne qui entre dans la définition de la classe relative ([50]). Voyons-le ici pour les classes $\mathcal{C}_{H_0M_\Phi}$. Soit S une surface de Riemann de genre fini appartenant à $\mathcal{C}_{H_0M_\Phi}$, c'est-à-dire parabolique (E est alors polaire), S_0 un domaine canonique de S, de bord C_0, et u une fonction harmonique dans $S-S_0$ (donc aussi sur C_0) et à moyennes d'ordre Φ bornées dans $S-\overline{S}_0$. Soit G l'ouvert $S^*-\overline{S}_0$, et $v = H_u^G$; la fonction $\frac{1}{2}(u-v)$, nulle sur C_0, appartient à (H_0M_Φ), puisque v est bornée dans G ; elle est donc

([50]) C'est la notion d' « Hebbarkeit » de Sario ([1], [4]).

identiquement nulle et v, égale à u dans $G - E$, constitue un prolongement harmonique de u sur E.

Lorsque $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$, on peut encore exprimer ceci de la façon suivante (compte tenu du théorème 6 *bis*)

THÉORÈME 8. — *Soit* E *un ensemble compact et polaire d'une surface de Riemann* S, *et soit* u *une fonction harmonique définie dans* $\complement E$ *au voisinage de* E, *et telle que* $\Phi(|u|)$ *admette une majorante harmonique pour une fonction* Φ *satisfaisant à la condition* $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$. *Alors la fonction* u *est prolongeable harmoniquement sur* E ([51]).

Nous rappellerons aussi que pour les surfaces de genre fini, les classes absolues sont confondues avec les classes relatives ([52]). En effet, soit S une surface de Riemann hyperbolique contenue dans une surface close S^*, et S_0 un domaine canonique de S. L'ensemble $E = S^* - S$ étant de capacité > 0, on peut trouver une mesure de Radon μ portée par E, de masse totale nulle, et dont le potentiel de Green dans $S^* - \overline{S}_0$ est borné (ce qui implique que μ est d'énergie finie) ; la restriction de ce potentiel à $S - \overline{S}_0$ est une fonction harmonique bornée et à intégrale de Dirichlet finie, nulle sur le bord C_0 de S_0, et de flux nul à travers C_0. Il résulte alors du critère n° 2 donné plus haut que $S \notin \mathcal{C}_{HB}$ et $S \notin \mathcal{C}_{HD}$: a fortiori $S \notin \mathcal{C}_{HM_\Phi}$. Donc :

THÉORÈME. — *Si* $\mathcal{F}$ *désigne l'ensemble des surfaces Riemann de genre fini, on a* $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_{HM_\Phi} = \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_0$ *pour toute fonction* Φ *convexe et croissante.*

16. Le résultat précédent ne s'étend pas aux surfaces de genre infini. Pour ces surfaces, l'hyperbolicité n'entraîne pas forcément l'existence de fonctions harmoniques bornées (ou à intégrale de Dirichlet finie) non constantes.

Lorsque S est hyperbolique et appartient à $\mathcal{C}_{HB}$, la fonction 1, qui est alors minimale, d'après la définition même de $\mathcal{C}_{HB}$, définit un élément-frontière de Martin s_0 [voir section 2, n° 10, note ([41])], tel que $K(p, s_0) = 1$. La mesure de Martin ν_0 (mesure canonique

([51]) Le théorème est encore vrai si l'on suppose seulement E fermé dans S, d'après le théorème 2 de M. BRELOT [3], et le théorème 14 établi plus loin.

([52]) L. SARIO [2].

associée à la fonction 1) se réduit donc à la masse ponctuelle ε_{s_0}, et par conséquent toute partie de la frontière de Martin Γ qui ne contient pas le point s_0 est de mesure harmonique nulle. En particulier, soit S_0 un domaine canonique de S, et soient $G_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ les domaines composants de $S - \overline{S}_0$; $\mathring{K}(p, s_0) = \omega$ est la mesure harmonique de Γ par rapport à $S - \overline{S}_0$, et vaut dans chaque G_i la mesure harmonique de $\Gamma(G_i)$ par rapport à G_i. Or on a vu au n° 11 que $\mathring{K}(p, s_0) = 0$ dans tous les G_i sauf un seul, celui dont l'adhérence dans $\overline{S}$ contient s_0. L'ouvert $S - \overline{S}_0$ a donc une seule composante hyperbolique. Autrement dit, s'il existe sur une surface de Riemann S deux domaines non compacts à frontière compacte qui sont hyperboliques, $S \notin \mathcal{C}_{HB}$ (53).

Lorsque $S \in \mathcal{C}_{HM_1}$, toute fonction harmonique positive sur S est une constante. Si S est de plus hyperbolique, on a alors $K(p, s) = 1$ pour tout $s \in \Gamma$, puisque $K(a, s) = 1$; donc $\Gamma = \{s_0\}$. Par conséquent, une condition nécessaire et suffisante pour que $S \notin \mathcal{C}_0$ appartienne à $\mathcal{C}_{HM_1}$ sera que $\lim\limits_{q \to \Gamma} \dfrac{g(p, q)}{g(a, q)} = 1$ (la limite étant prise suivant le filtre des complémentaires des parties relativement compactes de S). A fortiori, S n'a qu'un élément-frontière de Kerekjarto-Stoïlow, de sorte que le complémentaire de tout domaine canonique est connexe ; tout domaine non compact à frontière compacte est un voisinage de la frontière idéale. Donc :

THÉORÈME. — *Si une surface hyperbolique a une frontière de Martin non connexe, elle n'appartient pas à* $\mathcal{C}_{HM_1}$.

On peut donner de ce théorème une démonstration directe : soit S_0 un domaine canonique de S, tel que $S - \overline{S}_0$ ait deux composantes connexes G_1 et G_2 ; l'une au moins, G_1 par exemple, est hyperbolique. Soit C_i la frontière dans S de $G_i (i = 1, 2)$; il existe dans G_1 une fonction harmonique positive h_1 nulle sur C_1, et dans G_2 une fonction harmonique positive h_2 nulle sur C_2 ; on peut toujours supposer que $\sum\limits_{i=1,2} \displaystyle\int_{C_i} \frac{\partial h_i}{\partial \nu} ds = 0$. Le procédé alterné de Sario nous permet alors de construire une fonction harmonique h sur S telle que $|h - h_i|$ soit borné dans G_i ; h est donc bornée inférieurement, et $S \notin \mathcal{C}_{HM_1}$.

En particulier si $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}_{HB}$, $\mathcal{C}_{HM_1} \mathcal{C} \neq_{HB}$, car on peut toujours construire des surfaces hyperboliques dont la frontière de Martin n'est

(53) L. SARIO [4].

pas connexe. Par exemple, si $S \in \mathcal{C}_{HB}$, soit $S' = S - \{q_0\}$, où q_0 est un point quelconque de S. Toute fonction harmonique bornée sur S' étant harmoniquement prolongeable sur q_0, $S' \in \mathcal{C}_{HB}$; mais $S' \notin \mathcal{C}_{HM_1}$, car $g(p, q_0)$ est une fonction harmonique positive non triviale sur S'.

17. Domaines « non compacts ». — Plusieurs des résultats précédents, notamment le théorème 6 et les deux critères qui en découlent, nous ont montré l'importance pour la classification des surfaces de Riemann des propriétés des domaines non relativement compacts à frontière compacte situés sur ces surfaces. Nous allons voir que ces résultats s'étendent en partie aux domaines « non compacts » à frontière quelconque.

Définition 3. — *Soit sur une surface de Riemann* S *un domaine* G *dont la frontière* C *est très régulière* (par exemple consiste en un ensemble localement fini de courbes analytiques). *Nous dirons que* G *appartient à la classe de domaines* $\mathfrak{D}^{(S)}_{H_0B}$ (*resp.* $\mathfrak{D}^{(S)}_{H_0D}$, $\mathfrak{D}^{(S)}_{H_0M_\Phi}$) *si toute fonction harmonique dans* G *qui s'annule sur* C *et qui est bornée* (*resp. à intégrale de Dirichlet finie, à moyennes d'ordre* Φ *bornées dans* G) *est identiquement nulle.*

Si $\Phi(t) = t^\alpha (\alpha \geqslant 1)$, la classe $\mathfrak{D}^{(S)}_{H_0M_\Phi}$ correspondante sera notée $\mathfrak{D}^{(S)}_{H_0M_\alpha}$; lorsque S sera fixée, on omettra l'indice supérieur S.

Toutes les classes ainsi définies contiennent les domaines relativement compacts très réguliers de S ; elles ont entre elles les relations d'inclusion évidentes $\mathfrak{D}_{H_0M_\Phi} \subset \mathfrak{D}_{H_0B}$, $\mathfrak{D}_{H_0M_\alpha} \subset \mathfrak{D}_{H_0D}$ pour $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$. De plus, la classe $\mathfrak{D}^{(S)}_{H_0B}$ se confond avec celle des domaines très réguliers *paraboliques* (chap. II, n° 3), d'après le principe du maximum.

$\mathfrak{D}_{H_0M_1}$ ne contient que des domaines relativement compacts, car dans tout domaine « non compact » très régulier G d'une surface de Riemann S, il existe une fonction harmonique positive s'annulant régulièrement à la frontière.

En effet, soient S_1 et S_2 deux domaines canoniques de S, tels que $\overline{S}_1 \subset S_2$, et soit C_1 la frontière de S_1 ; si $G_1 = G \cap S_1$ et $G'_2 = G \cap \complement \overline{S}_2$, il existe une constante M telle que :

$$(1) \qquad K(p, q; G) = \frac{g(p, q; G)}{g(a, q; G)} \leqslant M \text{ pour } p \text{ et } a \in G_1 \text{ et } q \in G'_2.$$

Puisque $g(p, q; G)$ s'annule sur C, il suffit de prouver (1) pour $p \in \gamma_1 = C_1 \cap G$. Or C_1 ne rencontre C qu'en un nombre fini de points, pour chacun desquels il existe un voisinage où a lieu une inégalité de genre indiqué, puisque G est très régulier (chap. I, n° 8).

La partie de γ_1 extérieure à ces voisinages est relativement compacte dans G, on peut donc lui appliquer le théorème de Harnack, qui donne encore une inégalité analogue ; en rassemblant ces résultats, on obtient la formule annoncée.

Soit alors (q_n) une suite de Cauchy pour la structure uniforme de Martin de G, n'ayant pas de point d'accumulation dans S, et soit s l'élément frontière qu'elle définit. $K(p, s; G) = \lim_{n \to \infty} K(p, q_n; G)$ est inférieure à M dans G_1, donc s'annule sur $C \cap \overline{G}_1$; comme G_1 est arbitraire, $K(p, s; G)$ s'annule sur C.

Un raisonnement analogue nous montre que si une fonction u sousharmonique dans G et qui s'annule sur C admet une majorante harmonique, sa plus petite majorante harmonique U s'annule aussi sur C. En effet, soit (S_n) une exhaustion canonique de S, et $G_n = G \cap S_n$; si (u, o) désigne la fonction égale à u dans G et à o sur G, U est la limite de la suite croissante des fonctions $U_n = H^{G_n}_{(u,o)}$; or, en tout point $r \in C$, il existe un voisinage V de r tel que pour $p \in V \cap G$ (et n assez grand) on ait $U_n(p) \leqslant M.\ U_n(a)$ $(a \in G)$. $U_n(p)$ est donc bornée au voisinage de r par $M.\ U(a)$, et par conséquent s'annule au point r.

Ceci nous montre en particulier que toute fonction harmonique dans G qui s'annule sur C et qui est bornée (resp. à intégrale de Dirichlet finie, à moyennes d'ordre Φ bornées dans G) est la différence de deux fonctions harmoniques *positives*, nulles sur C, et ayant la même propriété de borne (voir plus haut, n° 5). Dans la définition 3, on peut donc imposer aux fonctions harmoniques considérées la condition d'être positives.

THÉORÈME 9. — *Pour qu'une surface de Riemann* S *appartienne à* $\mathcal{C}_{HB}$ *(resp.* $\mathcal{C}_{HD}$*), il faut et il suffit que pour tout couple de domaines très réguliers* G_1, G_2, *tels que* $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, *l'un au moins appartienne à* $\mathfrak{D}^{(S)}_{H_0B}$ *(resp.* $\mathfrak{D}^{(S)}_{H_0D}$*)* [54].

La suffisance est évidente, car si $S \notin \mathcal{C}_{HB}$ (resp. $\mathcal{C}_{HD}$) la condition indiquée n'est pas remplie ; en effet, si $u \in (HB)$ (resp. (HD)) n'est pas constante, soit k une valeur prise par u, et telle que la courbe de niveau $\{u = k\}$ ne passe pas par un point où grad $u = o$; les ouverts $\{u < k\}$ et $\{u > k\}$ ne sont pas vides, et aucune de leurs composantes connexes n'appartient à $\mathfrak{D}^{(S)}_{H_0B}$ (resp. $\mathfrak{D}^{(S)}_{H_0D}$).

[54] Pour $\mathcal{C}_{HB}$, ce théorème a été donné indépendamment par R. NEVANLINNA [7] et H. L. ROYDEN [1]. Voir aussi A. MORI [1].

Inversement, montrons que s'il existe sur S deux domaines hyperboliques G_1 et G_2 d'intersection vide, $S \notin \mathcal{C}_{HB}$. Soit ω_i ($i = 1, 2$) la mesure harmonique de $\Gamma(G_i)$ par rapport à G_i, $(\omega_i, 0) = \omega_i'$ la fonction sur S égale à ω_i dans G_i, à 0 dans $\complement G_i$; ω_i' est sousharmonique sur S (chap. I, n° 6) et < 1, elle a donc une plus petite majorante harmonique $\Omega_i \leqslant 1$; de plus $\omega_i \neq 0$ implique $\sup_{G_i} \omega_i = 1$, et a fortiori $\sup_S \Omega_i = 1$. Comme $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $\omega_1' + \omega_2'$ est < 1, et par suite $\Omega_1 + \Omega_2 \leqslant 1$; les fonctions Ω_1 et Ω_2 ne peuvent donc être constantes.

Pour démontrer le théorème pour $\mathcal{C}_{HD}$, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme. — *Soit u une fonction sousharmonique sur une surface de Riemann S, continue sur S et continûment différentiable sauf sur un ensemble localement fini de courbes régulières ou de points. Alors, si $D_S(u) < +\infty$, u a des majorantes harmoniques et sa plus petite majorante harmonique U vérifie l'inégalité $D_S(U) \leqslant D_S(u)$.*

La dernière partie est immédiate, d'après le thérème de minimum déjà utilisé plusieurs fois. En effet, Soit (S_n) une exhaustion de S, U_n la meilleure majorante harmonique de u dans S_n ; on a $D_{S_n}(U_n) \leqslant D_{S_n}(u) \leqslant D_S(u)$ et on en déduit, comme au n° 5, que $D_S(U) \leqslant D_S(u)$. Reste à voir que U existe. Supposons d'abord que u soit nulle dans un ouvert A ; soit S_0 un domaine canonique de S, tel que $\overline{S}_0 \subset A$; l'exhaustion (S_n) sera choisie de façon que $S_1 \supset \overline{S}_0$. Soit alors $V_n = H_u^{S_n - \overline{S}_0}$; on a $V_n \leqslant V_{n+1}$, et $D_{S_n - \overline{S}_0}(V_n) \leqslant D_{S - \overline{S}_0}(u)$. Les fonctions V_n, qui s'annulent sur le bord C_0 de S_0 et ont leurs intégrales de Dirichlet uniformément bornées, forment une suite normale ([55]) donc convergent vers une fonction harmonique V nulle sur C_0. Le théorème 7 nous montre alors que $\overline{V} = U$ est la plus petite majorante harmonique de u sur S. On passe au cas général en appliquant le résultat précédent à $(u - k)^+$, où k est le maximum de u sur un compact de S d'intérieur non vide.

Revenons au théorème à démontrer, et supposons que sur $S \in \mathcal{C}_{HD}$ il existe deux domaines très réguliers G_1 et G_2, ne se rencontrant pas, et dont aucun n'appartient à $\mathfrak{D}_{H_0D}^{(S)}$. Il existe dans chaque G_i ($i = 1, 2$) une fonction harmonique $u_i > 0$ vérifiant $D_{G_i}(u_i) < \infty$; $u_i' = (u_i, 0)$ est sousharmonique sur S et remplit les conditions du lemme, puisque $D_S(u_i') = D_{G_i}(u_i)$, elle a donc une plus petite majo-

([55]) S. Stoilow [I], chap. II, p. 46.

rante harmonique U_i à intégrale de Dirichlet finie, qui est constante du fait que $S \in \mathcal{C}_{HD}$. Il résulte que u_i est bornée ; en la multipliant au besoin par une constante, on peut toujours faire en sorte que $\sup_{G_i} u_i = 1$, et alors $U_i = 1$. Mais $u'_1 + u'_2 < 1$, donc $U_1 + U_2 \leqslant 1$, d'où contradiction.

18. D'autre part, les théorèmes 6 et 6 bis peuvent être généralisés de la façon suivante :

Théorème 10. — *Soit* G *un domaine non compact très régulier d'une surface de Riemann* S, *et* $\Phi(t)$ *une fonction croissante et convexe pour* $0 \leqslant t < +\infty$, *telle que* $\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$. *S'il existe dans* G *une fonction harmonique u non constante qui s'annule à la frontière* C *de* G, *et telle que* $\Phi(|u|)$ *ait une majorante harmonique,* G *est hyperbolique. En d'autres termes, pour une fonction* Φ *satisfaisant à la condition indiquée, on a* $\mathfrak{D}^{(S)}_{H_0M_\Phi} = \mathfrak{D}^{(S)}_{H_0B}$.

Nous supposerons que u est $\geqslant 0$ dans G (ce qui est toujours possible, d'après une remarque faite au numéro précédent) et que $\Phi(0) = 0$. Nous avons vu que $U = \widehat{\Phi(u)}$ s'annule également sur C. Soit (S_n) une exhaustion canonique de S, $G_n = G \cap S_n$, $\omega_n = H^{G_n}_\varphi$ (où $\varphi = 0$ sur C et $\varphi = 1$ dans G) ; pour que G soit hyperbolique, il faut et il suffit que $\lim_{n \to \infty} \omega_n = \omega$ soit > 0. Or, si C_n est la frontière de S_n et si $\gamma_n = C_n \cap G$, on a pour $a \in S_n$ (d'après la formule de Green) :
$u(a) = \int_{\gamma_n} u \, dy_n$, $U(a) = \int_{\gamma_n} U \, dy_n$, $\omega_n(a) = \int_{\gamma_n} dy_n$,
en posant sur γ_n $\quad dy_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial g(p, q; G_n)}{\partial \nu_{\text{int}}} ds$.

Appliquons alors l'inégalité de Jensen ; nous obtenons :

$$\Phi\left(\frac{\int_{\gamma_n} u dy_n}{\int_{\gamma_n} dy_n}\right) \leqslant \frac{\int_{\gamma_n} \Phi(u) dy_n}{\int_{\gamma_n} dy_n} \leqslant \frac{\int_{\gamma_n} U dy_n}{\int_{\gamma_n} dy_n}$$

soit encore : $\Phi\left(\frac{u(a)}{\omega_n(a)}\right) \leqslant \frac{U(a)}{\omega_n(a)}$.

Si $\lambda_n = \frac{u(a)}{\omega_n(a)}$ (a étant fixé dans G), on voit ainsi que $\frac{\Phi(\lambda_n)}{\lambda_n}$ reste bornée ; d'après la condition imposée à Φ, il en est de même de λ_n ;

donc $\omega_n(a)$ reste supérieur à une constante strictement positive. C. Q. F. D.

Les théorèmes 9 et 10 nous donnent immédiatement :

THÉORÈME 11. — *Si Φ est une fonction croissante et convexe telle que* $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\Phi(t)}{t} = +\infty$, *la classe $\mathcal{C}_{\mathrm{HM}_\Phi}$ coïncide avec $\mathcal{C}_{\mathrm{HB}}$.*

Il suffit de montrer que $\mathcal{C}_{\mathrm{HB}} \subset \mathcal{C}_{\mathrm{HM}_\Phi}$. Or, soit S une surface de Riemann $\notin \mathcal{C}_{\mathrm{HM}_\Phi}$; il existe sur S une fonction harmonique $u \geqslant 0$, non constante, appartenant à (HM_Φ). Si $\inf\limits_{p \in S} u(p) < k < \sup\limits_{p \in S} u(p)$, soit G_1 un domaine composant de $\{u > k\}$, G_2 un domaine composant de $\{u > k\}$; G_1 et G_2 sont hyperboliques et ne se rencontrent pas, donc $S \notin \mathcal{C}_{\mathrm{HB}}$.

COROLLAIRE 1. — *Pour tout $\alpha > 1$, $\mathcal{C}_{\mathrm{HM}_\alpha} = \mathcal{C}_{\mathrm{HB}}$.*

COROLLAIRE 2 (*Théorème de Virtanen-Royden*). — *S'il existe sur une surface de Riemann* S *une fonction harmonique non constante à intégrale de Dirichlet finie,* S *n'appartient pas à* $\mathcal{C}_{\mathrm{HB}}$ (56).

En effet, $\mathcal{C}_{\mathrm{HB}} = \mathcal{C}_{\mathrm{HM}_2} \subset \mathcal{C}_{\mathrm{HD}}$.

19. Décomposition canonique d'une fonction harmonique positive. — Soit S une surface hyperbolique, u une fonction harmonique positive sur S. La famille des fonctions harmoniques sur S bornées et inférieures à u est filtrante pour $\leqslant$, car si h_1 et h_2 sont deux telles fonctions, $\widehat{\sup(h_1, h_2)}$ est bornée et inférieure à u, et majore h_1 et h_2. L'enveloppe supérieure de cette famille est donc harmonique (chap. II, n° 5) ; nous la noterons u_B.

On peut encore définir u_B de la façon suivante : pour $n = 1, 2, \ldots$ soit h_n la plus grande minorante harmonique de la fonction surharmonique positive $\inf(u, n)$; la suite (h_n) étant croissante et majorée par u a une limite h_∞, qui est égale à u_B. En effet, $h_\infty \leqslant u_B$ a priori ; d'autre part, si h est bornée par M et inférieure à u, on a $h \leqslant h_n$ pour $n \geqslant M$, donc $h \leqslant h_\infty$, de sorte que $u_B = \sup\limits_{h \leqslant u,\, h \in (\mathrm{HB})} h \leqslant h_\infty$. Plus généralement, le même raisonnement montre que si (k_n) est une suite croissante de nombres positifs ayant pour limite $+\infty$, on a

(1) $u_B = \lim\limits_{n \to \infty} \inf(u, k_n)$.

(56) K. I. VIRTANEN [1], H. L. ROYDEN [1].

On en déduit aussitôt les trois propositions suivantes :

1. *L'opération $u \to u_B$ est additive :*

Soient u et v deux fonctions harmoniques positives ; on vérifie aisément que :

$$\inf(u+v, n) \leqslant \inf(u, n) + \inf(v, n) \leqslant \inf(u+v, 2n).$$

Les mêmes inégalités ont lieu entre les plus grandes minorantes harmoniques ; à la limite, on obtient $(u+v)_B = u_B + v_B$.

2. *Pour qu'on ait $u_B = u$, il faut et il suffit que u soit la limite d'une suite croissante de fonctions harmoniques bornées.*

C'est nécessaire, puisque $u_B = \lim h_n$, et c'est suffisant, car $\sup\limits_{h \leqslant u,\ h \in (HB)} h$ est alors $\geqslant u$.

3. *Pour que $u_B = 0$, il faut et il suffit que $\inf(u, 1)$ ait sa plus grande minorante harmonique nulle, donc soit un potentiel de Green.*

C'est évidemment nécessaire, puisque $h_1 = \widehat{\inf(u, 1)} \leqslant u_B$; inversement, cela suffit, car $u \geqslant 0$ implique $\inf(u, n) \leqslant \inf(nu, n)$, d'où $h_n \leqslant nh_1$.

Définition : *Nous dirons qu'une fonction harmonique positive u est quasi-bornée* (resp. *singulière*) *si elle satisfait à $u_B = u$* (resp. $u_B = 0$).

Il résulte immédiatement des propositions précédentes que $(u_B)_B = u_B$ et que $(u - u_B)_B = 0$. Posons $u - u_B = u_S$. u_S est définie par (2) $u_S = \lim\limits_{n \to \infty} \widehat{(u-n)^+}$, puisque $u - h_n$ est visiblement la plus petite majorante harmonique commune à $u - n$ et zéro. Les formules (1) et (2) montrent que u_B et u_S sont des fonctions croissantes de u. En particulier, toute fonction harmonique positive quasi bornée (resp. singulière) qui minore u est inférieure à u_B (resp. u_S). Si donc $u = v + w$, v étant $\geqslant 0$ et quasi bornée, et $w \geqslant 0$ et singulière, on a $v = u_B$ et $w = u_S$. Donc

Théorème 12. — *Toute fonction harmonique positive sur une surface de Riemann* S *se décompose d'une seule manière en la somme d'une fonction harmonique quasi bornée et d'une fonction harmonique singulière.*

Remarques. — 1) Le théorème 12 est l'application à (HM_1) d'un théorème de F. Riesz [57] qui peut être énoncé comme suit : dans un espace de Riesz complètement réticulé, soit F une « famille complète » d'éléments positifs de E (on appelle ainsi une famille qui contient les

[57] F. Riesz [3], J. Dieudonné [1]. Voir aussi N. Bourbaki, *Intégration*, chap. ii. Dans la terminologie de N. Bourbaki, une famille complète (généralisée) est appelée une bande.

minorants $\geqslant 0$ de ses éléments, leurs sommes finies, et les bornes supérieures de ses parties majorées) ; tout élément positif de E est la somme d'un élément de F et d'un élément disjoint de F. Ici l'ensemble des fonctions quasi bornées n'est autre que la famille complète F (1) engendrée par la fonction 1 ; une fonction singulière est une fonction disjointe de F(1).

2) Les notions précédentes peuvent être étendues aux différences de fonctions harmoniques positives. On dira qu'une fonction $u \in (HM_1)$ est quasi bornée (resp. singulière) si $\widehat{|u|}$ l'est. Le théorème 12 est alors valable pour toute fonction de (HM_1).

Appliquons ce qui précède à la représentation canonique de Martin ; soit μ_u la mesure canonique associée à u. Comme la correspondance $u \rightarrow \mu_u$ est linéaire et croissante, toute mesure canonique associée à une fonction quasi bornée appartient à la famille complète engendrée (dans l'espace des mesures de Radon sur Γ ([58])) par la mesure de Martin ν_0. D'après le théorème de Lebesgue-Nikodym, $d\mu_u$ est alors de la forme $f d\nu_0$, avec f ν_0-sommable. La réciproque étant évidente, on a :

THÉORÈME 13. — *Pour qu'une fonction harmonique* $u \in (HM_1)$ *soit quasi bornée, il faut et il suffit que sa représentation canonique soit de la forme* $u(p) = \int_\Gamma K(p,s)\, f(s)\, d\nu_0\,(s)$, *$f$ étant une fonction ν_0-sommable sur* Γ.

Il est clair que dans l'intégrale précédente, on peut remplacer f par toute fonction qui lui est égale ν_0-presque partout, et seulement par une telle fonction. Chaque fonction harmonique quasi bornée détermine donc une classe de fonctions équivalentes pour ν_0, et réciproquement, de sorte que l'espace des fonctions harmoniques quasi-bornées est isomorphe (en tant qu'espace de Riesz et aussi en tant qu'espace normé) à l'espace $L^1(\Gamma, \nu_0)$ des classes de fonctions ν_0-sommables définies dans Γ ([59]).

20. Revenons à la classification des surfaces de Riemann. La notion de fonction quasi bornée permet de donner de la classe $\mathcal{C}_{HB}$ une définition en apparence plus générale : pour qu'une surface S appar-

([58]) Car l'ensemble des mesures canoniques est lui-même une famille complète.

([59]) La fonction $f(s)$ ainsi associée à u ne dépend pas (à une équivalence près) du point de référence a. En effet, $u(p) = \int_\Gamma K(p, s) f(s) d\nu_0(s)$, et $K(p, s) d\nu_0(s)$ ne dépend pas de a (note 43). On peut considérer u, dans une certaine mesure, comme la solution du problème de DIRICLHET pour S, avec donnée f sur Γ.

tienne à $\mathcal{C}_{HB}$, il faut que toute fonction harmonique *quasi bornée* qui y est définie soit une constante. Dans ces conditions, le théorème 11 se trouve être la conséquence du suivant, qui en précise les résultats :

THÉORÈME 14. — *Soit* $\Phi(t)$ *une fonction croissante et convexe pour* $t \geqslant 0$, *telle que* $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\Phi(t)}{t} = +\infty$. *Toute fonction harmonique* u *sur une surface de Riemann* S *qui a ses moyennes d'ordes* Φ *bornées sur* S *est quasi bornée, et la plus petite majorante harmonique de* $\Phi(|u|)$ *l'est également. Si* $D_S(u) < +\infty$, *u est la limite d'une suite (croissante si* $u \geqslant 0$) *de fonctions harmoniques bornées et à intégrale de Dirichlet finie.*

Il suffit de démontrer le théorème pour les fonctions harmoniques positives. Soit u une fonction positive de (HM_Φ), non nulle. Si $u < 1$, l'affirmation de l'énoncé est évidente. Sinon, soit G un domaine composant de $\{u > 1\}$; il est hyperbolique, d'après le théorème 10. Soit ω la mesure harmonique de la frontière idéale par rapport à G. ω' son prolongement à S prenant la valeur 0 dans $\complement G$; ω' est sousharmonique et inférieure à $\widehat{\inf(u, 1)}$, donc $\widehat{\omega'} \leqslant h_1 = \widehat{\inf(u, 1)}$. Ainsi u_B est > 0 dès que u n'est pas nulle. Appliquons alors le résultat à u_S, qui appartient aussi à (HM_Φ) puisqu'elle est majorée par u ; nous obtenons $u_S = 0$, de sorte que u est quasi bornée.

Si $u \geqslant 0$ est la limite d'une suite croissante (u_n) de fonctions harmoniques positives bornées, $\widehat{\Phi(u)}$ est la limite de la suite croissante $(\widehat{\Phi(u_n)})$; en effet, $\widehat{\Phi(u_n)} \leqslant \widehat{\Phi(u)}$, et $\lim \widehat{\Phi(u_n)}$ majore $\Phi(u)$. $\widehat{\Phi(u)}$ est donc également quasi bornée.

Enfin, si $D_S(u) < +\infty$, le lemme donné au cours de la démonstration du théorème 9 nous montre que $D_S(h_n) \leqslant D_S(\inf(u, n)) \leqslant D_S(u)$(60)

THÉORÈME 15. — *Soit u une fonction harmonique quasi bornée, dont la représentation canonique est* $u(p) = \int_\Gamma K(p, s) f(s) d\nu_0(s)$, *et soit* Φ *une fonction convexe, non constante et croissante dans l'intervalle* $[0, +\infty[$. *Pour que u appartienne à* (HM_Φ), *il faut et il suffit*

(60) On précise ainsi le résultat de VIRTANEN et ROYDEN, selon lequel il existe sur toute surface $\notin \mathcal{C}_{HD}$ une fonction harmonique non constante *bornée et à intégrale de Dirichlet finie*.

que $\Phi(|f|)$ *soit* ν_0*-sommable; la plus petite majorante harmonique* U *de* $\Phi(u)$ *est alors donnée par* $U(p)=\int_\Gamma K(p, s)\Phi(|f(s)|)\,d\nu_0(s)$.

La nécessité de cette condition résulte de ce que l'espace des fonctions harmoniques quasi bornées est isomorphe (comme espace vectoriel ordonné) à l'espace des mesures (canoniques) « régulières » par rapport à ν_0, ou encore à $L^1(\Gamma, \nu_0)$, comme nous l'avons vu à la fin du n° précédent. A la borne supérieure ([61]) d'une famille majorée de fonctions quasi bornées correspond donc la borne supérieure des mesures canoniques associées aux diverses fonctions harmoniques de la famille (ou encore celle des classes de fonctions sommables associées). Soit alors u une fonction positive de (HM_Φ) ; soit d'autre part (x_n) un ensemble dénombrable partout dense de nombres réels positifs, et pour chaque n soit $y=a_nx+b_n$ une droite d'appui de la courbe $y=\Phi(x)$ au point $(x_n, \Phi(x_n))$. Comme $\Phi(u)=\sup\limits_n(a_nu+b_n)$, $\widehat{\Phi(u)}$ est la borne supérieure des fonctions a_nu+b_n dans l'espace de Riesz (HM_1), et la mesure canonique associée est $\sup\limits_n(a_nf+b_n)d\nu_0=\Phi(f)d\nu_0$. puisque la classe de $\Phi(f)$ est la borne supérieure dans L^1 des classes des fonctions a_nf+b_n ([62]). Donc $\widehat{\Phi(u)}\,(p)=\int_\Gamma K(p, s)\,\Phi(f(s))d\nu_0(s)$. Enfin, si u est de signe variable, on appliquera la formule précédente à $\widehat{|u|}$; on a en effet $\widehat{|u|}(p)=\int_\Gamma K(p, s)|f(s)|d\nu_0(s)$, et $\widehat{\Phi(\widehat{|u|})}=\widehat{\Phi(|u|)}=U$, car $|u|\leqslant\Phi^{-1}(U)$ implique $\widehat{|u|}\leqslant\Phi^{-1}(U)$, cette dernière fonction étant surharmonique.

La suffisance se démontre de la même façon, ou au moyen de l'inégalité de Jensen, qui nous donne

$$\Phi(|u(p)|)\leqslant\int_\Gamma K(p, s)\,\Phi(|f(s)|)d\nu_0(s).$$

Colloraire. — *L'espace de Banach ordonné* (HM_α) *est isomorphe à* $L^\alpha(\Gamma, \nu_0)$. *En* effet, si $u\in(HM_\alpha)$, elle est quasi-bornée, donc de la forme $u(p)=\int_\Gamma K(p, s)f(s)\,d\nu_0(s)$, où f est une fonction de puissance $\alpha^{\text{ième}}$ sommable, et $\|u\|_\alpha^\alpha=\int_\Gamma|f(s)|^\alpha\,d\nu_0(s)$.

([61]) La borne supérieure d'une famille de fonctions de (HM_1) est la plus petite majorante harmonique de son enveloppe supérieure.

([62]) En effet, toute fonction qui majore chaque a_nf+b_n presque partout majore $\Phi(f)$ presque partout.

5. Problèmes de minimum et fonction noyau ([63]).

21. L'introduction des normes $\|u\|_\alpha$ nous amène à poser le problème de minimum suivant, analogue à celui qu'à considéré S. Bergman pour l'intégrale de Dirichlet ([64]) :

Soit S *une surface de Riemann, a un point fixe de* S, *q un second point de* S. *Parmi les fonctions harmoniques u définies sur* S *qui y ont leurs moyennes d'ordre* α *bornées et qui prennent en q la valeur* 1, *en existe-t-il qui rendent minima la norme* $\|u\|_\alpha = \left[\widehat{|u|^\alpha}(a)\right]^{1/\alpha}$?

Nous étudierons d'abord le cas $\alpha = 2$, puisqu'alors le minimum de la norme est lié, d'après F. Riesz, à des propriétés d'orthogonalité, et par suite à l'existence d'un « noyau reproduisant » (cf. Bergman [1], Aronszajn [1]) qui se trouve être ici une fonction harmonique bornée, ce qui permet de retrouver par une autre voie certains résultats de la section précédente.

Nous désignerons par M(u) (ou $M_S(u)$, s'il importe de préciser la surface où est définie u) la quantité $\|u\|_2^2 = \widehat{u^2}(a)$; c'est visiblement une forme quadratique sur (HM_2), dont la forme polaire sera notée M(u, v). On a $M(u, v) = \frac{1}{2}\left[\widehat{(u+v)^2}(a) - \widehat{u^2}(a) - \widehat{v^2}(a)\right]$; si (S_n) est une exhaustion de S, et si C_n est la frontière de S_n,

$$M(u, v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{C_n} u(p)v(p)\frac{\partial g(p, a; S_n)}{\partial \nu}ds ;$$

si les représentations canoniques de Martin de u et v sont respectivement $u(p) = \int_\Gamma K(p, s)f(s)d\nu_0(s)$ et $v(p) = \int_\Gamma K(p, s)g(s)d\nu_0(s)$, $M(u, v) = \int_\Gamma f(s)g(s)d\nu_0(s)$ ([65]). Notons que $M(u, 1) = u(a)$.

([63]) L'idée de la fonction noyau $k(p, q)$ revient à R. Bader.

([64]) Cf. S. Bergman [1], L. Ahlfors [6], K. I. Virtanen [1].

([65]) Le produit scalaire M(u, v) dépend évidemment du point a ; si nous le notons $M_a(u, v)$ il est clair que $M_p(u, v)$ pour u et v fixes et p variable, est une fonction harmonique de p, d'ailleurs égale à $\frac{1}{2}\widehat{(u+v)^2} - \widehat{u^2} - \widehat{v^2}$. On voit ainsi la possibilité de définir le « produit » de deux fonctions de (HM_2) $\widehat{u^2}$ est alors le « carré » de u. Ceci répond d'ailleurs à une définition générale du produit dans un espace réticulé (méthode de F. Riesz, *Acta Szeged*, 10, 1940, p. 1-20). Le produit de deux fonctions harmoniques quasi-bornées $u(p) = \int_\Gamma K(p, s)f(s)d\nu_0(s)$ et $v(p) = \int_\Gamma K(p, s)g(s_0)d\nu_0(s)$ sera défini si fg est ν_0-sommable, par exemple si $u \in (HM_\alpha)$ et $v \in (HM_\beta)$, avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, et plus généralement si

Soit alors $d = \inf_{u \in (HM_2),\, u(q)=1} M(u)$; d est $\leqslant 1$, puisque la fonction 1 satisfait aux conditions imposées. D'après un raisonnement classique de F. Riesz, une suite minimisante (c'est-à-dire une suite (u_n) de fonctions de (HM_2) telle que $\lim_{n \to \infty} M(u_n) = d$) est en même temps une suite de Cauchy, car

$$M\left(\frac{u_m - u_n}{2}\right) = \frac{1}{2}[M(u_m) + M(u_n)] - M\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) \leqslant \varepsilon$$

si $M(u_n)$ et $M(u_n)$ sont inférieurs à $d + \varepsilon$. Elle converge donc au sens de la norme (et a fortiori uniformément sur tout compact) vers une fonction u_0 qui prend la valeur 1 en q et qui vérifie $M(u_0) = d$.

Si v est une fonction de (HM_2) qui s'annule en q, on a alors

$$M(u_0 + \lambda v) \geqslant M(u_0)$$

quel que soit λ réel, de sorte que $M(u_0, v) = 0$. Il en résulte que la fonction u_0 qui rend la norme $\|u\|_2$ minima est unique, et que pour toute fonction $u \in (HM_2)$, $M(u_0, u) = M(u_0) . u(q)$; si l'on pose

$$\frac{u_0(p)}{M(u_0)} = v_q(p) = k(p, q),$$

on a $M(u, v_q) = u(q)$. C'est la propriété de reproduction ([66]). Elle entraîne l'unicité et la symétrie de $k(p, q)$, car

$$M(v_q, v_r) = k(q, r) = k(r, q)\,;$$

$k(p, q)$ est donc, pour p fixe, une fonction harmonique de q. Suivant la terminologie de S. Bergman, nous appellerons $k(p, q)$ la *fonction-noyau* relative aux moyennes quadratiques.

Si $v_q(p)$ admet la représentation intégrale de Martin

$$\int_\Gamma K(p, s) g_q(s) d\nu_0(s),$$

et si $u \in (HM_2)$ a pour mesure canonique associée $f(s)d\nu_0(s)$ la propriété de reproduction se traduit par :

$u \in (HM_\Phi)$ et $v \in (HM_\Psi)$, ou Φ et Ψ sont deux fonctions convexes complémentaires, c'est-à-dire telles que $\Phi'(t)$ et $\Psi'(t)$ soient fonctions inverses l'une de l'autre (ce qui exige que $\left.\lim_{t \to \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty\right)$.

([66]) L'existence de la fonction v_q se voit aussi de la manière suivante (N. Aronszajn [1]) : d'après l'inégalité de Schwarz, $|u(p)| \leqslant \left(\int_\Gamma K(p, s)^2 d\nu_0(s)\right)^{1/2} . \| u \|_2$; $u(q)$, pour q fixe, est alors une forme linéaire continue sur (HM_2), donc $u(q) = (u, v_q)$.

$$\mathrm{M}(u, v_q) = \int_\Gamma f(s) g_q(s) d\nu_0(s) = u(q) = \int_\Gamma \mathrm{K}(q, s) f(s) d\nu_0(s) ;$$

cette égalité ayant lieu en particulier pour toute fonction f continue sur Γ, on a $g_q(s) = \mathrm{K}(q, s)$ ν_0 — presque partout. Comme g_q n'est définie qu'à une équivalence près, ceci nous donne pour la fonction noyau l'expression :

$$(1) \qquad k(p, q) = \int_\Gamma \mathrm{K}(p, s) \mathrm{K}(q, s) d\nu_0(s).$$

Remarques. — 1. Si (u_n) est une base orthonormale de (HM_2), on sait que $k(p, q) = \sum\limits_n u_n(p) u_n(q)$.

2. Lorsque S est un domaine relativement compact très régulier d'une autre surface de Riemann S*, la fonction v_q est la solution du problème de Dirichlet pour S et la donnée frontière

$$\left[\frac{\partial g(p, q)}{\partial \nu} \Big/ \frac{\partial g(p, a)}{\partial \nu}\right]_{p=s}$$

(d'après l'expression des fonctions $\mathrm{K}(p, s)$ dans le cas envisagé). Par exemple, dans le cercle unité $\{|z| < 1\}$, si l'on prend comme point a l'origine, $k(z, \zeta)$ est la fonction harmonique qui prend au point-frontière $z = e^{i\theta}$ la valeur

$$\mathcal{R}\left(\frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta}\right) = \mathcal{R}\left(\frac{1 + e^{i\theta}\bar{\zeta}}{1 - e^{i\theta}\bar{\zeta}}\right); \text{ c'est donc } \mathcal{R}\left(\frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}}\right).$$

3. Soit G un domaine très régulier de S, contenant le point fixe a, et soit $k_\mathrm{G}(p, q)$ la fonction-noyau relative à G, u_G la fonction extrémale $\dfrac{k_\mathrm{G}(p, q)}{k_\mathrm{G}(q, q)}$, et d_G le minimum $\mathrm{M_G}(u_\mathrm{G})$ de $\mathrm{M_G}(u)$ pour $u \in (\mathrm{HM}_2)_\mathrm{G}$ et $u(q) = 1$. Lorsque G tend vers S, $k_\mathrm{G}(p, q)$ tend vers $k(p, q)$. En effet, $\mathrm{M_G}(u)$ croît avec G, tant que u reste définie dans G ; si $\mathrm{G} \subset \mathrm{G}'$, on a donc $\mathrm{M_G}(u_\mathrm{G}) \leqslant \mathrm{M_G}(u_{\mathrm{G}'}) \leqslant \mathrm{M_{G'}}(u_{\mathrm{G}'})$, de sorte que d_G croît également avec G, et a une limite finie puisque $d_\mathrm{G} \leqslant d \leqslant 1$. De plus, $\mathrm{M_G}(u_\mathrm{G}, u_{\mathrm{G}'}) = d_\mathrm{G}$, donc $\mathrm{M_G}(u_{\mathrm{G}'} - u_\mathrm{G}) \leqslant d_{\mathrm{G}'} - d_\mathrm{G}$; si G′ et G″ sont deux domaines contenant G, on a

$$\mathrm{M_G}(u_{\mathrm{G}'} - u_{\mathrm{G}''}) \leqslant 2d_{\mathrm{G}'} + 2d_{\mathrm{G}''} - 4d_\mathrm{G} \leqslant \varepsilon$$

si G est assez grand. Par conséquent, les fonctions u_G convergent en norme dans tout domaine G_0 du type indiqué, puisque $(\mathrm{HM}_2)_{\mathrm{G}_0}$ est complet, et a fortiori convergent uniformément sur tout compact.

Leur limite u vérifie $M_{G_0}(u) = \lim_{G \to S} M_{G_0}(u_G) \leqslant \lim_{G \to S} M_G(u_G)$, donc $M_S(u) \leqslant \lim_{G \to S} d_G \leqslant d$. Il en résulte que u est la fonction désignée plus haut par u_0, et que $\lim d_G = d$. Comme $k_G(p, q) = \dfrac{u_G(p)}{d_G}$, on a bien le résultat annoncé.

4. Si S est une surface de Riemann *régulière* [67], c'est-à-dire telle que $D_{a,\lambda} = \{g(p, a) > \lambda\}$ soit relativement compact pour tout $\lambda > 0$ (propriété indépendante de a), on peut encore obtenir la fonction-noyau de la façon suivante : Soit $h_\lambda(p, q)$ la fonction harmonique de p (pour q fixe $\in D_{a,\lambda}$) définie dans $D_{a,\lambda}$ et prenant sur

$$C_{a,\lambda} = \{g(p, a) = \lambda\}$$

les valeurs $g(p, q)$; autrement dit, $h_\lambda(p, q) = g(p, q) - g_\lambda(p, q)$, en appelant g_λ la fonction de Green de $D_{a,\lambda}$. On a alors

$$k(p, q) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{h_\lambda(p, q)}{\lambda}. \tag{2}$$

Supposons d'abord que S soit un domaine relativement compact très régulier de frontière C, situé sur une surface S*. Pour λ assez petit, $C_{a,\lambda}$ est formé de courbes « parallèles » à celles de C, et est mis en correspondance biunivoque avec C par les lignes de Green qui rencontrent normalement C et $C_{a,\lambda}$. Prenons comme métrique locale, en chaque point de C, $ds = |dg + i dg^*|$ (où dg désigne la différentielle de $g(p, a)$ et dg^* la différentielle adjointe), et appelons $r(s, \lambda)$ le point où $C_{a,\lambda}$ est coupé par la ligne de Green issue du point s de C ; lorsque $\lambda \to 0$, $\dfrac{\partial g_\lambda(r(s, \lambda), p)}{\partial \nu} \to \dfrac{\partial g(s, p)}{\partial \nu}$ (De La Vallée Poussin [1]) et $\dfrac{g(r(s, \lambda), q)}{\lambda} \to \dfrac{\partial g(s, q)}{\partial \nu}$, de sorte que (2) résulte d'un passage à la limite sous le signe somme dans la formule

$$\frac{h_\lambda(p, q)}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{g(r, q)}{\lambda} \frac{\partial g_\lambda(r, p)}{\partial \nu} ds$$

(l'intégrale est prise sur C, avec $r = r(s, \lambda)$).

Venons-en au cas général. D'après ce qui précède, la fonction

[67] On peut encore exprimer la condition de régularité comme suit (cf. M. Brelot et G. Choquet [1]) : le filtre des voisinages de la frontière idéale est *régulier* ; il coïncide avec le filtre de Green.

noyau $k_\lambda(p, q)$ relative au domaine $D_{a,\lambda}$ est égale à $\frac{\partial}{\partial\lambda}h_\lambda(p, q)$; d'autre part, la remarque 3 montre que $\lim\limits_{\lambda\to 0} k_\lambda(p, q) = k(p, q)$. La formule (2) est alors une conséquence du théorème des accroissements finis (plus précisément une application de la règle de l'Hôpital).

22. Fonction-noyau et classification. La formule (1) montre que $k(p, q)$ est positive. De ce fait, les fonctions $v_p(q)$, harmoniques et valant 1 en a, sont bornées dans leur ensemble en tout point q (principe de Harnack). Il en résulte que pour tout q, v_q est une fonction harmonique *bornée* de p. D'autre part, si pour q donné v_q est constante (elle vaut alors 1), on a $u(q) = u(a)$ pour toute $u \in (HM_2)$, d'après la propriété de reproduction. Inversement, si ceci est vrai, $v_p(q) = v_p(a) = 1$ pour tout p, de sorte que $v_q(p) \equiv 1$. Remarquons enfin que pour q donné la condition $v_q = 1$ équivaut à $u_0 = 1$, ou encore à $d = 1$ (u_0 et d ayant la même signification que plus haut). En effet, $v_q = \frac{u_0}{M(u_0)}$ et $u_0 = \frac{v_q}{v_q(q)}$; de plus, si $d = 1$, on a $M(u_0) = M(1)$, d'où $u_0 = 1$, d'après l'unicité de la fonction extrémale. En résumé :

Théorème 16. — *Soit* S *une surface de Riemann,* a *et* q *deux points fixes de* S, $\|u\|_2$ *la norme* $[\widehat{u^2}(a)]^{1/2}$ *sur* (HM_2), *et* $k(p, q)$ *la fonction noyau relative à cette norme. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) La fonction $v_q(p) = k(p, q)$ *est égale à la constante* 1.

b) Parmi les fonctions $u \in (HM_2)$ *qui prennent la valeur* 1 *en* q, *c'est la constante* 1 *qui a la plus petite norme* $\|u\|_2$.

c) Le minimum de la norme, pour les fonctions considérées en b), *est égal à* 1.

d) Pour toute $u \in (HM_2)$, *on a* $u(q) = u(a)$.

Corollaire. — *Pour que* S *appartienne à* $\mathcal{C}_{HM_2}$, *il faut et il suffit que la fonction-noyau* $k(p, q)$ *soit identique à* 1.

En effet, si $u \in (HM_2)$ n'est pas constante, il existe un point q_0 de S tel que $u(q_0) \neq u(a)$. Dans ces conditions, $k(p, q_0)$ n'est pas égale à 1 pour toute valeur de p, et par conséquent est une fonction harmonique bornée non constante. La fonction-noyau pouvant être définie indépendamment des résultats de la section III, nous obtenons ainsi une nouvelle démonstration de l'égalité $\mathcal{C}_{HM_2} = \mathcal{C}_{HB}$.

Pour les applications à la classification, il est plus naturel de considérer, à la place de (HM_2), le sous-espace V des fonctions harmoniques à moyennes d'ordre 2 bornées qui s'annulent en a, de façon à exclure les constantes autres que zéro. L'existence d'une fonction-noyau $k(p\,;\ a,\ q)$ relative à V se démontre par les mêmes moyens que précédemment, mais il est facile de voir que $k(p\,;\ a,\ q) = k(p,\ q) - 1$ (car $v_q - 1$ appartient à V, et y possède la propriété de reproduction). Comme plus haut, la fonction-noyau de V est étroitement liée à un problème de minimum. Si nous prenons pour q un point fixe b, il nous faudra distinguer ici deux cas, selon qu'il existe ou non des fonctions de (HM_2) qui prennent en a et b des valeurs différentes. S'il en existe (alors $d < 1$), la fonction qui donne à $\|u\|_2$ sa valeur minima (parmi les $u \in V$ telles que $u(b) = 1$ est $u'_0 = \dfrac{k(p,\ b) - 1}{k(b,\ b) - 1}$, et le mininum de $M(u)$ est $d' = \dfrac{1}{k(b,b) - 1} = \dfrac{d}{1 - d}$; s'il n'en existe pas, le problème de minimum n'a plus de sens, mais on est conduit à poser $d' = +\infty$, puisque toute fonction harmonique u qui vaut 0 en a et 1 en b vérifie $M_S(u) = +\infty$.

Lorsqu'on approche S par l'ensemble (filtrant pour $\subset$) des domaines relativement compacts très réguliers G contenant a et b, la distinction entre les deux cas est plus évidente que précédemment. En effet, s'il existe une fonction $u \in (HM_2)$ telle que $u(a) \neq u(b)$, on peut toujours supposer que $u(a) = 0$ et $u(b) = 1$; on a alors $d'_G \leqslant M_G(u) \leqslant M_S(u)$ de sorte que $\lim\limits_{G \to S} d'_G < +\infty$; réciproquement, si cette condition est remplie, les fonctions extrémales u'_G convergent vers une limite qui est la fonction extrémale pour S (même démonstration que plus haut).

La condition $\lim\limits_{G} d'_G = +\infty$ s'écrit encore $\lim\limits_{G} M_G(k_G) = 0$ (en posant pour simplifier $k_G = k_G(p\,;\ a,\ b)$), puisque $d'_G = \dfrac{1}{M_G(k_G)}$. Or, $M_G(k_G) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C k_G^2 dy_G$ (où C est la frontière de G, et dy_G la différentielle adjointe de $-\,dg(p,\ a\,;\ G)$) ; on a donc a fortiori, grâce à l'inégalité de Schwarz, $\lim\limits_{G} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C |k_G| dy_G = 0$. Cette condition est équivalente à la précédente, car elle exprime que la meilleure majorante harmonique de $|k_G|$ dans G tend vers 0 en a, donc uniformément sur tout compact. De plus, $k_G \dfrac{\partial g(p,\ a\,;\ G)}{\partial \nu} = \dfrac{\partial g(p,\ b\,;\ G)}{\partial \nu} - \dfrac{\partial g(p,\ a\,;\ G)}{\partial \nu}$; On reconnaît là la dérivée normale de la fonction-noyau $\varkappa_G(p\,;\ a,\ b)$

relative à (HD) $\cap$ V et à la norme $\sqrt{D(u)}$ (cf. Bergman [1] Ahlfors [6], Virtanen [1]). On peut donc énoncer :

THÉORÈME 17. — *Pour que* S *appartienne à* $\mathcal{C}_{HB}$, *il faut et il suffit que pour tout couple* (a, b) *de points de* S, *on ait, lorsque* G *décrit l'ensemble filtrant des domaines relativement compacts très réguliers contenant* a *et* b

$$(3) \qquad \lim_{G} \int_{C} \left| \frac{\partial \varkappa_G(p\,;\, a,\, b)}{\partial \nu} \right| ds = 0.$$

Il suffit évidemment qu'on ait (3) pour a fixe et tous les points b d'un ensemble *non rare* de points de S.

23. Les résultats précédents s'étendent en partie aux espaces (HM_α), lorsque $\alpha > 1$. En effet, dans ce cas, l'espace (HM_α) est uniformément convexe et complet (puisque $L^\alpha(\Gamma, \nu_0)$ l'est) ; cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta(\varepsilon)$, tendant vers 0 avec ε, tel que, pour u et $v \in (HM_\alpha)$, les conditions $\|u\|_\alpha \leqslant 1$, $\|v\|_\alpha \leqslant 1$ et $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_\alpha \geqslant 1 - \delta(\varepsilon)$ entraînent $\|u - v\|_\alpha \leqslant \varepsilon$. Soit alors q un point fixe de S, et $d = \inf\limits_{u \in (HM_\alpha),\, u(q)=1} \|u\|_\alpha^\alpha$. Du fait de la convexité uniforme, une suite minimisante est une suite de Cauchy (cf. Garabedian [1]), de sorte que la valeur d est atteinte pour une fonction u_0 de la famille considérée.

Pour toute $v \in (HM_\alpha)$ qui s'annule en q, et tout λ réel, on a donc $\|u_0 + \lambda v\|_\alpha \geqslant \|u_0\|_\alpha$. Si $f_0 d\nu_0$ et $g d\nu_0$ sont les mesures canoniques associées à u_0 et v respectivement, il vient

$$\int_\Gamma |f_0 + \lambda g|^\alpha d\nu_0 \geqslant \int_\Gamma |f_0|^\alpha d\nu_0 \text{ ; autrement dit, pour } v \text{ fixe,}$$

$\varphi(\lambda) = \int_\Gamma |f_0 + \lambda g|^\alpha d\nu_0$ est minima pour $\lambda = 0$. Or, dans l'expression de $\varphi(\lambda)$ on peut dériver sous le signe somme, car pour $0 < b < a$, on a $a^\alpha - b^\alpha \leqslant \alpha\, a^{\alpha-1}(a - b)$, de sorte que si Λ majore $|\lambda|$ et $|\lambda_0|$,

$$\left| \frac{|f_0 + \lambda g|^\alpha - |f_0 + \lambda_0 g|^\alpha}{\lambda - \lambda_0} \right| \leqslant \alpha(|f_0| + \Lambda |g|)^{\alpha-1} |g| ;$$

le théorème de Lebesgue permet alors de passer à la limite, et l'on a

$$\varphi'(\lambda) = \alpha \int_\Gamma |f_0 + \lambda g|^{\alpha-1} \operatorname{sgn}(f_0 + \lambda g)\, g\, d\nu_0.$$

La propriété de minimum implique donc que pour toute $g \in \mathfrak{L}^{\alpha}(\Gamma\,;\nu_0)$ et vérifiant $\int_\Gamma K(q,s)g(s)d\nu_0(s)=0$, on a $\int_\Gamma |f_0|^{\alpha-1}\operatorname{sgn} f_0 g\,d\nu_0=0$.

Si $u(p)=\int_\Gamma K(p,s)f(s)d\nu_0(s)$ est une fonction quelconque de (HM_α), $v=u-u(q).u_0$ est nulle en q ; par conséquent, l'égalité que nous venons d'établir nous donne plus généralement, quelle que soit $f \in \mathfrak{L}^{\alpha}(\Gamma,\nu_0)$:

$$\int_\Gamma |f_0|^{\alpha-1}\operatorname{sgn} f_0 f\,d\nu_0=\int_\Gamma |f_0|^{\alpha}d\nu_0(s)\,.\int_\Gamma K(q,s)f(s)d\nu_0(s),$$

ce qui exige : $f_0(s)=\dfrac{[K(q,s)]^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\int_\Gamma [K(q,s)]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}d\nu_0(s)}$ ν_0-presque partout.

On voit ainsi que la fonction extrémale u_0 est bornée, et qu'elle n'est constante que si $K(q,s)=1$ ν_0-presque partout (auquel cas toute fonction quasi-bornée sur S prend la même valeur en a et en q).

On montrerait sans peine la convergence des fonctions extrémales u_G et des minima d_G relatifs à des domaines d'approximation G de S ; on pourrait également poser le problème de minimum pour le sous-espace de (HM_α) formé par les fonctions qui s'annulent en a (ce qui permet de retrouver l'égalité $\mathcal{C}_{MH_\alpha}=\mathcal{C}_{HB}$).

CHAPITRE IV

CLASSIFICATION DES SURFACES DE RIEMANN CRITÈRES ANALYTIQUES

I. — Fonctions analytiques à moyennes bornées et classes définies à partir de ces fonctions.

Nous allons entreprendre à propos des fonctions analytiques uniformes sur une surface de Riemann une étude analogue à celle que nous avons faite pour les fonctions harmoniques. Les fonctions considérées seront soit partout régulières (autrement dit holomorphes), soit régulières en dehors de pôles isolés (autrement dit méromorphes). Nous commencerons par étudier les moyennes des fonctions holomorphes.

1. Moyenne d'une fonction analytique dans un ouvert annulaire. — Soit Ω un ouvert annulaire de frontière $C = C_0 \cup C_1$, sur une surface de Riemann S (cf. chap. III, n° 1); soit x la fonction harmonique dans Ω qui s'annule sur C_0 et prend sur C_1 la valeur constante $\Lambda > 0$ telle que $\int_{C_0} \frac{\partial x}{\partial \nu} ds = 1$, et soit dy la différentielle adjointe à dx. *Si f est une fonction holomorphe dans $\bar{\Omega}$, et α un nombre > 0, nous appellerons moyenne d'ordre α de f dans Ω la fonction de λ définie dans* $(0, \Lambda)$ *par :*

$$m_\alpha(\lambda) = m_\alpha(\lambda, f, \Omega) = \left(\int_{x=\lambda} |f|^\alpha dy\right)^{1/\alpha}.$$

Nous savons déjà que pour $\alpha \geqslant 1$ cette fonction est convexe. Mais l'analyticité de f nous permet d'établir pour m_α une propriété plus précise. En effet, $\log|f|$ est sousharmonique : $|f|$ est une fonction PL au sens de M. Montel (cf. Montel [1], Rado [2]). Or, on a :

THÉORÈME 18. — *Soit u une fonction* PL *dans l'ouvert annulaire* Ω.

Pour tout $\alpha > 0$, log $m_\alpha(\lambda, u)$ est une fonction convexe de λ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda$ ([68]).

On peut supposer dans la démonstation que $\alpha = 1$ et que $v = \log u$ est harmonique (sinon, on remplacera v par sa meilleure majorante harmonique dans $\{\lambda_0 \leqslant x \leqslant \lambda_1\}$, pour tout couple (λ_0, λ_1) tel que $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \Lambda$). Si $m(\lambda) = \int e^v dy$, il suffit de vérifier que $m(\lambda)m''(\lambda) - m'(\lambda)^2$ est $\geqslant 0$. Or

$$mm'' - m'^2 = \int e^v dy \int e^v \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] dy - \left(\int e^v \frac{\partial v}{\partial x} dy\right)^2.$$

Comme $\displaystyle\int e^v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dy = -\int e^v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy = -\left[e^v \frac{\partial v}{\partial y}\right]_{x=\lambda} + \int e^v \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy$

$$= \int e^v \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy,$$

on a $\displaystyle mm'' - m'^2 = \int e^v dy \cdot \int e^v \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dy - \left(\int e^v \frac{\partial v}{\partial x} dy\right)^2 \geqslant 0$

d'après l'inégalité de Schwarz. L'égalité ne peut avoir lieu qui si $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$; v est alors une fonction linéaire de x.

Comme plus haut, on peut remplacer Ω par un domaine G pointé en a, et définir les moyennes à l'aide de la fonction de Green $g(p, a; G)$.

2. Fonctions analytiques à moyennes bornées. — Soit f une fonction holomorphe sur la surface de Riemann S tout entière. Si S_0 est un domaine canonique fixe de S, et S_1 un domaine canonique variable contenant $\overline{S}_0$, la condition nécessaire et suffisante pour que les moyennes $m_\alpha(\lambda, f; S_1 - \overline{S}_0)$ restent bornées par un nombre ne dépendant que de S_0 est que $|f|^\alpha$ admette une majorante harmonique (théorème 3). *Nous dirons alors que f a ses moyennes d'ordre α bornées sur* S, *et nous appellerons* (AM_α) *l'ensemble des fonctions holomorphes sur* S *qui possèdent cette propriété.* Quel que soit α, (AM_α) est un espace vectoriel complexe, car $|f_1 + f_2|^\alpha \leqslant A_\alpha(|f_1|^\alpha + |f_2|^\alpha)$, avec $A_\alpha = \mathrm{Max}(1, 2^{\alpha-1})$. Pour $\alpha \geqslant 1$, la relation $f \in (AM_\alpha)$ équivaut à $\mathcal{R}f \in (HM_\alpha)$ et $\mathcal{I}f \in (HM_\alpha)$; de plus, (AM), muni de la norme $\|f\|_\alpha = [\widehat{|f|^\alpha}(a)]^{1/\alpha}$, où a est un point fixe de S, est un espace de

([68]) Cf. G. H. Hardy [1], F. Riesz [1], [2], P. Montel [1].

Banach (même démonstration que pour les espaces de fonctions harmoniques). Si $0 < \alpha < \beta$, $m_\alpha(\lambda, f)$ est inférieur à $m_\beta(\lambda, f)$, de sorte que $(\mathrm{AM}_\alpha) \supset (\mathrm{AM}_\beta)$. Enfin, si nous désignons par (AB) (resp. (AD)) l'ensemble des fonctions holomorphes sur S et bornées (resp. à intégrale de Dirichlet finie), nous avons évidemment $(\mathrm{AB}) \subset (\mathrm{AM}_\alpha)$ pour tout α, tandis que $(\mathrm{AD}) \subset (\mathrm{AM}_2)$, puisque $(\mathrm{HD}) \subset (\mathrm{HM}_2)$.

Dans le cercle unité, les fonctions holomorphes à moyennes d'ordre α bornées sont celles pour lesquelles l'intégrale $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\alpha \, d\theta$ reste bornée quand $r \to 1$; les espaces (AM_α) se confondent donc avec les *classes de Hardy* (69). Considérons alors une surface de Riemann quelconque S, et son revêtement universel $\widehat{\mathrm{S}}$, identifié à $\{|z| < 1\}$. Si $p(z)$ est la projection de $z \in \widehat{\mathrm{S}}$ sur S, et $\mathcal{G}$ le groupe de substitutions linéaires qui laissent invariante la fonction $p(z)$, on voit comme au Chap. III, n° 8, que les fonctions de $(\mathrm{AM}_\alpha)_\mathrm{S}$ correspondent de façon biunivoque aux fonctions automorphes par rapport au groupe $\mathcal{G}$ qui appartiennent à la classe de Hardy $(\mathrm{AM}_\alpha)_{\widehat{\mathrm{S}}}$. Lorsque $\alpha \geqslant 1$, nous prendrons dans $(\mathrm{AM}_\alpha)_{\widehat{\mathrm{S}}}$ la norme classique, et dans $(\mathrm{AM}_\alpha)_\mathrm{S}$ la norme relative au point $a = p(0)$; une fonction à moyennes d'ordre α bornées sur S et la fonction automorphe associée auront alors même norme. On peut donc étendre à une surface de Riemann quelconque le théorème de M. Riesz sur les fonctions conjuguées (M. Riesz [1]) :

THÉORÈME. — *Si α est > 1, il existe une constante* B_α *telle que, pour toute fonction holomorphe $f = u + iv$ appartenant à* (AM_α) *et vérifiant $v(0) = 0$, on ait* $\|v\|_\alpha \leqslant \mathrm{B}_\alpha \|u\|_\alpha$.

En appliquant ce résultat aux fonctions d'une exhaustion (S_n) de S, on obtient :

COROLLAIRE. — *Si pour $\alpha > 1$ la partie réelle d'une fonction holomorphe f appartient à* (HM_α), *f appartient à* (AM_α).

3. Moyennes d'ordre zéro et classe (AM_0). — Revenons à l'ouvert Ω du n° 1. Si α tend vers 0, $m_\alpha(\lambda, f; \Omega)$ tend vers la limite $m_0(\lambda, f; \Omega) = \exp\left(\int_{x=\lambda} \log |f| \, dy\right)$, qui est encore une fonction multiplicativement convexe de λ, et qu'on peut appeler *moyenne d'ordre 0 de f dans* Ω (70). Si S_0 est fixe et S_1 variable $\supset \overline{\mathrm{S}}_0$, les

(69) G. H. HARDY [1], F. RIESZ [1].

(70) Cf. HARDY, LITTLEWOOD et POLYA, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

moyennes $m_0(\lambda, f; S_1 - \bar{S}_0)$ restent bornées si, et seulement si, $\log|f|$ admet une majorante harmonique. La condition de borne ainsi obtenue pour f est peu maniable, et n'offre guère d'intérêt pour la classification. En effet, elle ne se conserve pas par addition, et surtout elle n'impose aucune limitation à la nature de la surface S ou à la croissance de f au voisinage de la frontière idéale ; elle signifie simplement que les zéros de f sont assez rares (si S est parabolique, elle exprime que f ne s'annule pas ; si S est hyperbolique, que la série $\sum_j g(p, b_j)$, construite avec les zéros de f, converge[71]). Nous définirons donc les fonctions « à moyennes d'ordre o bornées » par une condition plus restrictive que la précédente : nous appellerons ainsi les fonctions f pour lesquelles $\log|f|$ possède une majorante harmonique *positive* sur S (ce qui implique que S est hyperbolique). Il revient au même de dire que la fonction automorphe associée à f (voir le numéro précédent) a sa fonction caractéristique de Nevanlinna bornée, puisque, pour une fonction holomorphe dans $\{|z| < 1\}$, cette caractéristique est la moyenne de $\overset{+}{\log}|f|$.

L'exemple du cercle unité montre qu'on impose aux fonctions f une restriction inutile en supposant qu'elles sont holomorphes. Nous étendrons donc notre définition aux fonctions méromorphes, de la façon suivante :

DÉFINITION I. — *Nous dirons qu'une fonction méromorphe sur une surface de Riemann* S *appartient à la classe* (AM_0) *si* $\overset{+}{\log}|f|$ *admet une majorante harmonique sur la surface* S′ *obtenue en ôtant de* S *les pôles* c_k *de* f, *ou, ce qui revient au même, si* $\overset{+}{\log}|f|$ *admet une majorante surharmonique sur* S.

Montrons l'équivalence des deux conditions. Si la fonction $\overset{+}{\log}|f|$ est majorée sur S par la fonction surharmonique V, elle l'est à fortiori sur S′, où elle est sousharmonique ; elle y admet donc une majorante harmonique. Inversement, supposons $\overset{+}{\log}|f|$ inférieur sur S′ à la fonction harmonique H. D'après le principe de Picard, H est prolongeable sur S en une fonction surharmonique de la forme

(71) Si $\log|f|$ a une majorante harmonique U, on a, pour tout domaine relativement compact F de S, $\log|f(p)| + \sum_{b_j \in G} g(p, b_j\,;\ G) \leq U(p)$. On en déduit que $\sum_j g(p, b_j)$ est inférieur à $U(p) - \log|f(p)|$. Le mot « converge » signifie ici : n'est pas identique à $+\infty$, donc est $< +\infty$ hors des b_j.

$\sum_k \lambda_k g(p, c_k) + h$, h étant une fonction harmonique positive régulière sur S, et λ_k un nombre supérieur à l'ordre du pôle c_k. Il en résulte que la série $\sum_k g(p, c_k)$, dans laquelle chaque pôle est compté avec son ordre de multiplicité, est convergente. Nous avons vu que la série des fonctions de Green des zéros de f, $\sum_j g(p, b_j)$, converge également. La fonction harmonique

$$(1) \qquad U(p) = \log|f(p)| + \sum_j g(p, b_j) - \sum_k g(p, c_k),$$

régulière sur S, est majorée par h, d'après le théorème 1 bis ; elle appartient donc à (HM_1), et $\log|f|$ est la différence de deux fonctions surharmoniques *positives*, $\widehat{U^+} + \sum_k g(p, c_k)$ et $\widehat{U^-} + \sum_j g(p, b_j)$. Réciproquement, si $\log|f| = V_1 - V_2$, avec V_1 et V_2 surharmoniques $\geqslant 0$, on a $\overset{+}{\log}|f| \leqslant V_1$. Donc :

THÉORÈME 19. — *Pour que f appartienne à (AM_0), il faut et il suffit que l'une des deux conditions (équivalentes) suivantes soit remplie :*

a) $\log|f|$ est la différence de deux fonctions surharmoniques positives ;

b) les séries $\sum_j g(p, b_j)$ et $\sum_k g(p, c_k)$, construites respectivement avec les zéros et les pôles de f, sont convergentes, et la fonction (1) appartient à (HM_1).

La définition 1, et l'inégalité

$$\overset{+}{\log}|f_1 + f_2| \leqslant \overset{+}{\log}|f_1| + \overset{+}{\log}|f_2| + \log 2,$$

impliquent que (AM_0) est un espace vectoriel complexe ; c'est même un corps, puisque le produit et le quotient de deux fonctions de (AM_0) sont dans (AM_0), d'après la condition a) du théorème 19. En particulier, si $f \in (AM_0)$, il en est de même de $\dfrac{a_1 f + a_2}{a_3 f + a_4}$, quelles que soient les constantes complexes a_1, a_2, a_3, a_4. Si l'on désigne par $z_j(w)$ les zéros de $f(p) - w$, la série $\sum_j g(p, z_j(w))$ converge pour toute valeur complexe w [72]. Enfin, pour $\alpha > 0$, $(AM_\alpha) \subset (AM_0)$, car $\overset{+}{\log}|f| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}|f|^\alpha$.

[72] En excluant le cas trivial $f(p) \equiv w$.

Examinons maintenant le comportement d'une fonction de (AM_0) au voisinage d'une singularité isolée. Soit q un point de S, S′ la surface $S-\{q\}$, et f une fonction de $(AM_0)_{S'}$. Le point q ne peut être limite de pôles de f, sans quoi la série $\sum_k g(p, c_k)$ ne convergerait pas, une infinité de ses termes tendant vers $g(p, q)$. Il existe alors un voisinage V de q tel que, dans $V-\{q\}$, $\overset{+}{\log}|f|$ ait une majorante harmonique $H=h+Kg(p, q)$, h étant harmonique dans V et $K \geqslant 0$; f a donc un pôle d'ordre K au plus en q. Si $f \in (AM_\alpha)_{S'}$, q est un point régulier pour f, car on ne peut avoir $|f|^\alpha \leqslant h+Kg(p, q)$, que si f est bornée au voisinage de q. Ceci montre en particulier qu'il est inutile d'étendre aux fonctions méromorphes la notion de fonction à moyennes d'ordre α bornées, comme nous l'avons fait pour les moyennes d'ordre o. De plus, notre définition large de la classe (AM_0) nous permet d'exprimer de manière simple le résultat précédent :

Toute fonction qui est de la classe (AM_α) au voisinage d'un point q, ce point exclu, est prolongeable au point q, et son prolongement est encore de la classe (AM_α).

Cette proposition est un cas particulier du théorème suivant :

Théorème 20. — *Soient* S *une surface de Riemann,* E *un ensemble fermé de capacité nulle sur* S, *et* S′ *la surface* S-E. *Si une fonction* f *appartient à* $(AM_\alpha)_{S'}$, *elle est prolongeable sur* E, *et la fonction prolongée appartient à* $(AM_\alpha)_S$.

Nous supposerons f non constante ; S est alors hyperbolique. En adjoignant à E les zéros et les pôles de f, on obtient encore un ensemble fermé de capacité nulle ; on peut donc toujours supposer que f ne s'annule pas et ne devient pas infinie dans S′ ; $\log|f|$ est alors harmonique sur S′, et, comme cette fonction appartient à $(HM_1)_{S'}$, elle est de la forme $U^\mu+h$, où $h \in (HM_1)_S$ et U^μ est le potentiel de Green (pour S) d'une mesure μ portée par E (cf. M. Brelot [3], théor. 2). L'uniformité de la fonction f se traduit par les relations :

$$(2) \qquad \int_C \left(\frac{\partial U^\mu}{\partial \nu}+\frac{\partial h}{\partial \nu}\right) ds \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

pour tout cycle C de S′ ; en particulier, si C est le bord d'un compact de S, on a :

$$(2') \qquad \int_C \frac{\partial U^\mu}{\partial \nu} ds \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

puisque alors $\int_C \frac{\partial h}{\partial \nu} ds = 0$. En vertu du théorème de Gauss sur le flux, la mesure μ d'un domaine relativement compact très régulier de S dont la frontière C ne rencontre pas E est donc un nombre entier. Or, il est facile de voir [73] qu'un domaine quelconque peut être approché de l'intérieur par des domaines du type indiqué, de sorte que la propriété d'avoir une mesure μ entière est vraie pour tout domaine, donc pour tout ouvert, et finalement pour tout ensemble μ-mesurable. Elle est alors vraie pour μ^+ et μ^- (d'après la formule $\mu^+(A) = \sup\limits_{B \subset A} \mu(B)$). Si p est un point quelconque de S, et si t est le paramètre local en p (ce point correspondant à $t = 0$), on a $\mu^+(p) = \lim\limits_{r \to 0} \mu^+(\{|t| < r\})$. Il en résulte que si p appartient au support de μ^+, la mesure μ^+ comporte une masse ponctuelle en p ; la même chose étant vraie pour μ^-, on voit que μ est de la forme $\sum\limits_k m_k \varepsilon_{c_k} - \sum\limits_j n_j \varepsilon_{b_j}$, avec des m_k et n_j entiers > 0 ; l'ensemble formé par les points c_k et b_j nécessairement discret. Si l'on pose :

$$(3)\quad \log|f_1(p)| = h(p) + U^\mu(p) = h(p) + \sum_k m_k g(p, c_k) - \sum_j n_j g(p, b_j)$$

cette égalité définit partout sur S une fonction analytique $f_1(p)$, qui est uniforme à cause des relations (2), et qui est égale à f sur S'. La formule (3) montre que $f_1 \in (AM_0)_S$ (théorème 19) ; si $f \in (AM_\alpha)_{S'}$, le prolongement est holomorphe, et $f_1 \in (AM_\alpha)_S$, pour les mêmes raisons que plus haut.

2. Fonction caractéristique

4. Fonction caractéristique d'une fonction méromorphe sur une surface régulière. — Les considérations du numéro précédent nous amènent à étendre à une surface de Riemann quelconque la notion de fonction caractéristique de Nevanlinna d'une fonction méromorphe [74]. Nous le ferons en deux étapes, en supposant d'abord que la surface considérée est hyperbolique et régulière (cf. Chap. III, n° 21). Nous prendrons sur S un point fixe a ; nous appellerons $g(p)$

[73] Pour cela, on utilisera la propriété suivante, due à LEBESGUE (cf. M. BRELOT [2]) : tout point de E est le centre de circonférences arbitrairement petites ne rencontrant pas E.

[74] Cf. R. NEVANLINNA [1], [2]. Une telle extension a été faite dans le plan par GUNNAR AF HÄLLSTRÖM [1].

la fonction de Green du pôle a, D_λ le domaine $\{g(p) > \lambda\}$, C_λ sa frontière, et $dh(p)$ la différentielle adjointe à $-\frac{1}{2\pi} dg(p)$.

Soit donc $f(p)$ une fonction méromorphe sur S, ayant pour zéros les points b_j et pour pôles les points c_k. La fonction $U_\lambda(p) = \log|f(p)| + \sum_{b_j \in D_\lambda} g(p, b_j\,; D_\lambda) - \sum_{c_k \in D_\lambda} g(p, c_k\,; D_\lambda)$ est harmonique régulière dans D_λ ; sa moyenne par rapport à g est $U_\lambda(a)$. On a ainsi, lorsque $f(a) \neq 0, \infty$,

$$(1)\ \log|f(a)| = \int_{C_\lambda} \log|f(p)| dh(p) - \sum_{b_j \in D_\lambda} [g(b_j) - \lambda] + \sum_{c_k \in D_\lambda} [g(c_k) - \lambda].$$

C'est la formule de Jensen. Si f a en a un pôle d'ordre m ou en zéro d'ordre $-m$, le calcul de $U_\lambda(a)$ montre que la formule (1) doit être remplacée par :

$$(1')\ \lim_{p \to a} [\log|f(p)| - mg(p)]$$
$$= \int_{C_\lambda} \log|f(p)| dh(p) - \sum'_{b_j \in D_\lambda} [g(b_j) - \lambda] + \sum'_{c_k \in D_\lambda} [g(c_k) - \lambda] - m\lambda,$$

l'accent placé après le $\sum$ indiquant que la sommation porte sur les zéros ou les pôles différents de a. Si nous désignons par $n(\lambda, f)$ le nombre des pôles de f dans $\{g(p) \geqslant \lambda\}$, et si nous posons, avec R. Nevanlinna :

$$N(\lambda, f) = \sum'_{c_k \in D_\lambda} [g(c_k) - \lambda] - n(\infty, f)\lambda$$
$$= \int_\lambda^\infty [n(\rho, f) - n(\infty, f)] d\rho - n(\infty, f)\lambda,$$
$$m(\lambda, f) = \int_{C_\lambda} \overset{+}{\log} |f(p)| dh(p) \quad \text{et} \quad T(\lambda, f) = N(\lambda, f) + m(\lambda, f)$$

les formules (1) et (1') peuvent se mettre sous la forme :

$$(2) \qquad T(\lambda, f) = T\left(\lambda, \frac{1}{f}\right) + \text{Cte}.$$

Quand nous ne nous occuperons que d'une seule fonction méromorphe $f(p)$, nous utiliserons les notations $n(\lambda, w)$, $N(\lambda, w)$, $m(\lambda, w)$, etc... à la place de $n\left(\lambda, \frac{1}{f-w}\right)$, $N\left(\lambda, \frac{1}{f-w}\right)$, $m\left(\lambda, \frac{1}{f-w}\right)$, etc...

lorsque w est un nombre complexe quelconque(*). Pour tout w, on a alors la relation :

$$(2') \qquad N(\lambda, w) + m(\lambda, w) = T(\lambda, f) + O(1),$$

qui exprime le *premier théorème fondamental* de R. Nevanlinna.

La fonction $T(\lambda, f)$ sera appelée *la fonction caractéristique de f*. Elle possède les propriétés classiques : elle croît quand λ décroît (c'est-à-dire quand D_λ croît) ; elle est convexe en λ. En effet, si $\lambda > \mu$, $\overset{+}{\log}|f(p)| - \sum_{c_k \in D_\mu} g(p, c_k, D_\mu)$ est sous-harmonique dans D_μ, et sa moyenne sur C_λ est égale à $m(\lambda, f) + N(\lambda, f) - N(\mu, f)$. Or, une telle moyenne a les propriétés indiquées (théorème 3).

Rappelons qu'on peut également définir *une autre fonction caractéristique*, qui ne diffère de la première que par une quantité bornée (cf. T. Shimizu [1] et L. Ahlfors [1], [3]). Soit

$$[w_1, w_2] = \frac{|w_1 - w_2|}{\sqrt{1+|w_1|^2}\sqrt{1+|w_2|^2}}$$

la distance sphérique cordale de deux nombres complexes, et soit : $m^*(\lambda, w) = \int_{C_\lambda} \log \frac{1}{[f(p), w]} dh(p)$. D'après le théorème de la variation de l'argument, on a pour deux valeurs quelconques w_1, w_2.

$$\frac{d}{d\lambda}\Big[m^*(\lambda, w_1) - m^*(\lambda, w_2)\Big] = n(\lambda, w_1) - n(\lambda, w_2).$$

En intégrant cette égalité, et en posant, lorsque $w \neq f(a)$,

$$(3) \qquad T^*(\lambda, w) = N(\lambda, w) + m^*(\lambda, w) - \log \frac{1}{[f(a), w]} \ (^{75}),$$

on obtient $T^*(\lambda, w_1) = T^*(\lambda, w_2)$. $T^*(\lambda, w)$ ne dépend donc pas de w ; nous le noterons désormais $T^*(\lambda)$, et nous l'appellerons fonction caractéristique d'Ahlfors de f. Si nous calculons $T^*(\lambda)$ en prenant $w = \infty$, nous obtenons aisément :

$$T(\lambda, f) - \log\sqrt{1+|f(a)|^2} \leqslant T^*(\lambda)$$
$$\leqslant T(\lambda, f) - \log\sqrt{1+|f(a)|^2} + \frac{1}{2}\log 2.$$

(*) Cela ne risque pas de créer de confusion, car on n'aura presque jamais à considérer la caractéristique d'une fonction constante.

(75) Si $w = f(a)$, on remplace la constante $\log \frac{1}{[f(a), w]}$ par

$$\lim_{p \to a} \big(n(\infty, w) g(p) - \log[f(p), w]\big).$$

D'autre part, soit $d\tau(w) = \dfrac{d\sigma(w)}{(1+|w|^2)^2}$ l'élément d'aire sur la sphère de Riemann. La quantité $\int \log \dfrac{1}{[w_0,\, w]}\, d\tau(w)$ ne dépend pas de w_0 ; par conséquent l'intégration de l'égalité (3) nous donnera :

$$(4) \qquad T^*(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int N(\lambda,\, w)\, d\tau(w).$$

On a ainsi :

$$(5) \qquad T(\lambda, f) = \frac{1}{\pi} \int_\lambda^\infty A(\lambda) d\lambda + O(1)$$

où $A(\lambda) = \int n(\lambda,\, w) d\tau(w)$ est l'aire sphérique de la surface décrite par $w = f(p)$ quand p décrit D_λ.

5. Valeurs déficientes. — Les définitions données ci-dessus permettent d'introduire la notion de défaut. Nous appellerons *défaut d'une valeur w relativement à la fonction f* la quantité

$$\delta(w) = 1 - \limsup_{\lambda \to 0} \frac{N(\lambda,\, w)}{T(\lambda,\, w)}.$$

Lorsque $\lim\limits_{\lambda \to 0} T(\lambda, f) = +\infty$, on peut remplacer $T(\lambda,\, w)$ par $T^*(\lambda)$ dans l'expression précédente. On a de plus le théorème suivant, dû à O. Frostman [1] dans le cas classique :

Théorème 21. — *Si la fonction caractéristique d'une fonction méromorphe f n'est pas bornée, les valeurs de défaut non nul par rapport à f forment un ensemble de capacité nulle.*

La démonstration est la même que dans le cercle unité. Il importe de remarquer préalablement que les ensembles de capacité nulle dans le plan complexe fermé (ou la sphère de Riemann) restent les mêmes lorsqu'on remplace la fonction fondamentale $\log \dfrac{1}{|w_1 - w_2|}$ par la fonction $\log \dfrac{1}{[w_1,\, w_2]}$ (76), qui permet de définir des potentiels

(76) Cf. O. Frostman [1]. Il suffit de le voir pour un ensemble E compact dans le plan $|w| < \infty$; or, $\log \dfrac{1}{[w_1,\, w_2]} \leqslant \log \dfrac{1}{|w_1 - w_2|} + \text{Cte}$ si $w_1, w_2 \in E$, de sorte que sur E le potentiel sphérique et le potentiel ordinaire d'une mesure portée par E ne diffèrent que d'une quantité bornée. La capacité sphérique de E sera par définition e^{-m}, si m est le minimum

toujours positifs. Soit alors μ une mesure « sphérique » $\geqslant 0$ de masse 1 et de potentiel borné. D'après la formule (3) du n° 4, on a $\int N(\lambda, w)d\mu(w) = T^*(\lambda) + O(1)$, donc :

$$\int \limsup_{\lambda \to 0} \frac{N(\lambda, w)}{T^*(\lambda)} d\mu(w) \geqslant \lim_{\lambda \to 0} \int \frac{N(\lambda, w)}{T^*(\lambda)} d\mu(w) = 1,$$

ou encore $\int \delta(w)d\mu(w) \leqslant 0$; mais $\delta(w)$ est $\geqslant 0$, donc $\delta(w) = 0$ sauf sur un ensemble de mesure-μ nulle. L'ensemble des valeurs de défaut > 0 est ainsi de mesure nulle pour toute distribution de masses de potentiel borné ; il est alors de capacité intérieure nulle, d'après H. Cartan ([1], [2]). Mais c'est un ensemble borélien, de sorte qu'il est de capacité nulle.

On peut même montrer que si $T(\lambda, f)$ n'est pas bornée, l'ensemble des valeurs de défaut supérieur $\bar{\delta}(w) = 1 - \liminf_{\lambda \to 0} \frac{N(\lambda, w)}{T^*(\lambda)}$ strictement positif est de capacité nulle. Nous emploierons à cet effet la méthode de Valiron-Ahlfors ([77]). Soit $H(\lambda)$ une fonction $\geqslant 0$, décroissante, qui tend vers $+\infty$ quand $\lambda \to 0$, et telle que $T(\lambda) - H(\lambda)$ ait les mêmes propriétés. Pour λ donné, l'ensemble fermé E_λ des w qui satisfont à $N(\lambda, w) \leqslant T(\lambda) - H(\lambda)$ a une capacité sphérique inférieure à $e^{-H(\lambda)}$, car s'il est de capacité > 0, son potentiel sphérique d'équilibre U^{μ_λ} vérifie :

$$T^*(\lambda) = \int N(\lambda. w)d\mu_\lambda(w) + \int_{C_\lambda} U^{\mu_\lambda}(f(p))dh(p) - U^{\mu_\lambda}(f(a)),$$

et par conséquent a un maximum supérieur à $H(\lambda)$. Donnons-nous alors un nombre $\lambda_0 > 0$; et définissons par récurrence une suite (λ_n) au moyen des relations $T^*(\lambda_{n+1}) = T^*(\lambda_n) + H(\lambda_{n+1})$; il est clair que $\lambda_n \to 0$. Si $F_n = \bigcup_{k \geqslant n} E_{\lambda_k}$, on a $N(\lambda, w) > T^*(\lambda) - 2H(\lambda)$ pour $\lambda \leqslant \lambda_n$ et $w \notin F_n$; or, F_n est de capacité sphérique inférieure à

$$\exp\left(-1/\sum_{k \geqslant n} \frac{1}{H(\lambda_k)}\right).$$

Si l'on prend $H(\lambda) = (T^*(\lambda))^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$ $(0 < \varepsilon < 1)$, la capacité de F_n est

des maxima des potentiels sphériques des mesures $\geqslant 0$ de masse totale 1 et portées par E. Si $E = \bigcup_n E_n$, et si C_n est la capacité sphérique de E_n, et C celle de E, on a :

$$\log \frac{1}{C} \leqslant \sum_n \log \frac{1}{C_n}.$$

([77]) G. Valiron [1], L. Ahlfors [2], R. Nevanlinna [2].

au plus égale à $e^{-\varepsilon T^*(\lambda_{n-1})^\varepsilon}$; l'ensemble $F = \bigcap_n F_n$ est de capacité nulle, et si $w \notin F$, $N(\lambda, w)$ est $\geqslant T^*(\lambda) - 2(T^*(\lambda))^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$ pour λ assez petit, donc $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{N(\lambda, w)}{T^*(\lambda)} = 1$. C. Q. F. D.

Remarques. — 1. On montrerait comme dans le plan (cf. Gunnar af Hällström [1]) que *la somme des défauts est bornée dès que* $T(\lambda, f)$ *croît assez vite ;* l'ensemble des valeurs déficientes est alors dénombrable.

2. Si $T(\lambda, f)$ est borné, $N(\lambda, w)$ l'est également, quel que soit w, et on a $\lim\limits_{\lambda \to 0} N(\lambda, w) = N(0, w) = \sum\limits_j g(z_j(w))$, en appelant $z_j(w)$ les racines de $f(p) = w$. Il en résulte que $\sum\limits_j g(p, z_j(w))$ est convergente (généralisation du théorème de Blaschke). En particulier, $\sum\limits_k g(p, c_k)$ converge ; la moyenne sur C_λ de

$$\overset{+}{\log}|f(p)| - \sum_k g(p, c_k) \text{ est } T(\lambda, f) - N(0, f),$$

donc $f \in (AM_0)$. La réciproque est évidente.

6. Extension à une surface de Riemann quelconque. — Considérons maintenant une surface de Riemann ouverte S quelconque, sur laquelle est définie une fonction méromorphe $f(p)$. Dans tout domaine relativement compact très régulier G, de bord C, contenant un point a fixé une fois pour toutes, f a une fonction caractéristique (définie comme au n° 4) :

$$\begin{aligned} T(\lambda, f; G) &= N(\lambda, f; G) + m(\lambda, f; G) \\ &= \sum_{c_k \in G_\lambda} [g_G(c_k) - \lambda] + \int_{g_G = \lambda} \overset{+}{\log}|f(p)|\, dh_G(p), \end{aligned}$$

où $g_G(p) = g(p, a; G)$, $G_\lambda = \{g_G(p) > \lambda\}$, $dh_G = -\dfrac{1}{2\pi}(dg_G)^*$; les points c_k sont les pôles de f. Posons alors

$T(G, f) = T(0, f; G)$, $N(G, w) = N(0, w; G)$, etc... Nous avons :

$$T(G, f) = \sum_k g_G(c_k) + \int_C \overset{+}{\log}|f(p)|\, dh_G(p) = N(G, f) + m(G, f) \text{ (78)};$$

la fonction $T(G, f)$, dont la variable est un domaine, sera encore appelée la fonction caractéristique de f sur S. Cette dénomination se justifie du fait que, visiblement, $T(\lambda, f; G) = T(G_\lambda, f)$.

(78) Nous supposerons désormais que $g_G(p)$ est définie pour tout point p de S, $g_G(p)$ ayant la valeur 0 si $p \notin G$. Si a n'est pas un pôle, on a alors : $N(G, f) = \sum\limits_k g_G(c_k)$.

Quand G décrit l'ensemble filtrant des domaines du type indiqué, $T(G, f)$ et $N(G, w)$ sont des fonctions croissantes. En effet, si $G \subset G'$, $N(G, w) \leqslant N(G', w)$, puisque $g_G \leqslant g_{G'}$, d'autre part, la fonction $u(p) = \overset{+}{\log}|f(p)| - \sum_k g(p, c_k; G')$ est sousharmonique dans G'; comme $\int_C g(p, c_k; G') dh_G(p) = g(a, c_k; G') - g(a, c_k; G)$ (avec la convention faite dans la note ([78])), la moyenne de u sur C est $m(G, f) + N(G, f) - N(G', f)$, tandis que sa moyenne sur C', qui majore la première, est $m(G', f)$. Donc $T(G, f) \leqslant T(G', f)$.

Le premier théorème fondamental s'exprime de la même façon que plus haut. Si $f(a) \neq 0, \infty$, on a :

$$T(G, f) = T\left(G, \frac{1}{f}\right) + \log|f(a)|.$$

Si a est un zéro ou un pôle, il faut donner un sens à $N\left(G, \frac{1}{f}\right)$ ou $N(G, f)$, et pour cela introduire une fonction $\lambda(G)$ destinée à jouer un rôle analogue à celui de la variable λ dans les numéros précédents. Or, on sait (cf. chap. II, n° 13) qu'il existe toujours sur S une fonction $\chi(p)$, harmonique et uniforme, régulière sur $S - \{a\}$, et ayant un pôle logarithmique d'ordre 1 en a, Nous prendrons pour $\lambda(G)$ la moyenne de χ sur le bord C de G, $\int_C \chi(p) dh_G(p)$, qui est encore égale à $\lim\limits_{p \to a} (\chi(p) - g_G(p))$, d'après la formule de Green. Il est clair que $\lambda(G)$ ne varie que d'une constante si on change la fonction χ.

Pour w quelconque, nous définirons alors $N(G, w)$ *par l'égalité :*

$$N(G, w) = \sum_j{}' g_G(z_j(w)) - n(a, w)\lambda(G),$$

dans laquelle $n(a, w)$ désigne le nombre des racines de $f(p) = w$ situées en a.

Si $f(a) = 0$ ou ∞, on aura :

$$T(G, f) = T\left(G, \frac{1}{f}\right) + c$$

avec $c = \lim\limits_{p \to a} (\log|f(p)| + n(a, 0)\chi(p))$ si a est un zéro,

$c = \lim\limits_{p \to a} (\log|f(p)| - n(a, \infty)\chi(p))$ si a est un pôle.

On peut encore définir la fonction caractéristique par la méthode de Shimizu-Ahlfors. G_λ ayant la signification indiquée plus haut, on appellera $A(G_\lambda)$ l'aire sphérique de la surface de Riemann image de G_λ par $w=f(p)$, et on posera $T^*(G)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(G_\lambda)d\lambda$. $T^*(G)$ est une fonction croissante, car si $G\subset G'$, G_λ est contenu dans G'_λ, donc $A(G_\lambda)\leqslant A(G'_\lambda)$, de sorte que $T^*(G)\leqslant T^*(G')$. En supposant $f(a)$ fini, on a $\left|T^*(G)-T(G, f)+\log\sqrt{1+|f(a)|^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}\log 2$.

On appellera ici *défaut* (*ou défaut inférieur*) d'une valeur w relativement à f la quantité $\delta(w)=1-\limsup\limits_{G\to S}\frac{N(G, w)}{T^*(G)}$, et *défaut supérieur* la quantité $\bar{\delta}(w)=1-\liminf\limits_{G\to S}\frac{N(G, w)}{T^*(G)}$.

Le théorème de Frostman et le théorème analogue relatif au défaut supérieur s'étendent sans difficulté au cas actuel, du fait que la « frontière idéale » de S a un système fondamental dénombrable de voisinages. Si $\lim\limits_{G\to S} T(G, f)=+\infty$, les valeurs w pour lesquelles $\bar{\delta}(w)$ n'est pas nul forment donc un ensemble de capacité nulle. En particulier, l'ensemble des valeurs lacunaires d'une fonction de caractéristique non bornée est de capacité nulle. Lorsque S est hyperbolique, il en est de même de l'ensemble des valeurs que f ne prend qu'un nombre fini de fois, et, plus généralement, de l'ensemble des w pour lesquels la série (6) $\sum\limits_j g(p, z_j(w))$ converge. Au contraire, si f est de caractéristique bornée, la série (6) converge pour tout w; il en résulte que si $T(G, f)$ est bornée, f appartient à (AM_0), et réciproquement. Nous avons en outre le critère suivant :

THÉORÈME 22. — *Pour qu'une fonction méromorphe f définie sur une surface de Riemann hyperbolique* S *appartienne à* (AM_0), *il faut et il suffit que la série $\Sigma_j g(p, z_j(w))$ converge pour des valeurs w formant un ensemble de capacité strictement positive.*

COROLLAIRE. — *Si* S *est hyperbolique, si $w=f(p)$ représente* S *sur une surface de Riemann d'aire sphérique finie, f appartient à* (AM_0).

En effet, si $n(w)$ est le nombre (fini ou infini des racines de $f(p)=w$ sur S, on a $\int n(w)d\tau(w)<+\infty$, donc $n(w)$ est fini presque partout, et la série (6) converge pour presque tout w. On verrait d'ailleurs aisément que $T^*(G)\leqslant\frac{\lambda_0}{\pi}A(G)+C^{te}$ pour $G\supset D_{\lambda_0}$.

3. — Classes de surfaces.

7. **Définition.** — *Nous dirons qu'une surface de Riemann* S *appartient à la classe* $\mathcal{C}_{AM_\alpha}$, *pour* $\alpha \geqslant 0$, (*resp.* $\mathcal{C}_{AB}$, $\mathcal{C}_{AD}$) *si toute fonction analytique uniforme sur* S *qui appartient à* (AM_α) $\big($*resp.* (AB), $(AD)\big)$ *est une constante.*

En vertu des relations établies plus haut entre les espaces (AM_α), on a pour $0 < \alpha < \beta < +\infty$ $\mathcal{C}_{AM_0} \subset \mathcal{C}_{AM_\alpha} \subset \mathcal{C}_{AM_\beta} \subset \mathcal{C}_{AB}$. Il est clair que $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_{AM_0}$. Pour $\alpha > 0$, $\mathcal{C}_{AM_\alpha}$ contient C_{HB}, car s'il existe sur une surface de Riemann S une fonction holomorphe f non constante $\in (AM_\alpha)$, la fonction $U = \log|f| + \sum_j g(p, b_j)$ (où les b_j sont les zéros de f) est la plus petite majorante harmonique de $\log|f|$, donc $\widehat{U^+}$ est celle de $\overset{+}{\log}|f|$, et vérifie $e^{\alpha \widehat{U^+}} \leqslant 1 + |f|^\alpha$; l'existence sur S d'une fonction harmonique bornée non constante résulte alors du théorème 11, appliqué à $\Phi(t) = e^t$, à moins que $\widehat{U^+}$ ne soit constante, auquel cas f est bornée. On a évidemment $\mathcal{C}_{HD} \subset \mathcal{C}_{AD}$; comme $(AD) \subset (AM_2)$, $\mathcal{C}_{AM_2} \subset \mathcal{C}_{AD}$. Ce résultat est d'ailleurs une conséquence immédiate du suivant :

Théorème 23. — *S'il existe sur une surface de Riemann* S *une fonction holomorphe non constante à intégrale de Dirichlet finie, il y existe une fonction holomorphe bornée non constante. En d'autres termes, la classe* $\mathcal{C}_{AB}$ *est contenue dans la classe* $\mathcal{C}_{AD}$.

Soit $w = f(p)$ la fonction holomorphe non constante sur S qui satisfait à $D_S(f) < +\infty$. Comme $D_S(f) = \int n(w)\, d\sigma(w)$ (avec les mêmes notations que plus haut), le domaine simple $T = f(S)$ est d'aire finie; $\complement T$ contient donc un compact K d'aire > 0. S'il y a dans K un continu non ponctuel, le théorème est démontré; si K est totalement discontinu, la fonction de A. Denjoy [1]

$$\varphi(w) = \int_K \frac{d\sigma(z)}{w - z}$$

est uniforme, continue, bornée et non constante dans tout le plan des w (elle tend vers 0 quand $w \to \infty$, et $w\varphi(w)$ tend vers l'aire de K), et elle est holomorphe dans $\complement K$, donc dans T. $\varphi(f(p))$ est alors analytique uniforme bornée et non constante sur S.

Remarquons que le résultat précédent peut être établi à l'aide d'un théorème de L. Ahlfors [5], suivant lequel il existe une fonction holomorphe bornée non constante à l'extérieur de tout compact dont la capacité d'ordre 1 est > 0 [79].

8. Nous avons vu que $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_{AM_0}$. Pour une catégorie importante de surfaces, on a même l'égalité. En effet:

THÉORÈME 24. — *Sur toute surface de Riemann* hyperbolique *de genre fini, ou qui est conformément équivalente à une surface de recouvrement de la sphère de Riemann dont le nombre de feuillets est borné, il existe une fonction méromorphe non constante de caractéristique bornée.*

Soit S une telle surface, et soit $z(p)$ la fonction qui associe à chaque point p de S sa projection sur le plan complexe (identifié à la sphère de Riemann); d'après le corollaire du théorème 22, z appartient à (AM_0) [80].

Par contre, nous allons voir qu'il y a des surfaces de la catégorie précédente (donc $\notin \mathcal{C}_{AM_0}$) qui appartiennent à $\mathcal{C}_{AM_\alpha}$ pour tout $\alpha > 0$. Il en est ainsi pour la surface F′ construite par P. J. Myrberg [2] de la façon suivante: soit $\varphi(z)$ une fonction entière ayant une infinité de zéros e_n tous simples et de module > 1, et soit F la surface à deux feuillets sur laquelle la fonction $\sqrt{\varphi(z)}$ est uniforme, D′ et D″ étant les deux domaines de F qui se projettent sur $\{|z| < 1\}$, nous appellerons F′ (resp. F″) la surface $F - \overline{D'}$ (resp. $F - \overline{D''}$). Soit $p \to p^*$ l'involution canonique de F qui associe à p le point de F qui a même projection $z(p)$ que lui; $p = p^*$ caractérise les points de ramification. Si $f \in (AM_\alpha)_{F'}$, la fonction $g(p) = (f(p) - f(p^*))^2$, analytique sur $F' \cap F''$, y a ses moyennes d'ordre $\alpha/2$ bornées; de plus, elle est uniforme en z, donc de la forme $g_1(z(p))$, où $g_1 \in (AM_{\alpha/2})_G$, en posant $G = \{1 < |z| < \infty\}$. Mais $z = \infty$ est un point frontière isolé de G, g_1 y est donc analytiquement prolongeable (cf. n° 4); et par conséquent est identiquement nulle, puisque $z = \infty$ est limite des zéros e_n de g_1, La fonction f est alors uniforme en z, et régulière pour tout z fini ou infini; c'est donc une constante.

Le même raisonnement prouve encore que toute fonction

(79) L. AHLFORS [5]. Le théorème 23 a été démontré indépendamment par L. AHLFORS et A. BEURLING [1] pour les domaines plans, et étendu aux surfaces de RIEMANN par H. L. ROYDEN [1] à partir du résultat d'AHLFORS et BEURLING.

(80) Je profite de cette occasion pour rectifier une erreur que j'ai commise dans ma Note des Comptes Rendus, 230, p. 751. La surface F′ de M. MYRBERG n'appartient pas à $\mathcal{C}_{AM_0}$, puisque la fonction $z(p)$, par exemple, appartient à $(AM_0)_{F'}$.

$f \in (AM_0)_{F'}$ est de la forme $f_1(z(p))$, où f_1 est une fraction rationnelle; f est donc prolongeable à la surface F tout entière (cf, Myrberg [2], [3], et Ahlfors [7]).

9. L'exemple précédent nous montre qu'il peut exister sur une surface de Riemann S de genre infini un ensemble compact E *ayant des points intérieurs* et tel que toute fonction $\in (AM_0)_{S-E}$ soit prolongeable à S. Plus généralement, le problème se pose de déterminer les conditions auxquelles doit satisfaire un compact E d'une surface S (qu'on peut toujours supposer close) pour que toute fonction de la classe (AM_0) définie dans un voisinage quelconque de E, sauf au point de E, soit prolongeable au voisinage entier. Il suffit que E soit de capacité nulle, d'après le théorème 20, mais ce n'est peut-être pas nécessaire, car si S est close et si $S' = S - E$ est hyperbolique, les fonctions de caractéristique bornée sur S' dont l'existence est assurée par le théorème 24 sont définies sur toute la surface S.

Lorsqu'on pose le même problème pour les fonctions de (AM_α) $(\alpha > 0)$, la possibilité du prolongement équivaut à l'appartenance de $S - E$ à $\mathcal{C}_{AM_\alpha}$. En effet, si le prolongement est possible, toute fonction de $(AM_\alpha)_{S-E}$ est une constante, et s'il existe un voisinage V de E, et une fonction $f \in (AM_\alpha)_{V-E}$ non prolongeable à V, un raisonnement analogue à celui de Sario ([2], § 2) montre qu'il y a sur $S - E$ une fonction non constante à moyennes d'ordre α bornées.

Il serait intéressant de relier ces propriétés au comportement d'une fonction analytique au voisinage d'un ensemble de singularités essentielles, ou de la frontière idéale d'une surface de Riemann.

BIBLIOGRAPHIE

L. Ahlfors:

[1] Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen. *7e Congrès Math. Scand.*, Oslo, 1929.

[2] Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen. *Soc. Sci. Fenn. Comment. phys. math.*, V, n° 16, 1931.

[3] Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. *Ibid.*, VIII, n° 10, 1935.

[4] Über die Anwendung differentialgeometrischer Methoden zur Untersuchung von Überlagerungsflächen. *Acta Soc. Sci. Fenn.*, n. s. A, 2, n° 6, 1937.

[5] Bounded analytic functions. *Duke Math. Journal*, 14, 1947, p. 1-11.

[6] Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions. *Comment. Math. Helvet*, 24, 1950, p. 100-134.

[7] Remarks on the classification of open Riemann surfaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A, I, 87, 1951.

L. Ahlfors et A. Beurling :

[1] Conformal invariants and function theoretic null-sets. *Acta Math.*, 83, 1950, p. 101-129.

N. Aronszajn :

[1] Theory of reproducing Kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68, 1950, p. 337-404.

R. Bader :

[1] La théorie du potentiel sur une surface de Riemann. *Comptes Rendus*, 228, 1949, p. 2001-2002.

S. Bergman :

[1] The kernel function and the conformal mapping. *Math. Surveys*. New-York, 1950.

M. Brelot :

[1] Familles de Perron et Problème de Dirichlet. *Acta Szeged*, 9, 1939, p. 133-153.

[2] Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel. *Journal de Math.*, 9e série, 19, 1940, p. 319-337.

[3] Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques. *Bull. Sciences Math.*, 65, 1941, p. 72-98.

[4] Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques. *Annales Ecole Normale Sup.*, 61, 1944, p. 301-332.

[5] Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités. *Journal de Math.*, 9e série, 24, 1945, p. 1-32.

[6] Étude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier. *Annales Univ. Grenoble, sci. math. phys.*, 22, 1946, p. 205-219.

[7] Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin, *Ibid.*, 23, 1947-48, p. 113-138.

[8] Remarques sur la variation des fonctions sousharmoniques et les masses associées. Application. *Ann. Institut Fourier*, 2, 1950, p. 101-111.

M. Brelot et G. Choquet :

[1] Espaces et lignes de Green. *Annales de l'Institut Fourier*, 3, 1951, p. 199.

H. Cartan :

[1] Théorie du potentiel newtonien. Energie, capacité, suites de potentiels. *Bull. Soc. Math. France*, 73, 1945, p. 74-106.

[2] Théorie générale du balayage en potentiel newtonien. *Ann. Univ. Grenoble (sci. math. phys.)*, 22, 1946, p. 221-280.

J. Deny :

[1] Le principe des singularités positives de G. Bouligand et la représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine. *Revue scient.*, 1947, 2, p. 866-872.

A. Denjoy :

[1] Sur les fonctions analytiques uniformes qui restent continues sur un ensemble parfait discontinu de singularités. *Comptes Rendus*, 148, 1909, p. 1154-1156.

J. DIEUDONNÉ :

[1] Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym :
I. *Annals of Math.*, 42, 1941, p. 547-555 ;
II. *Bull. Soc. Math. France*, 72, 1944, p. 193-239.

O. FROSTMAN :

[1] Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, avec quelques applications à la théorie des fonctions. *Thèse* et *Meddel Lunds. Univ. Math. Sem.*, 3, 1935.

P. R. GARABEDIAN :

[1] The classes L^p and conformal mapping. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 69, 1950, p. 392.

GUNNAR AF HÄLLSTRÖM :

[1] Über Meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten. *Thèse*, Åbo, 1939.

G. H. HARDY :

[1] The mean value of the modulus of an analytic function. *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 14, 1915, p. 269-277.

M. HEINS :

[1] The conformal mapping of simply-connected Riemann surfaces. *Annals of Math.*, 50, 1949, p. 686-690.

J. V. L. JENSEN :

[1] Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Math.*, 30, 1906, p. 175-193.

S. JOHANSSON :

[1] Herstellung automorpher Potentiale bei beliebiger Hauptkreisgruppen. *Acta Soc. Sci. Fenn.*, 41, n° 2, 1912.

B. VON KEREKJARTO :

[1] *Vorlesungen über Topologie*, I, Berlin, 1923.

P. KŒBE :

[1] *Über die Uniformiesierung beliebiger Kurven*, III, Nach. Gott., 1908, p. 337-358.

KURAMOCHI :

[1] Potential theory and its applications. *Osaka Math. Journ.*, 2, 1951, p. 123-175.

E. LANDAU et G. VALIRON :

[1] A deduction from Schwarz lemma. *Journ. London Math. Soc.*, 4, n° 3, 1929.

R. S. MARTIN :

[1] Minimal positive harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49, 1941, p. 137-172.

P. MONTEL :

[1] Sur les fonctions convexes et les fonctions sousharmoniques. *Journal de Math.*, sér. 9, 7, 1928, p. 29-60.

A. MORI :

[1] On the existence of harmonic functions on a Riemann surface. *Journal. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, sect. I, vol. 6, 1951, p. 247-257.

P. J. MYRBERG :

[1] Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche. *Acta Math.*, 61, 1933, p. 39-79.

[2] Über die analytische Fortsetzung von beschränkten Funktionen. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A, I, 58, 1949.

[3] Über die Existenz von beschränktartige automorphen Funktionen. *Ibid.*, 77, 1950.

R. Nevanlinna :

[1] *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Paris, 1929.

[2] *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, 1936.

[3] Ein Satz über offene Riemannschen Flächen. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A, 54, 1940, n° 3.

[4] Eindeutigkeitsfragen in der Theorie der konformen Abbildung. *10e Congrès Math. Scand.*, Copenhague, 1947.

[5] Über Mittelwerte von Potentialfunktionen. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A, I, 57, 1949.

[6] Über die Anwendung einer Klasse von Integralgleichungen für Existenzbeweise in der Potentialtheorie. *Acta Szeged*, 12, A, 1950, p. 146-160.

[7] Über die Existenz von beschränkten Potentialfunktionen auf Flächen von unendlichem Geschlecht. *Math. Zeits.*, 52, 1950, p. 599-604.

[8] Beschränktartige Potentiale. *Math. Nachr.*, 4, 1951, p. 489-501.

M. Ohtsuka :

[1] Dirichlet problems on Riemann surfaces and conformal mappings. *Nagoya Math. Journal*, 3, 1951, p. 91-137.

O. Perron :

[1] Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe fur $\Delta u = 0$. *Math. Zeits.*, 18, 1923, p. 42-54.

A. Pflüger :

[1] Über das Anwachsen eindeutiger analytischer Funktionen auf öffenen Riemannschen Flächen. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A, I, 64, 1949.

T. Rado :

[1] Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Szeged*, 2, 1925, p. 101-121.

[2] Subharmonic functions. *Ergebnisse der Math.*, V, I, Berlin, 1938.

F. Riesz :

[1] Über die Randwerte einer analytischen Funktion. *Math. Zeits.*, 18, 1923, p. 87-95.

[2] Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel :
I. *Acta Math.*, 48, 1926, p. 329-343 ;
II. *Acta Math.*, 54, 1930, p. 321-360.

[3] Sur quelques notions fondamentales dans la théorie des opérations linéaires. *Annals of Math.*, 41, 1940, p. 174-206.

M. Riesz :

[1] Sur les fonctions conjuguées. *Math. Zeits.*, 27, 1927, p. 218-244.

H. L. Royden :

[1] Some remarks on open Riemann surfaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A, I, 85, 1951.

L. Sario :

[1] Über Riemannschen Flächen mit hebbaren Rand. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A, I, 50, 1948.

[2] Sur la classification des surfaces de Riemann. *11^e Congrès Math. Scand.*, Trondheim, 1949.
[3] Existence des fonctions d'allure donnée sur une surface de Riemann arbitraire. *Comptes Rendus,* 229, 1949, p. 1293-1295.
[4] Quelques propriétés à la frontière se rattachant à la classification des surfaces de Riemann. *Ibid.*, 230, 1950, p. 42-44.

T. Shimizu :
[1] On the theory of meromorphic functions. *Jap. Journal Of Math.*, 6, 1929, p. 119-171.

S. Stoilow :
[1] *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques,* Paris, 1938.

G. Valiron :
[1] Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes. *Acta Math.*, 47, 1926, p. 117-142.

Ch. de la Vallée Poussin :
[1] Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à courbure bornée. *Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa,* ser 2, vol. II, p. 167-197.

K. I. Virtanen :
[1] Über die Existenz von beschränkten harmonischen Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, A, I, 75, 1950.

H. Weyl :
[1] *Die Idee der Riemannschen Fläche,* Leipzig-Berlin, 1923.

A. Zygmund :
[1] *Trigonometrical series.* Warszawa-Lwow, 1935.

(Parvenu aux Annales le 24 avril 1952.)