ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ERIK THOMAS

L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle

Annales de l'institut Fourier, tome 20, nº 2 (1970), p. 55-191

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_2_55_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
20, 2 (1970), 55-191.

L'INTÉGRATION PAR RAPPORT A UNE MESURE DE RADON VECTORIELLE

par Erik THOMAS

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

Le but de ce travail est de développer la théorie de l'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle $\mu : \mathcal{K} \to E$, et de répondre en outre aux questions suivantes [1] :

1) Pour quelles mesures de Radon et pour quelle classe de fonctions le théorème de convergence dominée est-il valable?

2) Si f est une fonction scalairement intégrable, i.e. intégrable pour toutes les mesures scalaires $\mu_{x'} = x' \circ \mu$, $x' \in E'$, l'intégrale faible de f définie par $\left\langle \int f\, d\mu,\, x' \right\rangle = \int f\, d\mu_{x'}$, est un élément de E'^{*}. Dans quelles conditions a-t-on $\int f\, d\mu \in E$ pour toute fonction scalairement μ-intégrable f?

Le *paragraphe* 1 introduit l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ et concerne les généralités sur les fonctions intégrables et mesurables. L'outil essentiel est la semi-variation d'une mesure à valeurs dans un espace normé, définie pour $f \geqslant 0$ semi-continue inférieurement par

$$\mu^{\bullet}(f) = \sup_{|\varphi| \leqslant f,\ \varphi \in \mathcal{K}} |\mu(\varphi)|.$$

On étend la définition aux fonctions positives arbitraires comme pour l'intégrale supérieure essentielle de Bourbaki, que cette notion de semi-variation généralise. La semi-variation est en général sous-additive et non additive, même restreinte à $\mathcal{K}_+$. Lorsque μ est à valeurs dans un espace normé, l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ est par définition l'ensemble des fonctions f telles que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\varphi \in \mathcal{K}$ avec $\mu^{\bullet}(|f - \varphi|) \leqslant \varepsilon$. L'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ est alors complet et l'espace séparé associé, $L^1(\mu)$, est un espace de Banach. Dans le cas d'une mesure à valeurs dans un espace localement convexe général, on prend

[1] Questions posées par M. L. Schwartz à propos de la théorie spectrale des opérateurs linéaires.

la définition précédente relativement à chaque semi-norme continue, de sorte que $\mathcal{L}^1(\mu)$ devient un espace localement convexe. L'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ est définie par prolongement continu et appartient toujours à E lorsque E est complet, et au quasi-complété de E dans le cas général. Toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu_{x'})$ et l'on a $\left\langle \int f\, d\mu,\, x' \right\rangle = \int f\, d\mu_{x'}$, mais réciproquement les fonctions scalairement μ-intégrables ne sont pas en général μ-intégrables.

Le *paragraphe* 2 étudie les mesures bornées $\mu : \mathcal{C}_0 \to \mathrm{E}$, lesquelles interviendront dans la suite surtout à titre auxiliaire. On montre que $\mathcal{L}^1(\mu)$ contient les fonctions boréliennes bornées si et seulement si μ est une application faiblement compacte de $\mathcal{C}_0$ dans l'espace complété $\hat{\mathrm{E}}$. Cela motive la recherche de critères de compacité faible pour laquelle nous nous appuyons sur les travaux de Grothendieck, Bartle, Dunford et Schwartz, et Pettis. L'interprétation d'une suite convergente de mesures comme mesure vectorielle à valeurs dans l'espace des suites convergentes permet de retrouver, et de généraliser au cas des mesures vectorielles, un théorème de convergence de Dieudonné et Grothendieck. On introduit dans ce paragraphe la notion, fondamentale dans ce qui suit, de topologie ayant la propriété d'Orlicz, à laquelle est consacré l'Appendice II.

Le *paragraphe* 3 introduit les mesures *prolongeables*, une classe de mesures μ caractérisée par les propriétés équivalentes suivantes :

a) Toute fonction borélienne bornée à support compact est μ-intégrable.

b) Toute fonction borélienne est μ-mesurable.

c) Pour tout compact K l'intégrale faible $\int_{\mathrm{K}} d\mu$ appartient à $\hat{\mathrm{E}}$.

Le théorème suivant est central dans ce travail :

Théorème. — *Soit μ une mesure prolongeable à valeurs dans un espace localement convexe* E. *Pour qu'une fonction f soit μ-intégrable il est nécessaire et suffisant que f soit $\mu_{x'}$-intégrable quel que soit $x' \in \mathrm{E}'$, et que pour tout ouvert ω l'intégrale faible $\int_{\omega} f\, d\mu$ appartienne à* $\hat{\mathrm{E}}$.

Lorsque μ est une mesure prolongeable à valeurs dans un espace de Banach, et que la fonction 1 appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$, l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Bartle, Dunford et Schwartz, pour la mesure ensembliste $A \to \int_A d\mu$, et la semi-variation d'un ensemble borélien A, au sens de ces auteurs, est égale à $\mu^\bullet(A)$. Le théorème ci-dessus fait donc le lien entre le point de vue de Bartle, Dunford et Schwartz et celui de Bourbaki.

On généralise le théorème précédent de manière à ne faire intervenir qu'une partie du dual de E, obtenant alors des relations telles que $\left\langle \int f\, d\mu,\, x' \right\rangle = \int f\, d\mu_{x'}$ comme conséquence plutôt que de les stipuler dans la définition (intégration terme à terme, intervention de limite avec le signe $\int$, etc...).

Le *paragraphe* 4 concerne les théorèmes de convergence. En particulier :

THÉORÈME. — *Soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach* E. *Soit* $(f_i)_{i \in I}$ *une famille filtrante croissante de fonctions semi-continues inférieurement appartenant à* $\mathcal{L}^1(\mu)$, *de borne supérieure* f. *Alors*

a) $\mu^\bullet(f) = \sup_{i \in I} \mu^\bullet(f_i)$.

b) Si f *appartient à* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *on a* $\inf_i \mu^\bullet(f - f_i) = 0$, *en particulier* $\int f_i\, d\mu$ *tend vers* $\int f\, d\mu$ *dans* E. *Lorsque* E *est faiblement séquentiellement complet la conclusion de b) est déjà valable si* $\mu^\bullet(f) < +\infty$.

THÉORÈME (de « convergence dominée »). — *Soit* μ *une mesure prolongeable à valeurs dans un espace de Banach* E, *et soit* $(f_n)_{n \in N}$ *une suite de fonctions* μ*-intégrables convergeant* μ*-presque partout vers une fonction* f. *S'il existe* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *tel que* $|f_n| \leqslant g$ *pour tout* n, f *appartient à* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *et* $\mu^\bullet(|f - f_n|)$ *tend vers zéro ; en particulier* $\int f_n\, d\mu$ *tend vers* $\int f\, d\mu$ *dans* E.

On montre que les mesures prolongeables sont les seules mesures de Radon pour lesquelles ceci est exact et que dans un certain sens $\mathcal{L}^1(\mu)$ est le plus grand espace de fonctions pour lequel ce théorème est valable, ce qui donne une réponse à la première question posée.

Au *paragraphe* 5 on considère des mesures de Radon à valeurs dans des espaces d'un type particulier. On y montre que pour un espace localement convexe quasi-complet E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Toute mesure de Radon à valeurs dans E est prolongeable.

b) Toute application linéaire continue d'espace $\mathcal{C}(K)$ dans E est faiblement compacte.

c) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de E avec $\sum_n |\langle x_n, x'\rangle| < +\infty$ pour tout $x' \in E'$, il existe $x \in E$ tel que $\langle x, x'\rangle = \sum_n \langle x_n, x'\rangle$.

Nous avons appelé les espaces localement convexes avec la propriété *c*) des espaces faiblement Σ-complet. Tout espace faiblement séquentiellement complet est évidemment faiblement Σ-complet. On montre que tout dual fortement séparable d'espace normé est faiblement Σ-complet.

Une réponse à la deuxième question est fournie par le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans un espace localement convexe quasi-complet et faiblement* Σ*-complet. Alors toute fonction* f, *intégrable par rapport aux mesures scalaires* $\mu_{x'}$, $x' \in E'$, *appartient à* $\mathcal{L}^1(\mu)$, *en particulier l'intégrale faible* $\int f\,d\mu$ *d'une telle fonction appartient à* E.

On précise ici certains résultats obtenus par Morse et Transue sur les bimesures en considérant une bimesure comme mesure à valeurs dans l'espace faiblement séquentiellement complet $\mathcal{K}'$.

On donne en outre un certain nombre de conditions équivalentes à *a*) *b*) et *c*) qui ne font intervenir aucune forme linéaire continue, et qui permettent de généraliser certains résultats de ce paragraphe aux mesures à valeurs dans des espaces non localement convexes.

Au *paragraphe* 6 on généralise certains des résultats précédents au cas de l'intégration des fonctions vectorielles par rapport à une mesure de Radon vectorielle, et on aborde l'étude du produit tensoriel de deux mesures vectorielles.

Le *paragraphe* 7 étudie les espaces L^1 en tant que type d'espaces vectoriels topologiques sans référence spéciale à une mesure vectorielle. On donne une caractérisation de la semi-variation comme fonction sur $\mathcal{K}_+$ ce qui permet d'identifier d'autres espaces L^1 et de leur appliquer les résultats précédents.

L'*Appendice I* est une liste de résultats connus auxquels nous nous référons fréquemment : Critères de compacité faible de Grothendieck, de Bartle, Dunford et Schwartz et de Dunford Pettis. Théorèmes de convergence de Dieudonné-Grothendieck, de Vitali-Hahn-Saks, et le théorème de Dieudonné indiquant une condition suffisante pour qu'une famille de mesures de Radon bornées soit uniformément bornée.

L'*Appendice II* concerne les familles sommables dans les espaces vectoriels topologiques et contient des résultats qui généralisent le théorème classique d'Orlicz-Banach tels que le suivant :

Soit K un espace compact, et soit $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions continues sur K telle que $\sum_{i\in I} |\varphi_i(t)| < +\infty$ quel que soit $t \in K$. Alors si pour toute partie A de I la somme $s_A(t) = \sum_{i\in A} \varphi_i(t)$ est une fonction continue de t, ces sommes convergent uniformément.

L'*Appendice III* contient quelques démonstrations avec lesquelles nous n'avons pas voulu interrompre le texte.

A la fin de certains paragraphes (1, 2, 3, 4, 5 et appendice II) nous avons inséré des sections de *compléments* comportant des renseignements non essentiels pour la suite, et de *problèmes* contenant des questions non résolues ou non abordées [1]. Nous avons d'ailleurs à peine touché à l'étude du produit tensoriel de mesures, et nous avons complètement omis l'étude du théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym, qui posent l'une et l'autre encore des problèmes.

La liste des références à la fin ne prétend pas être une bibliographie. Le lecteur trouvera une bibliographie au sujet des

[1] Par exemple dans les compléments du paragraphe 4 nous avons indiqué le lien entre ce travail et la théorie d'intégration par rapport à une mesure vectorielle ensembliste de Bartle, Dunford et Schwartz, à laquelle ce travail doit beaucoup, notamment la méthode des mesures scalaires auxiliaires.

mesures vectorielles (traitée surtout du point de vue ensembliste) dans le livre de N. Dinculeanu [5].

Je désire exprimer ici toute ma reconnaissance à Monsieur Laurent Schwartz, dont les cours d'Analyse m'ont tant apporté, et notamment les questions qui m'ont conduit au présent travail. Ses conseils et l'intérêt qu'il a montré en mes recherches sont d'une inestimable valeur.

Ma reconnaissance s'adresse aussi tout particulièrement à Monsieur Jacques Deny qui m'a fait l'honneur de présider le jury. C'est Monsieur Deny qui, dès mon entrée à la Faculté, a d'abord confirmé mon intérêt dans les Mathématiques par son enseignement exemplaire, et qui, plus tard, m'a encouragé à faire les premiers pas sur la voie de la recherche, particulièrement par ses cours sur la théorie du Potentiel, dont l'influence sur le présent travail (par l'intermédiaire des fonctions sous-additives d'ensembles) est d'ailleurs considérable. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Monsieur Jacques Dixmier d'avoir bien voulu considérer ma thèse avant la soutenance, et Monsieur Michel Demazure pour ses suggestions à propos du second sujet de thèse.

Je tiens enfin à remercier plusieurs de mes collègues, non seulement pour leurs conseils amicaux, mais aussi pour l'excellent esprit de coopération qu'ils ont su créer au sein de groupes de travail divers, favorisant ainsi l'échange d'idées et par là la recherche.

Notations et conventions.

Pour la théorie de l'intégration par rapport à une mesure scalaire, nous suivons Bourbaki [2]. Cependant, nous écrirons « intégrable » au lieu de « essentiellement intégrable », « négligeable » au lieu de « localement négligeable » et $\mathcal{L}^p$ au lieu de $\overline{\mathcal{L}}^p$(1). T étant un espace localement compact, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(T)$ désigne l'espace des fonctions réelles, continues, à support compact dans T, et $\mathcal{C}_0(T)$ désigne l'espace des fonctions réelles continues tendant vers zéro à l'infini. Sauf mention

(1) Suivant la suggestion de L. Schwartz, nous appellerons au besoin « strictement intégrables » les fonctions intégrables au sens de Bourbaki.

contraire, on entendra par fonction, une fonction réelle, et par fonction positive, une fonction à valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty]$. $\mathcal{J}^+$ désigne l'ensemble des fonctions positives semi-continues inférieurement. E désigne un espace de Banach ou plus généralement un espace localement convexe sur **R**. Lorsque E est un espace normé, la norme d'un élément x de E (resp. x' de E') sera notée $|x|$ (resp. $|x'|$). De même les semi-normes sur un espace localement convexe seront notées $p(x) = |x|_p$.

Rappelons qu'une mesure de Radon sur T à valeurs dans E est une application linéaire continue de $\mathcal{K}(T)$ dans E (cf. Bourbaki [2], chap. 6). Lorsque E est un espace normé, la continuité signifie qu'à tout compact $K \subset T$, on peut associer une constante M_K telle que $|\mu(\varphi)| \leqslant M_K \|\varphi\|_\infty$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$ à support dans K, et lorsque E est un espace localement convexe la continuité s'exprime par une propriété analogue pour chaque semi-norme continue prise séparément. Lorsque x' est une forme linéaire continue sur l'espace E, on notera $\mu_{x'}$ la mesure réelle $x' \circ \mu$ obtenue en composant μ avec x'.

Lorsque p est une semi-norme continue sur l'espace localement convexe E, on notera E_p l'espace de Banach, complété de l'espace normé $E/_{p^{-1}(0)}$ associé à p. π_p désignera l'application canonique de E dans E_p. Lorsque μ est une mesure de Radon à valeurs dans E, μ_p désignera la mesure $\pi_p \circ \mu$ à valeurs dans E_p obtenue en composant μ avec π_p.

1. Définition de l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ pour une mesure de Radon à valeurs dans un espace localement convexe.

Dans ce paragraphe nous considérons d'abord une mesure de Radon à valeurs dans un espace normé (ou semi-normé). Nous définissons l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ dans ce cas et démontrons certaines propriétés. Dans la seconde partie nous étendons les définitions au cas d'un espace localement convexe quelconque.

1.1. Définition. — *Etant donnée une mesure de Radon μ, à valeurs dans un espace normé et une fonction positive f, nous* *définirons* $\mu^\bullet(f)$ *comme suit :*

— *Lorsque* f *est semi-continue inférieurement*

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{|\varphi| \leqslant f} |\mu(\varphi)| \qquad \text{où} \qquad \varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{T}).$$

— *Lorsque* f *est à support compact*

$$\mu^\bullet(f) = \inf_{f \leqslant g} \mu^\bullet(g) \qquad \text{où} \qquad g \in \mathcal{J}^+.$$

— *Lorsque* f *est positive arbitraire*

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{h \leqslant f} \mu^\bullet(h) \quad \text{où } h \text{ est à support compact.}$$

L'application $\mu^\bullet : f \to \mu^\bullet(f)$ s'appelle *la semi-variation* de μ. A étant une partie de T, on notera $\mu^\bullet(\mathrm{A}) = \mu^\bullet(\chi_\mathrm{A})$, χ_A désignant la fonction caractéristique de A. Lorsque $\mu^\bullet(\mathrm{A}) = 0$ on dira que A est μ-négligeable et on utilisera l'expression « μ-presque partout » (abrégée : μ p.p.) de manière correspondante.

Il est facile de voir que la définition ci-dessus est cohérente. Notamment :

1.2. $$\mu^\bullet(f) = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \mu^\bullet(\varphi) \qquad \text{pour} \qquad f \in \mathcal{J}^+,\ \varphi \in \mathcal{K}.$$

Lorsque μ est une mesure positive, $\mu^\bullet$ n'est autre que l'intégrale supérieure essentielle de Bourbaki [2], et lorsque μ est une mesure réelle, $\mu^\bullet$ est l'intégrale supérieure essentielle de la mesure positive $|\mu|$. En effet on a alors pour $f \in \mathcal{J}^+$:

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{|\varphi| \leqslant f} |\mu(\varphi)| = \sup_{0 \leqslant \psi \leqslant f} \sup_{|\varphi| \leqslant \psi} |\mu(\varphi)| = \sup_{0 \leqslant \psi \leqslant f} |\mu|(\psi) = |\mu|^\bullet(f),$$

où φ et ψ sont des fonctions de $\mathcal{K}$.

1.3. Proposition — (*a*) $\mu^\bullet$ *est croissante et* $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *étant une famille filtrante croissante de fonctions positives semi-continues inférieurement de borne supérieure* f, *on a*

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{i \in \mathrm{I}} \mu^\bullet(f_i).$$

(*b*) $\mu^\bullet$ *est positivement homogène et dénombrablement sous-additive.*

(c) *La relation* $\mu^\bullet(f) = 0$ *équivaut à* $f(t) = 0$ μ p.p., *et* $\mu^\bullet(f) < +\infty$ *entraîne* $f(t) < +\infty$ μ p.p.

Il s'ensuit notamment que si $(A_n)_{n\in N}$ est une suite de parties de T on a $\mu^\bullet\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \mu^\bullet(A_n)$. En particulier une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Les vérifications de ces propriétés ne présentent aucune difficulté [1]. Pour le second point de (a) et la sous-additivité dans le cas des fonctions semi-continues on peut, par exemple, se ramener au cas de mesures positives grâce au lemme suivant :

1.4. LEMME. — *Pour* $f \in \mathcal{J}^+$ *on a* :

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{|x'|\leqslant 1} |\mu_{x'}|(f).$$

Démonstration :

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{|\varphi|\leqslant f} |\mu(\varphi)| = \sup_{|\varphi|\leqslant f}\ \sup_{|x'|\leqslant 1} |\mu_{x'}(\varphi)|$$
$$= \sup_{|x'|\leqslant 1}\ \sup_{|\varphi|\leqslant f} |\mu_{x'}(\varphi)| = \sup_{|x'|\leqslant 1} |\mu_{x'}|^\bullet(f).$$

Soit alors $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$ l'ensemble des fonctions réelles f telles que $\mu^\bullet(|f|) < +\infty$. Il résulte des propriétés de $\mu^\bullet$ énoncées ci-dessus que $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$ est un sous-espace vectoriel de R^T et que l'application $f \to \mu^\bullet(|f|)$ est une semi-norme sur $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$.

1.5. LEMME. — *L'espace* $\mathcal{K}(T)$ *est contenu dans* $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$, *l'injection étant continue.*

En effet, ω étant un ouvert relativement compact, il résulte de la continuité de μ que $\mu^\bullet(\omega) = \sup_{|\varphi|\leqslant \chi_\omega} |\mu(\varphi)|$ est fini. Pour une fonction $\varphi \in \mathcal{K}$ à support dans ω on a $\mu^\bullet(|\varphi|) \leqslant \mu^\bullet(\omega)\|\varphi\|_\infty$ d'où le lemme.

1.6. DÉFINITION. — *L'espace* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *des fonctions* μ*-intégrables est par définition l'adhérence de* $\mathcal{K}(T)$ *dans l'espace* $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$. *Autrement dit,* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *est l'ensemble des fonctions réelles* f *ayant la propriété suivante* :

Quel que soit $\varepsilon > 0$ *il existe* $\varphi \in \mathcal{K}$ *telle que* $\mu^\bullet(|\varphi - f|) \leqslant \varepsilon$.

Alors si f est une fonction telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que $\mu^\bullet(|f - g|) \leqslant \varepsilon$, f appartient aussi à $\mathcal{L}^1(\mu)$. Notamment toute fonction égale μ-presque partout

[1] Nous donnons cependant les détails dans l'Appendice III.

à une fonction de $\mathcal{L}^1(\mu)$ est aussi dans $\mathcal{L}^1(\mu)$. La relation $\mu^\bullet(|f-g|)=0$ équivaut à $f(t)=g(t)\,\mu$ p.p., de sorte que l'espace séparé associé à $\mathcal{L}^1(\mu)$, noté $L^1(\mu)$, est un espace de classes de fonctions égales μ-presque partout. Dans la suite nous ferons parfois l'abus de langage suivant : étant donnée une fonction positive f qui prend éventuellement la valeur $+\infty$ nous dirons encore que f est μ-intégrable si f coïncide μ-presque partout avec une fonction de $\mathcal{L}^1(\mu)$, (fonction par définition partout finie).

1.7. Proposition. — *a) Si f est μ-intégrable les fonctions $|f|$, f^+, f^- le sont.*

b) Si f est μ-intégrable et ψ une fonction continue bornée ψf est μ-intégrable.

c) Si f est positive et μ-intégrable inf (α, f) *est μ-intégrable pour tout nombre $\alpha \geqslant 0$.*

Cela résulte des inégalités :

$$\mu^\bullet(||f|-|\varphi||) \leqslant \mu^\bullet(|f-\varphi|) \qquad \varphi \in \mathcal{K}$$
$$\mu^\bullet(|\psi f-\psi\varphi|) \leqslant \mu^\bullet(|f-\varphi|)\|\psi\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \varphi\psi \in \mathcal{K}$$
$$\mu^\bullet(|\inf(\alpha, f)-\inf(\alpha,\varphi)|) \leqslant \mu^\bullet(|f-\varphi|) \quad \text{où} \quad \varphi \in \mathcal{K}_+$$

valables en vertu de la croissance de $\mu^\bullet$.

1.8. Théorème. — *μ étant une mesure à valeurs dans un espace normé, l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ est complet.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$ est complet, ou ce qui revient au même, que dans $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$ toute série normalement convergente est convergente. Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions réelles telle que $\sum_n \mu^\bullet(|f_n|) < +\infty$. Soit $g = \sum_n |f|$. Alors

$$\mu^\bullet(g) \leqslant \sum_n \mu^\bullet(|f_n|) < +\infty \quad \text{donc} \quad g(t) < +\infty\ \mu \text{ p.p.}$$

Soit f une fonction réelle telle que $f(t)=\sum_n f_n(t)\ \mu$ p.p. Alors $\left|f(t)-\sum_{i=1}^n f_i(t)\right| \leqslant \sum_{i>n} |f_i(t)|\ \mu$ p.p. de sorte que

$$\mu^\bullet\left(\left|f-\sum_{i=1}^n f_i\right|\right) \leqslant \sum_{i>n} \mu^\bullet(|f_i|),$$

ce qui prouve que f appartient à $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$ et que $f=\sum_n f_n$.

Remarque. — Il en résulte que de toute suite convergeant vers f dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ on peut extraire une sous-suite convergeant vers f μ-presque partout.

Définissons maintenant l'intégrale d'une fonction de $\mathcal{L}^1(\mu)$. Il résulte immédiatement de la définition de $\mu^\bullet$ qu'on a $|\mu(\varphi)| \leqslant \mu^\bullet(|\varphi|)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$. La mesure μ est donc continue pour la topologie induite dans $\mathcal{K}$ par $\mathcal{L}^1(\mu)$. Supposons que E soit un espace normé complet. Nous pouvons définir l'intégrale comme prolongement continu :

1.9. Définition. — *L'intégrale, par rapport à μ, d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ est par définition la valeur en f du prolongement continu de μ à $\mathcal{L}^1(\mu)$.*

L'intégrale est donc un élément de l'espace E (ou, si E n'est pas complet, de son complété) qui sera noté $\int f\, d\mu$ ou $\mu(f)$. On a évidemment l'inégalité

1.10. $\left|\int f\, d\mu\right| \leqslant \mu^\bullet(|f|)$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

1.11. Théorème. — *Soient μ et ν deux mesures à valeurs dans des espaces de Banach et supposons que $\mu^\bullet \leqslant \nu^\bullet$. Alors $\mathcal{L}^1(\nu)$ est contenu dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, l'injection étant continue. Notamment,*

(a) S'il existe une mesure positive ν telle que $|\mu(\varphi)| \leqslant \nu(|\varphi|)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$, c'est-à-dire si μ est à variation localement bornée (majorable au sens de Bourbaki), on a $\mu^\bullet \leqslant \nu^\bullet$ et $\mathcal{L}^1(\nu) \hookrightarrow \mathcal{L}^1(\mu)$.

b) Si u est une application linéaire continue de E dans un espace de Banach et si $\nu = u \circ \mu$, on a $\nu^\bullet \leqslant \|u\|\mu^\bullet$ d'où $\mathcal{L}^1(\mu) \hookrightarrow \mathcal{L}^1(\nu)$ et par conséquent $\int f\, d\nu = u \int f\, d\mu$ pour tout f appartenant à $\mathcal{L}^1(\mu)$. En particulier, si x' est une forme linéaire continue sur E, on a

$$\mathcal{L}^1(\mu) \hookrightarrow \mathcal{L}^1(\mu_{x'}) \qquad (\mu_{x'} = x' \circ \mu)$$

et

1.12. $$\left\langle \int f\, d\mu, x' \right\rangle = \int f\, d\mu_{x'}.$$

La démonstration de ces faits est évidente. Il suit de la dernière partie du théorème que toute fonction μ-intégrable est scalairement μ-intégrable (c'est-à-dire intégrable pour chaque mesure $\mu_{x'}$ (cf. convention p. 64) et que l'intégrale définie ci-dessus coïncide avec l'intégrale de f au sens de Bourbaki.

Il résulte du théorème 1.11 qu'en tant qu'espace vectoriel topologique, $\mathcal{L}^1(\mu)$ ne dépend pas de la norme de E, mais seulement de la topologie, deux normes équivalentes définissant des semi-variations équivalentes.

Dans la suite nous aurons besoin d'une généralisation du lemme 1.4 que voici :

Proposition. — *Soit* H *une partie de* E′ *telle que* $|x| = \sup_{x' \in H} |\langle x, x' \rangle|$ *pour tout* $x \in E$.

Alors si f *est une fonction de* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *ou de* $\mathcal{J}^+$ *on a*

1.13. $$\mu^\bullet(|f|) = \sup_{x' \in H} |\mu_{x'}|^\bullet(|f|)$$

Démonstration. — Pour $f \in \mathcal{J}^+$ la démonstration est identique à celle donnée pour lemme 1.4 et cela prouve l'identité en particulier pour $f \in \mathcal{K}$. Comme $\mu^\bullet_{x'} \leqslant |x'|\mu^\bullet$ (1.11) et que H est contenu dans la boule unité de E′, on a pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\sup_{x' \in H} \mu^\bullet_{x'}(|f|) \leqslant \mu^\bullet(|f|)$. Le membre de gauche de cette inégalité est donc, comme fonction de f, une semi-norme continue sur $\mathcal{L}^1(\mu)$, mais d'après ce qui précède, cette semi-norme coïncide avec la semi-norme $f \to \mu^\bullet(|f|)$ sur le sous-espace $\mathcal{K}$. Ce dernier étant dense, il y a coïncidence partout sur $\mathcal{L}^1(\mu)$, ce qu'on voulait démontrer.

Voici une autre expression de la semi-variation d'une fonction intégrable : pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ on a

1.14. $$\mu^\bullet(|f|) = \sup_{|\varphi| \leqslant 1,\ \varphi \in \mathcal{K}} \left| \int \varphi f \, d\mu \right|.$$

Cela est bien connu dans le cas d'une mesure réelle, et l'identité 1.13 permet de se ramener à ce cas.

Nous donnons maintenant d'abord quelques exemples simples d'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$.

1.15. *Exemple.* — Mesures à valeurs dans un espace de dimension finie. Soit E un espace normé de dimension finie sur R et soit $(e_i)_{i=1-n}$ une base de E (avec $|e_i| = 1$). Une mesure de Radon μ à valeurs dans E s'écrit alors $\mu(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\varphi)e_i$, où $\mu_i = e'_i \circ \mu$, $(e'_i)_{i=1-n}$ étant la base duale. Alors

$$|\mu(\varphi)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mu_i(\varphi)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|(|\varphi|).$$

Par conséquent, μ est à variation localement bornée et ν étant la variation (i.e. la plus petite mesure positive ν telle que $|\mu(\varphi)| \leqslant \nu(|\varphi|)$), on a $\nu \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$. D'autre part, comme $\mu_i = e'_i \circ \mu$, on a $\mu_i^\bullet \leqslant |e'_i|\mu^\bullet$ (1.11) de sorte que

$$\nu^\bullet \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_i^\bullet \leqslant \frac{1}{c}\mu^\bullet, \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{c} = \sum_{i=1}^{n} |e'_i|,$$

et que l'on ait finalement les inégalités $c\nu^\bullet \leqslant \mu^\bullet \leqslant \nu^\bullet$. Il en résulte que $\mathscr{L}^1(\mu) = \mathscr{L}^1(\nu) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{L}^1(\mu_i)$, $\mu^\bullet$ définissant une semi-norme équivalente à la semi-norme $f \to \int |f|\, d\nu = \nu^\bullet(|f|)$ habituelle sur $\mathscr{L}^1(\nu)$.

1.16. *Exemple.* — Soit μ l'identité d'un espace C(K) (K espace topologique compact). Alors on vérifie facilement que pour tout $f \geqslant 0$ on a $\mu^\bullet(f) = \sup_{t\in K} f(t)$, de sorte que $\mathscr{L}^1(\mu) = C(K)$. Plus généralement soit ν une mesure positive de support T, et soit μ l'injection naturelle de $\mathcal{K}(T)$ dans $L^p(\nu)$. Alors pour $1 \leqslant p < +\infty$, $\mathscr{L}^1(\mu) = \mathscr{L}^p(\nu)$ et pour $p = +\infty$ $\mathscr{L}^1(\mu) = C_0(T)$. En effet pour $f \geqslant 0$ on a alors $\mu^\bullet(f) = \nu^\bullet(f^p)^{1/p}$ lorsque $1 \leqslant p < +\infty$ et $\mu^\bullet(f) = \sup_{t\in T} f(t)$ lorsque $p = +\infty$.

Cet exemple montre que la semi-variation est en général strictement sous-additive (i.e. n'est pas en général additive même sur $\mathcal{K}_+(T)$).

1.17. *Exemple.* — Soit T l'ensemble N des entiers naturels. Soit μ l'injection de $\mathcal{K}(N)$ dans c_0, l'espace des suites tendant vers zéro à l'infini. Alors μ est une mesure vectorielle à variation localement bornée, la variation ν étant la mesure de masse 1 en chaque point de N. On a $\mathscr{L}^1(\mu) = c_0$ et $\mathscr{L}^1(\nu) = l^1$.

Cet exemple montre que l'injection $\mathscr{L}^1(\nu) \hookrightarrow \mathscr{L}^1(\mu)$ n'est pas en général surjective (comme dans l'exemple 1.15), donc que pour une mesure à variation localement bornée, l'espace $\mathcal{L}^1$ ne se réduit pas en général à l'espace $\mathcal{L}^1$ associé à la variation.

On donnera d'autres exemples plus loin: 1.36, 37, 38; 3.12, 16, 17, 18, 19, 21; 5.15, 16.

Nous allons maintenant introduire une notion de « fonction μ-mesurable » analogue à celle employée par Bourbaki [2] dans le cas de mesures scalaires.

1.18. Définition. — *Etant donnée une mesure de Radon* μ *sur* T *à valeurs dans un espace normé et une application* f *de* T *dans un espace topologique, nous dirons que* f *est* μ*-mesurable lorsque, pour tout compact* $K \subset T$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* $K_1 \subset K$, *avec* $\mu^\bullet(K - K_1) \leqslant \varepsilon$, *tel que la restriction de* f *à* K_1 *soit continue.*

L'ensemble des fonctions numériques μ-mesurables est évidemment stable par les opérations algébriques usuelles et par composition avec les fonctions continues. Toute fonction continue est μ-mesurable et il peut arriver que seules les fonctions continues le soient (dans l'exemple 1.16 avec $p = +\infty$, on a $\mu^\bullet(A) < 1$ pour $A = \varnothing$ seulement).

Si $\nu^\bullet \leqslant \mu^\bullet$ toute fonction μ-mesurable est ν-mesurable d'où il résulte en particulier que la mesurabilité ne dépend que de la topologie de E et non de la norme. Si x' est une forme linéaire continue sur E on a $\mu^\bullet_{x'} \leqslant |x'|\mu^\bullet$, donc une fonction μ-mesurable est $\mu_{x'}$-mesurable pour tout $x' \in E'$, mais la réciproque est en général inexacte, comme le montre l'exemple mentionné.

Nous aurons besoin du lemme suivant dont la démonstration ne présente aucune difficulté [1].

1.19. Lemme. — *On a les relations suivantes*:

Pour 0 *ensemble ouvert* $\mu^\bullet(0) = \sup\limits_{\substack{K \subset 0 \\ K \text{ compact}}} \mu^\bullet(K)$.

Pour A *relativement compact* $\mu^\bullet(A) = \inf\limits_{\substack{A \subset 0 \\ 0 \text{ ouvert}}} \mu^\bullet(0)$.

Enfin pour un ensemble A *quelconque*

$$\mu^\bullet(A) = \sup_{K \text{ compact}} \mu^\bullet(A \cap K).$$

[1] Nous donnons cependant le détail dans l'Appendice III.

1.20. PROPOSITION. — *Soient f une fonction μ-mesurable et g une fonction égale à f μ-presque partout. Alors g est μ-mesurable.*

Démonstration. — Soit $A = \{t : f(t) \neq g(t)\}$. Soit K un compact et ε un nombre > 0. $\mu^\bullet(A \cap K) = 0$, donc d'après le lemme ci-dessus, il existe ω ouvert, contenant $A \cap K$, telle que $\mu^\bullet(\omega) \leqslant \varepsilon/2$. Soit $K_1 \subset K$ telle que $\mu^\bullet(K - K_1) \leqslant \varepsilon/2$ et que f/K_1 soit continue. Alors si $K_2 = K_1 \cap \complement\, \omega$, on a $K - K_2 \subset (K - K_1) \cup \omega$ de sorte que $\mu^\bullet(K - K_2) \leqslant \varepsilon$ et que $g/K_2 = f/K_2$ est continue, ce qui prouve que g est μ-mesurable.

1.21. PROPOSITION. — *Toute fonction μ-intégrable est μ-mesurable.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions continues à support compact telle que $f = \sum_n \varphi_n$ dans $\mathscr{L}^1(\mu)$ et telle que $\sum_n n\, \mu^\bullet(|\varphi_n|) < +\infty$. Soit

$$h(t) = \sum_{n\in\mathbf{N}} n|\varphi_n(t)|\,;$$

h étant semi-continue inférieurement, l'ensemble

$$0_a = \{t : h(t) > a\}$$

est ouvert. Comme $\mu^\bullet(h) \leqslant \sum_{n\in\mathbf{N}} n\mu^\bullet(|\varphi_n|) < +\infty$, et que $\chi_{0_a} \leqslant \frac{1}{a} h$, on a, $\varepsilon > 0$ étant donnée,

$$\mu^\bullet(0_a) \leqslant \frac{\mu^\bullet(h)}{a} < \varepsilon \qquad \text{pour } a \text{ assez grand.}$$

Pour t dans le complémentaire de 0_a, on a

$$n \sum_{i\geqslant n} |\varphi_i(t)| \leqslant \sum_{i\geqslant n} i|\varphi_i(t)| \leqslant h(t) \leqslant a$$

de sorte que $\sum_{i\geqslant 1} |\varphi_i(t)|$ converge uniformément dans $\complement\, 0_a$. Si g est la fonction telle que $g(t) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \varphi_n(t)$ partout où la série converge absolument et $g(t) = 0$ ailleurs, g est continue sur $\complement 0_a$, quel que soit a, et a fortiori g est μ-mesurable. Par ailleurs $g = \sum_n \varphi_n$ dans l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ (voir 1.8) de sorte que $f(t) = g(t)$ μ-presque partout, et que f est μ-mesurable d'après la proposition précédente.

Remarque. — Cette démonstration montre plus généralement que de toute suite convergeant dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ on peut extraire une sous-suite convergeant « presque uniformément » dans un sens évident.

1.22. Théorème. — *Soit f une fonction μ-mesurable telle que $|f(t)| \leqslant g(t)$ μ-presque partout, g étant une fonction μ-intégrable. Alors f est μ-intégrable. En particulier le produit d'une fonction μ-intégrable et d'une fonction μ-mesurable bornée est μ-intégrable.*

Nous démontrons d'abord le lemme suivant :

1.23. Lemme. — *Toute fonction μ-mesurable bornée et à support compact est μ-intégrable.*

Démonstration. — Il suffit de le démontrer pour une fonction $f \geqslant 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{K}$ telle que $0 \leqslant f \leqslant \varphi$; soit $K = \operatorname{supp} \varphi$, soit $K_1 \subset K$ tel que $\mu^\bullet(K - K_1) \leqslant \varepsilon/2\|\varphi\|_\infty$ et que f/K_1 soit continue. Soit $\bar{f}$ un prolongement continu positif de f à T (on applique le théorème de Urysohn dans le compactifié d'Alexandroff de T, qui est un espace normal) et soit enfin $\psi = \inf(\varphi, \bar{f})$. Alors $\psi \in \mathcal{K}$, $\psi(t) = f(t)$ pour tout $t \in K_1$ et $0 \leqslant \psi \leqslant \varphi$, de sorte que

$$\mu^\bullet(|f - \psi|) \leqslant \mu^\bullet(\chi_{\complement K}|f - \psi|) + \mu^\bullet(\chi_{K_1}|f - \psi|) + \mu^\bullet(\chi_{K-K_1}|f - \psi|) \leqslant \varepsilon$$

les deux premiers de ces termes étant nuls et le dernier inférieur à ε parce que $|f - \psi| \leqslant 2\varphi$. Cela prouve bien que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Pour passer de là au cas général nous avons besoin de quelques autres lemmes qui seront aussi utiles dans la suite :

1.24. Lemme. — *Soit f une fonction positive μ-intégrable. Alors $\lim_K \mu^\bullet(\chi_{\complement K} f) = 0$, la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant croissant des parties compactes de T.*

En effet $\mu^\bullet(\chi_{\complement K}f) \leqslant \mu^\bullet(|f-\varphi|) + \mu^\bullet(\chi_{\complement K}|\varphi|)$; $\varepsilon > 0$ étant donnée, soit $\varphi \in \mathcal{K}$ telle que $\mu^\bullet(|f-\varphi|) \leqslant \varepsilon$. Alors pour $K \supset \operatorname{supp} \varphi$ $\mu^\bullet(\chi_{\complement K}f) \leqslant \varepsilon$.

1.25. LEMME. — *Soit f une fonction positive μ-intégrable. Alors* $\lim\limits_{\mu^\bullet(A)\to 0} \mu^\bullet(\chi_A f) = 0$. *En effet*

$$\mu^\bullet(\chi_A f) \leqslant \mu^\bullet(\chi_A|f-\varphi|) + \mu^\bullet(\chi_A|\varphi|) \leqslant \mu^\bullet(|f-\varphi|) + \|\varphi\|_\infty \mu^\bullet(A).$$

Alors $\varepsilon > 0$ étant donnée, on peut choisir $\varphi \in \mathcal{K}$ telle que $\mu^\bullet(|f-\varphi|) \leqslant \varepsilon/2$ puis $\mu^\bullet(A) \leqslant \varepsilon/2\|\varphi\|_\infty$ entraîne que $\mu^\bullet(\chi_A f)$ est inférieur à ε.

Nous utiliserons ce lemme sous la forme suivante :

1.25. bis LEMME. — *Soit f une fonction positive μ-intégrable et soit $f_n = \inf(n, f)$. Alors* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^\bullet(f - f_n) = 0$.

En effet si $A_n = \{t : f(t) \geqslant n\}$, $\mu^\bullet(A_n) \leqslant \dfrac{\mu^\bullet(f)}{n}$ tend vers zéro donc aussi $\mu^\bullet(f - f_n)$ grâce au lemme précédent et à l'inégalité

$$\mu^\bullet(f - f_n) \leqslant \mu^\bullet(\chi_{A_n}(f - f_n)) + \mu^\bullet(\chi_{\complement A_n}(f - f_n)) \leqslant \mu^\bullet(\chi_{A_n} f).$$

Démonstration du théorème 1.22. — Il suffit de considérer le cas où la fonction f est positive et d'après la proposition 1.20 on peut supposer qu'on a partout $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$. Alors on a (avec les notations du lemme 1.25 *bis*)

$$0 \leqslant f - f_n \leqslant g - g_n,$$

de sorte que $\mu^\bullet(f - f_n) \leqslant \mu^\bullet(g - g_n)$ et que la suite $\mu^\bullet(f - f_n)$ tend vers zéro grâce au lemme 1.25 *bis* appliqué à g. Il suffit donc de montrer que f_n appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ ce qui nous ramène au cas où f est de plus bornée; dans ce cas soit K un compact tel que $\mu^\bullet(\chi_{\complement K}2g) \leqslant \varepsilon$, et soit $\varphi \in \mathcal{K}_+$ telle que $\varphi(t) \geqslant f(t)$ sur K. Alors $h = \inf(\varphi, f)$ est μ-intégrable d'après le lemme 1.23 et $h(t) = f(t)$ sur K, de sorte que

$$\mu^\bullet(|f - h|) \leqslant \mu^\bullet(\chi_{\complement K}(f - h)) \leqslant \mu^\bullet(\chi_{\complement K}2g) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que f est μ-intégrable et achève la démonstration du théorème 1.22.

Remarque. — On pourrait espérer que toute fonction μ-mesurable f telle que $\mu^\bullet(|f|) < +\infty$ soit μ-intégrable. Il n'en est rien en général (voir l'exemple 1.17 ou l'exemple 1.16 avec $p = +\infty$) mais on montrera plus loin (5.7) que c'est exact lorsque l'espace E est par exemple faiblement séquentiellement complet.

1.26. Corollaire. — *Soit* H *une partie de* E′ *telle que* $|x| = \sup_{x' \in H} |\langle x, x' \rangle|$ *pour tout* $x \in E$. *Alors pour toute fonction positive* μ*-mesurable bornée on a* $\mu^\bullet(f) = \sup_{x' \in H} |\mu_{x'}|(f)$.

Notamment si A est un ensemble μ-mesurable (i.e. si χ_A est μ-mesurable)

$$\mu^\bullet(A) = \sup_{x' \in H} |\mu_{x'}|(A).$$

En particulier tout ensemble μ-mesurable $\mu_{x'}$-négligeable quel que soit $x' \in H$ est μ-négligeable.

En effet d'après 1.23 φf appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{K}$. Alors d'après 1.13 $\mu^\bullet(\varphi f) = \sup_{x' \in H} |\mu_{x'}|(\varphi f)$ de sorte que

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant 1} \mu^\bullet(\varphi f) = \sup_{x' \in H} \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant 1} |\mu_{x'}|(\varphi f) = \sup_{x' \in H} |\mu_{x'}|(f).$$

La même démonstration est d'ailleurs valable pour une fonction localement μ-intégrable, c'est-à-dire une fonction f telle que φf est μ-intégrable quel que soit $\varphi \in \mathcal{K}$.

Nous allons maintenant d'abord montrer comment les définitions et propriétés précédentes s'étendent au cas d'une mesure à valeurs dans un espace localement convexe arbitraire, ce qui ne présente aucune difficulté supplémentaire mais accroît la portée de notre étude et la rend plus maniable; on pourra par exemple considérer la topologie faible dans un espace de Banach, la topologie de la convergence simple (dite aussi « forte ») dans un espace d'opérateurs, et la topologie de la convergence simple dans des espaces de suites ou de fonctions.

Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace localement convexe E. Soit p une semi-norme continue sur E (nous notons $p(x) = |x|_p$). La *semi-variation* de μ

par rapport à p est définie pour $f \in \mathcal{J}^+$ par

$$\mu_p^\bullet(f) = \sup_{|\varphi| \leqslant f} |\mu(\varphi)|_p \quad \varphi \in \mathcal{K}$$

et on complète la définition comme dans le cas d'un espace normé (1.1).

Soit E_p l'espace de Banach associé à p (le complété de l'espace normé $E/p^{-1}(0)$). Soit π_p: $E \to E_p$ l'application canonique de E dans E_p, et posons $\mu_p = \pi_p \circ \mu$. Alors dans E_p la norme de $\mu_p(\varphi)$ est $|\mu_p(\varphi)| = |\mu(\varphi)|_p$ de sorte que $\mu_p^\bullet$ (définie ci-dessus) est précisément la semi-variation de μ_p. Soit $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$ l'espace des fonctions réelles f telles que $\mu_p^\bullet(|f|) < +\infty$ pour toute semi-norme continue p. Alors $\mathcal{K}(T) \subset \mathcal{F}^\bullet(\mu)$, ce qui permet la définition suivante :

1.27. Définition. — *L'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ des fonctions μ-intégrables est l'adhérence de $\mathcal{K}(T)$ dans l'espace $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$ muni des semi-normes $f \to \mu_p^\bullet(|f|)$. Il revient au même de dire que $\mathcal{L}^1(\mu)$ est l'intersection des espaces $\mathcal{L}^1(\mu_p)$ muni de la topologie la moins fine rendant continues les injections $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu_p)$. Nous dirons de même, qu'une fonction est μ-mesurable quand elle est μ_p-mesurable quel que soit la semi-norme continue p, et qu'un ensemble (ou fonction) est μ-négligeable quand il est μ_p-négligeable pour tout p.*

Avec ces définitions les propositions 1.7, 1.20 et le théorème 1.22 subsistent, dans le cas des espaces localement convexes, sans modifications : une fonction est μ-intégrable si et seulement si elle est μ-mesurable et est majorée en module par une fonction μ-intégrable. L'espace séparé associé à $\mathcal{L}^1(\mu)$ est constitué de classes de fonctions deux à deux égales μ-presque partout. Par contre l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ n'est plus en général complet (voir compléments § 1, p. 86).

1.28. Proposition. — *Soit E un espace localement convexe dont la topologie est la moins fine rendant continues les applications linéaires u_i à valeurs dans des espaces localement convexes E_i respectivement. Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans E et soit $\mu_i = u_i \circ \mu$, Alors une fonction est μ-intégrable si et seulement si elle est μ_i-intégrable pour chaque i $\left(\mathcal{L}^1(\mu) = \bigcap_i \mathcal{L}^1(\mu_i)\right)$ et la topologie de $\mathcal{L}^1(\mu)$ est la moins fine* *rendant continues les injections* $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu_i)$. *Une fonction est* μ*-mesurable* (resp. μ*-négligeable*) *si et seulement si elle est* μ_i*-mesurable* (resp. μ_i*-négligeable*) *quel que soit* i.

Lorsque les espaces E_i sont des espaces normés cette proposition remplace en pratique les définitions (1.27) ci-dessus, et rend inutile la considération de toutes les semi-normes continues sur E.

Démonstration. — Soient p et q des semi-normes continues sur E telles que $p \leqslant q$. Alors $\mu_p^\bullet \leqslant \mu_q^\bullet$ et il s'ensuit que dans les définitions ci-dessus on peut se restreindre à une famille fondamentale de semi-normes continues. Lorsque p_i parcourt une famille fondamentale de semi-normes continues de E_i, les semi-normes $p_i \circ u_i$ (i variant aussi) forment un système fondamental de semi-normes continues de E. Les semi-variations de μ associées à ces semi-normes sont les $\mu_{i,p_i}^\bullet$. Il s'ensuit que $\mathcal{L}^1(\mu) = \bigcap_{i,p_i} \mathcal{L}^1(\mu_{i,p_i}) = \bigcap_i \mathcal{L}^1(\mu_i)$. Les autres assertions sont alors évidentes (par exemple les f_α tendent vers zéro dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ si et seulement si $\mu_{i,p_i}^\bullet(|f_\alpha|)$ tend vers zéro quel que soient i et p_i donc si et seulement si f_α tend vers zéro dans $\mathcal{L}^1(\mu_i)$ quel que soit i).

Définissons maintenant l'intégrale d'une fonction μ-intégrable. Comme $|\mu(\varphi)|_p \leqslant \mu_p^\bullet(|\varphi|)$, la mesure μ est continue lorsque $\mathcal{K}(T)$ est muni de la topologie induite par $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Remarque. — Si π désigne l'application canonique de E sur l'espace séparé associé à E, on a évidemment $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\pi \circ \mu)$. On ne restreint donc pas la généralité en supposant dans la suite, ce que nous ferons, que l'espace E est *séparé.*

1.29. Définition. — *L'intégrale d'une fonction* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, *notée* $\mu(f)$ *ou* $\int f\, d\mu$, *est par définition la valeur en* f *du prolongement continu de* μ *à* $\mathcal{L}^1(\mu)$. *C'est donc un élément de l'espace complété,* $\hat{E}$, *associé à* E. *L'application* $f \to \int f\, d\mu$ *est une application linéaire continue de* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *dans* $\hat{E}$.

1.30. Proposition. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes et soit* u *une application linéaire continue de* E *dans* F. *Soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans* E *et* *soit* $\nu = u \circ \mu$. *Alors* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *est contenu dans* $\mathcal{L}^1(\nu)$, *l'injection est continue, et pour toute* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *on a*

1.31. $$\int f\, d\nu = u \int f\, d\mu.$$

(Ici u désigne encore le prolongement continu, aux espaces complétés, de l'application donnée).

Démonstration. — Pour toute semi-norme continue sur F, q, la semi-norme $q \circ u$ est continue sur E et on a $\nu^\bullet_q = \mu^\bullet_{q \circ u}$. Il s'ensuit que $\mathcal{L}^1(\mu) = \bigcap_p \mathcal{L}^1(\mu_p) \hookrightarrow \bigcap_q \mathcal{L}^1(\nu_q) = \mathcal{L}^1(\nu)$. Les applications $f \to \int f\, d\nu$ et $f \to u \int f\, d\mu$ sont donc des applications linéaires continues de $\mathcal{L}^1(\mu)$ dans $\hat{\mathrm{F}}$, qui coïncident sur $\mathcal{K}(\mathrm{T})$, et par conséquent partout.

Comme conséquence immédiate on a d'abord les relations :

1.32. $$\pi_p \int f\, d\mu = \int f\, d\mu_p$$

1.33. $$u_i \int f\, d\mu = \int f\, d\mu_i \quad \text{(notations de 1.28)}$$

1.34. $$\left\langle x', \int f\, d\mu \right\rangle = \int f\, d\mu_{x'} \quad (x' \in \mathrm{E}' \ \mu_{x'} = x' \circ \mu).$$

Par exemple si $\mathrm{E} = \varprojlim \mathrm{E}_i$ est une limite projective d'espaces de Banach $\int f\, d\mu$ s'identifie à l'élément $\left(\int f\, d\mu_i\right)_i$.

Un autre cas particulier important pour nous est le cas où u est l'application identique de E sur l'espace E muni d'une topologie localement convexe moins fine que la topologie donnée. Dans ce cas $\mathcal{L}^1(\mu)$ est contenu dans $\mathcal{L}^1(u \circ \mu)$ et pour toute fonction μ-intégrable, f, on a

$$\int f\, d\mu = \int f\, d(u \circ \mu) \ (^1).$$

On peut alors (et nous le ferons) désigner par la même lettre $u \circ \mu$ et μ, mais il importe de distinguer soigneusement les espaces $\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\mathcal{L}^1(u \circ \mu)$, qui sont en général distincts. Pour les distinguer nous emploierons des expressions telles que « fonction μ-intégrable pour la topologie $\mathcal{T}$ », « fonction faiblement μ intégrable » « fonction fortement μ-intégrable »

[1] Du moins si le prolongement de u aux espaces complétés est injectif, ce qui sera toujours le cas.

etc... [1]. Conformément à ceci on peut dire qu'il y a plus de fonctions μ-intégrables pour la topologie plus faible. Dans la suite nous examinerons précisément la relation entre ces différents types d'intégrabilité. Au paragraphe 3 nous caractériserons les fonctions μ-intégrables parmi les fonctions faiblement μ-intégrables (du moins pour certains types de mesures); au paragraphe 5 nous caractérisons les espaces E tels que toute fonction faiblement intégrable soit intégrable pour la topologie donnée.

Notons que d'après la proposition 1.28 l'espace des fonctions faiblement μ-intégrables est précisément $\bigcap_{x' \in E'} \mathcal{L}^1(\mu_{x'})$, c'est-à-dire l'espace des fonctions scalairement μ-intégrables. La relation 1.34 ci-dessus montre que notre définition de l'intégrale coïncide avec celle de Bourbaki, le complété faible de E étant justement le dual algébrique de E'.

Un autre cas que nous devons mentionner est le cas où E est un sous-espace d'un espace localement convexe F, muni de la topologie induite par F, et où u est l'injection de E dans F. Dans ce cas on a évidemment $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(u \circ \mu)$ et nous ne distinguerons plus dans la suite $u \circ \mu$ de μ. Par exemple, on regardera μ indifféremment comme mesure à valeurs dans E ou à valeurs dans le complété $\hat{E}$.

1.35. Théorème. — *Soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans un espace localement convexe séparé* E. *Alors pour tout* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\int f\, d\mu$ *appartient au quasi-complété de* E.

Démonstration. — On peut, d'après ce qui précède, supposer que E est quasi-complet (i.e. tout fermé borné de E est complet) et montrer que $\int f\, d\mu \in E$, et pour cela il suffit de prouver que $\int f\, d\mu$ est adhérent dans $\hat{E}$ à une partie bornée de E. Nous distinguerons plusieurs cas :

1) f est bornée et à support compact, par exemple nulle en dehors de l'ouvert relativement compact ω, avec $|f| \leqslant 1$.

[1] En principe il s'agit ici toujours de topologie moins fine que la topologie donnée, mais comme la mesure est encore continue pour la topologie de Mackey, la continuité de μ se ramenant à la continuité sur un espace normé, on pourra aussi parler de fonctions μ-intégrables pour la topologie de Mackey.

Alors « $\left|\left\langle\int \varphi \, d\mu, x'\right\rangle\right| \leqslant 1$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$ nulle hors de ω et vérifiant $|\varphi| \leqslant 1$ » implique

$$\int_\omega d|\mu_{x'}| \leqslant 1 \qquad \text{donc} \qquad \left|\left\langle\int f \, d\mu, x'\right\rangle\right| \leqslant 1.$$

D'après le théorème du bipolaire ([1]) $\int f \, d\mu$ est adhérent à l'ensemble borné des $\mu(\varphi)$ avec $|\varphi| \leqslant 1$ et supp $\varphi \subset \varpi$, donc $\int f \, d\mu \in \mathrm{E}$.

2) f est nulle en dehors d'un compact. Nous supposons en outre $f \geqslant 0$. Soit $f_n = \inf(f, n)$. Alors $\int f \, d\mu = \lim\limits_n \int f_n \, d\mu$ dans $\hat{\mathrm{E}}$ pour la topologie $\sigma(\hat{\mathrm{E}}, \mathrm{E}')$. La suite $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n \in \mathrm{N}}$ faiblement convergente dans $\hat{\mathrm{E}}$, est faiblement bornée donc bornée, et $\int f \, d\mu$ est adhérent à son enveloppe convexe qui est encore une partie bornée de E. (On peut aussi remarquer que d'après le lemme 1.25 *bis* $\int f \, d\mu = \lim\limits_n \int f_n \, d\mu$ au sens de la topologie donnée de $\hat{\mathrm{E}}$ car f_n converge vers f dans $\mathcal{L}^1(\mu)$).

3) f est un élément arbitraire de $\mathcal{L}^1(\mu)$. D'après ce qui précède $\int f\varphi \, d\mu$ appartient à E quel que soit $\varphi \in \mathcal{K}$. On a $\sup\limits_{|\varphi| \leqslant 1} \left|\left\langle \int f\varphi \, d\mu, x'\right\rangle\right| = \int |f| \, d|\mu_{x'}| < +\infty$ donc l'ensemble $\mathrm{B} = \left\{\int \varphi f \, d\mu\right\}_{|\varphi| \leqslant 1, \varphi \in \mathcal{K}}$ est borné dans E, et $\int f \, d\mu$ est adhérent à B d'après le théorème du bipolaire, donc $\int f \, d\mu \in \mathrm{E}$ ce qui achève la démonstration.

1.36. *Exemple.* — Soient E et F des espaces de Banach et soit μ une mesure à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}_s(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ des applications linéaires continues de E dans F, muni de la topologie de la convergence simple dans E (il est équivalent

([1]) Le théorème du bipolaire, dont nous faisons un usage fréquent, peut être énoncé comme suit : Si E est un espace localement convexe sur R, l'adhérence d'une partie convexe symétrique B est son bipolaire; autrement dit $y \in \overline{\mathrm{B}}$ si et seulement si $|\langle y, x'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x' \in \mathrm{E}'$ tel que $|\langle x, x'\rangle| \leqslant 1$ quel que soit $x \in \mathrm{B}$. Nous utilisons aussi souvent le théorème de Mackey selon lequel un ensemble B est borné s'il est faiblement borné, i.e. si $\sup\limits_{x \in \mathrm{B}} |\langle x, x'\rangle| < +\infty$ pour tout $x' \in \mathrm{E}'$.

de dire que μ est continue pour la topologie de la convergence simple ou pour la topologie de la convergence uniforme dans la boule unité, définie par la norme des opérateurs). Posons $\mu_x(\varphi) = \mu(\varphi)x$ pour tout x de E. Alors μ_x est une mesure de Radon à valeurs dans F et d'après la proposition 1.28 l'espace des fonctions μ-intégrables est $\mathscr{L}^1(\mu) = \bigcap_{x\in E} \mathscr{L}^1(\mu_x)$. Pour $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ on a $\left(\int f \, d\mu\right) x = \int f \, d\mu_x$ (d'après 1.31 ou 1.33) et l'opérateur $\int f \, d\mu$ ainsi défini est bien continu, c'est-à-dire appartient bien à $\mathscr{L}(E, F)$ car l'espace $\mathscr{L}_s(E, F)$ est quasi-complet (1.35). Lorsque $E = F$ est un espace de Hilbert et que μ est une mesure spectrale, on a

$$|\mu_x(\varphi)| = \left(\int |\varphi|^2 \, d\nu_x\right)^{1/2}$$

où ν_x est la mesure positive définie par $\nu_x(\varphi) = (\mu(\varphi)x, x)$. Il s'ensuit qu'alors $\mathscr{L}^1(\mu_x) = \mathscr{L}^2(\nu_x)$ et que $\mathscr{L}^1(\mu) = \bigcap_{x\in E} \mathscr{L}^2(\nu_x)$.

1.37. *Exemple* (pour mémoire). — Lorsque μ est une mesure à valeurs dans un espace localement convexe muni de sa topologie faible l'espace $\mathscr{L}^1(\mu)$ est l'intersection des espaces $\mathscr{L}^1(\mu_{x'})$ associés aux mesures scalaires $\mu_{x'} = x' \circ \mu$ où x' parcourt le dual de E. L'intégrale d'une fonction μ-intégrable, un élément du complété faible de E, ou ce qui revient au même du dual algébrique de E$'$, est caractérisé par la formule 1.34.

1.38. *Exemple.* — Soit μ une mesure à valeurs dans un espace de suites d'éléments d'un espace de Banach E (par exemple $c_{0,E}$, l^1_E, l^∞_E, E^N). Une telle mesure s'écrit

$$\mu(\varphi) = \{\mu_i(\varphi)\}_{i\in N}$$

les μ_i étant des mesures à valeurs dans E. D'après 1.28 une fonction f est μ-intégrable relativement à la topologie de la convergence simple si et seulement si f est μ_i-intégrable quel que soit $i \in N$. L'intégrale de f est alors la suite $\left\{\int f \, d\mu_i\right\}_{i\in N}$, un élément de E^N.

Compléments.

(Section contenant des renseignements non essentiels pour la suite).

A. Soit μ une mesure à valeurs dans un espace normé et soit f une fonction positive. Nous définissons la semi-variation stricte de μ par la formule : $\mu^*(f) = \inf_{\substack{f \leqslant g \\ g \in \mathcal{J}^+}} \mu^\bullet(g)$.

On a donc $\mu^*(f) = \mu^\bullet(f)$ lorsque f est à support compact ou semi-continue inférieurement, et $\mu^\bullet(f) \leqslant \mu^*(f)$ dans le cas général, l'égalité n'ayant pas lieu en général même pour une mesure positive, comme il est bien connu. Nous dirons qu'une partie A est strictement μ-négligeable lorsque $\mu^*(A) = 0$. La semi-variation stricte μ^* possède des propriétés analogues à celles de $\mu^\bullet$, la proposition 1.3 étant valable pour μ^* à condition d'y remplacer les mots « μ-presque partout » par « strictement μ-presque partout ». Nous dirons qu'une fonction réelle f est strictement μ-intégrable lorsqu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer $\varphi \in \mathcal{K}$ tel que $\mu^*(|f - \varphi|) \leqslant \varepsilon$. L'espace $\mathcal{L}^{1*}(\mu)$ des fonctions strictement μ-intégrables muni de la semi-norme $f \to \mu^*(|f|)$ possède des propriétés analogues à celles de $\mathcal{L}^1(\mu)$, en particulier c'est un espace complet. L'injection continue de $\mathcal{L}^{1*}(\mu)$ dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ est une isométrie. En effet pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^{1*}(\mu)$ on a $\mu^\bullet(|f|) \leqslant \mu^*(|f|)$ et les deux membres de cette inégalité coïncident sur $\mathcal{K}$, donc dans l'espace $\mathcal{L}^{1*}(\mu)$ tout entier. L'application obtenue par passage aux quotients séparés est aussi une isométrie et de plus dense ($\mathcal{K}$ étant déjà dense dans $\mathcal{L}^1(\mu)$). Il en résulte qu'elle est surjective, i.e. les espaces séparés associés à $\mathcal{L}^{1*}(\mu)$ et $\mathcal{L}^1(\mu)$ sont canoniquement isomorphes. Il s'ensuit que toute fonction μ-intégrable est μ-presque partout égale à une fonction strictement μ-intégrable. Du lemme 1.24 il résulte qu'une fonction μ-intégrable est nulle en dehors de la réunion d'une suite de compacts et d'une partie μ-négligeable. De la même manière on montre qu'une fonction strictement μ-intégrable est nulle en dehors de la réunion d'une suite de compacts et d'une partie strictement μ-négligeable. Cette propriété caractérise en fait les fonctions strictement μ-intégrables parmi les fonctions μ-intégrables. Soit en effet f une fonction μ-intégrable nulle en dehors de la réunion d'une suite de compacts et d'une partie strictement μ-négligeable. Soit g une fonction strictement μ-intégrable telle que $f(t) = g(t)$ μ-presque partout. Alors il est clair qu'en fait $g(t) = f(t)$ strictement μ-presque partout donc que f est aussi strictement μ-intégrable (analogues des remarques suivant la définition 1.6). On aura donc $\mathcal{L}^{1*}(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu)$ si et seulement si tout ensemble μ-négligeable est strictement μ-négligeable (le « seulement si » parce que si A est μ-négligeable $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et on aura $\chi_A \in \mathcal{L}^{1*}(\mu)$ avec par conséquent $\mu^*(A) = \mu^\bullet(A) = 0$). Comme dans le cas de mesures scalaires cela se produit dans deux cas notables :

a) T est dénombrable à l'infini;

b) La fonction 1 est μ-intégrable. En effet, dans ces cas-là T est réunion d'une suite de compacts et d'une partie strictement μ-négligeable.

Pour *a*) cela va de soi; pour *b*) on peut noter que d'après le lemme 1.24 il existe une suite de compacts K_n telle que $\mu^*(T - K_n) = \mu^\bullet(T - K_n) \leqslant 1/n$ d'où il résulte que $\complement \bigcup_n K_n$ est strictement μ-négligeable. Plus loin (Compl. § 3 C) nous donnerons un exemple montrant que la fonction μ^* n'est pas intéressante comme base de l'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle.

B. Dans l'énoncé suivant il sera commode d'appeler « métrisable » un espace localement convexe E dont la topologie peut être définie par une suite de semi-normes (il revient au même de dire que l'espace séparé associé à E est métrisable au sens ordinaire).

Proposition. — *Soit* E *un espace localement convexe « métrisable ». Soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans* E. *Alors l'espace* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *est « métrisable » et complet.*

Démonstration. — Soit $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite fondamentale de semi-normes continues dans E. Alors les semi-variations $\mu^\bullet_{p_n}$ définissent une suite fondamentale de semi-normes continues dans l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$, ce qui prouve que cet espace est « métrisable ». Pour montrer que $\mathcal{L}^1(\mu)$ est complet il suffit donc de montrer que toute suite de Cauchy converge. Soit $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$

une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(\mu)$. Alors $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans chaque espace $\mathcal{L}^1(\mu_{p_n})$ et y converge d'après le théorème 1.8. De plus on peut, par extractions successives et par extraction de la suite diagonale, extraire une sous-suite de $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ qui converge μ_{p_n}-presque partout pour tout n, donc qui converge μ-presque partout. Si f est une fonction limite, définie arbitrairement (à valeurs réelles) sur l'ensemble d'exception, f_i converge vers f dans chaque espace $\mathcal{L}^1(\mu_{p_n})$ donc $f \in \mathcal{L}^1(\mu) = \bigcap_n \mathcal{L}^1(\mu_{p_n})$ et f_i tend vers f dans $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Par contre si on ne suppose plus l'espace E « métrisable » $\mathcal{L}^1(\mu)$ n'est plus en général complet (ou même quasi complet). Voici un contre exemple basé sur une idée de G. Mokobodzki. Soit μ l'application identique de $\mathcal{C}[0, 1]$ dans cet espace muni de sa topologie affaiblie $\sigma(\mathcal{C}, \mathrm{M})$. Alors d'après la proposition 1.28 $\mathcal{L}^1(\mu) = \bigcap_{\alpha\in \mathrm{M}^+} \mathcal{L}^1(\alpha)$, la topologie étant définie par les semi-normes $f \to \int |f|\, d\alpha$, et par conséquent plus fine que la topologie de la convergence simple. Pour voir que $\mathcal{L}^1(\mu)$ n'est pas complet (ni quasi-complet) il suffit de remarquer que toute famille filtrante croissante de fonctions universellement mesurables f_i telles que par exemple $0 \leqslant f_i \leqslant 1$, est un filtre de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ dont la limite, si elle existe, ne peut être que la borne supérieure des f_i. L'ensemble des fonctions caractéristiques de parties finies d'un sous-ensemble non universellement mesurable de $[0, 1]$ est donc un filtre de Cauchy (borné) non convergent.

Problèmes.

(Section contenant des problèmes non résolus ou non abordés.)

Lorsque μ est une mesure de Radon positive, on sait que pour une suite de fonctions positives arbitraires $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de borne supérieure f on a $\mu^\bullet(f) = \sup_n \mu^\bullet(f_n)$. J'ignore si cette propriété subsiste pour une mesure à valeurs dans un espace normé arbitraire. (Le problème se ramène évidemment au problème analogue pour la semi-variation stricte μ^* (voir la section des compléments précédente)).

Dans l'absence de solution positive du problème ci-dessus la question suivante se pose aussi : lorsque l'espace localement compact T est dénombrable à l'infini, est-ce que l'on a $\mu^*(f) = \mu^\bullet(f)$ pour une fonction positive arbitraire?

2. Mesures de Radon bornées.

Nous dirons qu'une mesure de Radon est bornée quand elle est continue pour la topologie de la convergence uniforme. Dans le cas d'une mesure à valeurs dans un espace normé cela signifie donc qu'on a :

$$|\mu(\varphi)| \leqslant M\|\varphi\|_\infty \qquad \text{pour tout} \qquad \varphi \in \mathcal{K}(T)$$

ou ce qui revient au même, qu'on a $\mu^\bullet(T) < +\infty$. Dans ce qui suit nous supposons d'abord que μ est une mesure bornée à valeurs dans un espace *de Banach* E. Une telle mesure peut être prolongée par continuité à l'espace $\mathcal{C}_0(T)$ des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini, et nous considérons toujours une mesure bornée comme une application continue de l'espace $\mathcal{C}_0(T)$. Conformément à ceci nous appelons *faiblement compacte* une mesure bornée qui transforme la boule unité de $\mathcal{C}_0(T)$ en sous-ensemble faiblement relativement compact de l'espace de Banach E. Lorsque μ est une mesure bornée, l'espace $\mathcal{C}_0(T)$ est contenu dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ et le prolongement par continuité de μ à $\mathcal{C}_0$ coïncide avec le prolongement intégral. Cela résulte de l'inégalité :

2.1. $$\mu^\bullet(|f|) \leqslant \mu^\bullet(T)\|f\|_\infty$$

et du fait que $\mathcal{K}(T)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(T)$. Il se peut d'ailleurs que l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ soit réduit à $\mathcal{C}_0(T)$ (par exemple si μ est l'identité de l'espace $\mathcal{C}_0(T)$).

2.2. Théorème. — *Soit* μ *une mesure bornée à valeurs dans un espace de Banach* E. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *Toute fonction borélienne bornée appartient à* $\mathcal{L}^1(\mu)$.

b) *Pour tout ouvert* ω *l'intégrale faible* $\int_\omega d\mu$ *appartient à* E[1].

(1) L'intégrale faible d'une fonction faiblement (i.e. scalairement) μ-intégrable appartient à priori à l'espace E'^*, complété faible de E.

c) μ *est faiblement compacte* (*i.e. transforme la boule unité de* $\mathcal{C}_0(\mathrm{T})$ *en sous-ensemble faiblement relativement compact de* E).

Démonstration. — Il est clair que *a*) implique *b*); l'équivalence de *b*) et *c*) résulte des travaux de Grothendieck ([10] p. 160); il nous suffit donc de démontrer que *c*) implique *a*). Rappelons d'abord le fait bien connu suivant :

2.3. Proposition. — *La mesure* μ *est faiblement compacte si et seulement si l'ensemble* $\{\mu_{x'}\}_{|x'|\leqslant 1}$ *est relativement compact dans* $\mathrm{M} = \mathcal{C}'_0$ *pour la topologie* $\sigma(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$ *(nous dirons faiblement relativement compact dans la suite).*

Cela n'est qu'un cas particulier du théorème de Gantmacher ([8] VI. 4.8) selon lequel une application linéaire continue d'un espace de Banach dans un autre est faiblement compacte si et seulement si sa transposée est faiblement compacte.

Démontrons maintenant que *c*) implique *a*). Grâce à l'inégalité 2.1 et le fait que les fonctions boréliennes étagées sont denses dans l'espace des fonctions boréliennes bornées muni de la topologie de la convergence uniforme, il suffit de montrer que pour toute partie borélienne $\mathrm{A} \subset \mathrm{T}$, la fonction χ_{A} appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$, ce que nous ferons d'abord dans le cas où A est un ensemble ouvert ω. D'après le lemme 1.4 on a pour tout ouvert ω et tout compact $\mathrm{K} \subset \omega$,

$$\mu^{\bullet}(\omega - \mathrm{K}) = \sup_{|x'|\leqslant 1} |\mu_{x'}|(\omega - \mathrm{K}).$$

L'ensemble $\{\mu_{x'}\}_{|x'|\leqslant 1}$ étant faiblement relativement compact, il résulte d'un critère de compacité faible de Grothendieck (voir Appendice I) condition C_4) que cette quantité peut être rendue inférieure à $\varepsilon > 0$ par un choix convenable du compact K. Or il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{K}$ telle que $\chi_{\mathrm{K}} \leqslant \varphi \leqslant \chi_{\omega}$, pour laquelle on a donc $\mu^{\bullet}(\chi_{\omega} - \varphi) \leqslant \varepsilon$, ce qui entraîne que χ_{ω} appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$. Soit maintenant A une partie borélienne quelconque de T. Alors la condition C_5 de l'Appendice I implique qu'il existe un ouvert ω et un compact K tel que $\mathrm{K} \subset \mathrm{A} \subset \omega$, et que $\mu^{\bullet}(\omega - \mathrm{K})$ soit inférieure à un nombre $\varepsilon > 0$ donné. A fortiori $\mu^{\bullet}(\omega - \mathrm{A}) \leqslant \varepsilon$, donc χ_{A} appartient aussi à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Nous venons d'appliquer le critère de compacité faible C_4 de Grothendieck dans le sens trivial (dont on a d'ailleurs donné la démonstration dans l'Appendice I à propos de C_5).

Si nous l'appliquons aussi dans l'autre sens nous obtenons, grâce à 2.4.

2.5. Proposition. — *Soit* μ *une mesure de Radon bornée à valeurs dans un espace de Banach. Pour que* μ *soit faiblement compacte il est suffisant qu'à tout ouvert* $\omega \subset T$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *on puisse associer un compact* $K \subset \omega$, *tel que* $\mu^{\bullet}(\omega - K) \leqslant \varepsilon$; *il est nécessaire qu'à tout borélien* A *et* $\varepsilon > 0$, *on puisse associer un ouvert* ω *et un compact* K, *avec* $K \subset A \subset \omega$, *tel que* $\mu^{\bullet}(\omega - K) \leqslant \varepsilon$.

La dernière partie résulte évidemment de C_5 (Appendice I).

A titre d'exemple, considérons le cas d'une mesure de Radon bornée à valeurs dans un espace $\mathcal{C}(S)$, où S est un compact. Pour simplifier, nous supposerons T aussi compact. μ est donc une application linéaire continue de $\mathcal{C}(T)$ dans $\mathcal{C}(S)$. Posons $\mu_\alpha = \alpha \circ \mu$ où $\alpha \in M(S) = \mathcal{C}(S)'$; $\mu_s(\varphi) = \mu(\varphi)(s)$ (i.e. $\mu_s = \mu_{\delta_{(s)}}$). L'application $s \to \mu_s$ est donc une application vaguement continue de S dans $M(T)$ et

$$\mu_\alpha = \int \mu_s \, d\alpha(s)$$

(intégrale vectorielle pour la topologie vague). Pour appliquer le critère *c*) du théorème 2.2 on doit déterminer si $\int_\omega^{\bullet} d\mu$ appartient à $\mathcal{C}(S)$, c'est-à-dire s'il existe $x \in \mathcal{C}(S)$ tel que

$$\langle x, \alpha\rangle = \int_\omega^{\bullet} d\mu_\alpha \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in M(S).$$

S'il en est ainsi on obtient avec $\alpha = \delta_{(s)}$:

$$x(s) = \int_\omega^{\bullet} d\mu_s.$$

Donc si $\int_\omega^{\bullet} d\mu$ appartient à $\mathcal{C}(S)$ c'est la fonction $x : s \to \int_\omega^{\bullet} d\mu_s$. Si les mesures μ_s sont positives, il est facile de voir qu'inversement la continuité de cette fonction entraîne que $\int_\omega^{\bullet} d\mu$ appartient à $\mathcal{C}(S)$, car il résulte alors de faits bien connus sur l'intégration de familles de mesures positives qu'on a $\int d\alpha(s) \int_\omega^{\bullet} d\mu_s = \int_\omega^{\bullet} d\mu_\alpha$, i.e. :

$$\langle x, \alpha\rangle = \int_\omega^{\bullet} d\mu_\alpha.$$

Mais dans le cas général cela n'a rien d'évident. L'objet des considérations qui suivent est d'améliorer le critère *c*) de 2.2 de manière à le rendre applicable à ce genre de situations.

2.6. DÉFINITION. — *Nous dirons qu'une topologie* $\mathcal{T}$ *sur l'espace* E *possède la propriété d'Orlicz lorsque toute suite d'éléments de* E, *dont toutes les sous-suites sont sommables pour la topologie* $\mathcal{T}$, *est sommable pour la topologie donnée de* E. *Nous dirons qu'une partie* H *de* E′ *possède la propriété d'Orlicz lorsque la topologie* $\sigma(E, H)$ *possède la propriété d'Orlicz.*

Le théorème classique d'Orlicz Banach affirme que la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$ possède la propriété d'Orlicz : i.e. une suite dont toutes les sous-suites sont faiblement sommables est sommable. L'Appendice II (p. 179) contient des généralisations du théorème d'Orlicz que nous employerons dans la suite (Par exemple : dans l'espace $\mathcal{C}(S)$ (S compact) la topologie de la convergence simple possède la propriété d'Orlicz).

Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans E, et soit H une partie de E′ séparant E. Conformément aux conventions du paragraphe 1 nous dirons qu'une fonction f est μ-intégrable pour la topologie $\sigma(E, H)$ lorsque f est $\mu_{x'}$-intégrable quel que soit $x' \in H$. L'intégrale de f au sens de la topologie $\sigma(E, H)$, que nous notons $\int f\, d\tilde{\mu}$, est un élément du complété de E pour la topologie $\sigma(E, H)$. Ce complété peut être identifié à H^*, l'ensemble de toutes les fonctions linéaires sur H, et l'intégrale $\int f\, d\tilde{\mu}$ s'identifie alors à la fonction $x' \to \int f\, d\mu_{x'}$ (1). Si f est déjà μ-intégrable (resp. faiblement μ-intégrable) f est à fortiori μ-intégrable pour la topologie $\sigma(E, H)$.

(1) On a $E \subset H^*$; H^* est complet comme sous-espace fermé de R^H, et E est dense dans H pour la topologie induite par R^H. Plus précisément pour toute suite finie $(x'_i)_{i=1-n}$ d'éléments de H et toute fonction linéaire sur H, L, il existe $x \in E$ tel que $\langle x, x'_i \rangle = L(x'_i)$, ce qu'on voit aussitôt en se ramenant au cas où les x'_i sont linéairement indépendants. Si $x' \in H$ on a $\left\langle x', \int f\, d\tilde{\mu} \right\rangle = \int f\, d\mu_{x'}$, ce qui détermine l'intégrale comme élément de H^*. Lorsque H est une partie libre de E′, H^* est l'ensemble de toutes les fonctions sur H, i.e. R^H. Par exemple si $E = \mathcal{C}(S)$ muni de la topologie de la convergence simple, $H = \{\delta_{(s)}\}_{s \in S}$, une fonction f est intégrable pour la topologie de la convergence simple si elle est μ_s-intégrable quel que soit $s \in S$, et son intégrale est la fonction $s \to \int f\, d\mu_s$.

2.7. Théorème. — *Soit* E *un espace de Banach et soit* H *une partie de* E′ *telle que* $|x| = \sup\limits_{x' \in H} |\langle x, x' \rangle|$ *pour tout* $x \in E$, *et telle que* H *possède la propriété d'Orlicz* (1). *Soit* μ *une mesure de Radon bornée à valeurs dans* E, *et soit* $\tilde{\mu}$ *la mesure obtenue à partir de* μ *en munissant* E *de la topologie* $\sigma(E, H)$. *Alors, pour que* μ *soit faiblement compacte sur* $\mathcal{C}_0(T)$ *il est suffisant (et évidemment nécessaire) que pour tout ouvert* ω *l'on ait* $\int_\omega d\tilde{\mu} \in E$.

Démonstration. — Soit $(\omega_n)_{n \in N}$ une suite d'ouverts deux à deux disjoints. Alors pour toute partie $P \subset N$ on a

$$\int_{\omega_P} d\tilde{\mu} = \sum_{n \in P} \int_{\omega_n} d\tilde{\mu} \quad \left(\text{où } \omega_P = \bigcup_{n \in P} \omega_n\right)$$

au sens de la topologie $\sigma(E, H)$. Comme H possède la propriété d'Orlicz ces sommes convergent en fait au sens de la topologie donnée de E, associée à la norme. En particulier $\left|\int_{\omega_n} d\tilde{\mu}\right| = \sup\limits_{x' \in H} \left|\int_{\omega_n} d\mu_{x'}\right|$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Il résulte d'un critère de compacité faible de Grothendieck (cf. Appendice I : C_2) que l'ensemble $\{\mu_{x'}\}_{x' \in H}$ est faiblement relativement compact dans M(T) (H étant contenu dans la boule unité de E′, cet ensemble est de toute façon borné). Or pour tout ouvert ω on a $\mu^\bullet(\omega) = \sup\limits_{x' \in H} |\mu_{x'}|(\omega)$ (cf. 1.13). Le critère de compacité faible C_4 de l'Appendice I, appliqué à la même famille, montre, si l'on remplace ω par $\omega - K$ dans la relation ci-dessus, que $\inf\limits_{K \subset \omega} \mu^\bullet(\omega - K) = 0$ (K compact contenu dans ω). μ est donc faiblement compacte d'après la proposition 2.5.

2.8. *Exemple.* — Dans l'espace $\mathcal{C}(S)$ (S compact) la topologie de la convergence simple possède la propriété d'Orlicz (cf. Appendice II). Donc si μ est une mesure bornée à valeurs dans $\mathcal{C}(S)$ et si on pose $\mu_s(\varphi) = \mu(\varphi)(s)$, la mesure μ est

(1) Si E est séparable, la première condition sur H entraîne déjà que H possède la propriété d'Orlicz (voir Appendice II, Th. 3). D'autre part, il est clair qu'il suffirait de supposer $a|x| \leqslant \sup\limits_{x' \in H} |\langle x, x' \rangle| \leqslant b|x|$ $(0 < a \leqslant b)$, mais comme un changement de norme dans E permet de se ramener au cas considéré, nous préférons l'hypothèse de l'énoncé.

faiblement compacte si et seulement si pour tout ouvert ω la fonction $s \to \int_\omega d\mu_s$ est continue. Lorsqu'il en est ainsi l'application $s \to \int f\, d\mu_s$ est continue quelle que soit la fonction borélienne bornée f, et $\int d\alpha(s) \int f\, d\mu_s = \int f\, d\mu_\alpha$ où $\mu_\alpha = \alpha \circ \mu$ (cf. note p. 89).

2.9. *Exemple.* — Une mesure bornée arbitraire à valeurs dans $l^1(\mathrm{I})$ est faiblement compacte [1]. En effet, si $\mu(\varphi) = \{\mu_i(\varphi)\}_{i\in\mathrm{I}}$ appartient à $l^1(\mathrm{I})$ et $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}} |\mu_i(\varphi)| \leqslant \mathrm{M}\|\varphi\|_\infty$, on a $\sum\limits_{i\in\mathrm{J}} |\mu_i(\varphi)| \leqslant \mathrm{M}$ pour toute partie finie $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0$ telle que $|\varphi| \leqslant 1$. Alors pour toute fonction borélienne f telle que $|f| \leqslant 1$ on a $\sum\limits_{i\in\mathrm{J}} |\mu_i(f)| \leqslant \mathrm{M}$ (approcher f par φ dans $\mathcal{L}^1\Big(\sum\limits_{i\in\mathrm{J}} |\mu_i|\Big)\Big)$. Donc pour toute fonction borélienne bornée f, l'intégrale $\left\{\int f\, d\mu_i\right\}_{i\in\mathrm{I}}$ de f relativement à la topologie de la convergence simple appartient à $l^1(\mathrm{I})$, ce qui prouve que μ est faiblement compacte d'après 2.7. (La topologie de la convergence simple possède la propriété d'Orlicz, donc on peut appliquer 2.7 avec pour H l'ensemble des suites à support fini, majorées en module par 1). En particulier, si $s(\varphi) = \sum\limits_{i\in\mathrm{I}} \mu_i(\varphi)$ on a $\int f\, ds = \sum\limits_{i\in\mathrm{I}} \int f\, d\mu_i$ pour toute fonction borélienne bornée f (1.12).

2.10. *Remarque.* — Ceci implique que dans l'espace de Banach $\mathrm{M} = \mathcal{C}_0'$ la topologie $\sigma(\mathrm{M}, \mathcal{K})$ possède la propriété d'Orlicz. En effet montrons-le d'abord pour la topologie $\sigma(\mathrm{M}, \mathcal{C}_0)$: i.e. si $(\mu_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est une suite de mesures bornées telles que $\sum\limits_n |\mu_n(\varphi)| < +\infty$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$, la somme $\sum\limits_n \mu_n$ converge pour la norme dans M. Posons $s_\mathrm{A}(\varphi) = \sum\limits_{n\in\mathrm{A}} \mu_n(\varphi)$ pour toute partie $\mathrm{A} \subset \mathrm{N}$. Alors d'après ce qui précède

$$s_\mathrm{A}(f) = \sum_{n\in\mathrm{A}} \mu_n(f)$$

pour toute fonction borélienne bornée f, ce qui implique que

[1] Ce résultat n'est pas nouveau (cf. [8] IV. 7.6 et [10] théorème 7, p. 161).

$s_A = \sum_{n \in A} \mu_n$ pour la topologie $\sigma(M, M')$, et par conséquent, d'après le théorème d'Orlicz, que ces sommes convergent aussi pour la topologie associée à la norme dans M. Montrons maintenant que la topologie $\sigma(M, \mathcal{K})$ possède la propriété d'Orlicz. Supposons qu'il existe des mesures bornées s_A telles que $s_A(\varphi) = \sum_{n \in A} \mu_n(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$. Alors pour tout $A \subset N$ on a $\sup_{|\varphi| \leqslant 1} \left| \sum_{n \in A} \mu_n(\varphi) \right| < +\infty$. Il en résulte (par exemple en appliquant le théorème T.4 de l'Appendice I à la mesure de poids $\mu_n(\varphi)$ au point $n \in N$), que $\sup_{|\varphi| \leqslant 1} \sum_n |\mu_n(\varphi)| < +\infty$, donc on est ramené au cas précédent.

Une autre application du théorème 2.7 est la généralisation au cas des mesures vectorielles du théorème de convergence de Dieudonné-Grothendieck.

2.11. Proposition. — *Soit* $(\mu_n)_{n \in N}$ *une suite de mesures bornées faiblement compactes à valeurs dans un espace de Banach* E, *et supposons que* $\mu_n(\varphi)$ *tende dans* E *vers une limite* $\mu(\varphi)$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}_0(T)$ [1]. *Alors pour que* $\int f \, d\mu_n$ *tende vers* $\int f \, d\mu$ *quelle que soit la fonction borélienne bornée* f, *il suffit que pour chaque ouvert* ω *la suite* $\int_\omega d\mu_n)$ *converge dans* E.

Démonstration. — Soit c_E l'espace des suites convergentes $x = (x_n)_{n \in N}$ d'éléments de E muni de la norme $\|x\| = \sup_n |x_n|$. Alors c_E est un espace de Banach et la topologie de la convergence simple, la moins fine rendant continues les applications $u_n : x \to x_n$ de c_E dans E, possède la propriété d'Orlicz (cf. Appendice II.5). Soit

$$m(\varphi) = \{\mu_n(\varphi)\}_{n \in N}.$$

Alors m est une mesure de Radon bornée à valeurs dans c_E (la continuité venant par exemple du théorème de Banach Steinhaus) et l'intégrale $\int_\omega d\tilde{m}$ relativement à la topologie de la convergence simple est la suite $\left\{\int_\omega d\mu_n\right\}_{n \in N} \in E^N$. Comme par hypothèse $\int_\omega d\tilde{m}$ appartient à c_E il résulte du théorème

[1] μ est alors une mesure bornée en vertu du théorème de Banach Steinhaus.

2.7 que m est faiblement compacte [1], donc que toute fonction borélienne bornée f est m-intégrable, et qu'on a

$$u_n \int f\, dm = \int f\, d\mu_n \quad (\text{car } \mu_n = u_n \circ m) \quad (\text{cf. } 1.31)$$

ce qui signifie que $\int f\, dm = \left\{\int f\, d\mu_n\right\}_{n \in \mathrm{N}}$ appartient à c_{E}. De plus, si l'on pose $u(x) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, u est une application linéaire continue de c_{E} dans E, de sorte que

$$u \int f\, dm = \int f\, d\mu \quad (\mu = u \circ m)$$

c'est-à-dire que $\int f\, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int f\, d\mu_n$ C.Q.F.D.

Pour arriver au résultat analogue au théorème de Dieudonné-Grothendieck il suffit de prouver que la convergence des intégrales $\int_\omega d\mu_n$ entraîne déjà la convergence des $\mu_n(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}_0$. Toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0$ étant limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ouverts, il suffit de prouver que sous l'hypothèse de la convergence des intégrales $\int_\omega d\mu_n$ les normes $\|\mu_n\| = \sup\limits_{|\varphi| \leqslant 1} |\mu_n(\varphi)|$ sont majorées indépendamment de n. Or plus précisément la relation $\sup\limits_{n \in \mathrm{N}} \left|\int_\omega d\mu_n\right| < +\infty$ implique déjà que $\sup\limits_{n \in \mathrm{N}} \|\mu_n\| < +\infty$. Cela résulte du résultat correspondant de Dieudonné pour le cas scalaire (cf. Appendice I, T. 4). En effet on a

$$\sup_{|x'| \leqslant 1,\, n} \left|\int_\omega d\mu_{n,x'}\right| < +\infty,$$

donc d'après le résultat de Dieudonné on a

$$\sup_n \|\mu_n\| = \sup_{|x'| \leqslant 1,\, n,\, |\varphi| \leqslant 1} |\mu_{n,x'}(\varphi)| < +\infty \quad \text{C.Q.F.D.}$$

En résumé :

2.12. Théorème. — *Soit* $(\mu_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *une suite de mesures bornées faiblement compactes à valeurs dans un espace de Banach* E. *Alors si pour tout ouvert* ω *la suite* $\left\{\int_\omega d\mu_n\right\}_{n \in \mathrm{N}}$ *est convergente*

[1] On prend ici pour H l'ensemble des formes linéaires de la forme $x \to \langle x_n, x' \rangle$ où $n \in \mathrm{N}$, $|x'| \leqslant 1$. H possède alors la propriété d'Orlicz.

dans E, *il existe une mesure bornée faiblement compacte* μ *telle que l'on ait* $\lim\limits_{n\to\infty}\int f\,d\mu_n = \int f\,d\mu$, *quelle que soit la fonction borélienne bornée* f.

Nous donnons maintenant d'abord quelques autres conditions équivalentes à la compacité faible d'une mesure bornée, résultant directement par transposition de critères de compacité faible dans l'espace M(T) dûs à Grothendieck, Bartle, Dunford et Schwartz, et Pettis.

2.13. Proposition. — *Soit* μ *une mesure vectorielle bornée à valeurs dans un espace de Banach* E. *Pour que* μ *soit faiblement compacte il faut et il suffit que pour toute suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *extraite de* $\mathcal{C}_0$, *uniformément bornée et tendant vers zéro simplement* (i.e. $|\varphi_n| \leqslant \mathrm{M}\ \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t) = 0$) *on ait* $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\varphi_n) = 0$ *dans* E.

Cela résulte immédiatement du critère de compacité faible de Grothendieck (Appendice I, C_1) par transposition (cf. proposition 2.3).

2.14. Proposition. — *Soit* μ *une mesure bornée faiblement compacte à valeurs dans un espace de Banach* E, *et soit* H *une partie de* E' *telle que* $|x| = \sup\limits_{x'\in\mathrm{H}}|\langle x, x'\rangle|$ *pour tout* $x\in\mathrm{E}$. *Alors il existe une suite* $(x'_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *extraite de* H *et une suite sommable de scalaires positives* c_n, *tels que la mesure bornée*

$$\textbf{2.15.}\qquad \lambda = \sum_n c_n|\mu_{x'_n}|$$

possède la propriété suivante :

$$\textbf{2.16.}\qquad \lim_{\lambda(\mathrm{A})\to 0}\mu^\bullet(\mathrm{A}) = 0$$

(i.e. Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout borélien A avec $\lambda(\mathrm{A}) \leqslant \eta$ on ait $\mu^\bullet(\mathrm{A}) \leqslant \varepsilon$).

Réciproquement s'il existe une mesure positive bornée λ avec la propriété 2.16, μ est faiblement compacte.

En effet si μ est faiblement compacte, l'ensemble borné des mesures scalaires $\{\mu_{x'}\}_{x'\in\mathrm{H}}$ est faiblement relativement compact dans M (2.3), donc d'après le critère C_7 de l'Appendice I il existe une mesure λ, admettant une expression de la forme 2.13, telle que $\lim\limits_{\lambda(\mathrm{A})\to 0}\sup\limits_{x'\in\mathrm{H}}|\mu_{x'}|(\mathrm{A}) = 0$. Il suffit donc de remarquer que $\sup_{x' \in H} |\mu_{x'}|(A)$ est égal à $\mu^\bullet(A)$, d'après 1.13 et le fait qu'ici χ_A appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Pour la réciproque on peut appliquer le même critère C_7 (Appendice I) en sens inverse en notant qu'on a toujours $\mu^\bullet(A) \geqslant \sup_{|x'| \leqslant 1} |\mu_{x'}|(A)$, ou bien de se ramener à la proposition 2.5 [1].

Nous démontrerons maintenant quelques autres propriétés des mesures faiblement compactes, ayant trait au paragraphe I.

Lorsque μ est une mesure arbitraire on sait que toute fonction μ-mesurable est scalairement μ-mesurable (i.e. $\mu_{x'}$-mesurable quel que soit $x' \in E'$; cf. p. 72). Pour les mesures faiblement compactes la réciproque est exacte; plus précisément :

2.17. Proposition. — *Soit* μ *une mesure bornée faiblement compacte, sur* T, *à valeurs dans un espace de Banach* E. *Soit* H *une partie de* E′ *telle que* $|x| = \sup_{x' \in H} |\langle x, x' \rangle|$ *pour tout* $x \in E$.

Soit f une application de T dans un espace topologique. Pour que f soit μ-mesurable il suffit (et il faut évidemment) que f soit $\mu_{x'}$-mesurable quel que soit $x' \in H$.

Démonstration. — Soit λ une mesure positive vérifiant 2.16 et construite sous la forme 2.15 avec $x'_n \in H$. f étant $\mu_{x'_n}$-mesurable quel que soit n, est aussi λ-mesurable. Alors η étant donné, il existe un compact K, avec $\lambda(T - K) \leqslant \eta$, tel que la restriction de f à K soit continue. Comme pour η assez petit on aura aussi $\mu^\bullet(T - K) \leqslant \varepsilon$, il en résulte a fortiori que f est μ-mesurable.

2.18. Corollaire. — *Si* μ *est une mesure bornée faiblement compacte toute fonction numérique borélienne est* μ*-mesurable.*

2.19. *Remarque.* — Dans la proposition 2.17 on a démontré un peu plus que la μ-mesurabilité, notamment qu'il existe un compact K, avec $\mu^\bullet(T - K) \leqslant \varepsilon$ tel que la restriction de f à K soit continue. Cela est bien naturel en vue de 2.5, mais nous aurons l'occasion de nous en servir.

[1] Cette proposition et le critère de compacité faible qui sert à sa démonstration figurent à peu près tels quels dans le travail de Bartle, Dunford et Schwartz [1]. Plus loin (Compléments B, § 4) nous indiquons le lien précis entre la théorie d'intégration de ces auteurs et le présent travail.

2.20. Proposition. — *Avec les hypothèses de* 2.17: *toute partie* A, $\mu_{x'}$*-négligeable quel que soit* $x' \in \mathrm{H}$ *est* μ*-négligeable.*

En effet A est μ-mesurable donc (1.22) χ_{A} appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$, de sorte que $\mu^\bullet(\mathrm{A}) = \sup_{x' \in \mathrm{H}} |\mu_{x'}|(\mathrm{A}) = 0$ (cf. 1.13).

Voici maintenant un lemme qui permet d'étendre aux espaces localement convexes les résultats précédents pour lesquels cela s'impose, et qui rendra encore des services dans la suite.

2.21. Lemme. — *Soit* (E_i, u_{ij}) *un système projectif d'espaces de Banach* (*ou des* e.l.c. *complets*) *et soit* $\mathrm{E} = \varprojlim \mathrm{E}_i$. *On note* u_i *l'application canonique de* E *dans* E_i $(i < j$ $u_i = u_{ij} \circ u_j)$ *et on suppose que* $\overline{u_i(\mathrm{E})} = \mathrm{E}_i$. *Soit* μ *une application linéaire d'un espace localement convexe* F *dans* E, *et soit* $\mu_i = u_i \circ \mu$.

Alors μ est continue (resp. compacte, resp. faiblement compacte) si et seulement si chaque μ_i possède la même propriété.

Si μ est une mesure de Radon ($\mathrm{F} = \mathcal{K}$ ou $\mathcal{C}_0$) une fonction f est μ-intégrable (resp. faiblement μ-intégrable) si et seulement si f est μ_i-intégrable (resp. faiblement μ_i-intégrable) quel que soit i, et alors on a $u_i \int f\, d\mu = \int f\, d\mu_i$.

Démonstration. — E étant un sous-espace fermé du produit des espaces E_i, et la topologie faible de E étant la topologie induite par le produit des topologies faibles des E_i, la première partie de l'énoncé est évidente. Quant à la deuxième partie, cela n'est qu'un cas particulier de 1.28 et de 1.37. Dans le cas où f est seulement faiblement μ-intégrable il est entendu que dans la relation ci-dessus u_i désigne encore le prolongement continu de u_i aux espaces complétés pour la topologie faible.

Les complétés faibles $\tilde{\mathrm{E}}_i = \mathrm{E}_i'^*$ munis des prolongements continus (i.e. bi-transposés) des applications u_{ij} forment un système projectif, et on a alors $\tilde{\mathrm{E}} = \varprojlim \tilde{\mathrm{E}}_i$, $\tilde{\mathrm{E}} = \mathrm{E}'^*$ désignant le complété faible de E. Cela résulte du fait que $\mathrm{E}' = \bigcup_i \mathrm{E}_i'$ (on a identifié E_i' à une partie de E') et de ce qu'une forme linéaire sur E' est simplement une famille cohérente de formes linéaires sur les espaces E_i'. Les espaces E_i donnés forment alors un système projectif de parties des

$\tilde{E}_i$, et un élément $x = (x_i)$ de $\tilde{E} = \varprojlim \tilde{E}_i$ appartient à E si et seulement si x_i appartient à E_i pour chaque i. Il en résulte que l'intégrale faible $\int f\, d\mu$ appartient à E (espace complet) si et seulement si $\int f\, d\mu_i$ appartient à E_i pour tout i.

Ceci posé il est évident que les théorèmes 2.2 et 2.12 s'étendent sans modification au cas d'un espace localement convexe complet séparé arbitraire (un tel espace est limite projective d'espaces de Banach). Soit $\hat{E}$ le complété d'un espace localement convexe séparé. L'adhérence dans $\hat{E}$ d'une partie bornée de E est contenue dans le quasi-complété de E. Compte tenu de ceci et de 1.35 les théorèmes 2.2 et 2.12 s'étendent encore sans modification au cas des espaces localement convexes quasi-complets.

2.2 bis. THÉORÈME. — *Soit* μ *une mesure bornée à valeurs dans un espace localement convexe* E. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) Toute fonction borélienne bornée appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

b) Pour tout ouvert ω *l'intégrale faible* $\int_\omega d\mu$ *appartient à* $\hat{E}$.

c) μ *est faiblement compacte (i.e. transforme la boule unité de* $\mathcal{C}_0$ *en sous-ensemble relativement faiblement compact de* $\hat{E}$) (1).

Voici enfin l'énoncé du théorème 2.7 dans le cas des espaces localement convexes.

2.7 bis. THÉORÈME. — *Soit* E *un espace localement convexe et soit* H *une partie de* E' *telle que la topologie de* E *soit identique à la topologie de la convergence uniforme dans les parties équicontinues de* H, *et telle que* H *possède la propriété d'Orlicz* (2). *Soit* μ *une mesure de Radon bornée à valeurs dans* E. *Alors pour que* μ *soit faiblement compacte il est suffisant (et évidemment nécessaire) que pour tout ouvert* ω *l'intégrale*

(1) Comme dans le théorème 2.2 l'équivalence entre *b*) et *c*) résulte des travaux de Grothendieck [10]).

(2) Si E contient une partie dénombrable partout dense, la première condition sur H assure déjà que H possède la propriété d'Orlicz (cf. Appendice II).

$\int_\omega d\tilde{\mu}$, *(intégrale relativement à la topologie* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{H})$*) appartienne à* $\hat{\mathrm{E}}$.

Démonstration. — Pour toute partie équicontinue de H, H_1, on voit que l'ensemble des mesures scalaires $\{\mu_{x'}\}_{x' \in \mathrm{H}_1}$ est relativement faiblement compact dans M. Si

$$p(x) = \sup_{x \in \mathrm{H}_1} |\langle x, x' \rangle|$$

on en déduit que la mesure μ_p à valeur dans l'espace de Banach E_p associé à p, est faiblement compacte. Les semi-normes p ainsi définies formant par hypothèse un système fondamental de semi-normes continues de E, il résulte du Lemme 2.21 que μ est faiblement compacte.

Compléments.

Proposition. — *Dans l'énoncé du théorème* 2.7 *et du théorème* 2.7 *bis ci-dessus, on peut se limiter aux ouverts* ω *qui sont réunions dénombrables de fermés.*

Dans le cas où $\mathrm{H} = \mathrm{E}'$ cela résulte du travail de Grothendieck ([10] p. 160) et nous pouvons suivre une méthode semblable dans le cas général. Il suffit évidemment de faire la démonstration dans le cas où E est un espace de Banach.

Démonstration. — On se ramène d'abord au cas où l'espace T est compact. Soit $\mathrm{T}' = \mathrm{T} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de T. Pour $\varphi \in \mathcal{C}(\mathrm{T}')$ posons $\tilde{\mu}(\varphi) = \mu(\varphi_0) + \varphi(\infty) \int_\mathrm{T}^{\bullet} d\tilde{\mu}$, où $\varphi_0 = \varphi - \varphi(\infty)$. Alors $\tilde{\mu}$ est une mesure de Radon sur T′ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathrm{T})$ on a $\tilde{\mu}(\varphi) = \mu(\varphi)$, et par ailleurs $\int_\omega d\tilde{\mu} = \int_{\omega \cap \mathrm{T}}^{\bullet} d\tilde{\mu} \in \mathrm{E}$ pour tout ouvert $\omega \subset \mathrm{T}'$, réunion dénombrable de fermés dans T′. Il résulte de 2.13 que si $\tilde{\mu}$ est faiblement compacte il en est de même de μ, donc compte tenu de ce qui précède il suffit de démontrer la proposition lorsque T est compact, ce que nous supposons maintenant.

Lemme. — *Soit* T *compact et soit* μ *une mesure de Radon sur* T, *à valeurs dans un espace de Banach. Pour que* μ *soit faiblement compacte il est suffisant que pour toute application continue* Φ *à valeurs dans un espace compact métrisable* S, *l'image* $\nu = \Phi(\mu)$, *définie par* $\nu(\Phi) = \mu(\varphi \circ \Phi)$, *soit une mesure faiblement compacte.*

En effet cela résulte aussitôt de 2.13, car toute suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions extraite de $\mathcal{C}(\mathrm{T})$ peut être factorisée ainsi :

$$\varphi_n = \psi_n \circ \Phi$$

où Φ est une application continue de T dans un espace compact métrisable, S, et où les fonctions ψ_n sont continues dans S. (Il suffit de prendre $\Phi(t) = \{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $\mathrm{S} = \Phi(\mathrm{T})$).

Démontrons maintenant l'assertion ci-dessus. Soit μ une mesure sur le compact T, telle que l'on a $\int_\omega d\tilde{\mu} \in \mathrm{E}$ pour tout ouvert ω, réunion dénombrable de fermés de T. Soit Φ une application continue de T dans un espace compact métrisable S, et soit $\nu = \Phi(\mu)$ le mesure sur S, image de μ par Φ. Tout ouvert ω de S est réunion dénombrable de fermés, et il en est de même des ouverts $\Phi^{-1}(\omega)$ de T. Alors, comme $\nu_{x'}$ est l'image de $\mu_{x'}$ par Φ, on a $\int_\omega d\tilde{\nu} = \int_{\Phi^{-1}(\omega)} d\tilde{\mu} \in \mathrm{E}$ pour tout ouvert ω de S, et il résulte de 2.7 que ν est faiblement compacte. L'application Φ étant arbitraire, la mesure μ est faiblement compacte d'après le lemme ci-dessus, ce qui prouve la proposition.

Remarque. — Dans l'énoncé du théorème 2.7 ou 2.7 *bis* on peut encore se borner aux ouverts ω de la forme $\omega = \mathrm{T}$ ou $\omega = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{K}_n$ avec K_n compact.

En effet il suffit de vérifier les hypothèses précédentes pour la mesure μ'. Soit Ω un ouvert réunion dénombrable de fermés de T′. Alors, les fermés de T′ étant compacts Ω est un K_σ (i.e. réunion dénombrable de compacts), donc si ∞ n'appartient pas à Ω, on a $\int_\Omega d\tilde{\mu}' = \int_\Omega d\tilde{\mu} \in \mathrm{E}$. Si au contraire ∞ appartient à Ω, $\mathrm{K} = \mathrm{T}' - \Omega$ est compact G_δ de T, et $\int_\Omega d\tilde{\mu}' = \int_\mathrm{T} d\tilde{\mu} - \int_\mathrm{K} d\tilde{\mu}$, de sorte que l'on est ramené à démontrer que $\int_\mathrm{K} d\tilde{\mu}$ appartient à E pour tout compact G_δ. Soit ω un voisinage ouvert K_σ de K dans T (par exemple $\omega = \{t : \alpha(t) > 0\}$ où α est une fonction de $\mathcal{K}(\mathrm{T})$ strictement positive sur K). Alors $\omega - \mathrm{K}$ est aussi un ouvert K_σ et $\int_\mathrm{K} d\tilde{\mu} = \int_\omega d\tilde{\mu} - \int_{\omega - \mathrm{K}} d\tilde{\mu} \in \mathrm{E}$, ce qu'on voulait montrer.

3. Mesures prolongeables.

Dans ce paragraphe nous introduisons une classe de mesures, que nous étudierons presque exclusivement dans la suite, caractérisée par le fait qu'il y a assez de fonctions intégrables et mesurables. Le résultat principal est la caractérisation, dans le cas de ces mesures, des fonctions intégrables en termes de fonctions scalairement intégrables (théorème 3.11, 3.13 et 3.20).

3.1. Définition. — *Étant donnée une mesure de Radon μ à valeurs dans un espace localement convexe, nous dirons que μ est* prolongeable *lorsque toute fonction borélienne bornée à support compact est μ-intégrable.*

Il est évident d'après la définition 1.7 qu'une mesure μ à valeurs dans un espace localement convexe E est prolongeable si et seulement si les mesures μ_p, à valeurs dans les espaces de Banach E_p associés à E, sont prolongeables, ou avec les notations de 1.28, si et seulement si les mesures μ_i sont prolongeables.

Les mesures prolongeables généralisent les mesures bornées faiblement compactes et nous pouvons utiliser les résultats du paragraphe précédent en considérant des mesures induites par μ dans des sous-ouverts de T : soit ω un ouvert de T. Lorsque f est une fonction définie dans ω notons $\hat{f}$ la fonction égale à f dans ω et à 0 dans $\complement\omega$. Alors pour $\varphi \in \mathcal{K}(\omega)$, $\hat{\varphi}$ appartient à $\mathcal{K}(T)$ et nous identifions $\mathcal{K}(\omega)$ à l'ensemble des fonctions de $\mathcal{K}(T)$ dont le support est contenu dans ω. La mesure ν induite par μ dans ω est par définition la restriction de μ à $\mathcal{K}(\omega)$, i.e. la mesure définie par : $\nu(\varphi) = \mu(\hat{\varphi})$.

3.2. Lemme. — *Soit μ une mesure à valeurs dans un espace normé, et soit ν la mesure induite par μ dans ω. Alors*

— *Pour $f \in \mathcal{J}^+(\omega)$ on a $\hat{f} \in \mathcal{J}^+(T)$ et $\nu^\bullet(f) = \mu^\bullet(\hat{f})$;*

— *Pour $f \geqslant 0$ à support compact dans ω, $\nu^\bullet(f) = \mu^\bullet(\hat{f})$;*

— *Si f est une fonction à support compact dans ω, appartenant à $\mathcal{L}^1(\nu)$, $\hat{f}$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\int f\,d\nu = \int \hat{f}\,d\mu$, et* *cette dernière conclusion s'étend aussitôt aux mesures à valeurs dans un espace localement convexe quelconque.*

La vérification de ce lemme ne présente aucune difficulté [1]. Comme $\sup\limits_{\substack{|\varphi|\leq 1 \\ \varphi\in\mathcal{K}(\omega)}} |\nu(\varphi)| = \mu^\bullet(\omega)$ la mesure ν est bornée si $\mu^\bullet(\omega)$ est fini, ce qui est le cas en particulier lorsque ω est relativement compact.

3.3. Théorème. — *Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace localement convexe* E. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Toute fonction borélienne bornée à support compact appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ (i.e. μ est prolongeable).

b) Pour tout compact K *l'intégrale faible $\int_K d\mu$ appartient à* $\hat{E}$.

c) μ transforme les parties bornées de $\mathcal{K}(T)$ en sous-ensembles relativement faiblement compacts de $\hat{E}$ [2].

d) La restriction de μ à tout ouvert relativement compact ω est une application faiblement compacte de $\mathcal{C}_0(\omega)$ dans $\hat{E}$.

Démonstration. — (D'après le lemme 2.21 il suffirait de faire la démonstration dans le cas où E est un espace de Banach). *a*) implique évidemment *b*) et *b*) implique :

b') Pour tout ouvert relativement compact ω, l'intégrale faible $\int_\omega d\mu$ appartient à $\hat{E}$.

En effet $\int_\omega d\mu = \int_{\overline{\omega}} d\mu - \int_{\delta\omega} d\mu$, où $\overline{\omega}$ et la frontière $\delta\omega$ de ω sont compactes.

b') implique *d*) car si ν est la mesure induite par μ dans un ouvert relativement compact Ω, on a pour tout sous-ouvert ω de Ω, $\int_\omega d\nu = \int_\omega d\mu \in \hat{E}$, ce qui prouve que ν est faiblement compacte d'après 2.2 ou 2.2 *bis* (page 97).

d) implique *a*) d'après 2.2 *bis* et le lemme 3.2 ci-dessus. Enfin (*c* et *d*) sont équivalents, toute partie bornée d'un

[1] Nous donnons cependant le détail dans l'appendice III.

[2] Une partie A de $\mathcal{K}(T)$ est bornée lorsque les fonctions de A sont uniformément bornées et ont leurs supports dans un compact fixe. Noter que dans cet énoncé on peut interpréter $\hat{E}$ comme complété, ou comme quasi-complété de E.

espace $\mathcal{C}_0(\omega)$ (ω ouvert relativement compact) étant contenue dans une partie bornée de $\mathcal{K}(T)$ et réciproquement.

Voici maintenant un critère analogue à 2.7 et 2.7 *bis* :

3.4. Théorème. — *Soit* μ *une mesure à valeurs dans un espace de Banach (resp. localement convexe)* E. *Soit* H *une partie de* E$'$ *telle que* $|x| = \sup_{x' \in H} |\langle x, x' \rangle|$ *pour tout* $x \in E$ (*resp. une partie déterminante* [1] *de* E) *et telle qu'en outre* H *possède la propriété d'Orlicz. Notons* $\tilde{\mu}$ *la mesure obtenue à partir de* μ *en munissant* E *de la topologie* $\sigma(E, H)$. *Pour que* μ *soit prolongeable il suffit déjà que pour tout compact* K *l'intégrale (ultra faible)* $\int_K d\tilde{\mu}$ *appartienne à* $\hat{E}$.

Démonstration. — Pour tout ouvert relativement compact ω on a $\int_\omega d\tilde{\mu} = \int_{\overline{\omega}} d\tilde{\mu} - \int_{\delta\omega} d\tilde{\mu} \in \hat{E}$, donc d'après 2.7 (2.7 *bis*) la mesure induite par μ dans les sous-ouverts relativement compacts de T est faiblement compacte, ce qui entraîne la conclusion d'après 3.3

3.5. Théorème. — *Soit* μ *une mesure* prolongeable *définie dans l'espace* T, *à valeurs dans un espace normé* (*resp. localement convexe*) E, *et soit* H *une partie de* E$'$ *telle que* $|x| = \sup_{x' \in H} |\langle x, x' \rangle|$ *pour tout* $x \in E$ (*resp. une partie déterminante* [1] *de* E$'$). *Soit f une application de* T *dans un espace topologique. Alors pour que f soit* μ*-mesurable il est suffisant (et évidemment nécessaire) que f soit* $\mu_{x'}$*-mesurable quel que soit* $x' \in H$. *En particulier toute application scalairement* μ*-mesurable est* μ*-mesurable* [2].

Démonstration. — Comme par hypothèse E possède une famille fondamentale de semi-normes continues p de la forme $p(x) = \sup_{x' \in H_1} |\langle x, x' \rangle|$ où H_1 est une partie équicontinue de

[1] i.e. Déterminant la topologie de E. Nous appelons ainsi, pour la commodité de l'énoncé, une partie $H \subset E'$ telle que la topologie de E soit identique à la topologie de la convergence uniforme dans les parties équicontinues de H. L'énoncé a bien un sens, car $\hat{E}$ s'identifie à une partie de $\tilde{E}(= H^*)$ complété de E pour la topologie $\sigma(E, H)$.

[2] Il en résulte en particulier que si μ est une mesure à variation localement bornée, $|\mu|$, il y a équivalence entre μ-mesurabilité et $|\mu|$-mesurabilité; $|\mu|$ est en effet la borne supérieure des mesures $|\mu_{x'}|$ avec $|x'| \leqslant 1$.

H, il suffit de démontrer ceci dans le cas d'un espace normé. Soit K alors un compact et ω un voisinage ouvert relativement compact de K. Soit ν la mesure induite par μ dans ω. Alors d'après le lemme 3.2 on a pour tout compact $K_1 \subset K$, $\nu^{\bullet}(K - K_1) = \mu^{\bullet}(K - K_1)$. Comme $\nu_{x'}$ est la mesure induite par $\mu_{x'}$ dans ω, la restriction de f à ω est $\nu_{x'}$-mesurable quel que soit $x' \in H$, donc ν étant faiblement compacte le résultat vient de 2.17.

3.6. Corollaire. — *Pour qu'une mesure de Radon* μ *soit prolongeable il faut et il suffit que les fonctions numériques boréliennes soient* μ*-mesurables.*

En effet lorsque μ est prolongeable toute fonction numérique borélienne est μ-mesurable d'après le théorème précédent, et réciproquement lorsque cela est le cas toute fonction borélienne bornée à support compact est μ-intégrable d'après 1.23.

3.7. Proposition. — *Soit* μ *une mesure prolongeable à valeurs dans un espace normé (resp. localement convexe)* E, *et soit* H *une partie de* E′ *vérifiant les hypothèses de* 3.5. *Pour qu'une partie* A *de* T *soit* μ*-négligeable il est suffisant (et évidemment nécessaire) que* A *soit* $\mu_{x'}$*-négligeable quel que soit* $x' \in H$.

En effet, il suffit de faire la démonstration dans le cas d'un espace normé. Comme A est μ-mesurable d'après 3.5 ce résultat est un cas particulier de 1.26.

Il en ressort en particulier que dans le cas des mesures prolongeables, tout ensemble scalairement μ-négligeable est μ-négligeable.

Considérons maintenant la question de l'existence de mesures prolongeables : toute mesure, à valeurs dans un espace normé, et à variation localement bornée est prolongeable (1.11) et plus généralement une mesure majorable à valeurs dans un espace localement convexe arbitraire est prolongeable [1]. En particulier toute mesure discrète $\mu = \sum_i x_i \delta_{(t_i)}$ est prolongeable. (Par contre une mesure atomique quelconque n'est pas en général prolongeable). Toute mesure à valeurs dans un

[1] Une mesure majorable est une mesure telle que toutes les mesures μ_p soient à variation localement bornées (cf. Bourbaki [2] chap. 6).

espace réflexif est prolongeable (les parties bornées d'un tel espace étant faiblement relativement compactes (3.3)), et cette propriété s'étend à une classe plus vaste d'espaces, comprenant les espaces faiblement séquentiellement complets, que nous caractériserons au paragraphe 5. Enfin les mesures bornées faiblement compactes sont prolongeables; de façon précise :

3.8. Proposition. — *Pour qu'une mesure bornée* μ *soit faiblement compacte il faut et il suffit que* μ *soit prolongeable et que la fonction* 1 *appartienne à* $\mathcal{L}^1(\mu)$.

En effet si μ est faiblement compacte les fonctions boréliennes bornées appartiennent à $\mathcal{L}^1(\mu)$ donc μ est prolongeable et la fonction 1 appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$. Réciproquement si μ est prolongeable et si 1 est μ-intégrable les fonctions boréliennes bornées sont μ-mesurables d'après 3.6 et par suite μ-intégrables d'après 1.22, donc μ est faiblement compacte (2.2).

Remarque. — L'identité de c_0 est une mesure bornée prolongeable (car discrète) mais non faiblement compacte.

Naturellement, lorsque T est compact, les notions de mesures prolongeables et de mesures bornées faiblement compactes coïncident.

3.9. *Exemple.* — Mesures à valeurs dans $l^p(\mathrm{I})$. Une telle mesure n'est qu'une famille $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de mesures scalaires telles que l'on ait

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} |\mu_i(\varphi)|^p < +\infty \qquad \text{pour tout} \qquad \varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{T}) \text{ (1)}.$$

ou $\sup_i |\mu_i(\varphi)| < +\infty$ lorsque $p = +\infty$.

En particulier pour $p = 1$ c'est une famille vaguement sommable de mesures scalaires. Lorsque $1 \leqslant p < +\infty$ une telle mesure est toujours prolongeable. Pour $1 < p < +\infty$ cela résulte de la réflexivité de l'espace et pour $p = 1$ c'est une conséquence de 2.9 (toute mesure bornée à valeurs dans l^1 est faiblement compacte) et de 3.3. Lorsque $p < +\infty$, une fonction f est μ-mesurable (resp. μ-négligeable) si et

(1) Qu'une telle famille définisse toujours une application linéaire *continue* de $\mathcal{K}(\mathrm{T})$ dans $l^p(\mathrm{I})$ résulte du théorème du graphe fermé.

seulement si f est μ_i-mesurable (resp. μ_i-négligeable) pour chaque $i \in I$. Cela résulte de 3.5 et 3.7 en prenant pour H l'ensemble des éléments de $l^{p'}$ de norme au plus égal à 1, et nulle dans le complémentaire d'un ensemble fini. Dans le cas où $p = +\infty$ ces affirmations sont inexactes. Soit par exemple $I = [0, 1] \cap Q$ et soit $\mu = (\mu_i)_{i \in I}$ la mesure définie sur $[0, 1]$, à valeurs dans $l^\infty(I)$, qui associe à toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}[0, 1]$ sa restriction à I. On a donc $\mu_i = \delta_{(i)}$ et si $A = [0, 1] \cap \complement Q$, A est μ_i-négligeable pour tout i alors que $\mu^\bullet(A) = 1$ (on vérifie facilement que $\mu^\bullet(f) = \sup\limits_{t \in [0,1]} f(t)$ pour tout $f \geqslant 0$). A fortiori la fonction χ_A ne peut être μ-mesurable (cf. 1.26).

Les propositions 3.5 et 3.7 ci-dessus caractérisent les fonctions μ-mesurables (resp. μ-négligeables) en termes de fonctions scalairement μ-mesurables (resp. scalairement μ-négligeables). De la même manière on va caractériser les fonctions μ-intégrables en termes de fonctions scalairement (faiblement) μ-intégrables. Nous aurons besoin d'un lemme :

3.10. LEMME. — *Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace normé* E, *et soit* H *une partie de* E′ *telle que* $|x| = \sup\limits_{x' \in H} |\langle x, x' \rangle|$ *pour tout* $x \in E$. *Nous supposons en outre que tout ensemble $\mu_{x'}$-négligeable quel que soit $x' \in H$ est μ-négligeable, ce qui est le cas en particulier lorsque μ est prolongeable* (3.7). *Alors pour qu'une fonction f soit μ-intégrable il faut et il suffit que, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tel que* $\sup\limits_{x' \in H} |\mu_{x'}|^\bullet(|f - g|) \leqslant \varepsilon$ [1].

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions réelles f telles que $N(f) = \sup\limits_{x' \in H} |\mu_{x'}|^\bullet(|f|)$ soit fini. N est une semi-norme sur $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}^1(\mu)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$, et il convient de montrer que $\mathcal{L}^1(\mu)$ est fermé dans $\mathcal{F}$. L'injection de $\mathcal{L}^1(\mu)$ dans $\mathcal{F}$ est isométrique (1.13) et $\mathcal{L}^1(\mu)$ est complet (1.8) donc si f est adhérent à $\mathcal{L}^1(\mu)$, sa distance à cet espace

[1] Ce lemme peut être interprété ainsi : Si l'on part de la « semi-variation » $f \to \sup\limits_{x' \in H} |\mu_{x'}|^\bullet(f) = N(f)$, on arrive par complétion de $\mathcal{K}$ à la même notion d'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$, i.e. $\mathcal{L}^1(\mu)$ est l'ensemble des fonctions f telles que, ε étant donné, il existe $\varphi \in \mathcal{K}$ tel que $N(|f - \varphi|) < \varepsilon$.

est nulle, i.e. il existe $f' \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tel que $N(f - f') = 0$, c'est-à-dire tel que $f(t) = f'(t)$ $\mu_{x'}$-presque partout quel que soit $x' \in H$. Il résulte alors de l'hypothèse que $f'(t) = f(t)$ μ-presque partout donc que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

3.11. Théorème. — *Soit μ une mesure* prolongeable *à valeurs dans un espace de Banach* E. *Pour qu'une fonction f soit μ-intégrable il faut et il suffit que f soit faiblement μ-intégrable et que pour tout ouvert ω l'intégrable faible $\int_\omega f\, d\mu$ appartienne à* E.

Démonstration. — La condition est nécessaire car si f est μ-intégrable et g borélienne bornée gf est μ-intégrable (1.22 et 3.6) donc l'intégrale $\int gf\, d\mu$, qui est aussi l'intégrale faible, appartient à E. La condition est suffisante : notons pour plus de clarté, $\tilde{\mu}$ la mesure obtenue à partir de μ en munissant E de la topologie $\sigma(E, E')$. La fonction f est par hypothèse $\tilde{\mu}$-intégrable (ce qui signifie simplement que f est $\mu_{x'}$-intégrable quel que soit $x' \in E'$ (1.28)) et pour tout ouvert ω on a

$$\int_\omega f\, d\tilde{\mu} \in E.$$

Montrons que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0(T)$ on a $\int \varphi f\, d\tilde{\mu} \in E$.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques d'ouverts, muni de la norme uniforme. Pour tout $x' \in E'$ on a

$$\sup_{\substack{|g| \leqslant 1 \\ g \in \mathcal{E}}} \left|\left\langle \int gf\, d\tilde{\mu}, x' \right\rangle\right| \leqslant \int |f|\, d|\mu_{x'}| < +\infty$$

donc, tout ensemble faiblement borné étant borné en norme, on a

$$\sup_{\substack{|g| \leqslant 1 \\ g \in \mathcal{E}}} \left| \int gf\, d\tilde{\mu} \right| < +\infty$$

ce qui signifie que l'application $g \to \int gf\, d\tilde{\mu}$ de $\mathcal{E}$ dans E est continue. Elle peut par conséquent être prolongée par continuité à $\overline{\mathcal{E}}$, l'adhérence de $\mathcal{E}$ dans l'espace des fonctions bornées sur T, et cette adhérence contient évidemment $\mathcal{C}_0$.

Si ν est ce prolongement on a, d'après le principe du prolongement des identités,

$$\langle \nu(\varphi), x' \rangle = \int \varphi f \, d\mu_{x'}$$

donc $\nu(\varphi) = \int \varphi f \, d\tilde{\mu}$, et $\int \varphi f \, d\tilde{\mu}$ appartient bien à E, et de plus l'application

$$\nu : \varphi \to \int \varphi f \, d\tilde{\mu}$$

est continue sur $\mathcal{C}_0$, i.e. ν est une mesure bornée. Par hypothèse l'intégrale faible $\int_\omega d\tilde{\mu} = \int_\omega f \, d\tilde{\mu}$ appartient à E, donc d'après le théorème 2.2 ν est faiblement compacte. Pour tout $x' \in E'$ on a $\nu_{x'} = f\mu_{x'}$, donc f étant $\mu_{x'}$-mesurable est aussi $\nu_{x'}$-mesurable quel que soit $x' \in E'$, et par suite ν-mesurable. Plus précisément à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un compact K, tel que la restriction de f à K soit continue, et tel que $\nu^\bullet(T - K) \leqslant \varepsilon$ (2.19). Pour un ouvert ω quelconque on a

$$\nu^\bullet(\omega) = \sup_{|x'| \leqslant 1} |\nu_{x'}|(\omega) = \sup_{|x'| \leqslant 1} \int_\omega |f| \, d|\mu_{x'}| \quad \text{(cf. 1.13).}$$

Il s'ensuit donc que

$$\sup_{|x'| \leqslant 1} |\mu_{x'}|^\bullet(|f - \chi_K f|) \leqslant \varepsilon.$$

Or la fonction $\chi_K f$ est borélienne bornée à support compact donc, μ étant prolongeable, $\chi_K f$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$, de sorte qu'il résulte du lemme 3.10 ci-dessus que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

3.12. *Exemple. — Mesures discrètes* : Soient I un ensemble, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un espace de Banach E. On peut considérer la mesure « de masse x_i au point i » définie par $\mu(\varphi) = \sum_{i \in I} \varphi(i) x_i$ $\varphi \in \mathcal{K}(I)$.

Une telle mesure est prolongeable (parce que l'ensemble des fonctions boréliennes bornées à support compact coïncide ici avec $\mathcal{K}(I)$) donc d'après le théorème 3.11 ci-dessus $\mathcal{L}^1(\mu)$ est l'ensemble des fonctions f telles que pour toute partie $J \subset I$ la famille $\{f(i)x_i\}_{i \in J}$ soit faiblement sommable dans E. Il résulte du théorème d'Orlicz que la famille $\{f(i)x_i\}_{i \in I}$ est alors sommable dans E ce qui inversement entraîne que les sous-familles sont sommables. $\mathcal{L}^1(\mu)$ est donc l'ensemble des fonctions f telles que $\{f(i)x_i\}_{i\in I}$ soit sommable dans E et alors $\int_\omega f\,d\mu = \sum_{i\in\omega} f(i)x_i$.

On peut voir ainsi que dans le théorème 3.11 il ne suffit pas de supposer simplement que $\int f\,d\mu$ appartienne à E, car dans certains espaces E on peut trouver une suite faiblement sommable dont les sous-suites ne sont pas toutes faiblement sommables. Par exemple soit $E = c_0$, $e_n = (\delta_{n,p})_p$ le $n^{\text{ième}}$ élément de la base canonique. Alors dans $l^\infty = c_0''$, on a $1 = \sum_n e_n$ pour la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$, donc si l'on pose $x_{2p} = e_p$, $x_{2p+1} = -e_p$, on aura $\sum_n x_n = 0 \in E$, mais $\sum_{n \text{ pair}} x_n \notin E$. Si μ est la mesure de masse x_n au point n la fonction 1 est scalairement μ-intégrable, son intégrale faible appartient à E mais cette fonction n'appartient pas à $\mathcal{L}^1(\mu)$. Si l'on considère la mesure précédente comme une mesure sur $\mathbf{R}$ (en vertu de l'inclusion $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$) l'exemple précédent montre que dans le cas d'une mesure sur $\mathbf{R}$ il ne suffit pas, dans l'énoncé du théorème 3.11, de supposer que $\int_\omega f\,d\tilde{\mu}$ appartient à E pour tout intervalle ouvert ω.

L'extension du théorème 3.11 au cas des espaces localement convexes généraux est immédiate. En effet les applications π_p de $\hat{E}$ dans E_p sont faiblement continues, donc si f est faiblement intégrable et si $\int_\omega f\,d\tilde{\mu}$ appartient à $\hat{E}$, $\pi_p \int_\omega f\,d\tilde{\mu} = \int_\omega f\,d\tilde{\mu}_p$ appartient à E_p, de sorte que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu_p)$ quel que soit p, ce qui signifie que f est μ-intégrable.

Pour certaines applications le théorème 3.11 présente l'inconvénient de faire intervenir la totalité des formes linéaires continues sur E. Voici un théorème qui remédie à cet inconvénient :

3.13. Théorème. — *Soit* μ *une mesure* prolongeable *à valeurs dans un espace de Banach* E, *et soit* H *une partie de* E′, *telle que* $|x| = \sup_{x'\in H} |\langle x, x'\rangle|$ *pour tout* $x \in E$, *et possédant en outre la propriété d'Orlicz. Notons* $\tilde{\mu}$ *la mesure obtenue à partir de* μ *en munissant* E *de la topologie* $\sigma(E, H)$. *Alors* *pour qu'une fonction* f *soit* μ*-intégrable il est suffisant (et évidemment nécessaire) que* f *soit* $\tilde{\mu}$*-intégrable (i.e.* $\mu_{x'}$*-intégrable quel que soit* $x' \in$ H) *et que pour tout ouvert* ω, *l'intégrale* $\int_\omega f\, d\tilde{\mu}$ *appartienne à* E.

Compte tenu du théorème 2.7 on pourra répéter sans modification importante la démonstration du théorème 3.11, à ceci près : un ensemble borné pour la topologie $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{H})$ n'est pas en général borné au sens de la norme de E, de sorte que la première partie de la démonstration montrant que $\int \varphi f\, d\tilde{\mu}$ appartient à E n'est plus valable. Cependant si F est un sous-espace vectoriel fermé (au sens de la norme) de E', contenant H, toute partie bornée pour la topologie $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est bornée. Nous démontrons donc d'abord un lemme permettant d'appliquer ceci avec pour F l'espace vectoriel fermé engendré par H.

3.14. Lemme. — Soit $(\mu_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *une suite de mesures scalaires telle que pour tout* $\varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{T})$ *on ait* $\sum_n |\mu_n(\varphi)| < +\infty$. *Posons* $\mu(\varphi) = \{\mu_n(\varphi)\}_{n\in\mathrm{N}}$; *alors* μ *est une mesure vectorielle à valeurs dans* $l^1(\mathrm{N})$. *Soit* f *une fonction* μ_n*-intégrable pour tout* $n \in \mathrm{N}$, *et telle que pour tout ouvert* ω *on ait* $\sum_n \left|\int_\omega f\, d\mu_n\right| < +\infty$. *Alors* f *appartient à* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *et en particulier si* $s(\varphi) = \sum_n \mu_n(\varphi)$, f *est s-intégrable et* $\int_\omega f\, ds = \sum_n \int_\omega f\, d\mu_n$.

Ce lemme n'est en fait qu'un cas particulier du théorème à démontrer car la mesure μ est prolongeable (cf. 3.9) et la suite $\left\{\int_\omega f\, d\mu_n\right\}_{n\in\mathrm{N}}$ n'est autre que l'intégrale de $\chi_\omega f$ par rapport à la topologie de la convergence simple, $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{H})$, où H est l'ensemble des éléments de l^∞, bornés en module par 1, et nulle hors d'un ensemble fini. Cet ensemble $\mathrm{H} \subset l^{1'}$ satisfait bien les hypothèses de l'énoncé, et $\tilde{\mu}$ étant la mesure déduite de μ à valeurs dans R^N (ou à valeurs dans l^1 muni de la topologie de la convergence simple, induite par R^N) on a

$$\int_\omega f\, d\tilde{\mu} = \left\{\int_\omega f\, d\mu_n\right\}_{n\in\mathrm{N}}$$

Montrons que $\int \varphi f\, d\tilde{\mu}$ appartient à l^1 pour toute fonction

$\varphi \in \mathcal{C}_0$. Soit $s_n(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \int \varphi f \, d\mu_i$. L'hypothèse implique que $s_n(\omega)$ converge pour tout ouvert ω, donc d'après un théorème de Dieudonné (cf. Appendice I, T4) les normes $\|s_n\|$ des mesures s_n sont uniformément bornées, ce qui implique, φ étant limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ouverts, que $s_n(\varphi)$ converge aussi. Par conséquent pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} \int \varphi f \, d\mu_n$ est convergente; mais cela est vrai quel que soit l'ordre dans lequel on range les mesures μ_n, donc on a, en fait, $\sum_n \left|\int f\varphi \, d\mu_n\right| < +\infty$, de sorte que $\nu(\varphi) = \int \varphi f \, d\tilde{\mu}$ appartient à l^1. L'application ν de $\mathcal{C}_0$ dans l^1 est une mesure bornée (théorème du graphe fermé) faiblement compacte d'après 2.7 (ou ici plus simplement parce que toute mesure bornée à valeurs dans l^1 est faiblement compacte (2.9)), et nous pouvons achever la démonstration du lemme comme dans la démonstration du théorème 3.11 : la fonction f est μ_n-mesurable quel que soit n donc ν_n-mesurable quel que soit n, par suite $\nu_{x'}$-mesurable pour tout $x' \in \mathrm{H}$, et enfin ν-mesurable d'après 2.17. Plus précisément, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe K compact tel que $f|_{\mathrm{K}}$ soit continue et tel que

$$\nu^{\bullet}(\mathrm{T} - \mathrm{K}) = \sup_{x' \in \mathrm{H}} |\nu_{x'}|(\mathrm{T} - \mathrm{K}) = \sup_{x' \in \mathrm{H}} |\mu_{x'}|(|f - \chi_{\mathrm{K}} f|) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve, μ étant prolongeable, que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$. (3.10). La dernière partie du lemme n'est qu'un cas particulier de 1.12, compte tenu du fait que $s = \mu_{x'}$ avec $x' = (1, 1, \ldots)$.

Démontrons maintenant le théorème 3.13. Soit $[\mathrm{H}]$ l'espace vectoriel engendré par H et soit $\mathrm{F} = \overline{[\mathrm{H}]}$ (adhérence dans E' avec la topologie forte). Par hypothèse

$$\left\langle \int_\omega f \, d\tilde{\mu}, x' \right\rangle = \int_\omega f \, d\mu_{x'}$$

pour tout $x' \in \mathrm{H}$, donc pour tout $x' \in [\mathrm{H}]$. Nous allons montrer que cette relation est encore exacte pour $x' \in \mathrm{F}$, de sorte que $\int_\omega f \, d\tilde{\mu}$ est aussi l'intégrale de $\chi_\omega f$ relativement à la topologie $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Soit $x' \in \mathrm{F}$ et $(x'_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une suite d'éléments de [H], avec $\sum_n |x'_n| < +\infty$, telle que $x' = \sum_n x'_n$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$ on a

$$\sum_n |\mu_{x'_n}(\varphi)| \leqslant |\mu(\varphi)| \sum_n |x'_n| < +\infty,$$

et

$$\sum_n \left|\int_\omega f\, d\mu_{x'_n}\right| \leqslant \left|\int_\omega f\, d\tilde{\mu}\right| \sum_n |x'_n| < +\infty.$$

Comme $\mu_{x'}(\varphi) = \sum_n \mu_{x'_n}(\varphi)$ il résulte du lemme que f est $\mu_{x'}$-intégrable et que

$$\int_\omega f\, d\mu_{x'} = \sum_n \int_\omega f\, d\mu_{x'_n},$$

i.e. que

$$\int_\omega f\, d\mu_{x'} = \left\langle \int_\omega f\, d\tilde{\mu},\, x' \right\rangle \quad \text{comme annoncé.}$$

Alors si $\mathcal{E}$ est l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques d'ouverts on a

$$\sup_{\substack{|g| \leqslant 1 \\ g \in \mathcal{E}}} \left|\left\langle \int g f\, d\tilde{\mu},\, x' \right\rangle\right| \leqslant \int |f|\, d|\mu_{x'}| < +\infty \quad \text{pour tout} \quad x' \in \mathrm{F},$$

et on en déduit que $\int \varphi f\, d\tilde{\mu}$ appartient à E comme dans la démonstration du théorème 3.11, en utilisant la propriété connue suivante :

Soit F un sous-espace vectoriel *fermé* de E' tel que $|x| = \sup_{\substack{x' \in \mathrm{F} \\ |x'| \leqslant 1}} |\langle x, x' \rangle|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Alors si A est une partie de E tel que $\sup_{x \in \mathrm{A}} |\langle x, x' \rangle| < +\infty$ quel que soit $x' \in \mathrm{F}$, A est bornée [1].

Alors si $\nu(\varphi) = \int \varphi f\, d\tilde{\mu}$, ν est une mesure bornée, et comme précisément $\int_\omega d\tilde{\mu} = \int_\omega f\, d\tilde{\mu}$ appartient à E, il résulte du théorème 2.7 que ν est faiblement compacte. On achève

[1] En effet quand on considère E comme un sous-espace vectoriel de F', A est bornée dans F' d'après le principe de la borne uniforme (Banach-Steinhaus) et par hypothèse l'injection de E dans F' est une isométrie. A est donc aussi borné dans E.

alors la démonstration comme pour le théorème 3.11 et le lemme 3.14.

3.15. Corollaire. — *Sous les hypothèses du théorème* 3.13, *la fonction* f *est* $\mu_{x'}$-*intégrable quel que soit* $x' \in E'$, *et* $\int f\, d\mu_{x'} = \langle \int f\, d\tilde{\mu}, x' \rangle$.

3.16. *Exemple* (continuation de l'exemple 3.9) : Soit $\mu = (\mu_i)_{i\in I}$ une mesure à valeurs dans $l^p(I)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$. Alors une fonction f est μ-intégrable si et seulement si f est μ_i-intégrable quel que soit i et si pour tout ouvert ω on a $\sum_{i\in I} \left|\int_\omega f\, d\mu_i\right|^p < +\infty$. Lorsque $p = 1$ et que $s(\varphi) = \sum_{i\in I} \mu_i(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{K}$, toute fonction μ-intégrable f est s-intégrable et $\int f\, ds = \sum_i \int f\, d\mu_i$.

En effet la topologie de la convergence simple, donc H (notation 3.9) possède la propriété d'Orlicz (cf. Appendice II).

3.17. *Exemple.* — Mesure à valeurs dans un espace de Hilbert. (Cas particulier de 3.16) : Soit μ une mesure à valeurs dans un espace de Hilbert H (sur $\mathbf{R}$). Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de H. Soit $\mu_i(\varphi) = (\mu(\varphi), e_i)$. Alors une fonction f est μ-intégrable si et seulement si f est μ_i-intégrable pour tout $i \in I$, et si $\sum_{i\in I} \left|\int_\omega f\, d\mu_i\right|^2 < +\infty$, quel que soit l'ouvert ω.

Les exemples précédents sont valables aussi bien pour des familles de mesures prolongeables à valeurs dans des espaces de Banach. En particulier, soit $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$ une somme hilbertienne d'espaces de Hilbert. Soit μ une mesure à valeurs dans H et soit $\mu_i = pr_{H_i} \circ \mu$. Alors l'assertion ci-dessus est encore valable (ce qu'on peut d'ailleurs déduire du cas où les μ_i sont scalaires en prenant des bases dans les espaces H_i. En particulier le résultat s'étend aussitôt au cas des espaces sur $\mathbf{C}$.

3.18. *Exemple.* — Mesures à valeurs dans un espace $\mathcal{C}(S)$ (S compact). Soit $\mu_s(\varphi) = \mu(\varphi)(s)$. Alors la mesure μ est prolongeable si et seulement si pour tout compact K la fonction $s \to \mu_s(K)$ est continue (3.4). Dans ce cas une fonction f est μ-intégrable si et seulement si f est μ_s-intégrable quel que soit $s \in S$, et si pour tout ouvert ω la fonction $s \to \int_\omega f\, d\mu_s$ est continue.

3.19. *Exemple.* — Mesures à valeurs dans l'espace c des suites convergentes. Une telle mesure n'est autre qu'une suite $\mu = (\mu_n)_{n \in \mathrm{N}}$ vaguement convergente de mesures scalaires. La mesure μ est prolongeable si et seulement si pour tout compact K la suite $\mu_n(\mathrm{K})$ est convergente (3.4). Dans ce cas une fonction f est μ-intégrable si et seulement si f est μ_n-intégrable quel que soit n et si pour tout ouvert ω la suite $\int_\omega f\, d\mu_n$ est convergente (3.13). La fonction f est alors μ_∞-intégrable (μ_∞ limite vague des mesures μ_n) et on a $\int f\, d\mu_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} \int f\, d\mu_n$.

En effet la topologie de la convergence simple dans S (resp. **N**) possède la propriété d'Orlicz (cf. Appendice II). La dernière assertion vient de 3.15.

Étendons maintenant le théorème 3.13 au cas des espaces localement convexes séparés généraux.

3.20. Théorème. — *Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace localement convexe* E. *Soit* H *une partie déterminante* [1] *de* E′ *et telle qu'en outre* H *possède la propriété d'Orlicz. Notons $\tilde{\mu}$ la mesure obtenue à partir de μ en munissant* E *de la topologie* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{H})$. *Alors pour qu'une fonction f soit μ-intégrable il est suffisant (et évidemment nécessaire) que f soit $\tilde{\mu}$-intégrable (i.e. $\mu_{x'}$-intégrable quel que soit $x' \in \mathrm{H}$) et que pour tout ouvert ω on ait $\int_\omega f\, d\tilde{\mu} \in \hat{\mathrm{E}}$ ($\hat{\mathrm{E}}$ désignant le complété de* E).

Démonstration. — On se ramène bien entendu au cas des espaces de Banach, mais pas trop « brutalement » (comme dans le cas où $\mathrm{H} = \mathrm{E}'$) car ici il n'y a pas de raison que l'intersection de H avec un espace E'_p possède encore la propriété d'Orlicz. Précisons quelques notations. Nous ne considérons que des semi-normes sur E qui sont de la forme $p(x) = \sup\limits_{x' \in \mathrm{A}} |\langle x, x' \rangle|$ où A est une partie équicontinue de H. Par hypothèse ces semi-normes forment un système fondamental de semi-normes continues de E, de sorte que

[1]) Voir note ([1]), p. 105.

$\hat{E} = \varprojlim E_p$. Notons H_p l'intersection de H avec E'_p (identifié à une partie de E'). Notons $\tilde{E}_p$ (resp. $\hat{E}$) le complété de E_p (resp. E) pour la topologie $\sigma(E_p, H_p)$ (resp. $\sigma(E, H)$) appelé désormais ultrafaible. Alors on a $\tilde{E} = \varprojlim \tilde{E}_p$ les applications canoniques π_p n'étant autre que les prolongements continus (pour les topologies « ultra-faibles » considérées) des applications canoniques π_p, qui peuvent d'ailleurs ici être identifiées à des bitransposées (une application linéaire sur H n'est qu'un système cohérent d'applications linéaires sur les H_p; voir 2.21). Il est clair alors que si $\tilde{\mu}_p$ désigne la mesure obtenue à partir de μ_p en munissant E_p de la topologie $\sigma(E_p, H_p)$ on a $\pi_p \int f\, d\tilde{\mu} = \int f\, d\tilde{\mu}_p$ pour toute fonction μ-intégrable f, et que $\int f\, d\tilde{\mu}$ appartient à $\hat{E}$ si et seulement si $\int_\omega f\, d\tilde{\mu}_p$ appartient à E_p quelle que soit la semi-norme considérée p. Ceci dit on se ramène aux espaces de Banach comme suit : comme on a $\int_\omega f\, d\tilde{\mu} \in \hat{E}$, il en résulte que pour toute semi-norme p considérée, on a $\int_\omega f\, d\tilde{\mu}_p \in E_p$. On en déduit alors, à l'aide du lemme 3.14, que $\int \varphi f\, d\tilde{\mu}_p$ appartient à E_p pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$, (ce qui ne nécessite pas que H_p possède la propriété d'Orlicz). Il en résulte que l'on a $\int \varphi f\, d\tilde{\mu} \in \hat{E}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$, et, H possédant la propriété d'Orlicz, que la mesure bornée $\nu : \varphi \to \int \varphi f\, d\tilde{\mu}$ est faiblement compacte (2.7 *bis*) donc que les mesures ν_p sont faiblement compactes. A partir de ce moment on est vraiment ramené au cas des espaces de Banach, et l'on montre comme dans ce cas que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu_p)$. Ceci étant fait, pour toute semi-norme p considérée, f est bien μ-intégrable.

3.21. Exemple. — Mesures à valeurs dans $l^\infty(I)$. Soit $\mu = (\mu_i)_{i \in I}$ une mesure à valeurs dans $l^\infty(I)$ (cf. 3.9). Supposons $l^\infty(I)$ muni de la topologie $\tau(l^\infty, l^1)$. Alors μ est prolongeable, une fonction f est μ-mesurable (μ-négligeable) si et seulement si f est μ_i-mesurable (resp. μ_i-négligeable) quel que soit $i \in I$, et f est μ-intégrable si et seulement si de plus $\sup_{i \in I} \int |f|\, d|\mu_i| < +\infty$. Cela résulte de 3.4, 5, 7 et 20 en prenant $H = \mathcal{K}(I)$ (voir Compléments § 3 pour les détails).

Compléments.

A. Voici quelques critères de prolongeabilité :

a) Une mesure μ est prolongeable si et seulement si pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{N}}$ de fonctions continues nulles dans le complémentaire d'un compact fixe, uniformément bornées, et tendant vers zéro simplement, la suite $\mu(\varphi_n)$ tend vers zéro dans l'espace E.

b) Avec les hypothèses et notations de 3.4 : μ est déjà prolongeable si $\int_{\mathrm{K}} d\tilde{\mu} \in \mathrm{E}$ pour tout compact G_δ, K.

c) Si μ est une mesure de Radon à valeurs dans un espace normé : μ est prolongeable si et seulement si pour tout compact K, $\lim_{\omega \downarrow \mathrm{K}} \mu^\bullet(\omega - \mathrm{K}) = 0$ (ω ouvert) (et il suffit que ce soit vérifié pour les compacts G_δ).

Démonstration sommaire. — *a*) résulte de la proposition démontrée dans les compléments du paragraphe 4. *b*) résulte de *a*) par la méthode employée dans les compléments du paragraphe 2. La condition de *c*) implique que χ_{K} appartient à $\mathscr{L}^1(\mu)$ (en intercalant une fonction continue à support compact entre χ_{K} et χ_ω). Réciproquement si μ est prolongeable on obtient la relation annoncée plus généralement lorsque K est un borélien relativement compact en se ramenant à la proposition 2.5 en considérant la mesure induite par μ dans un ouvert relativement compact contenant K.

B. Proposition. — *Soit* μ *une mesure à valeurs dans un espace normé* E. *Soit* H *une partie de* E′ *telle que* $|x| = \sup_{x'\in \mathrm{H}} |\langle x, x'\rangle|$ *quel que soit* $x \in \mathrm{E}$. *Alors si* μ *est prolongeable on a* $\mu^\bullet(f) = \sup_{x'\in\mathrm{H}} |\mu_{x'}|(f)$ *pour toute fonction* $f \geqslant 0$ μ*-mesurable.*

Démonstration. — Lorsque f est μ-mesurable et K compact $\chi_{\mathrm{K}}f$ est aussi μ-mesurable et $\mu^\bullet(f) = \sup_{\mathrm{K}} \mu^\bullet(\chi_{\mathrm{K}}f)$ (1.1). On peut donc supposer que f est nulle dans le complémentaire d'un compact, ce que nous ferons. Rappelons que de toute façon on a l'inégalité $\mu^\bullet(f) \geqslant \sup_{x'\in\mathrm{H}} |\mu_{x'}|(f)$ (1.11) de sorte qu'il suffit de montrer l'inégalité dans l'autre sens. Soit

$$\mathrm{A} = \{t : f(t) = +\infty\}$$

et supposons d'abord que A ne soit pas μ-négligeable, alors $\mu^{\bullet}(f) = +\infty$ (1.3) et il existe $x' \in H$ tel que A ne soit pas $\mu_{x'}$-négligeable (3.7) et alors $|\mu_{x'}|(f) = +\infty$, de sorte que l'égalité est exacte. Si au contraire A est μ-négligeable on peut sans inconvénient remplacer f par une fonction μ-mesurable partout finie, ce que nous ferons.

Lemme. — *Soit μ une mesure prolongeable à valeurs dans un espace normé, et soit f une fonction μ-mesurable positive, partout finie et à support compact. Alors* $\inf\limits_{\substack{g \geqslant f \\ g \in \mathcal{J}^+}} \mu^{\bullet}(g - f) = 0$.

En effet, supposons d'abord f bornée. Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et pour toute mesure $\alpha \geqslant 0$ avec $\alpha^{\bullet} \leqslant \mu^{\bullet}$ on a $\lim\limits_{\substack{g \geqslant f \\ g \in \mathcal{J}^+}} \alpha(g - f) = 0$, et le résultat découle de 4.2 et du lemme de Dini (cf. démonstration du théorème 4.1). Si f n'est plus bornée on peut écrire $f = \sum\limits_n f_n$ où f_n est positive, bornée et μ-mesurable, et trouver $g_n \in \mathcal{J}^+$ tel que $g_n \geqslant f_n$ et que $\mu^{\bullet}(g_n - f_n) \leqslant \varepsilon/2^n$. Alors si

$$g = \sum_n g_n,\ g - f = \sum_n g_n - f_n$$

et

$$\mu^{\bullet}(g - f) \leqslant \sum_n \mu^{\bullet}(g_n - f_n) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui démontre le lemme.

Soit alors $\varepsilon > 0$ donnée et choisissons $g \in \mathcal{J}^+$ avec $g \geqslant f$ et $\sup\limits_{x' \in H} |\mu_{x'}|(g - f) \leqslant \mu^{\bullet}(g - f) \leqslant \varepsilon$. Alors on a

$$\mu^{\bullet}(f) \leqslant \mu^{\bullet}(g) = \sup_{x' \in H} |\mu_{x'}|(g) \leqslant \sup_{x' \in H} |\mu_{x'}|(f) + \varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition.

On en déduit une réponse partielle à une question posée à la fin du paragraphe 1 :

Proposition. — *Soit μ une mesure prolongeable à valeurs dans un espace normé, et soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de fonctions μ-mesurables positives de borne supérieure f. Alors* $\mu^{\bullet}(f) = \sup\limits_n \mu^{\bullet}(f_n)$.

Notons encore que dans le cas d'une mesure de Radon arbitraire à valeurs dans un espace normé on a la relation $\mu^\bullet(f) = \sup_{x' \in H} |\mu_{x'}|(f)$ pour une fonction positive localement intégrable (i.e. une fonction telle que $\varphi f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{K}$). En effet on a évidemment $\mu^\bullet(f) = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant 1} \mu^\bullet(\varphi f)$ et pour les fonctions intégrables la relation est déjà démontrée (1.13). Comme toute fonction μ-mesurable bornée est localement μ-intégrable (1.23), on aura la relation $\mu^\bullet(f) = \sup_{x' \in H} |\mu_{x'}|(f)$ pour toute fonction μ-mesurable positive si et seulement si pour une telle fonction $\mu^\bullet(f) = \sup_n \mu^\bullet(f_n)$ où $f_n = \inf(f, n)$, mais j'ignore si cela est le cas.

C. *Un contre-exemple* : Nous exhibons maintenant une mesure $\mu = (\mu_i)_{i \in I}$ à valeurs dans un espace $l^1(I)$ et un ensemble μ-mesurable A tel que $\mu_i^*(A) = 0$ pour tout $i \in I$ et tel que $\mu^*(A) > 0$ (cf. Compléments § 1). La construction est basée sur l'existence d'ensembles négligeables non strictement négligeables, et n'importe quel exemple de cela servirait aussi bien : soit T la somme topologique d'une infinité non dénombrable d'exemplaires de l'intervalle $[0, 1]$,

$$T = \sum_{i \in I} [0, 1] \times \{i\} = [0, 1] \times I,$$

I étant par exemple $\mathbf{R}$ muni de la topologie discrète. Soit ν la mesure sur T qui coïncide dans chaque intervalle avec la mesure de Lebesgue, et soit μ_i la mesure sur T nulle dans tous les intervalles sauf dans le $i^{\text{ème}}$ où elle coïncide avec la mesure de Lebesgue. La famille $\{\mu_i\}_{i \in I}$ est sommable et définit la mesure vectorielle μ que nous avons en vue.

Pour $\varphi \in \mathcal{K}_+$ on a $\mu^\bullet(\varphi) = \sup_{|\psi| \leqslant \varphi} \sum_{i \in I} |\mu_i(\psi)|$. Or, pour tout i, $\sup_{|\psi| \leqslant \varphi} |\mu_i(\psi)| = \mu_i(\varphi)$, donc $\mu^\bullet(\varphi) = \sum_{i \in I} \mu_i(\varphi) = \nu(\varphi)$. Il en résulte que $\mu^\bullet = \nu^\bullet$ et que $\mu^* = \nu^*$. Alors un ensemble $A \subset T$ qui a exactement un point dans chaque intervalle composant T possède la propriété voulue.

Cet exemple montre pourquoi nous avons pris la fonction $\mu^\bullet$ plutôt que μ^* pour base de l'intégration par rapport à une mesure vectorielle. Il serait évidemment inadmissible que dans le cas d'une mesure aussi « bonne » qu'une mesure à valeurs dans l^1, un ensemble négligeable coordonnée par coordonnée ne soit pas négligeable. (Dans l'exemple, la mesure était non seulement prolongeable mais même à variation localement bornée).

D. *Mesures à valeurs dans* $l^\infty(\mathrm{I})$. Soit μ une application linéaire de $\mathcal{K}(\mathrm{T})$ dans l^∞. Il est équivalent de dire que μ est continue pour la norme sur l^∞, ou pour la topologie de la convergence simple (induite par R^I). On peut donc parler d'une mesure de Radon à valeurs dans $l^\infty(\mathrm{I})$ sans préciser la topologie (toujours supposée comprise entre les deux topologies mentionnées ci-dessus). Une mesure de Radon à valeurs dans $l^\infty(\mathrm{I})$ est donc une famille $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de mesures scalaires telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$ $\sup\limits_{i\in\mathrm{I}} |\mu_i(\varphi)| < +\infty$, et μ est une mesure bornée si les μ_i sont bornées et si $\sup\limits_{i\in\mathrm{I}} \|\mu_i\| < +\infty$.

Supposons d'abord $l^\infty(\mathrm{I})$ muni de la topologie définie par la norme. Pour tout ouvert, ω et tout compact $\mathrm{K} \subset \omega$ on a $\mu^\bullet(\omega - \mathrm{K}) = \sup\limits_{i\in\mathrm{I}} |\mu_i|(\omega - \mathrm{K})$ (1.13). Il résulte alors de 2.5 et du critère de Grothendieck (C4 de l'Appendice I), que la mesure vectorielle μ est bornée faiblement compacte si et seulement si l'ensemble des mesures μ_i est faiblement relativement compact dans l'espace M des mesures bornées, et on a un critère analogue pour voir si μ est prolongeable, lorsque μ n'est pas bornée. Dans le cas où μ est prolongeable une fonction f est μ-mesurable si et seulement si f est μ_i-mesurable quel que soit i (3.5) et on a alors

$$\mu^\bullet(|f|) = \sup_{i\in\mathrm{I}} \int |f| \; d|\mu_i|$$

ainsi qu'on l'a démontré dans ces compléments (B). Mais pour que f soit μ-intégrable il ne suffit pas, en général, que cette quantité soit finie, même lorsque μ est bornée et compacte (cf. remarque p. 67). Lorsque μ est prolongeable, tout ensemble μ_i-négligeable quel que soit $i \in \mathrm{I}$, est μ-négligeable, mais cela n'est plus exact dans le cas général (cf. 3.9).

Munissons maintenant $l^\infty(\mathrm{I})$ d'une topologie compatible avec la dualité entre l^∞ et l^1, et prenons précisément la topologie de Mackey $\tau(l^\infty, l^1)$, la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle l^∞ admet l^1 comme dual. Cette topologie est celle de la convergence uniforme dans les parties

$Q \subset l^1$, qui sont convexes équilibrées et compactes pour la topologie $\sigma(l^1, l^\infty)$ (et en fait ici aussi, compactes pour la topologie de la norme de l^1). Lorsque Q est compact, l'ensemble Q_1 des $y \in l^1$ tels qu'il existe $z \in Q$ avec $|y_i| \leqslant |z_i|$ pour tout i est encore compact, et on peut par conséquent se limiter aux ensembles compacts Q tels que $Q = Q_1$, que nous appellerons équilibrés pour l'ordre. La topologie de la convergence simple, identique à $\sigma(l^\infty, k)$, k désignant l'espace des familles à support fini, possède la propriété d'Orlicz relativement à la topologie $\tau(l^\infty, l^1)$ (cf. Appendice II) et nous allons montrer que l'espace k est déterminant pour cette topologie, i.e. que $\tau(l^\infty, l^1)$ est la topologie de la convergence uniforme dans les parties de la forme $Q \cap k$, où Q parcourt l'ensemble des parties convexes compactes de l^1, équilibrées pour l'ordre. Il suffit à cet effet de montrer que si Q est compact et équilibré pour l'ordre, on a $Q = \overline{Q \cap k}$. Soit J une partie finie de I et soit $P_J(y) = \chi_J y$. Alors si $y \in Q$, $P_J(y) \in Q$ et $P_J(y)$ tend vers y dans l^1 lorsque J augmente indéfiniment, ce qui prouve bien que k est déterminante.

Il résulte alors d'abord du théorème 3.4 que lorsque l^∞ est muni de la topologie $\tau(l^\infty, l^1)$, une mesure arbitraire à valeurs dans l^∞ est prolongeable. En effet pour tout compact K l'intégrale ultra faible $\int_K d\tilde{\mu}$, relativement à la topologie de la convergence simple n'est autre que la famille $\left\{\int_K d\mu_i\right\}_{i\in I}$ et appartient évidemment à l^∞. Ensuite il résulte de 3.5 et 3.7 que, l^∞ étant muni de la topologie de Mackey, une fonction f est μ-mesurable (resp. μ-négligeable) si et seulement si f est μ_i-mesurable (resp. μ_i-négligeable) pour tout $i \in I$. Enfin il résulte de 3.20 que la fonction f est μ-intégrable (relativement à la topologie $\tau(l^\infty, l^1)$) si et seulement si elle est μ_i-intégrale quel que soit $i \in I$, et que pour tout ouvert ω l'intégrale ultra faible $\left\{\int_\omega f\, d\mu_i\right\}_{i\in I}$ appartient à l^∞. En effet l'espace l^∞ muni de la topologie $\tau(l^\infty, l^1)$ est complet, et il suffit d'ailleurs de savoir qu'il est quasi-complet, ce qui est évident puisqu'il l'est déjà, muni de la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$. Si f est μ-intégrable φf est μ-intégrable pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$ et l'application $\varphi \to \int \varphi f\, d\mu$ de $\mathcal{C}_0$ dans l^∞ est continue quand on munit l^∞ de la topologie de la norme (théorème du graphe fermé) de sorte que

$$\sup_{|\varphi|\leq 1}\left|\int \varphi f\, d\mu\right| = \sup_{i\in I}\int |f|\, d|\mu_i| < +\infty \text{ [1]}.$$

Inversement cette condition entraîne évidemment que pour tout ouvert ω la famille $\left\{\int_\omega f\, d\mu_i\right\}_{i\in I}$ est bornée, donc que f est μ-intégrable. Une fonction f est donc μ-intégrable relativement à la topologie $\tau(l^\infty, l^1)$ si et seulement si f est μ_i-intégrable quel que soit $i \in I$, et $\sup_{i\in I}\int |f|\, d|\mu_i| < +\infty$.

E. *Mesures positives* (à valeurs dans l^p et $\mathcal{C}(S)$).

Proposition. — 1) *Soit* $\mu = (\mu_i)_{i\in I}$ *une mesure à valeurs dans* $l^p(I)$ $(1 \leq p < +\infty)$ *telle que* $\mu_i \geq 0$ *pour tout* $i \in I$. *Alors pour que* f *soit* μ*-intégrable il est nécessaire et suffisant que* f *soit* μ_i*-intégrable pour tout* $i \in I$, *et que*

$$\sum_{i\in I}\left(\int |f|\, d\mu_i\right)^p < +\infty.$$

2) *Soit* μ *une mesure prolongeable à valeurs dans* $\mathcal{C}(S)$ (S compact) *telle que* $\mu(\varphi) \geq 0$ *pour tout* $\varphi \geq 0$ (i.e. $\mu_s \geq 0$ *quel que soit* $s \in S$ (cf. 3.18)). *Alors pour que* f *soit* μ*-intégrable il est nécessaire et suffisant que* f *soit* μ_s*-intégrable quel que soit* s, *et que l'application* $s \to \int |f|\, d\mu_s$ *soit continue.*

Nous laissons la démonstration, à l'aide de 1.22, 3.9, 16, 5 et 18, au lecteur (se ramener au cas où $f \geq 0$ et remarquer que deux fonctions semi-continues inférieurement, dont la somme est continue, sont continues).

4. Théorèmes de convergence.

4.1. Théorème. — *Soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach (ou à valeurs dans un espace localement convexe quasi-complet)* E. *Soit* $(f_i)_{i\in I}$ *une famille filtrante croissante de fonctions semi-continues inférieurement*

[1] Le fait que $\sup_{i\in I}\left|\int_\omega f\, d\mu_i\right| < +\infty$ pour tout ouvert ω, implique que $\sup_{i\in I}\int |f|\, d|\mu_i| < +\infty$, n'est autre que le théorème de Dieudonné que nous avons utilisé pour démontrer 3.13 et 3.20.

μ-intégrables et supposons que la borne supérieure f des f_i soit aussi μ-intégrable. Alors f_i tend vers f dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, en particulier $\int f_i \, d\mu$ tend vers $\int f \, d\mu$ dans l'espace E.

Démonstration. — Compte tenu de la définition 1.27 il suffit de démontrer ce théorème dans le cas où E est un espace de Banach. La démonstration repose alors sur la proposition suivante :

4.2. Proposition. — *Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace normé. Alors le dual de $\mathcal{L}^1(\mu)$ s'identifie à l'ensemble des mesures réelles α telles qu'il existe une constante* M *vérifiant $\alpha^\bullet \leqslant M\mu^\bullet$. La boule unité* B *du dual s'identifie à l'ensemble des mesures α telles que $\alpha^\bullet \leqslant \mu^\bullet$, et pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ on a*

$$\mu^\bullet(|f|) = \sup_{\alpha \in B^+} \int |f| \, d\alpha$$

Démonstration. — Si $\alpha^\bullet \leqslant M\mu^\bullet$; on sait (1.11) que $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\alpha)$ et $\left|\int f d\alpha\right| \leqslant \alpha^\bullet(|f|) \leqslant M\mu^\bullet(|f|)$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ de sorte que l'application $f \to \int f \, d\alpha$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1(\mu)$. Inversement soit L une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1(\mu)$, l'injection de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ étant continue, la restriction de L à $\mathcal{K}$ est une mesure de Radon, soit α, et comme par hypothèse il existe M tel que

$$|\alpha(\varphi)| \leqslant M\mu^\bullet(|\varphi|),$$

on a $\alpha^\bullet \leqslant M\mu^\bullet$. Soit L_α la forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(\mu)$ déduite de α comme dans la première partie. L et L_α sont continues et coïncident sur $\mathcal{K}$, sous-espace dense de $\mathcal{L}^1(\mu)$, donc $L = L_\alpha$. Il est clair que la boule unité du dual est constituée des mesures α telles que $\alpha^\bullet \leqslant \mu^\bullet$ donc on a $\mu^\bullet(|f|) = \sup\limits_{\alpha \in B}\left|\int f \, d\alpha\right|$. Mais $|\alpha|^\bullet = \alpha^\bullet$ donc si α appartient à B il en est de même de $|\alpha|$. Comme $\left|\int f \, d\alpha\right| \leqslant \int |f| \, d|\alpha| \leqslant \mu^\bullet(|f|)$ on a aussi $\mu^\bullet(|f|) = \sup\limits_{\alpha \in B^+} \int |f| \, d\alpha$ où B^+ est l'ensemble des $\alpha \geqslant 0$ appartenant à B.

Démontrons maintenant le théorème 4.1 : on sait que B, donc aussi B^+ est compact pour la topologie $\sigma(B, \mathcal{L}^1)$, et d'autre part on sait que f et f_i étant les fonctions de l'énoncé on a

$$\int f\, d\alpha = \sup_i \int f_i\, d\alpha = \lim_i \int f_i\, d\alpha \quad \alpha \in B^+,$$

la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant croissant des f_i. Comme f et f_i appartiennent à $\mathcal{L}^1(\mu)$ les applications $\alpha \to \int f\, d\alpha$ et $\alpha \to \int f_i\, d\alpha$ sont continues sur B^+ muni de la topologie $\sigma(B^+, \mathcal{L}^1)$. Il s'ensuit, d'après le lemme de Dini, que la limite ci-dessus est uniforme par rapport à $\alpha \in B^+$, donc que $\lim_i \mu^\bullet(f - f_i) = \lim_i \sup_{\alpha \in B^+} \int (f - f_i)\, d\alpha = 0$.

C.Q.F.D.

Remarque. — Le lemme de Dini classique est en fait un cas particulier du théorème 4.1 obtenu en prenant pour μ l'application identique de $\mathcal{C}(K)$.

Remarque. — On verra au paragraphe 5 que si par exemple E est un espace de Banach réflexif ou faiblement séquentiellement complet, la fonction f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ dès que $\mu^\bullet(f) = \sup_i \mu^\bullet(f_i)$ est fini. Mais en général, il ne suffit pas de supposer $\mu^\bullet(f) < +\infty$, même lorsque μ est une mesure bornée compacte. Soit par exemple μ l'application compacte de c_0 dans c_0 définie par $\mu(\varphi) = h\varphi$ où $h(i) = 1/i$ (ou $1/i^2$ si l'on préfère avoir une mesure à variation bornée). Pour $f \geqslant 0$, $\mu^\bullet(f) = \sup_i h(i)f(i)$, donc $\mathcal{L}^1(\mu) = \{f : hf \in c_0\}$. Si $f(i) = 1/h(i)$ on a $\mu^\bullet(f) = 1$, et $f_n = \inf(f, n)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ mais $\mu^\bullet(f - f_n) = 1$ quel que soit n.

Dans la suite, lorsque μ est une mesure de Radon à valeurs dans un espace normé, nous dirons qu'une suite de fonctions f_n tend « en mesure sur tout compact » vers une fonction f lorsque pour tout compact $K \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$ la suite $\mu^\bullet\{t \in K : |f_n(t) - f(t)| \geqslant \varepsilon\}$ tend vers zéro.

Si f_n tend vers f, et g_n tend vers g « en mesure sur tout compact » $f_n + g_n$ tend vers $f + g$, et λf_n tend vers λf « en mesure sur tout compact » [1]. Lorsque f_n tend vers f

[1] On peut munir l'ensemble des fonctions numériques d'une topologie de la « convergence en mesure sur tout compact » compatible avec la structure de groupe additif, mais cette topologie n'est compatible avec la structure d'espace vectoriel que sur le sous-espace des fonctions f telles que $\lim_{n \to \infty} \mu^\bullet\{t \in K : |f(t)| \geqslant n\} = 0$ pour tout compact K.

et vers g « en mesure sur tout compact » on a $f(t) = g(t)$ μ p.p.. Cela résulte entre autres de l'inégalité

$$\mu^\bullet\{t : |f(t) + g(t)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mu^\bullet\{t : |f(t)| \geqslant \varepsilon/2\} + \mu^\bullet\{t : |g(t)| \geqslant \varepsilon/2\}.$$

4.3. Proposition. — *Soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans un espace normé, soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *et* f *une fonction. Alors pour que* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^\bullet(|f - f_n|) = 0$ *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

a) f_n *tend vers* f *« en mesure sur tout compact ».*

b) $\lim\limits_{\mu^\bullet(A)\to 0} \mu^\bullet(\chi_A|f_n|) = 0$ *uniformément par rapport à* n.

c) $\lim\limits_{K} \mu^\bullet(\chi_{\complement K}|f_n|) = 0$ *uniformément par rapport à* n (limite suivant l'ensemble filtrant croissant des parties compactes de T).

Démonstration. — Les conditions sont nécessaires : Soit $A_n = \{t : \ |f_n(t) - f(t)| \geqslant \varepsilon\}$. Alors $\varepsilon\chi_{A_n} \leqslant |f_n - f|$, d'où $\varepsilon\mu^\bullet(A_n) \leqslant \mu^\bullet(|f_n - f|)$, et $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^\bullet(A_n) = 0$ et à fortiori $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^\bullet(K \cap A_n) = 0$ ce qui prouve *a*).

Les conditions *b*) et *c*) résultent de l'inégalité

$$\mu^\bullet(\chi_A|f_n|) \leqslant \mu^\bullet(|f - f_n|) + \mu^\bullet(\chi_A|f|)$$

et des lemmes 1.24 et 1.25 compte tenu du fait que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$. Les conditions sont suffisantes : Il suffit de montrer que f_n est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ car alors d'après 1.8 il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^\bullet(|f_n - g|) = 0$, de sorte que f_n tend vers g « en mesure sur tout compact » d'après la première partie de la démonstration, et que $f(t) = g(t)$ μ p.p., ce qui implique que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^\bullet(|f_n - f|) = 0$. Soit donc $\varepsilon > 0$ donnée et soit K un compact tel que $\mu^\bullet(\chi_{\complement K}|f_n|) \leqslant \varepsilon/2$ pour tout n. Soit

$$A_{n,m} = \{t : |f_n(t) - f_m(t)| \geqslant \varepsilon/\mu^\bullet(K)\}$$

et soit $\eta > 0$ tel que la relation $\mu^\bullet(A) \leqslant \eta$ implique que $\mu^\bullet(\chi_A|f_n|) \leqslant \varepsilon/2$ quel que soit n. Alors on a

$$\begin{aligned}\mu^\bullet(|f_n - f_m|) &\leqslant \mu^\bullet(\chi_{\complement K}|f_n - f_m|) + \mu^\bullet(\chi_{K\cap\complement A_{n,m}}|f_n - f_m|) \\ &\quad + \mu^\bullet(\chi_{K\cap A_{n,m}}|f_n - f_m|) \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \mu^\bullet(\chi_{K\cap A_{n,m}}|f_n - f_m|)\end{aligned}$$

et lorsque n et m sont assez grands pour que $\mu^\bullet(K \cap A_{n,m}) \leqslant \eta$, la dernière quantité est aussi inférieure à ε, ce qui prouve bien que f_n est une suite de Cauchy.

Considérons maintenant le cas des mesures prolongeables.

4.4. Théorème (Egoroff). — *Soit* μ *une mesure* prolongeable *à valeurs dans un espace normé. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions* μ*-mesurables à valeurs dans un espace métrique, convergeant* μ*-presque partout vers une fonction* f. *Alors à tout compact* $K \subset T$ *et à tout* $\varepsilon > 0$ *on peut associer un compact* $K_1 \subset K$ *avec* $\mu^\bullet(K - K_1) \leqslant \varepsilon$, *tel que les restrictions des* f_n *à* K_1 *soient toutes continues et que* f_n *converge vers* f *uniformément sur* K_1.

Démonstration. — Soit K donnée et soit ω un voisinage ouvert relativement compact de K. Soit ν la mesure bornée induite par μ dans ω. Pour tout $K_1 \subset K$, on a $\nu^\bullet(K - K_1) = \mu^\bullet(K - K_1)$ (cf. lemme 3.2) donc il suffit de démontrer le théorème dans le cas d'une mesure bornée faiblement compacte. Dans ce cas, il existe une mesure positive λ telle que les f_n soient λ-mesurables et telle que $\lim_{\lambda(A)\to 0} \mu^\bullet(A) = 0$ (voir 2.14 et 2.17). On est donc ramené au « théorème d'Egoroff » de Bourbaki ([2], chapitre 4).

En particulier la fonction limite est aussi μ-mesurable (ce qui résulte aussi de 3.5).

4.5. Corollaire. — *Soit* μ *une mesure* prolongeable *à valeurs dans un espace normé. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions convergeant* μ*-presque partout vers une fonction* f. *Alors* f_n *tend vers* f *« en mesure sur tout compact ».*

En effet, soit $A_n = \{t : |f_n(t) - f(t)| \geqslant \varepsilon\}$ et soit $\eta > 0$ donnée. K étant un compact donné, montrons que

$$\mu^\bullet(A_n \cap K) \leqslant \eta$$

pour n assez grand. Soit à cet effet $K_1 \subset K$ un compact tel que $\mu^\bullet(K - K_1) \leqslant \eta$ et tel que f_n tende vers f uniformément sur K_1. Il existe donc n_0 tel que $n \geqslant n_0$ implique que $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in K_1$. Alors pour $n \geqslant n_0$ $A_n \cap K_1 = \emptyset$ donc $A_n \cap K \subset K - K_1$ de sorte que

$$\mu^\bullet(A_n \cap K) \leqslant \eta.$$

Remarque. — Ce corollaire est typique des mesures prolongeables (cf. Compléments). Lorsque μ est l'identité de $\mathcal{C}(K)$, convergence μ-presque partout signifie convergence simple, et convergence « en mesure sur tout compact » signifie convergence uniforme !

En combinant les résultats précédents, on obtient :

4.6. THÉORÈME. — *Soit* μ *une mesure* prolongeable *à valeurs dans un espace normé, et soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions* μ*-intégrables convergeant* μ*-presque partout vers une fonction* f. *Alors pour que* f *soit* μ*-intégrable et que* f_n *tende vers* f *dans* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites* :

i) $\lim\limits_{\mu^\bullet(A)\to 0} \mu^\bullet(\chi_A|f_n|) = 0$ uniformément par rapport à n.

ii) $\lim\limits_{K} (\chi_{\complement K}|f_n|) = 0$ uniformément par rapport à n.

Ces conditions sont en particulier satisfaites lorsque les f_n sont majorées en module par une fonction μ-intégrable fixe :

4.7. THÉORÈME (de convergence dominée). — *Soit* μ *une mesure* prolongeable *à valeurs dans un espace de Banach (ou un espace localement convexe quasi-complet)* E. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions* μ*-intégrables convergeant* μ*-presque partout vers une fonction* f. *Alors s'il existe une fonction* μ*-intégrable* g *telle que* $|f_n(t)| \leqslant g(t)$ μ-p.p. *quel que soit* n, f *est* μ*-intégrable et* f_n *tend vers* f *dans* $\mathcal{L}^1(\mu)$. *Notamment* $\int f_n \, d\mu$ *tend vers* $\int f \, d\mu$ *dans l'espace* E.

Compte tenu de la définition 1.27 il suffit en effet de le démontrer dans le cas des espaces normés et alors cela résulte de 4.6.

La proposition suivante permet entre autres de faire le lien avec la théorie d'intégration de Bartle, Dunford et Schwartz ([1] et [8] IV, 10) (cf. Compléments).

4.8. PROPOSITION. — *Soit* μ *une mesure* prolongeable *à valeurs dans un espace de Banach (ou un espace localement convexe quasi-complet). Soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions* μ*-intégrables convergeant* μ*-presque partout vers une fonction* f. *Alors si la suite* $\int_\omega f_n \, d\mu$ *converge (resp. converge faiblement) dans* E *quel que soit l'ouvert* $\omega \subset T$, *la fonction* f *est* μ*-inté-*

grable et $\int_\omega f_n\, d\mu$ *converge (resp. converge faiblement) vers* $\int_\omega f\, d\mu$ *dans* E.

Démonstration. — Cette proposition est connue dans le cas de mesures scalaires (cf. Appendice I : T2). Il en résulte que la fonction f est scalairement μ-intégrable et que dans l'espace E'^* muni de la topologie $\sigma(E'^*, E')$ on a $\lim_{n\to\infty} \int_\omega f_n\, d\mu = \int_\omega f\, d\mu$. Comme la limite existe par hypothèse dans E on a $\int_\omega f\, d\mu \in E$ donc $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ d'après 3.11, ce qui prouve la proposition.

Pour les mesures à valeurs dans un espace de Banach [1] nous avons :

4.9. Théorème. — *Soit* μ *une mesure* prolongeable *à valeurs dans un espace de Banach* E. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions* μ*-intégrables et supposons que pour tout ouvert* ω *la suite* $\int_\omega f_n\, d\mu$ *converge (resp. converge faiblement) dans* E. *Alors il existe une fonction* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, *essentiellement unique, telle que* $\int_\omega f_n\, d\mu$ *converge (resp. converge faiblement) vers* $\int_\omega f\, d\mu$ *dans* E [2].

Démonstration. — L'unicité essentielle, qui signifie que deux telles fonctions sont égales μ-presque partout, est immédiate (en se ramenant au cas scalaire par exemple). Nous décomposons la démonstration de l'existence en plusieurs lemmes :

Lemme 1. — *Il existe une suite* $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ *de compacts telle que chaque fonction* f_n *soit nulle presque partout dans le complémentaire de* $\bigcup_p K_p$.

Pour une fonction cela résulte de 1.24 et pour une suite de fonctions il suffit évidemment de réunir les différentes suites obtenues.

Lemme 2. — *Étant donnée une suite* $(K_p)_{p\in\mathbf{N}}$ *de compacts il existe une suite* $(x'_q)_{q\in\mathbf{N}}$ *de formes linéaires continues sur* E

(1) Voir la section de problèmes à la fin de ce paragraphe (p. 135).

(2) Dans cet énoncé on peut encore remplacer « convergence faible dans E » par « convergence dans E par rapport à une topologie $\sigma(E, H)$ » où H est une partie de E' satisfaisant les hypothèses de 3.13.

telle que tout ensembe $A \subset \bigcup_p K_p$ $\mu_{x'_q}$*-négligeable quel que soit* q, *soit* μ*-négligeable.*

Il suffit en effet de considérer une suite ω_p d'ouverts relativement compacts tels que $\omega_p \supset K_p$ et d'appliquer 2.14 aux mesures induites par μ dans les ω_p.

LEMME 3. — *Soit* $(\mu_k)_{k \in \mathrm{N}}$ *une suite de mesures réelles et soit* $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *une suite de fonctions appartenant à* $\bigcap_k \mathcal{L}^1(\mu_k)$ *et telle que pour tout ouvert* ω *et tout entier* k *la suite* $\int_\omega f_n \, d\mu_k$ *converge lorsque* n *tend vers l'infini. Alors il existe une suite* g_n *de barycentres des* f_i *convergente dans l'espace* $\mathcal{L}^1(\mu_k)$ *et* μ_k*-presque partout, quel que soit* k (¹).

En effet, d'après le théorème de Dieudonné-Grothendieck (cf. Appendice I, T2) la suite f_n converge faiblement dans $\mathcal{L}^1(\mu_k)$ quel que soit k. Nous plongeons l'espace $\bigcap_k \mathcal{L}^1(\mu_k)$ dans la diagonale du produit $\prod_k \mathcal{L}^1(\mu_k)$ et considérons que la suite f_n converge faiblement dans cet espace produit, vers un élément $(h_k)_{k \in \mathrm{N}}$. Cet élément étant adhérent à l'enveloppe convexe de la suite $(f_i)_{i \geqslant n}$, et le produit étant « métrisable » il existe une suite g_n de barycentres des f_n convergeant vers l'élément $(h_k)_{k \in \mathrm{N}}$; autrement dit : pour tout k la suite g_n converge dans $\mathcal{L}^1(\mu_k)$. Il suffit maintenant d'extraire de la suite g_n des sous-suites convergeant μ_1-p.p., puis μ_2-p.p. etc... et enfin d'extraire la suite diagonale qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

Démontrons maintenant le théorème : il résulte de l'hypothèse et du théorème de Dieudonné-Grothendieck que pour chaque $x' \in \mathrm{E}'$, la suite f_n converge faiblement dans $\mathcal{L}^1(\mu_{x'})$. Utilisant le lemme 1 on peut supposer que les f_n sont nulles dans le complémentaire de la réunion d'une suite $(K_p)_{p \in \mathrm{N}}$ de compacts. Nous associons à cette suite une suite de formes linéaires suivant le lemme 2. Il résulte alors du lemme 3 qu'il existe une suite de barycentres g_n des f_n convergeant

(¹) Par suite de barycentres nous entendons une suite $g_n = \sum_{i=n}^{N_n} \alpha_i^n f_i$ avec $\alpha_i^n \geqslant 0$ et $\sum_{i=n}^{N_n} \alpha_i^n = 1$ de sorte que g_n est barycentre des f_i avec $i \geqslant n$.

$\mu_{x'_q}$-presque partout quel que soit q. Alors, par construction des x'_q la suite g_n converge μ-presque partout. Soit f une limite presque partout de la suite g_n. Comme f_n converge faiblement dans $\mathcal{L}^1(\mu_{x'})$ il en est de même de g_n, et par conséquent f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu_{x'})$ pour tout $x' \in E'$, et f_n tend faiblement vers f dans $\mathcal{L}^1(\mu_{x'})$. f est donc faiblement μ-intégrable et dans $E'^* \int_\omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\omega f_n\, d\mu$ quel que soit l'ouvert ω. Comme par hypothèse la limite existe dans E, on a $\int_\omega f\, d\mu \in E$, donc il résulte du théorème 3.11 que f est μ-intégrable, ce qui termine la démonstration.

Remarque. — Dans les énoncés 4.8 et 4.9 ci-dessus, on peut conclure que $\lim_{n\to\infty} \int gf_n\, d\mu = \int gf\, d\mu$ (fortement resp. faiblement) quelle que soit la fonction μ-mesurable bornée g.

En effet, dans le cas de convergence faible cela résulte directement du théorème de Dieudonné-Grothendieck, et dans le cas où la limite est prise au sens fort c'est une conséquence du résultat analogue pour les mesures vectorielles (cf. 2.12) [1].

4.10. *Exemple.* — *Mesures spectrales* (cf. 1.36). — Soit E un espace de Banach, T un espace *compact* et μ une mesure sur T à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$, l'espace des opérateurs linéaires continus dans E, et supposons que $\mu(\varphi)\mu(\psi) = \mu(\varphi\psi)$. Nous considérons μ comme une mesure à valeurs dans $\mathcal{L}_s(E)$, l'espace $\mathcal{L}(E)$ muni de la topologie de la convergence simple. Nous supposons μ prolongeable relativement à cette topologie, ce qui sera toujours le cas lorsque E est réflexif ou faiblement séquentiellement complet (voir paragraphe 5), car cela revient à dire que les mesures μ_x définies par

$$\mu_x(\varphi) = \mu(\varphi)x$$

sont prolongeables, d'après la proposition 1.23. D'après la même proposition on a $\mathcal{L}^1(\mu) = \bigcap_{x\in E} \mathcal{L}^1(\mu_x)$. Pour f et g μ-mesurables bornées, en particulier pour f et g boréliennes

[1] A vrai dire au 2.11 et 12 nous avions établi ce résultat seulement pour les fonctions boréliennes, mais, avec les notations de 2.11, toute fonction m-mesurable bornée est m-intégrable (1.22) et toute fonction μ_n-mesurable quel que soit n est m-mesurable.

bornées, on a

$$\mu(gf) = \mu(g)\mu(f)$$

et pour g μ-mesurable bornée et f μ_x-intégrable on a

$$\mu_x(gf) = \mu(g)\mu_x(f).$$

On le voit facilement en approchant f et g par des fonctions continues dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\mathcal{L}^1(\mu_x)$. D'autre part si g est μ-mesurable bornée et f est une fonction μ-mesurable telle que gf est μ_x-intégrable, alors f est intégrable pour la mesure μ_z où $z = \mu(g)x$, et

$$\mu_x(gf) = \mu_z(f).$$

Il suffit de le démontrer pour $f \geqslant 0$. Soit alors $f_n = \inf(f, n)$. On a

$$\mu(gf_n) = \mu(f_n)\mu(g)$$

d'où

$$\mu_x(gf_n) = \mu_z(f_n)$$

et plus généralement pour tout ouvert ω on a

$$\mu_x(\chi_\omega gf_n) = \mu_z(\chi_\omega f_n).$$

Lorsque n tend vers l'infini $\chi_\omega gf_n$ tend vers $\chi_\omega gf$ dans $\mathcal{L}^1(\mu_x)$, d'après le théorème de convergence dominée, donc $\mu_z(\chi_\omega f_n)$ converge dans E vers $\mu_x(\chi_\omega gf_n)$ et il résulte de 4.8 que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu_z)$ et que $\mu_x(gf) = \mu_z(f)$. Supposons maintenant que $\mu(1) = \mathrm{I}$, l'application identique de E. Soit f une fonction μ-mesurable arbitraire et soit D_f l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que f soit μ_x-intégrable. Alors D_f est un sous-espace vectoriel partout dense de E et l'opérateur $(\mathrm{D}_f, \mu(f))$ est fermé. En effet, soit $x \in \mathrm{E}$; f étant μ_x-mesurable il existe un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{T}$ tel que $\mu_x^\bullet(\mathrm{T} - \mathrm{K}) \leqslant \varepsilon$ et tel que $f|_\mathrm{K}$ soit continue. Alors $\chi_\mathrm{K} f \in \mathcal{L}^1(\mu_x)$ donc si $z = \mu(\mathrm{K})x$ on a $f \in \mathcal{L}^1(\mu_z)$. Or

$$|z - x| = |[\mu(\mathrm{K}) - \mu(\mathrm{T})]x| = |\mu_x(\mathrm{T} - \mathrm{K})| \leqslant \mu_x^\bullet(\mathrm{T} - \mathrm{K}) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que D_f est dense. Il est clair (1) que D_f est

(1) Pour deux mesures à valeurs dans un espace normé, et deux scalaires λ_1 et λ_2 on a évidemment $(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)^\bullet \leqslant |\lambda_1|\mu_1^\bullet + |\lambda_2|\mu_2^\bullet$ donc l'ensemble des mesures à valeurs dans E pour lesquelles une fonction f est intégrable est un espace vectoriel pour les opérations usuelles.

un espace vectoriel. Posons $\mu(f)x = \mu_x(f)$ pour $x \in D_f$ et montrons que l'opérateur linéaire ainsi défini est fermé. Soit x_n une suite d'éléments de D_f convergeant vers x et supposons que $\mu_{x_n}(f) = \mu(f)x_n$ tende vers une limite y. Alors pour tout $\omega \subset T$ $\mu_{x_n}(\chi_\omega f) = \mu(\omega)\mu_{x_n}(f)$ converge. D'autre part $\mu_{x_n}(\varphi)$ converge vers $\mu_x(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$, et $\mu_{x_n}(K)$ converge vers $\mu_x(K)$ pour tout compact. Il résulte alors de 3.19 (généralisé au cas d'une suite de mesures vectorielles prolongeables) que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu_x)$ et que

$$\mu_x(f) = \lim_{n \to \infty} \mu_{x_n}(f) = y,$$

ce qui prouve que l'opérateur $\mu(f)$ est fermé.

Ainsi, lorsque E est un espace de Banach faiblement séquentiellement complet (par exemple $L^p(\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$, $1 \leqslant p < +\infty$) et A est un opérateur borné tel que spectre(A) $\subset \mathbf{R}$ et que pour tout polynôme P, on a $\|P(A)\| \leqslant c \sup_{t \in sp(A)} |P(t)|$, on peut faire des « fonctions de A » et mettre en évidence des sous-espaces invariants comme dans le cas des espaces de Hilbert.

Compléments.

A. Le présent travail était stimulé par la question de savoir pour quelles mesures de Radon et pour quelles fonctions le théorème de convergence dominée est valable. La proposition suivante montre que les mesures prolongeables sont les seules pour lesquelles le théorème de convergence dominée est valable et d'autre part qu'on ne peut espérer avoir un résultat semblable pour une classe de fonctions plus vaste que $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Proposition. — *a) Soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach* E, *avec la propriété que pour chaque suite* $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de fonctions continues à support compact tendant vers zéro simplement et majorée en module par une fonction fixe de* $\mathcal{K}$, *la suite* $\mu(\varphi_n)$ *tende vers zéro dans* E. *Alors* μ *est prolongeable.*

b) Soit μ *une mesure prolongeable et soit* f *une fonction scalairement* μ*-intégrable telle que la fonction d'ensemble borélien* $A \to \int_A f\, d\mu$ *soit dénombrablement additive dans* E″ *(muni de la norme). Alors* f *appartient à* $\mathcal{L}^1(\mu)$.

En effet a) résulte aussitôt de la proposition 2.13 en l'appliquant aux mesures induites par μ dans des ouverts relativement compacts (cf. 3.3). Pour prouver b), remarquons d'abord que si μ est prolongeable, on a bien $\int f\,d\mu \in E''$ pour toute fonction scalairement μ-intégrable (cf. [2] chap. 6). Supposons que la fonction d'ensemble $A \to \int_A^{\bullet} f\,d\mu$ soit dénombrablement additive. La fonction f étant $\mu_{x'}$-mesurable pour tout x', f est μ-mesurable (cf. 3.5). Soit K un compact. Alors $K = \sum_n K_n + N$, où K_n est compact avec $f|_{K_n}$ continue et où N est μ-négligeable (¹). La fonction $\chi_{K_n} f$ étant borélienne bornée à support compact, appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ donc $\int_{K_n} f\,d\mu \in E$. Dans E'' on a

$$\int_K f\,d\mu = \sum_n \int_{K_n} f\,d\mu$$

et E étant fermé dans E'', on a $\int_K f\,d\mu \in E$. Plus généralement si A est un borélien contenu dans K, on aura $\int_A f\,d\mu = \sum_n \int_{A\cap K_n} f\,d\mu \in E$, et si A est contenu dans une réunion dénombrable de compacts, $A = \sum_n A_n$ avec A_n relativement compact de sorte que $\int_A^{\bullet} f\,d\mu = \sum_n \int_{A_n} f\,d\mu \in E$. Plus généralement, pour une fonction étagée borélienne g, nulle dans le complémentaire d'une réunion dénombrable de compacts, on a $\int gf\,d\mu \in E$ et un argument de continuité simple montre que c'est encore vrai pour des fonctions boréliennes bornées quelconques nulles dans le complémentaire d'une réunion dénombrable de compacts, en particulier pour les fonctions φ appartenant à $\mathcal{C}_0$. Alors la mesure ν définie par $\nu(\varphi) = \int \varphi f\,d\mu$ est une mesure de Radon bornée à valeurs dans E. ν est même faiblement compacte. En effet, pour toute suite $(A_n)_{n\in N}$ de boréliens deux à deux disjoints de la série des intégrales faibles $\sum_n \int_{A_n} d\nu = \sum_n \int_{A_n} f\,d\mu$ est convergente dans E''. Il en résulte que $\int_{A_n} d\nu_{x'}$ tend vers

(¹) L'existence de telles décompositions équivaut à la mesurabilité de f du moins lorsque μ est prolongeable.

zéro uniformément par rapport à x', avec $|x'| \leqslant 1$, ce qui prouve (cf. Appendice I, C_2) que l'ensemble $\{\nu_{x'}\}_{|x'|\leqslant 1}$ est faiblement relativement compact dans M, donc que ν est faiblement compacte (2.3). Cela implique que $\int_\omega f\, d\mu = \int_\omega d\nu$ appartient à E pour tout ouvert ω (2.2) donc que f est μ-intégrable (3.11), ce qu'il fallait démontrer.

Il en résulte aussi que le théorème d'Egoroff (4.4) n'est valable que pour les mesures prolongeables, car la démonstration du théorème de convergence dominée utilise le théorème d'Egoroff seulement.

B. Faisons ici la comparaison avec la théorie d'intégration de Bartle, Dunford et Schwartz [1], [8] (IV, 10). Ces auteurs partent d'une fonction dénombrablement additive d'ensemble définie sur un σ-algèbre, donc la comparaison ne s'impose ici que dans le cas d'une mesure bornée. Soit μ une mesure de Radon bornée à valeurs dans un espace de Banach. Soit, pour A borélien, $m(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} d\mu$ (intégrale faible). m est une fonction additive d'ensemble à valeurs dans E″. Si m est σ-additive, l'ensemble $\{\mu_{x'}\}_{|x'|\leqslant 1}$ est uniformément σ-additive donc relativement faiblement compact et il s'ensuit que μ est faiblement compacte, et que $m(\mathrm{A}) \in \mathrm{E}$ pour tout borélien A. Réciproquement si pour tout borélien A on a $m(\mathrm{A}) \in \mathrm{E}$, la mesure μ est faiblement compacte (2.2) et m est dénombrablement additive d'après le théorème de convergence dominée ou le théorème d'Orlicz. Supposons que m soit à valeurs dans E, ou ce qui revient au même, que m soit σ-additive. Alors μ est faiblement compacte donc χ_{A} appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ pour tout borélien A, et d'après 1.13 on a $\mu^\bullet(\mathrm{A}) = \sup_{|x'|\leqslant 1} |\mu_{x'}|(\mathrm{A})$ ce qui est précisément la semi-variation de A au sens de Bartle, Dunford et Schwartz. La notion d'ensemble négligeable est donc la même. Comme les fonctions étagées boréliennes appartiennent à $\mathcal{L}^1(\mu)$ la proposition 4.8 montre que toute fonction intégrable pour m appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ (1). Réciproquement, comme les fonctions étagées sont

(1) Une fonction f est intégrable pour la mesure m s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions étagées (boréliennes par exemple) telle que $f_n(t)$ tend vers $f(t)$ presque partout, et telle que pour tout ensemble borélien (ou mesurable) A la suite $\int_{\mathrm{A}} f_n\, dm$ converge dans E.

denses dans $\mathscr{L}^1(\mu)$ toute fonction $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ est limite dans $\mathscr{L}^1(\mu)$, et aussi presque partout, d'une suite de fonctions étagées, donc est aussi intégrable pour la mesure ensembliste m.

La présente méthode de définition de $\mathscr{L}^1(\mu)$ pour une mesure de Radon suggère d'ailleurs l'approche suivante à la théorie de l'intégration par rapport à une mesure ensembliste m, définie sur un σ-algèbre ou σ-clan $\mathcal{A}$. Pour une fonction positive f, mesurable par rapport à $\mathcal{A}$, on définit

$$m^\bullet(f) = \sup_{|\varphi| \leqslant f} |m(\varphi)|$$

où φ est une fonction étagée. Pour $f \geqslant 0$ arbitraire, on pose

$$m^\bullet(f) = \inf_{f \leqslant g} m^\bullet(g)$$

où g est mesurable, et on complète l'espace des fonctions étagées pour la semi-norme $\varphi \to m^\bullet(|\varphi|)$. Nous ne détaillons pas ce point de vue ici.

C. En vue du théorème classique de Dunford Pettis il est naturel de se demander quel est le rapport entre la compacité faible dans un espace $L^1(\mu)$ et les conditions *b*) et *c*) de la proposition 4.3. A ce sujet nous pouvons préciser : Soit μ une mesure à valeurs dans un espace normé. Soit H une partie bornée de $L^1(\mu)$, et considérons les conditions suivantes :

i) H est relativement compacte.

ii) *b*) $\lim\limits_{\mu^\bullet(A) \to 0} \mu^\bullet(\chi_A |f|) = 0$ uniformément par rapport à $f \in H$.

c) $\lim\limits_{K} (\chi_{\complement K} |f|) = 0$ uniformément par rapport à $f \in H$.

iii) H est relativement faiblement compacte.

Alors dans tous les cas i) implique ii); lorsque μ est prolongeable ii) implique iii) et (Dunford-Pettis), lorsque μ est une mesure scalaire ii) est équivalent à iii). Par contre losque μ est l'identité de $\mathcal{C}(K)$ la condition ii) est vide; lorsque μ est l'injection de $\mathcal{K}(N)$ dans $l^p(N)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ ii) est équivalent à i) et non à iii) lorsque $1 < p \leqslant +\infty$. (Alors que pour $1 < p < +\infty$ la condition iii) est vérifiée pour toute partie bornée).

Il n'y a donc aucune équivalence en général et l'équivalence entre ii) et iii) est bien particulière aux espaces L^1 associés à une mesure scalaire.

Pour démontrer que ii) implique iii) dans le cas des mesures prolongeables, on peut remarquer que dans ce cas la condition ii)*b*) implique :

d) Pour tout compact K $\lim\limits_{\omega} \mu^{\bullet}(\chi_{\omega-K}|f|) = 0$ uniformément par rapport à $f \in H$, la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant décroissant des voisinages ouverts de K.

Il résulte alors de *c*) et de *d*) et d'un critère de compacité faible de Grothendieck (cf. Appendice I, C_3) que pour tout α dans le dual de $\mathcal{L}^1(\mu)$ (cf. 4.2) l'image de H dans $L^1(\alpha)$ est faiblement relativement compacte. Il suffit, d'après le théorème d'Eberlein-Smulian, de démontrer que de toute suite d'éléments de H on peut extraire une sous-suite faiblement convergente, et moyennant les remarques qui précèdent on y arrive facilement en utilisant la technique de la démonstration de 4.9.

Problème.

Le théorème 4.9 s'étend sans difficulté aux cas des mesures à valeurs dans un espace localement convexe métrisable, mais j'ignore si le résultat demeure exact dans le cas des espaces localement convexes généraux. Si ce théorème s'applique à une mesure donnée μ, à valeurs dans un espace localement convexe, cela implique, comme on le voit facilement, que l'espace $L^1(\mu)$ est séquentiellement complet, mais j'ignore également si tout espace $L^1(\mu)$ est séquentiellement complet.

5. Mesures à valeurs dans des espaces d'un type particulier.

Dans ce paragraphe nous caractérisons les espaces localement convexes, E, tels que toute mesure de Radon à valeurs dans E soit prolongeable, et nous montrons comment les critères d'intégrabilité précédemment obtenus se simplifient dans ce cas. La proposition suivante permet d'abord de mieux poser le problème :

5.1. Proposition. — *Soit* E *un espace de Banach* (*ou un espace localement convexe quasi-complet*). *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) Toute mesure de Radon à valeurs dans E est prolongeable.

b) Toute mesure définie dans un espace compact et à valeurs dans E est faiblement compacte (i.e. toute application linéaire continue d'espace $\mathcal{C}(K)$ dans E est faiblement compacte).

c) Toute mesure bornée à valeurs dans E est une application faiblement compacte de $\mathcal{C}_0$.

Démonstration : *a*) implique *b*) et *c*) implique *a*) d'après 3.3. *b*) implique *c*) : soit en effet $\mu : \mathcal{C}_0(T) \to E$ une mesure bornée et soit p la projection naturelle de l'espace $\mathcal{C}(T')$ (T' compactifié d'Alexandroff de T) sur l'espace $\mathcal{C}_0(T)$ ($p(\varphi) = \varphi - \varphi(\infty)$). Alors $\mu \circ p$ est une mesure sur T' à valeurs dans E, et comme la boule unité de $\mathcal{C}_0(T)$ est contenue dans la boule unité de $\mathcal{C}(T')$ il résulte de la compacité faible de $\mu \circ p$ que μ est aussi faiblement compacte.

Considérons en particulier la mesure discrète de masse $x_n \in E$ au point $n \in N$. Cette mesure est bornée si, et seulement si elle est faiblement bornée, i.e. si

$$\sum_n |\langle x_n, x' \rangle| < +\infty \qquad \text{pour tout} \qquad x' \in E'.$$

Si E possède les propriétés de 5.1 cette mesure est faiblement compacte, ce qui entraîne que $\sum_n x_n$ (définie dans E'^*) appartient à E. Vu l'importance de cette propriété nous lui donnons un nom :

5.2. Définition. — *Nous dirons qu'un espace localement convexe* E, *est faiblement* Σ-*complet lorsqu'il possède la propriété suivante* :

(Σ) *A toute suite* $(x_n)_{n\in N}$ *d'éléments de* E *telle que* $\sum_n |\langle x_n, x' \rangle| < +\infty$ *quel que soit* $x' \in E'$, *on peut associer*

$x \in E$ *tel que*

$$\langle x, x' \rangle = \sum_n \langle x_n, x' \rangle \qquad \text{pour tout} \qquad x' \in E'.$$

5.3. Théorème (1). — *Soit* E *un espace de Banach (ou un espace localement convexe quasi-complet). Pour que toute mesure de Radon à valeurs dans* E *soit prolongeable il faut et il suffit que* E *soit faiblement* Σ*-complet. Autrement dit, la condition* (Σ) *est équivalente aux conditions a), b) et c) de la proposition* 5.1.

Démonstration. — La proposition 5.1 et les remarques qui la suivent montrent que la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante nous démontrons la condition *b*) de 5.1. Soit μ une mesure définie dans un espace compact K et à valeurs dans l'espace E, supposé quasi-complet et faiblement Σ-complet. Pour montrer que μ est faiblement compacte on se ramène d'abord au cas où K est métrisable, par exemple à l'aide de la proposition 2.13, (qui s'étend immédiatement au cas de mesures à valeurs dans un espace localement convexe quasi-complet grâce à 2.21) qui montre que μ est faiblement compact si les images de μ dans les espaces quotients métrisables de K sont faiblement compactes (cf. Compléments de § 2 ou [8], p. 496). Supposons donc K métrisable. Il suffit, d'après 3.3, de montrer que pour tout ouvert $\omega \subset K$, l'intégrale faible $\int_\omega d\mu$ appartient à E. Or, K étant métrisable χ_ω est somme d'une suite de fonctions continues

$$\chi_\omega(t) = \sum_n \varphi_n(t), \qquad \varphi_n \in \mathcal{C}_+(K), \qquad t \in K,$$

de sorte que

$$\left\langle \int_\omega d\mu, x' \right\rangle = \int_\omega d\mu_{x'} = \sum_n \int \varphi_n \, d\mu_{x'} = \sum_n \langle \mu(\varphi_n), x' \rangle$$

avec

$$\sum_n |\langle \mu(\varphi_n), x' \rangle| \leqslant \int_\omega d|\mu_{x'}| < +\infty.$$

L'espace E étant faiblement Σ-complet, on a $\int_\omega d\mu \in E$.

C.Q.F.D.

(1) Ce théorème résulte aussi des travaux de Pelczynski [12 *bis*] (théorème 5) et Bessaga et Pelczynski [1 *bis*] (théorème 5).

5.4. *Remarque.* — Si E est un espace faiblement Σ-complet et $(x_n)_{n\in N}$ est une suite d'éléments de E telle que $\sum_n |\langle x_n, x'\rangle| < +\infty$, pour tout $x' \in E'$, non seulement $\sum_n x_n$ existe dans E, au sens de la topologie affaiblie, mais aussi toutes les sous-sommes $\sum_{n\in A} x_n$. Il résulte alors du théorème d'Orlicz (cf. Appendice II) que ces sommes convergent en fait pour la topologie donnée de E.

De même si $(x_n)_{n\in N}$ est une suite arbitraire d'éléments de E et si f est une fonction sur N telle que

$$\sum_n |f(n)||\langle x_n, x'\rangle| < +\infty$$

pour tout $x' \in E'$, la somme $\sum_n f(n)x_n$ converge dans E. Plus généralement :

5.5. Lemme. — *Soit* E *un espace de Banach (ou un espace localement convexe quasi-complet) faiblement Σ-complet. Soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans* E. *Alors pour toute fonction scalairement μ-intégrable f, l'intégrale faible $\int f\, d\mu$ appartient à* E.

Démonstration. — D'après 5.3 μ est prolongeable, donc si f est bornée et à support compact, on a bien $\int f\, d\mu \in E$ (par le théorème du bipolaire ou en remarquant que f appartient à $\mathscr{L}^1(\mu)$ d'après 3.5 et 1.23). Supposons ensuite que f soit à support compact, et (ce qui ne restreint pas la généralité) que $f \geqslant 0$. Alors si $f_n = \inf(f, n)$, $\int f_n\, d\mu \in E$ et

$$\left\langle \int f\, d\mu, x' \right\rangle = \sum_{n\geqslant 0} \left\langle \int (f_{n+1} - f_n)\, d\mu, x' \right\rangle$$

pour $x' \in E'$ avec

$$\sum_{n\geqslant 0} \left|\left\langle \int (f_{n+1} - f_n)\, d\mu, x' \right\rangle\right| \leqslant \int f\, d|\mu_{x'}| < +\infty,$$

de sorte que, E étant faiblement $\sum$-complet, $\int f\, d\mu$ appartient à E. Enfin, si l'on ne fait plus de restriction sur f, le raisonnement précédent appliqué à φf, montre que

$$\nu(\varphi) = \int \varphi f\, d\mu$$

appartient à E pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$. Pour chaque $x' \in E'$ on a

$$\sup_{|\varphi| \leqslant 1} |\langle \nu(\varphi), x' \rangle| = \int |f| \, d|\mu_{x'}| < +\infty$$

donc ν est une mesure bornée à valeurs dans E (on la prolonge immédiatement à $\mathcal{C}_0$). Il résulte de 5.1 et 5.3 que ν est faiblement compacte donc (2.2) que l'intégrale faible

$$\int d\nu = \int f \, d\mu$$

appartient à E.

5.6. Théorème. — *Soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach (ou un espace localement convexe quasi-complet) faiblement* $\sum$*-complet,* E. *Alors toute fonction scalairement* μ*-intégrable est* μ*-intégrable.*

En effet, si f est scalairement μ-intégrable, il en est de même de $\chi_\omega f$ pour tout ouvert ω, donc $\int_\omega f \, d\mu \in E$. La mesure μ étant prolongeable f est μ-intégrable d'après le théorème 3.11 (étendu au cas des espaces localement convexes) ou d'après le théorème 3.20.

5.7. Corollaire. — *Soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach faiblement* Σ*-complet. Alors* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *est identique à l'ensemble des fonctions (scalairement)* μ*-mesurables* f*, telles que* $\mu^\bullet(|f|) < +\infty$.

En particulier on a le lemme de Fatou Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions positives* μ*-intégrables convergeant* μ*-presque partout vers une fonction* f*, et telle que* $\liminf_{n \to \infty} \mu^\bullet(f_n) < +\infty$, f *est* μ*-intégrable et* $\mu^\bullet(f) \leqslant \liminf_{n \to \infty} \mu^\bullet(f_n)$.

En effet, si pour tout $x' \in E'$ f est $\mu_{x'}$-mesurable, l'inégalité

$$|\mu_{x'}|^\bullet(|f|) \leqslant |x'| \mu^\bullet(|f|) < +\infty$$

montre que f est $\mu_{x'}$-intégrable, donc scalairement μ-intégrable.

Remarque. — Il est clair que les propriétés 5.5, 5.6 et 5.7 ci-dessus sont caractéristiques des espaces faiblement Σ-complets, i.e. ne sont exactes que pour ces espaces. Par exemple si E est un espace de Banach tel que pour une mesure de Radon arbitraire, μ, à valeurs dans E, toute fonction

μ-mesurable f telle que $\mu^\bullet(|f|) < +\infty$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$, l'espace E est faiblement Σ-complet. En effet si l'on prend pour μ une mesure bornée discrète, de masse x_n au point $n \in \mathrm{N}$, on aura $1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ donc $\sum_n x_n \in \mathrm{E}$.

La plupart des exemples d'espaces faiblement Σ-complets proviennent de la remarque suivante :

5.8. *Remarque.* — Tout espace localement convexe faiblement séquentiellement complet est faiblement Σ-complet.

En effet si $\sum_n |\langle x_n, x'\rangle| < +\infty$ pour tout x', posons $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Alors $\langle s_n, x'\rangle$ converge quel que soit x', donc s_n est une suite de Cauchy faible, et converge par hypothèse faiblement vers un élément $x \in \mathrm{E}$, de sorte que

$$\langle x, x'\rangle = \sum_n \langle x_n, x'\rangle.$$

En particulier tout espace de Banach réflexif, et plus généralement tout espace localement convexe semi-réflexif est faiblement Σ-complet.

L'espace $\mathrm{M(T)} = \mathcal{C}_0'(\mathrm{T})$ des mesures de Radon bornées est faiblement séquentiellement complet, et il en est de même de l'espace $\mathrm{L}^1(\mu)$ lorsque μ est une mesure de Radon scalaire (cf. Appendice I, T3). Plus généralement :

5.9. Proposition. — *Soit* E *un espace de Banach faiblement Σ-complet, et soit μ une mesure de Radon à valeurs dans* E. *Alors l'espace* $\mathrm{L}^1(\mu)$ *est faiblement séquentiellement complet.*

Démonstration. — Rappelons que μ est prolongeable et que le dual de $\mathcal{L}^1(\mu)$ est constitué des mesures réelles α telles que $\alpha^\bullet \leqslant c^{\text{ste}}\, \mu^\bullet$ (cf. 4.2). Soit $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite de Cauchy faible dans $\mathcal{L}^1(\mu)$. Pour tout élément α du dual de $\mathcal{L}^1(\mu)$ et toute fonction borélienne bornée g, la mesure $g.\alpha$ appartient aussi au dual, donc la suite $\int g f_n\, d\alpha$ converge. La suite $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est donc une suite de Cauchy faible dans chaque espace $\mathcal{L}^1(\alpha)$ et y converge par conséquent faiblement vers un élément f_α. Utilisant la technique de la démonstration du théorème 4.9 (lemme 1, 2, 3), on voit qu'il existe une suite de barycentres σ_n des $f_i\,(i \geqslant n)$ convergeant μ-presque partout, et à fortiori

α p.p. Soit f une limite μ p.p. de la suite σ_n. Comme σ_n converge faiblement vers f_α dans l'espace $\mathcal{L}^1(\alpha)$ on doit avoir $f(t) = f_\alpha(t)$ α p.p., autrement dit : f appartient à $\mathcal{L}^1(\alpha)$ et f_n tend faiblement vers f dans $\mathcal{L}^1(\alpha)$. Prenant pour α une mesure $\mu_{x'}$, on voit que f est scalairement μ-intégrable donc (5.6) μ-intégrable, et comme $\int f_n \, d\alpha$ tend vers $\int f \, d\alpha$, f est limite faible de la suite $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$, ce qui prouve la proposition.

Il est d'ailleurs facile de voir que les espaces faiblement Σ-complets sont les seuls à avoir la propriété 5.9 ci-dessus.

Ainsi les espaces L^p, $1 \leqslant p < +\infty$ et l'espace M sont des espaces complets et faiblement Σ-complets et on peut leur appliquer ce qui précède. Mais l'espace $\mathcal{C}(\mathrm{K})$ n'est pas (en dehors du cas trivial) faiblement Σ-complet (car l'identité n'est pas prolongeable) ni par conséquent l'espace L^∞, qui est isomorphe à une espace $\mathcal{C}(\mathrm{K})$. Par contre L^∞ muni de la topologie $\tau(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ est quasi-complet et faiblement Σ-complet, et plus généralement l'espace E′, dual d'un espace de Banach (ou d'un espace localement convexe tonnelé), muni de la topologie $\tau(\mathrm{E}', \mathrm{E})$ est quasi-complet et faiblement séquentiellement complet. Si l'espace E′ est de plus séparable il est même faiblement Σ-complet pour la topologie forte, ce qui résulte du fait que E possède alors la propriété d'Orlicz (voir 5.11) ([1]).

De ce qui précède il résulte que si μ est une mesure de Radon à valeurs dans l'espace de Banach $\mathrm{M} = \mathcal{C}_0'$, une fonction f est μ-intégrable si elle est faiblement intégrable, i.e. intégrable relativement à la topologie $\sigma(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$. En fait il suffira déjà que f soit intégrable relativement à la topologie $\sigma(\mathrm{M}, \mathcal{C}_0)$. Pour le voir nous allons montrer comment on peut, dans ce qui précède, et notamment dans 5.6, réduire la partie utile de l'espace dual.

5.10. Définition. — *Soit* E *un espace localement convexe, et soit* H *une partie du dual de* E. *Nous dirons que* E *est* Σ-*complet relativement à la topologie* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{H})$, *ou* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{H})$

([1]) Comme me l'a fait remarquer David Dean, l'espace de James, espace de Banach de co-dimension 1 dans son bidual, est un dual séparable qui n'est pas faiblement séquentiellement complet. Cela montre donc qu'il y a des espaces faiblement Σ-complets qui ne sont pas faiblement séquentiellement complets.

Σ-complet, lorsqu'à toute suite $(x_n)_{n\in N}$ *d'éléments de* E *telle que* $\sum_n |\langle x_n, x'\rangle| < +\infty$ *pour tout* $x' \in H$, *on peut associer* $x \in E$ *tel que* $\langle x, x'\rangle = \sum_n \langle x_n, x'\rangle$ *pour tout* $x' \in H$.

Par exemple, si E' est le dual d'un espace de Banach, E' est Σ-complet relativement à la topologie $\sigma(E', E)$ (et même déjà séquentiellement complet relativement à cette topologie).

5.11. Proposition. — *Soit* E *un espace localement convexe, et soit* H *une partie de* E' *telle que* E *soit* $\sigma(E, H)$ *Σ-complet. Alors si* H *possède la propriété d'Orlicz* (cf. 2.6) E *est faiblement Σ-complet.*

En effet, plus précisément, si $\sum_n |\langle x_n, x'\rangle| < +\infty$ pour tout $x' \in H$, la somme $\sum_n x_n$ converge dans E. Car pour tout $A \subset N$, il existe $s_A \in E$, tel que $\langle s_A, x'\rangle = \sum_{n\in A} \langle x_n, x'\rangle$ quel que soit $x' \in H$. Comme H possède la propriété d'Orlicz, on a en fait $s_N = \sum_n x_n$ pour la topologie donnée de l'espace, et à fortiori $\langle s_N, x'\rangle = \sum_n \langle x_n, x'\rangle$ quel que soit $x' \in E'$.

Par exemple si E' est un dual séparable d'espace de Banach, la topologie $\sigma(E', E)$ possède la propriété d'Orlicz et par conséquent E' est faiblement Σ-complet.

5.12. Théorème. — *Soit* E *un espace de Banach (ou un espace localement convexe quasi-complet) et soit* H *une partie de* E' *ayant les propriétés suivantes*

a) E *est* $\sigma(E, H)$ *Σ-complet,*

b) H *possède la propriété d'Orlicz, et*

c) *Pour tout* $x \in E$ $|x| = \sup_{\substack{x' \in H \\ |x'| \leq 1}} |\langle x, x'\rangle|$ *(resp.* H *est déterminante).*

Soit μ *une mesure de Radon à valeurs dans* E. *Alors, pour qu'une fonction* f *soit* μ*-intégrable il suffit que* f *soit* $\mu_{x'}$*-intégrable pour tout* $x' \in H$.

Démonstration. — D'après 5.11 la mesure μ est prolongeable. Il suffit donc, d'après 3.20, de montrer que $\int f\, d\tilde{\mu}$ appartient à E, $\tilde{\mu}$ désignant la mesure obtenue à partir de μ en munissant E de la topologie $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{H})$. Pour f à support compact on procède comme pour 5.5. Quand f est nulle dans le complémentaire d'une réunion dénombrable de compacts, on a $f = \sum_n \chi_{\mathrm{A}_n} f$ où les ensembles A_n sont des boréliens relativement compacts, et

$$\left\langle \int f\, d\tilde{\mu}, x' \right\rangle = \sum_n \left\langle \int_{\mathrm{A}_n} f\, d\tilde{\mu}, x' \right\rangle \quad \text{pour tout} \quad x' \in \mathrm{H},$$

de sorte que $\int f\, d\tilde{\mu}$ appartient à E. Appliquant ceci à φf, où $\varphi \in \mathcal{C}_0$, on voit que $\nu(\varphi) = \int \varphi f\, d\tilde{\mu}$ appartient à E pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0$. Il suffit donc de montrer que ν est une mesure bornée, i.e. ν est une application linéaire continue de $\mathcal{C}_0$ dans E, car alors E étant faiblement Σ-complet, on aura $\int_\omega d\nu \in \mathrm{E}$ pour tout ouvert ω, et à fortiori $\int_\omega d\tilde{\nu} = \int_\omega f\, d\tilde{\mu} \in \mathrm{E}$ pour tout ouvert ω, ce qui d'après 3.20 entraîne que f est μ-intégrable. Pour voir que ν est continue il suffit d'appliquer le théorème du graphe fermé, directement à ν et E lorsque E est un espace de Banach et aux applications $\pi_p \circ \nu$ à valeurs dans les espaces de Banach E_p associés aux semi-normes $p(x) = \sup_{x' \in \mathrm{H}_1} |\langle x, x' \rangle|$, ($\mathrm{H}_1$ étant une partie équicontinue de H) dans le cas général.

Voici encore une modification de 3.13 et 3.20 valable dans le cas des espaces faiblement Σ-complets.

5.13. Théorème. — *Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach (resp. un espace localement convexe quasi-complet), faiblement Σ-complet* E. *Soit* H *une partie de* E' *telle que* $|x| = \sup_{\substack{x' \in \mathrm{H} \\ |x'| \leq 1}} |\langle x, x' \rangle|$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *(resp. telle que* H *soit déterminante) et telle qu'en outre* H *possède la propriété d'Orlicz. Soit $\tilde{\mu}$ la mesure obtenue à partir de μ en munissant* E *de la topologie* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{H})$. *Alors, pour qu'une fonction f soit μ-intégrable il est suffisant que f soit $\tilde{\mu}$-intégrable (i.e. $\mu_{x'}$-intégrable quel que soit $x' \in \mathrm{H}$) et que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$, l'intégrale $\int \varphi f\, d\tilde{\mu}$ appartienne à* E.

En effet, si $\nu(\varphi) = \int \varphi f\, d\tilde{\mu}$, ν est une mesure bornée grâce au théorème du graphe fermé (cf. la démonstration précédente) et E étant faiblement Σ-complet on a $\int_\omega d\nu \in E$, et à fortiori $\int_\omega d\tilde{\nu} = \int_\omega f\, d\tilde{\mu}$ appartient à E pour tout ouvert ω. Comme μ est prolongeable, f est μ-intégrable d'après 3.13 ou 3.20.

5.14. Corollaire. — *Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach (ou localement convexe quasi-complet) faiblement Σ-complet. Pour qu'une fonction f soit μ-intégrable il faut et il suffit que φf soit μ-intégrable quel que soit $\varphi \in \mathcal{C}_0$.*

Exemple. — Mesures à valeurs dans $l^1(I)$. Soit $\chi \subset l^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions sur I ne prenant que les valeurs 0 et 1. Alors $l^1(I)$ est séquentiellement complet pour la topologie $\sigma(l^1, \chi)$ (Appendice I T1). D'autre part, le topologie de la convergence simple, et a fortiori la topologie $\sigma(l^1, \chi)$ possède la propriété d'Orlicz. L'espace vectoriel H engendré par χ satisfait donc les hypothèses de 5.12, donc, compte tenu de 3.16 et 5.13 on obtient le résultat suivant :

5.15. Soit $\mu = (\mu_i)_{i \in I}$ une mesure de Radon sur T à valeurs dans $l^1(I)$ (i.e. une famille vaguement sommable de mesures scalaires). Posons pour $J \subset I$ $\mu_J(\varphi) = \sum_{i \in J} \mu_i(\varphi)$. Alors, f étant une fonction sur T, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f est μ-intégrable.

b) f est μ_J-intégrable quel que soit $J \subset I$.

c) f est μ_i-intégrable quel que soit $i \in I$ et pour tout ouvert ω on a $\sum_{i \in I} \left| \int_\omega f\, d\mu_i \right| < +\infty$.

d) f est μ_i-intégrable quel que soit $i \in I$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$ on a $\sum_{i \in I} \left| \int \varphi f\, d\mu_i \right| < +\infty$.

Dans ce cas, on a $\left\langle \int f\, d\mu, x' \right\rangle = \int f\, d\mu_{x'}$ pour tout $x' \in l^\infty$, notamment

$$\int f\, d\mu_J = \sum_{i \in J} \int f\, d\mu_i.$$

Ainsi, pour qu'une fonction f vérifie la relation ci-dessus pour chaque $J \subset I$, il suffit déjà que les membres de gauche aient un sens, et pour que

$$\int_\omega f\, d\mu_{\mathrm{I}} = \sum_{i \in \mathrm{I}} \int_\omega f\, d\mu_i$$

pour tout ouvert ω, il suffit déjà que les membres de droite aient un sens.

La symétrie de ces dernières conditions devient complète dans le cas des bimesures, dont ceci est un cas particulier.

5.16. *Exemple : Mesures à valeurs dans* $\mathrm{M} = \mathcal{C}_0'$.

Comme sous-espace de M', $\mathcal{C}_0$ possède les propriétés *a*) *b*) *c*) de 5.12 (cf. 2.10). Donc si μ est une mesure de Radon à valeurs dans l'espace de Banach $\mathrm{M} = \mathcal{C}_0'$, il est suffisant, pour qu'une fonction f soit μ-intégrable, que f soit $*$-faiblement μ-intégrable, i.e. que f soit μ_ψ-intégrable pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0$ (où $\mu_\psi(\varphi) = \langle \mu(\varphi), \psi \rangle$).

5.17. *Exemple : Bimesures.*

Définition. — *Soient* S *et* T *deux espaces localement compacts. Une bimesure sur* $\mathrm{S} \times \mathrm{T}$ *est une application bilinéaire continue* B *sur* $\mathcal{K}(\mathrm{S}) \times \mathcal{K}(\mathrm{T})$. *Il revient au même de dire que* B *est séparément continue, c'est-à-dire que les applications*

$$\mathrm{B}(\bullet, \psi) : \varphi \to \mathrm{B}(\varphi, \psi)$$

et

$$\mathrm{B}(\varphi, \bullet) : \psi \to \mathrm{B}(\varphi, \psi)$$

sont des mesures.

L'application $\varphi \to \mathrm{B}(\varphi, \bullet)$ est une mesure de Radon sur S à valeurs dans l'espace $\mathcal{K}'(\mathrm{T})$ des mesures de Radon scalaires sur T, et inversement une telle mesure vectorielle donne lieu à un bi-mesure. Lorsque l'espace $\mathcal{K}'(\mathrm{T})$ est muni de la « topologie de la convergence uniforme sur tout compact » définie par les semi-normes $\nu \to \int_{\mathrm{K}} d|\nu|$, K compact, $\mathcal{K}'(\mathrm{T})$ est isomorphe à la limite projective des espaces $\mathrm{M}(\mathrm{K})$, où K parcourt l'ensemble des compacts de T, et est par conséquent complet et faiblement séquentiellement complet, ce qui permet d'appliquer aux bi-mesures les résultats de ce paragraphe.

Proposition. — *Soit* f *une fonction* $\mathrm{B}(\bullet, \psi)$*-intégrable pour tout* $\psi \in \mathcal{K}(\mathrm{T})$ et notons $\int f(s)\mathrm{B}\,(ds, \psi) = \mathrm{B}(f, \psi)$ l'intégrale. Alors l'application $\psi \to B(f, \psi)$ est une mesure sur T, i.e. est continue sur $\mathcal{K}(T)$.

En effet posons $\mu(\varphi) = B(\varphi, \bullet)$. μ est alors une mesure vectorielle à valeurs dans $\mathcal{K}'(T)$. Par hypothèse f est μ-intégrable relativement à la topologie $\sigma(\mathcal{K}'(T), \mathcal{K}(T))$. Comme $\mathcal{K}(T)$ est un espace tonnelé, l'espace $\mathcal{K}'(T)$ muni de cette topologie est quasi-complet et il résulte de 1.35 que $\int f\, d\mu$, qui n'est autre que la forme linéaire $\varphi \to B(f, \varphi)$, appartient à $\mathcal{K}'(T)$, i.e. est continue.

Sous l'hypothèse de cette proposition nous dirons que $B(f, \bullet)$ existe [1].

Définition. — *Nous dirons qu'un couple de fonctions* (f, g) *est* B-*intégrable lorsque les conditions suivantes sont remplies :*

a) $B(f, \bullet)$ *et* $B(\bullet, g)$ *existent.*

b) f *est* $B(\bullet, g)$-*intégrable et* g *est* $B(f, \bullet)$-*intégrable.*

c) $\int f(s) B(ds, g) = \int g(t) B(f, dt)$.

La valeur commune de ces intégrales est alors notée $B(f, g)$ [2].

Les mesures vectorielles à valeurs dans l'espace de Banach $M = \mathcal{C}'_0$ considérées dans les exemples précédents sont en correspondance biunivoque avec les applications bilinéaires continues sur $\mathcal{K}(S) \times \mathcal{C}_0(T)$ par la formule

$$\mu(\varphi) = B(\varphi, \bullet)$$

et peuvent par conséquent être considérées comme des bi-mesures.

Proposition. — B *étant une telle bi-mesure les propriétés suivantes de la fonction* f *sont équivalentes :*

a) f *est* μ-*intégrable.*

b) (f, g) *est* B-*intégrable quelle que soit la fonction borélienne bornée* g.

c) f *est* $B(\bullet, \chi_V)$-*intégrable quel que soit l'ouvert* $V \subset T$.

d) f *est* $B(\bullet, \psi)$-*intégrable quel que soit* $\psi \in \mathcal{C}_0(T)$.

(1) Dans le travail de Morse et Transue [12] dont cette section s'inspire, la continuité de l'application $B(f, .)$ était stipulée, mais nous voyons que cela est inutile.

(2) Cela coïncide avec la définition de Morse et Transue à ceci près de ces auteurs considèrent des bi-mesures complexes, et prennent les intégrales au sens strict.

e) f est $B(\bullet, \psi)$*-intégrable quel que soit* $\psi \in \mathcal{K}(T)$ *et pour tout ouvert* $U \subset S$, $B(\chi_U f, \bullet)$ *est une mesure bornée.*

f) idem *avec* : $B(\varphi f, \bullet)$ *est une mesure bornée quelle que soit* $\varphi \in \mathcal{C}_0(S)$.

Démonstration. — *a*) implique évidemment *c*), *d*), *e*) et *f*). On a vu dans 5.16 que *d*) implique *a*); *c*) implique *a*) d'après 5.12 et le fait que la topologie $\sigma(M, \chi)$, où χ est l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ouverts de T, possède la propriété d'Orlicz, et qu'en outre M(T) est séquentiellement complet pour cette topologie (cf. Appendice I, T1). Que *e*) et *f*) entraînent *a*) résulte du théorème 3.13 et 5.13. *b*) implique *d*) donc *a*); reste enfin à démontrer que *a*) implique *b*). On a $\mu_g(\varphi) = B(\varphi, g)$ (g étant identifié à un élément du dual de M(T)) et $B(f, \cdot) = \int f\, d\mu$ existe aussi. f est μ-intégrable et a fortioti μ_g-intégrable, c'est-à-dire $B(\cdot, g)$-intégrable; $B(f, \cdot)$ est une mesure bornée donc g est $B(f, \cdot)$-intégrable. Enfin $\left\langle \int f\, d\mu, g \right\rangle = \int f\, d\mu_g$ ce qui signifie précisément que $\int g(t) B(f, dt) = \int f(s) B\,(ds, g)$, et achève la démonstration.

Soit B maintenant une bi-mesure quelconque. Avec Morse et Transue nous définissons B^* comme suit : Pour f et g positives et semi-continues inférieurement

$$B^*(f, g) = \sup_{\substack{|\varphi| \leqslant f \\ |\psi| \leqslant g}} |B(\varphi, \psi)|$$

et pour f et g positives arbitraires $B^*(f, g) = \inf\limits_{\substack{g \leqslant l \\ f \leqslant k}} B^*(k, l)$ où k et l sont semi-continues inférieurement.

THÉORÈME. — *Soit* (f, g) *un couple de fonctions telles que* $B(f, \cdot)$ *et* $B(\cdot, g)$ *existent. Alors si* $B^*(|f|, |g|) < +\infty$ *le couple* (f, g) *est* B*-intégrable.*

Démonstration. — Soient h et k des fonctions semi-continues inférieurement telles que $|f| \leqslant h$ et $|g| \leqslant k$ et telles que $B^*(h, k) < +\infty$. Soit

$$U = \{s : h(s) > 0\} \qquad \text{et} \qquad V = \{t : k(t) > 0\}.$$

Alors il est évidemment suffisant de montrer que (f, g) est intégrable pour la restriction de B à $U \times V$. Nous pouvons donc supposer que $S = U$ et que $T = V$, i.e. que h et k sont strictement positives. Soit M_k l'ensemble des mesures scalaires ν sur T telle que $\sup\limits_{|\psi| \leqslant k} |\nu(\psi)| = \int k \, d|\nu|$ soit finie. Alors M_k, muni de la norme $\nu \to |\nu|_k = \int k \, d|\nu|$, est un espace de Banach isomorphe à $M = \mathcal{C}_0'(T)$ (par l'application $\nu \to k.\nu$) donc faiblement Σ-complet. La fonction k étant minorée par une constante positive sur tout compact, l'injection de M_k dans $\mathcal{K}'(T)$ est continue. D'autre part, si $\varphi \in \mathcal{K}(S)$ avec $|\varphi| \leqslant h$ on a $\sup\limits_{|\psi| \leqslant k} |B(\varphi, \psi)| \leqslant B^*(h, k) < +\infty$, donc, h étant minorée par une constante positive sur tout compact, l'application $\mu : \varphi \to B(\varphi, \cdot)$ est une mesure vectorielle sur S à valeurs dans M_k. Alors :

A. — La fonction f est μ-intégrable. En effet, μ est prolongeable (5.3) et $|f| \leqslant h$ avec

$$\mu^\bullet(h) = \sup_{|\varphi| \leqslant h} |\mu(\varphi)|_k = B^*(h, k) < +\infty,$$

donc il suffit de vérifier que f est μ-mesurable (5.7), ce qui est le cas, grâce à (3.5), parce que f est mesurable pour la mesure $\mu_\psi = B(\cdot, \psi)$ quelle que soit $\psi \in \mathcal{K}(T)$.

B. — E étant l'espace vectoriel fermé engendré dans M_k par l'image de μ, i.e. par les mesures $B(\varphi, \cdot)$, la fonction g est intégrable par rapport à tout $\nu \in E$. En effet, comme $|g| \leqslant k$, il suffit de vérifier que g est ν-mesurable pour tout $\nu \in E$. Or par hypothèse g est mesurable pour chaque mesure $B(\varphi, \cdot)$, et l'injection de M_k dans $\mathcal{K}'(T)$ étant continue, toute mesure $\nu \in E$ est limite, uniforme sur tout compact, de mesures de ce type, ce qui prouve que g est encore mesurable pour ces mesures. L'application $\nu \to \int g \, d\nu$ est donc une forme linéaire (de norme au plus égale à 1) sur E, de sorte que nous pouvons définir la mesure composée $\mu_g = B(\cdot, g)$. Enfin f étant μ-intégrable, est à plus forte raison intégrable pour la mesure $\mu_g = B(\cdot, g)$, et d'autre part, comme $\int f \, d\mu = B(f, \cdot)$ appartient à E, la fonction g est intégrable pour la mesure $B(f, \cdot)$. Enfin la relation $\left\langle \int f \, d\mu, \, g \right\rangle = \int f \, d\mu_g$ montre comme précédemment que le couple (f, g) est B-intégrable, ce qui achève la démonstration.

Par la suite nous aurons à généraliser certains résultats de ce paragraphe à des espaces qui ne sont plus localement convexes. Dans ce but nous donnons maintenant quelques formulations équivalentes (dans le cas des espaces quasi-complets) de la condition (Σ) de 5.2.

5.18. PROPOSITION. — *Soit* E *un espace localement convexe quasi-complet et soit* $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *une suite d'éléments de* E. *Les propriétés suivantes de cette suite sont équivalentes* :

a) $\sum_n |\langle x_n, x'\rangle| < +\infty$ *quel que soit* $x' \in \mathrm{E}'$.

b) *Il existe une application linéaire continue* μ *de* c_0 *dans* E *telle que* $\mu(e_n) = x_n$ (e_n, $n^{\text{ième}}$ *élément de la base canonique).*

c) *Pour toute suite* $\varphi = (c_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *tendant vers zéro, la somme* $\sum_n c_n x_n$ *converge dans* E.

d) *Pour toute suite* $\varphi = (c_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *tendant vers zéro, la limite* $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ *existe dans* E.

En effet *a*) implique *b*) : Posons pour $\varphi = (c_n)_{n\in\mathrm{N}} \in \mathcal{K}(\mathrm{N})$, $\mu(\varphi) = \sum_n c_n x_n$. Alors $\langle \mu(\varphi), x'\rangle = \sum_n c_n\langle x_n, x'\rangle$ donc $\sup_{|\varphi|\leqslant 1} |\langle \mu(\varphi), x'\rangle| \leqslant \Sigma|\langle x_n, x'\rangle| < +\infty$. L'image par μ de l'ensemble des suites à support fini majorées en module par 1 est donc faiblement bornée dans E, et par suite bornée, ce qui montre que μ est continue pour la topologie de la convergence uniforme et se prolonge continuement à c_0. Il est clair que ce prolongement convient. Vu la continuité du prolongement *b*) implique évidemment *c*) qui implique *d*). Enfin *d*) implique *a*) car pour tout $x' \in \mathrm{E}'$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i\langle x_i, x'\rangle$ existe quelle que soit la suite $(c_i)_{i\in\mathrm{N}}$ tendant vers zéro, et il est bien connu, et facile à vérifier, que cela implique que

$$\sum_n |\langle x_n, x'\rangle| < +\infty.$$

(Par exemple, la limite est, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, une forme linéaire continue sur c_0, et si M est la norme on voit aussitôt que $\sum_n |\langle x_n, x'\rangle| \leqslant \mathrm{M}$).

Dans l'énoncé suivant nous appellerons C-suite une suite $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ satisfaisant les propriétés ci-dessus.

5.19. Proposition. — *Soit* E *un espace localement convexe quasi-complet* (1). Les propriétés suivantes de E sont équivalentes :

i) E est faiblement Σ-complet (définition 5.2).

ii) Toute C-suite est sommable dans E.

iii) Pour toute C-suite la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ existe dans E.

iv) Pour toute C-suite l'application correspondante de c_0 dans E est faiblement compacte.

v) Pour toute C-suite l'application correspondante de c_0 dans E est compacte.

Démonstration. — i) implique ii) donc iii) d'après le théorème d'Orlicz et iii) implique trivialement i). L'équivalence entre i) et iv) résulte de 2.2 (ou 2.2 *bis*, page 39). Enfin iv) implique v) d'après un résultat général : toute application linéaire faiblement compacte de l'espace c_0 dans un espace localement convexe est déjà compacte. Cela résulte par dualité du fait que les parties faiblement compactes de l^1 sont compactes. On peut aussi le déduire du théorème de convergence dominée comme suit : grâce au lemme 2.21 on peut se ramener au cas où E est un espace de Banach. Pour montrer que l'application faiblement compacte $\mu : c_0 \to \mathrm{E}$ est compacte il suffit alors de montrer que pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathrm{N}}$ d'éléments de c_0 avec $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant 1$, on peut extraire une sous-suite φ_{n_k} telle que $\mu(\varphi_{n_k})$ converge dans E. Or μ étant faiblement compacte la fonction 1 appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ et le théorème de convergence dominée (4.7) garantit qu'une sous-suite convergeant simplement, qu'on peut extraire par le procédé de suite diagonale, satisfait la propriété voulue.

Ainsi on voit que, du moins pour les espaces complets, la propriété d'être faiblement Σ-complet peut être formulée sans faire intervenir l'espace dual de E (par exemple « c) de 5.18

(1) Dans cette proposition et la précédente il suffirait de supposer que E soit séquentiellement complet.

implique ii) ») et sous cette forme nous pourrons l'utiliser dans des espaces vectoriels topologiques non nécessairement localement convexes.

Jusqu'ici nous avons considéré des espaces quasi-complets et nous avons donné des conditions équivalentes au fait que toute mesure de Radon à valeurs dans ces espaces soit prolongeable. Dans le cas général on a encore :

5.20. PROPOSITION. — *Soit* E *un espace localement convexe. Pour que toute mesure de Radon à valeurs dans* E *soit prolongeable il est nécessaire et suffisant que* E *satisfasse à la condition suivante: Pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de points de* E *telle que* $\sum_n |\langle x_n, x'\rangle| < +\infty$ *quel que soit* $x' \in \mathrm{E}'$, *on a* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Démonstration. — La condition est nécessaire car la mesure de masse x_n au point n est faiblement compacte à valeurs dans le complété $\hat{\mathrm{E}}$ (cf. démonstration de 5.1). Réciproquement, pour montrer que toute mesure à valeurs dans E est prolongeable, il suffit de le faire pour les mesures définies dans un espace compact métrisable, Si μ est une telle mesure on démontrera que l'intégrale faible $\int_\omega d\mu$ appartient à $\hat{\mathrm{E}}$, si on démontre que pour toute suite vérifiant l'hypothèse de l'énoncé, la somme Σx_n converge dans $\hat{\mathrm{E}}$ (cf. démonstration de 5.1 et 5.3). Or cela résulte de l'hypothèse et du critère de Cauchy car pour toute suite J_n de parties finies deux à deux disjointes on aura $\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in \mathrm{J}_n} x_i = 0$.

Compléments.

Voici deux autres propriétés caractéristiques des espaces faiblement Σ-complets.

PROPOSITION. — *Soit* μ *une mesure de Radon positive sur* T, *et soit* $\vec{f}$ *une fonction* μ*-mesurable à valeurs dans un espace quasi-complet et faiblement* Σ*-complet* E. *Alors si* $\vec{f}$ *est scalairement* μ*-intégrable, on a* $\int \vec{f}\, d\mu \in \mathrm{E}$.

Démonstration. — Il existe en effet une partition localement dénombrable de l'espace T, soit $T = N + \sum_{i \in I} K_i$ où N est μ-négligeable et où K_i est compact, telle que la restriction de $\vec{f}$ à K_i soit continue. Alors $x_i = \int_{K_i}^{\bullet} \vec{f}\, d\mu$ appartient à E, et il suffit d'appliquer le théorème 5.5 à la mesure de poids x_i au point $i \in I$.

Proposition. — *Soit* X *un ensemble, soit* $\mathcal{C}$ *un clan de parties de* X *et soit* $\sigma(\mathcal{C})$ *le* σ*-clan engendré par* $\mathcal{C}$. E *étant un espace localement convexe séparé faiblement* Σ*-complet, soit* m *une fonction bornée d'ensemble, faiblement dénombrablement additive, définie sur* $\mathcal{C}$ *et à valeurs dans* E. *Alors* m *admet un prolongement dénombrablement additif unique à* $\sigma(\mathcal{C})$ (1).

Démonstration. — L'unicité résulte de l'unicité dans le cas scalaire et du fait que E′ sépare E. Existence : Pour $x' \in E'$ soit $\overline{m}_{x'}$ le prolongement unique de $x' \circ m$ à $\sigma(\mathcal{C})$. Posons $\langle \overline{m}(A), x' \rangle = \overline{m}_{x'}(A)$. Alors il résulte de l'unicité que pour chaque $A \in \sigma(\mathcal{C})$, $\overline{m}(A)$ est une forme linéaire sur E′. Soit $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des $A \in \sigma(\mathcal{C})$ tels que $\overline{m}(A)$ appartient à E. $\mathcal{C}_1$ possède les propriétés suivantes :

a) Si A et B appartiennent à $\mathcal{C}_1$, avec $A \subset B$, $B - A$ appartient à $\mathcal{C}_1$.

b) Si $(A_n)_{n \in N}$ est une suite de parties deux à deux disjointes appartenant à $\mathcal{C}_1$, $\bigcup_n A_n$ appartient à $\mathcal{C}_1$.

Il nous suffit de montrer que dans ces conditions $\mathcal{C}_1 = \sigma(\mathcal{C})$. Soit $\mathcal{A}$ le plus petit ensemble de parties de X contenant $\mathcal{C}$ et vérifiant les hypothèses *a*) et *b*). Nous montrons que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. Comme $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$ il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est un σ-clan, et en vertu de *b*) il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est un clan :

— $A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{A}$ impliquent que $A \cap B$ appartient à $\mathcal{A}$. En effet si $\mathcal{A}' = \{B \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{A}\}$, $\mathcal{A}'$ contient $\mathcal{C}$ et vérifie les conditions *a*) et *b*), donc $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

— $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ impliquent que $A \cap B$ appartient à $\mathcal{A}$.

(1) Dans l'énoncé de cette proposition au Comptes Rendus j'avais omis le mot « bornée » sans lequel la proposition est évidemment fausse, même pour $E = \mathbf{R}$.

En effet l'ensemble $\mathcal{A}'' = \{B \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{A}\}$ contient $\mathcal{C}$ d'après ce qu'on vient de prouver, et $\mathcal{A}''$ vérifie les conditions *a*) et *b*), donc $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$, c'est-à-dire, $\mathcal{A}$ est stable pour l'intersection.

— $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ impliquent que $A - B = A - A \cap B$ appartient à $\mathcal{A}$ d'après ce qui précède et l'hypothèse *a*).

— Enfin si A et B appartiennent à $\mathcal{A}$,

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

appartient à $\mathcal{A}$ d'après l'hypothèse *b*).

$\mathcal{A}$ est donc un clan et d'après *b*) un σ-clan, donc $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ d'où il résulte que $\overline{m}(A)$ appartient à E pour tout $A \in \sigma(\mathcal{C})$. Enfin il résulte du théorème d'Orlicz que $\overline{m}$ est dénombrablement additive ([1]).

6. Intégration de fonctions vectorielles et Produit tensoriel.

Lorsque μ est une mesure positive on définit l'espace $\mathcal{L}^1_F(\mu)$ des fonctions absolument μ-intégrables à valeurs dans un espace de Banach F. Nous généralisons d'abord cette notion aux cas des mesures vectorielles puis nous considérons d'autres types de fonctions vectorielles μ-intégrables. L'étude du produit tensoriel de mesures est lié à l'intégration des fonctions vectorielles à cause du théorème sur les intégrations itérées.

Soient d'abord E et F des espaces de Banach sur **R**, soit $\mu : \mathcal{K}(T) \to E$ une mesure de Radon vectorielle, et soit $\vec{f} : T \to F$ une fonction à valeurs dans F. Nous notons $|\vec{f}|$ la fonction composée de $\vec{f}$ et de la norme sur F. $\mathcal{K}_F(T)$ désigne l'espace des fonctions à valeurs dans F, continues et à support compact. Le produit tensoriel $\mathcal{K}(T) \otimes F$ peut être identifié à l'ensemble des fonctions $\vec{\varphi} \in \mathcal{K}_F(T)$ dont l'image est contenue dans un sous-espace de dimension finie de F. Notons que si $\vec{\varphi}$ appartient à $\mathcal{K}_F(T)$, $|\vec{\varphi}|$ appartient à $\mathcal{K}(T)$.

([1]) Cette proposition a été démontrée par G. Fox dans le cas où E est un espace de Banach réflexif et $\mathcal{C}$ une algèbre de parties (cf. Fox [9]).

Soit $\mathcal{F}_F^\bullet(\mu)$ l'ensemble des fonctions $\vec{f}$ à valeurs dans F telles que $\mu^\bullet(|\vec{f}|) < +\infty$, muni de la topologie naturelle.

6.1. Définition. — *$\mathcal{L}_F^1(\mu)$ est l'adhérence de $\mathcal{K}_F(T)$ dans l'espace $\mathcal{F}_F^\bullet(\mu)$. Comme $\mathcal{K}(T) \otimes F$ est dense dans $\mathcal{K}_F(T)$ et que pour toute fonction $\vec{f}$ à support dans K on a*

$$\mu^\bullet(|\vec{f}|) \leqslant \mu^\bullet(K)\|\vec{f}\|_\infty,$$

il revient au même de dire que $\mathcal{L}_F^1(\mu)$ est l'adhérence de $\mathcal{K}(T) \otimes F$, et il est clair que $\mathcal{K}(T) \otimes F$ est dense dans $\mathcal{L}_F^1(\mu)$.

6.2. Théorème. — *Etant donnée une mesure μ à valeurs dans un espace normé, et un espace de Banach F, l'espace $\mathcal{L}_F^1(\mu)$ est complet.*

En effet, la démonstration du théorème 1.8 s'applique sans modification.

De façon générale il est évident que beaucoup de résultats du paragraphe 1 peuvent être généralisés sans difficultés au cas des fonctions à valeurs dans F.

Par exemple, toute fonction $\vec{f} \in \mathcal{L}_F^1(\mu)$ est μ-mesurable. Par contre nous avons démontré l'analogue du théorème 1.22 dans le cas d'une mesure prolongeable seulement :

6.3. Théorème. — *Soit μ une mesure prolongeable à valeurs dans un espace normé, et soit $\vec{f}$ une fonction μ-mesurable à valeurs dans F telle qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ avec $|\vec{f}(t)| \leqslant g(t)$ μ* p.p., *Alors $\vec{f}$ appartient à $\mathcal{L}_F^1(\mu)$.*

6.4. Corollaire. — *Sous les mêmes hypothèses une fonction $\vec{f}$ appartient à $\mathcal{L}_F^1(\mu)$ si et seulement si $\vec{f}$ est μ-mesurable et $|\vec{f}|$ appartient $\mathcal{L}^1(\mu)$.*

La condition est suffisante d'après le théorème précédent et nécessaire à cause de l'inégalité $\mu^\bullet(||\vec{f}| - |\vec{\varphi}||) \leqslant \mu^\bullet(|\vec{f} - \vec{\varphi}|)$.

6.5. Corollaire. — *Soit μ une mesure à valeurs dans un espace de Banach faiblement Σ-complet* (définition 5.2) *et soit F un espace de Banach arbitraire. Alors $\mathcal{L}_F^1(\mu)$ est l'ensemble des fonctions μ-mesurables $\vec{f}$ à valeurs dans F telles que $\mu^\bullet(|\vec{f}|) < +\infty$.*

Pour définir l'intégrale d'une fonction $\vec{f} \in \mathcal{L}^1_F(\mu)$ nous avons besoin des lemmes suivants :

6.6. Lemme. — *Soit* $x' \in E'$ *et* $y' \in F'$. *Alors pour toute fonction* $\vec{f}$ *à valeurs dans* F *on a* :

$$\mu^\bullet_{x'}(|\vec{f}|) \leqslant |x'|\mu^\bullet(|\vec{f}|).$$
$$\mu^\bullet(|y' \circ \vec{f}|) \leqslant |y'|\mu^\bullet(|\vec{f}|)$$
$$\mu^\bullet_{x'}(|y' \circ \vec{f}|) \leqslant |x'||y'|\mu^\bullet(|\vec{f}|).$$

Démonstration. — La première inégalité est exacte pour une fonction positive arbitraire à la place de $|\vec{f}|$, la seconde résulte de la croissance de $\mu^\bullet$ et de l'inégalité $|y' \circ \vec{f}| \leqslant |y'||\vec{f}|$; enfin la dernière s'obtient en combinant les deux précédentes.

Il résulte notamment de ce lemme que si $\vec{f}$ appartient à $\mathcal{L}^1_F(\mu)$ on a $\vec{f} \in \mathcal{L}^1_F(\mu_{x'})$, $y' \circ \vec{f} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $y' \circ \vec{f} \in \mathcal{L}^1(\mu_{x'})$ quels que soient $x' \in E'$ et $y' \in F'$.

Soit $\vec{\varphi} = \sum_i \varphi_i \otimes a_i$ un élément de $\mathcal{K}(T) \otimes F$. Nous posons :

$$\int \vec{\varphi}\, d\mu = \sum_i \int \varphi_i\, d\mu \oplus a_i.$$

Donc $\int \vec{\varphi}\, d\mu$ est un élément de $E \otimes F$ et l'application $\vec{\varphi} \to \int \vec{\varphi}\, d\mu$ est précisément le produit tensoriel

$$\mu \otimes I : \mathcal{K}(T) \otimes F \to E \otimes F$$

de μ et de l'identité de F, de sorte qu'il est inutile de vérifier que la définition est indépendante de la décomposition.

6.7. Lemme. — *L'application* $\vec{\varphi} \to \int \vec{\varphi}\, d\mu$ *est continue quand* $\mathcal{K} \otimes F$ *est muni de la topologie induite par* $\mathcal{L}^1_F(\mu)$ *et que* $E \otimes F$ *est muni de la topologie* ε *de la convergence bi-équicontinue.*

En effet

$$\left\langle \int \vec{\varphi}\, d\mu, (x', y') \right\rangle = \sum_i \left\langle \int \varphi_i\, d\mu, x' \right\rangle \langle a_i, y' \rangle$$
$$= \sum_i \langle a_i, y' \rangle \int \varphi_i\, d\mu_{x'} = \int y' \circ \vec{\varphi}\, d\mu_{x'}.$$

On a donc

$$\left|\left\langle \int \vec{\varphi}\, d\mu, (x', y') \right\rangle\right| \leqslant \left|\int y' \circ \vec{\varphi}\, d\mu_{x'}\right| \leqslant \mu^\bullet_{x'}(|y' \circ \vec{\varphi}|) \leqslant |x'||y'|\mu^\bullet(|\vec{\varphi}|).$$

d'où

$$\left|\int \vec{\varphi}\, d\mu\right|_\varepsilon = \sup_{\substack{|x'|\leqslant 1\\ |y'|\leqslant 1}} \left|\left\langle \int \vec{\varphi}\, d\mu,\ (x', y')\right\rangle\right| \leqslant \mu^\bullet(|\vec{\varphi}|).$$

6.8. Définition. — *Lorsque* $\vec{f}$ *appartient à* $\mathcal{L}^1_{\mathrm{F}}(\mu)$ *l'intégrale* $\int \vec{f}\, d\mu \in \mathrm{E} \hat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{F}$ *est la valeur en* $\vec{f}$ *du prolongement continu de* $\mu \otimes \mathrm{I}$ *à* $\mathcal{L}^1_{\mathrm{F}}(\mu)$.

Exemple. — Soit μ l'identité de $\mathcal{C}(\mathrm{K})$. Alors $\mu^\bullet(f) = \sup_{t\in\mathrm{K}} f(t)$ pour $f \geqslant 0$, $\mathcal{L}^1_{\mathrm{F}}(\mu) = \mathcal{C}_{\mathrm{F}}(\mathrm{K})$ et le prolongement défini ci-dessus est précisément l'isomorphisme de $\mathcal{C}_{\mathrm{F}}(\mathrm{K})$ sur $\mathcal{C}(\mathrm{K}) \hat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{F}$.

Soient maintenant E et F deux espaces localement convexes et soit μ une mesure de Radon sur T à valeurs dans E. Soit $\mathcal{F}^\bullet_{\mathrm{F}}(\mu)$ l'espace des fonctions $\vec{f} : \mathrm{T} \to \mathrm{F}$ telles que pour toute semi-norme continue p sur E et pour toute semi-norme continue q sur F la quantité $\mu^\bullet_p(|\vec{f}|_q)$ soit finie [1]. Alors nous posons évidemment :

6.1 *bis*. Définition. — $\mathcal{L}^1_{\mathrm{F}}(\mu)$ *est l'adhérence de* $\mathcal{K} \otimes \mathrm{F}$ *dans* $\mathcal{F}^\bullet_{\mathrm{F}}(\mu)$.

Lemme. — *L'application* $\mu \otimes \mathrm{I}$ *de* $\mathcal{K} \otimes \mathrm{F}$ *dans* $\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}$ *est continue lorsque* $\mathcal{K} \otimes \mathrm{F}$ *est muni de la topologie induite par* $\mathcal{L}^1_{\mathrm{F}}(\mu)$ *et que* $\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}$ *est muni de la topologie de la convergence bi-équicontinue.*

Démonstration. — Soit A une partie équi-continue de E′ et soit B une partie équi-continue de F′. Posons

$$p(x) = |x|_p = \sup_{x'\in\mathrm{A}} |\langle x, x'\rangle| \qquad \text{et} \qquad q(y) = |y|_q = \sup_{y'\in\mathrm{B}} |\langle y, y'\rangle|.$$

Alors pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{K} \otimes \mathrm{F}$ on a

$$\sup_{\substack{x'\in\mathrm{A}\\ y'\in\mathrm{B}}} \left|\left\langle \int \vec{\varphi}\, d\mu,\ (x', y')\right\rangle\right| = \sup_{\substack{x'\in\mathrm{A}\\ y'\in\mathrm{B}}} \left|\int y' \circ \vec{\varphi}\ d\mu_{x'}\right|$$
$$\leqslant \sup_{\substack{x'\in\mathrm{A}\\ y'\in\mathrm{B}}} \mu^\bullet_{x'}(|y' \circ \vec{\varphi}|) \leqslant \mu^\bullet_p(|\vec{\varphi}|_q).$$

On définit comme précédemment $\int \vec{f}\, d\mu$ comme élément

[1] On peut évidemment se limiter à des systèmes fondamentaux de semi-normes.

de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ par prolongement continu et l'on a :

6.9. Proposition. — *L'application* $\vec{f} \to \int \vec{f}\, d\mu$ *est l'unique application linéaire continue de* $\mathfrak{L}^1_F(\mu)$ *dans* $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ *telle que pour* $\vec{f}(t) = g(t)a$, *avec* $g \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ *et* $a \in F$, *on ait*

$$\int \vec{f}\, d\mu = \left(\int g\, d\mu\right) \otimes a.$$

6.10. Proposition. — *Soient* u *et* v *des applications linéaires continues de* E *dans* E_1 *respectivement de* F *dans* F_1. Soit $\vec{f} \in \mathfrak{L}^1_F(\mu)$. *Alors* $v \circ \vec{f}$ *appartient à* $\mathfrak{L}^1_{F_1}(u \circ \mu)$ *et* $\int v \circ \vec{f}\, d(u \circ \mu) = u \otimes v . \int \vec{f}\, d\mu$. *En particulier lorsque* u *et* v *sont l'identité ou des formes linéaires* x' *ou* y', *on obtient avec des notations évidentes* :

$$\int y' \circ \vec{f}\, d\mu = \left\langle y', \int \vec{f}\, d\mu \right\rangle \qquad \textit{dans } E,$$
$$\int \vec{f}\, d\mu_{x'} = \langle \vec{f}\, d\mu, x' \rangle \qquad \textit{dans } F,$$
$$\int y' \circ \vec{f}\, d\mu_{x'} = \left\langle \int \vec{f}\, d\mu, (x', y') \right\rangle \qquad \textit{dans } \mathbf{R}.$$

La démonstration ne présente aucune difficulté.

Le théorème de convergence dominée se généralise au cas des fonctions à valeurs dans un espace normé ([1]) :

6.11. Théorème. — *Soit* μ *une mesure* prolongeable *à valeurs dans un espace localement convexe* E. *Soit* F *un espace normé, et soit* $(\vec{f}_n)_{n \in N}$ *une suite de fonctions appartenant à* $\mathfrak{L}^1_F(\mu)$ *convergeant* μ p.p. *vers une fonction* $\vec{f}$. *Alors s'il existe* $g \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ *telle que* $|\vec{f}_n(t)| \leqslant g(t)$ μ p.p. *quel que soit* n, *la fonction* $\vec{f}$ *appartient à* $\mathfrak{L}^1_F(\mu)$ *et* $\vec{f}_n$ *tend vers* $\vec{f}$ *dans* $\mathfrak{L}^1_F(\mu)$. *Notamment* $\int \vec{f}_n\, d\mu$ *tend vers* $\int \vec{f}\, d\mu$ *dans* $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$.

Pour la démonstration on se ramène d'abord au cas où E est un espace normé et puis on applique le même raisonnement qu'au paragraphe 4; les propositions 4.3, 4, 5, 6 et 7 sont en effet valables sans aucune modification, pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

([1]) Naturellement on peut aussi généraliser au cas où F est un espace localement convexe général, mais alors il faudrait stipuler l'existence d'une fonction majorante pour chaque semi-norme continue sur F.

Un cas important est évidemment celui où $F = \mathbf{C}$ identifié à $\mathbf{R}^2$. Dans ce cas, lorsque E est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, jusqu'ici considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, il existe un isomorphisme naturel entre $E \otimes F$ et E, et on considère $\int \vec{f}\, d\mu$ comme élément de $\hat{E}$.

Plus généralement lorsque E ou F est un espace nucléaire, toute application bilinéaire continue $\Phi : (x, y) \to x.y$ de $E \times F$ dans un espace localement convexe G définit une application linéaire continue de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F = E \hat{\otimes}_\pi F$ dans $\hat{G}$, et on peut définir, en composant avec cette application :

$$\int \vec{f}.d\mu = \Phi\left(\int \vec{f}\, d\mu\right)\cdot$$

L'application $\vec{f} \to \int \vec{f}.d\mu$ est alors l'unique application linéaire continue de $\mathcal{L}^1_F(\mu)$ dans $\hat{G}$ qui attribue à une fonction de la forme $\vec{f}(t) = g(t)a$, avec $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $a \in F$, l'élément $\left(\int g\, d\mu\right)\cdot a$ de $\hat{G}$.

6.12. *Exemple.* — Soit μ la mesure discrète de masse $x_n \in E$ au point $n \in \mathrm{N}$. Soit $\vec{f} = (f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une fonction à valeurs dans F. Alors si $\vec{f}$ appartient à $\mathcal{L}^1_F(\mu)$ on a $\int \vec{f}\, d\mu = \sum_n x_n \otimes f_n$, la somme convergeant dans la topologie de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$. En effet, lorsque μ est prolongeable, ce qui est le cas ici, il résulte du théorème de convergence dominée que pour toute $\vec{f} \in \mathcal{L}^1_F(\mu)$ la fonction d'ensemble borélien $A \to \int_A \vec{f}\, d\mu$ est dénombrablement additive. Donc ici

$$\begin{aligned}\int \vec{f}\, d\mu = \sum_n \int \chi_{\{n\}}\vec{f}\, d\mu &= \sum_n \int \chi_{\{n\}}\, f_n\, d\mu \\ &= \sum_n \int \chi_{\{n\}}\, d\mu \otimes f_n = \sum_n x_n \otimes f_n.\end{aligned}$$

Si F est un espace normé la condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{f}$ appartienne à $\mathcal{L}^1_F(\mu)$ est que $|\vec{f}|$ appartienne à $\mathcal{L}^1(\mu)$, i.e. que $\sum_n |f_n| x_n$ converge dans $\hat{E}$.

L'intégration de fonctions vectorielles est utile lorsqu'on veut considérer le produit tensoriel de deux mesures de Radon vectorielles. Nous en abordons ici l'étude sans l'approfondir : Soient d'abord

$$\mu : \mathcal{C}_0(S) \to E \qquad \text{et} \qquad \nu : \mathcal{C}_0(T) \to F$$

deux mesures vectorielles bornées à valeurs dans des espaces localement convexes E et F. Le produit tensoriel algébrique

$$\mu \otimes \nu : \mathcal{C}_0(S) \otimes \mathcal{C}_0(T) \to E \otimes F$$

est continu quand on munit $\mathcal{C}_0(S) \otimes \mathcal{C}_0(T)$ et $E \otimes F$ de la topologie de la convergence bi-équicontinue, et se prolonge par conséquent aux espaces complétés, dont le premier est isomorphe à $\mathcal{C}_0(S \times T)$;

$$\mu \otimes \nu : \mathcal{C}_0(S \times T) \to E \widehat{\otimes}_\varepsilon F.$$

Cela permet la définition suivante :

6.13. Définition. — *Le produit tensoriel des mesures bornées* μ *et* ν *est l'unique mesure sur* $S \times T$ *à valeurs dans* $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ *qui attribue à une fonction de la forme* $\varphi(s)\psi(t)$ *la valeur* $\mu(\varphi) \otimes \nu(\psi)$.

Si maintenant μ et ν sont des mesures de Radon non nécessairement bornées leurs restrictions aux ouverts relativement compactes sont des mesures bornées dont on peut faire le produit tensoriel comme précédemment; les différents produits obtenus sont évidemment deux à deux compatibles et définissent par conséquent une mesure de Radon unique dans $S \times T$, que nous appelons le produit tensoriel :

6.13 *bis*. Définition. — *Soit* μ *une mesure de Radon sur* S *à valeurs dans* E, *et soit* ν *une mesure de Radon sur* T *à valeurs dans* F. *Alors le produit tensoriel* p *est l'unique mesure sur* $S \times T$ *à valeurs dans* $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$, *avec la propriété*

$$p(\varphi \otimes \psi) = \mu(\varphi) \otimes \nu(\psi) \quad (\text{où} \quad \varphi \otimes \psi(s, t) = \varphi(s)\psi(t)).$$

6.14. Théorème. — *Soient* μ *et* ν *des mesures bornées faiblement compactes. Alors* $\mu \otimes \nu$ *est faiblement compacte.*

6.15. Corollaire. — *Le produit tensoriel de deux mesures prolongeables est prolongeable.*

Pour alléger l'exposé nous faisons la démonstration dans le cas où E et F sont des espaces de Banach.

LEMME. — *Soit* μ (resp. ν) *une mesure bornée sur* S (resp. T). *Soit* $f \in \mathcal{C}_0(S \times T)$ *et posons* $f_s(t) = f(s, t)$. *Alors* f_s *appartient à* $\mathcal{C}_0(T)$, *l'application* $s \to \nu(f_s) \in F$ *est continue et tend vers zéro à l'infini, et par conséquent appartient à* $\mathcal{L}^1_F(\mu)$, *et l'on a*

$$\mu \otimes \nu(f) = \int \nu(f_s)\, d\mu(s).$$

Démonstration (dans le cas où E et F sont normés). — Il résulte de la continuité uniforme de f que l'application $s \to f_s \in \mathcal{C}_0(T)$ est continue et tend vers zéro à l'infini. Cette application composée avec ν donne une application $s \to \nu(f_s) \in F$ également continue et tendant vers zéro à l'infini. Or, comme pour les fonctions scalaires, on voit aisément que μ étant une mesure bornée, on a $\mathcal{C}_{0,F}(S) \subset \mathcal{L}^1_F(\mu)$, de sorte que l'intégrale $\int \nu(f_s)\, d\mu(s)$ possède un sens et que l'on a

$$\left|\int \nu(f_s)\, d\mu(s)\right|_{E \hat{\otimes}_\varepsilon F} \leqslant \mu^\bullet(1)\nu^\bullet(1)\|f\|_\infty.$$

Pour $f(s, t) = \varphi(s)\psi(t)$ on a $\nu(f_s) = \varphi(s)\nu(\psi)$ et

$$\int \nu(f_s)\, d\mu(s) = \mu(\varphi) \otimes \nu(\psi).$$

L'égalité à démontrer résulte alors de la caractérisation 6.13 du produit tensoriel.

Démontrons maintenant 6.14 en utilisant 2.13.

Soit $f_n \in \mathcal{C}_0(S \times T)$ avec $|f_n(s, t)| \leqslant 1$ et $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(s, t) = 0$ pour tout $(s, t) \in S \times T$. Supposons que μ et ν soient faiblement compactes. Alors pour tout $s \in S$ $\nu(f_{n,s})$ tend vers zéro et $|\nu(f_{n,s})|_F \leqslant \nu^\bullet(1)$. Il résulte alors du théorème 6.11 [1] que $\int \nu(f_{n,s})\, d\mu(s) = \mu \otimes \nu(f_n)$ tend vers zéro, C.Q.F.D.

Supposons encore que μ et ν soient des mesures de Radon à valeurs dans des espaces de Banach E et F. Alors il résulte de la caractérisation du produit tensoriel que l'on a :

$$\langle \mu \otimes \nu(f), (x', y')\rangle = \mu_{x'} \otimes \nu_{y'}(f) \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{K}(S \times T).$$

Comme $|\mu_{x'} \otimes \nu_{y'}| = |\mu_{x'}| \otimes |\nu_{y'}|$, il résulte de 1.13 que pour

[1] En fait ici on peut aussi bien utiliser le théorème de convergence dominée pour les fonctions scalaires ou encore 2.13 en raisonnant sur la fonction numérique $s \to |\nu(f_{n,s})|_F$.

$f \in \mathfrak{L}^1_+(\mu \otimes \nu)$ ou $f \in \mathfrak{J}^+$, on a

$$(\mu \otimes \nu)^\bullet(f) = \sup_{\substack{|x'| \leqslant 1 \\ |y'| \leqslant 1}} |\mu_{x'}| \otimes |\nu_{y'}|(f).$$

En particulier lorsque μ et ν sont bornées faiblement compactes on aura

$$(\mu \otimes \nu)^\bullet(\mathrm{A}) = \sup_{\substack{|x'| \leqslant 1 \\ |y'| \leqslant 1}} |\mu_{x'}| \otimes |\nu_{y'}|(\mathrm{A})$$

pour tout borélien $\mathrm{A} \subset \mathrm{S} \times \mathrm{T}$, et en particulier

$$(\mu \otimes \nu)^\bullet(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \mu^\bullet(\mathrm{A})\nu^\bullet(\mathrm{B})$$

pour A et B boréliens dans S et T. Notons enfin le résultat suivant :

6.17. Proposition. — *Soient μ et ν des mesures prolongeables sur* S *et* T *à valeurs dans des espaces de Banach* E *et* F. *Alors pour qu'une fonction f soit $\mu \otimes \nu$-intégrable il est nécessaire et suffisant que f soit $\mu_{x'} \otimes \nu_{y'}$-intégrable quels que soient $x' \in \mathrm{E}'$ et $y' \in \mathrm{F}'$, et que pour tout ouvert $\omega \subset \mathrm{S} \times \mathrm{T}$ la forme bilinéaire sur* $\mathrm{E}' \times \mathrm{F}'$,

$$(x', y') \rightarrow \int_\omega f \, d\mu_{x'} \, d\nu_{y'}$$

appartienne à $\mathrm{E} \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{F}$ (identifié à l'adhérence de $\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}$ dans l'espace $\mathrm{B}(\mathrm{E}', \mathrm{F}')$ des formes bilinéaires continues sur $\mathrm{E}' \times \mathrm{F}'$).

En effet cela n'est qu'un cas particulier de 3.13, compte tenu de 6.15 et du fait que la topologie $\sigma(\mathrm{E} \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathrm{F}, \mathrm{E}' \times \mathrm{F}')$ possède la propriété d'Orlicz (cf. Appendice II.7).

Revenons maintenant au sujet principal de ce paragraphe, l'intégration de fonctions vectorielles. Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans E. On a vu que si E ou F est nucléaire on peut donner un sens à l'intégrale $\int \vec{f} . d\mu$ pour toute application bilinéaire continue $\Phi : (x, y) \rightarrow x.y$ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, et pour toute $\vec{f} \in \mathfrak{L}^1_\mathrm{F}(\mu)$. Lorsque ni E ni F ne sont nucléaires il n'en est plus de même :

Soient E, F et G des espaces de Banach, $\Phi : \mathrm{E} \times \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{G}$ une application bilinéaire continue, notée $\Phi(x, y) = x.y$, et soit μ une mesure de Radon sur T à valeurs dans E. Pour $\vec{\varphi} = \sum_i \varphi_i \otimes a_i \in \mathcal{K} \otimes F$ on pose

$$\int \vec{\varphi} \, . \, d\mu = \sum_i \mu(\varphi_i) \, . \, a_i.$$

Supposons que l'application $\vec{\varphi} \rightarrow \int \vec{\varphi} \, . \, d\mu$ puisse être prolongée de façon naturelle à l'espace $\mathcal{K}_F(T)$. Comme les sous-espaces de $\mathcal{K}_F(T)$ des fonctions ayant leur support dans un compact fixe, sont des espaces de Banach, le prolongement devrait être continu, de sorte qu'on aurait :

$$\sup_{\substack{|\vec{\varphi}| \leqslant 1 \\ \operatorname{supp} \vec{\varphi} \subset K}} \left| \int \vec{\varphi} \, . \, d\mu \right| < +\infty.$$

Cela nous conduit à définir la semi-variation de μ, relativement à Φ, de la façon suivante :

6.18. Définition. — *Pour* $f \in \mathcal{J}^+$, $\mu_\Phi^\bullet(f) = \sup\limits_{\substack{|\vec{\varphi}| \leqslant f \\ \vec{\varphi} \in \mathcal{K} \otimes F}} \left| \int \vec{\varphi} \, . \, d\mu \right|.$

Pour les autres fonctions positives on complète la définition comme dans le cas scalaire ($F = R$) traité jusqu'ici (cf. 1.1). Nous dirons que $\mu_\Phi^\bullet$ est la Φ-*variation* de μ, ou la semi-variation relativement à Φ.

Lorsque E est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, (considéré jusqu'ici comme espace vectoriel sur $\mathbf{R}$), que $F = \mathbf{C}$, et que $\Phi(x, \lambda) = \lambda x$, on pourra noter $\mu_\Phi^\bullet = \mu_{\mathbf{C}}^\bullet$, et l'appeler la *semi-variation complexe* de μ. Il est clair que si $E = \mathbf{C}$, i.e. si μ est une mesure à valeurs dans $\mathbf{C}$, $\mu_{\mathbf{C}}^\bullet$ est précisément la variation de μ. On aurait manifestement pû faire tout ce qui précède dans le cadre des espaces localement convexes sur $\mathbf{C}$, en utilisant partout la semi-variation complexe.

6.19. Proposition. — *La fonction* $\mu_\Phi^\bullet$ *est positivement homogène, croissante et sous-additive sur* $\mathcal{J}^+$, *et pour toute famille filtrante croissante* $(f_i)_{i \in I}$ *de fonctions appartenant à* $\mathcal{J}^+$, *on a* $\sup\limits_{i \in I} \mu_\Phi^\bullet(f_i) = \mu_\Phi^\bullet(f)$ *où* $f = \sup\limits_{i \in I} f_i$.

Démonstration. — La croissance et l'homogénéité de $\mu_\Phi^\bullet$ vont de soi. Démontrons d'abord la seconde assertion : Soit

$\lambda < \mu^\bullet_\Phi(f)$ et $\vec{\varphi} \in \mathcal{K} \otimes F$ telle que $|\vec{\varphi}| \leqslant f$ et que $\lambda < \left|\int \vec{\varphi} . d\mu\right|$. On peut supposer, quitte à multiplier $\vec{\varphi}$ par une fonction $\alpha < 1$ convenable, qu'en tout point $t \in \operatorname{supp} \vec{\varphi}$ on ait $|\vec{\varphi}(t)| < f(t)$. Alors, grâce au lemme de Dini il existe $i \in I$ tel que $|\vec{\varphi}(t)| \leqslant f_i(t)$ quel que soit $t \in T$, de sorte que $\lambda < \left|\int \varphi . d\mu\right| \leqslant \mu^\bullet_\Phi(f_i) \leqslant \mu^\bullet_\Phi(f)$. Il suffit alors de démontrer la sous-additivité pour les fonctions continues à support compact. Pour ces fonctions la sous-additivité résulte du lemme suivant :

Lemme. — *Soient* $f_i \in \mathcal{K}_+$ $i = 1, 2$, *et soit* $\varphi \in \mathcal{K} \otimes F$ *avec* $|\vec{\varphi}| \leqslant f_1 + f_2$. *Alors il existe* $\vec{\varphi}_i \in \mathcal{K} \otimes F$, $i = 1, 2$, *telles que* $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2$ *et que* $|\vec{\varphi}_i| \leqslant f_i$ (1).

En effet si $f = f_1 + f_2$ où $f_i \in \mathcal{K}_+$, soit $\lambda < \mu^\bullet_\Phi(f)$ et soit $\vec{\varphi} \in \mathcal{K} \otimes F$ avec $|\vec{\varphi}| \leqslant f$ telle que $\lambda < \left|\int \vec{\varphi} . d\mu\right|$. Si $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2$ est la décomposition du lemme, on a

$$\lambda < \left|\int \vec{\varphi} . d\mu\right| \leqslant \left|\int \vec{\varphi}_1 . d\mu\right| + \left|\int \vec{\varphi}_2 . d\mu\right| \leqslant \mu^\bullet_\Phi(f_1) + \mu^\bullet_\Phi(f_2).$$

Alors λ étant arbitraire, on a $\mu^\bullet_\Phi(f) \leqslant \mu^\bullet_\Phi(f_1) + \mu^\bullet_\Phi(f_2)$ ce qui montre la sous-additivité.

Naturellement le prolongement de $\mu^\bullet_\Phi$ à l'ensemble de toutes les fonctions positives est alors aussi homogène sous-additif et même dénombrablement sous-additif.

6.20. Définition. — *Nous dirons que* Φ *est compatible avec* μ, *ou que* μ *est à* Φ*-variation localement bornée, lorsque* $\mu^\bullet_\Phi(\varphi) < +\infty$ *pour toute* $\varphi \in \mathcal{K}_+$ *(ou alternativement que* $\mu^\bullet_\Phi(\omega) < +\infty$ *pour tout ouvert relativement compact* ω, *ou* $\mu^\bullet_\Phi(K) < +\infty$ *pour tout compact* K).

Lorsque Φ est compatible avec μ, l'espace $\mathcal{F}^\bullet_{F,\Phi}(\mu)$ des fonctions $\vec{f}$ à valeurs dans F telles que $\mu^\bullet_\Phi(|\vec{f}|) < +\infty$, contient $\mathcal{K}_F(T)$ et $\mathcal{K} \otimes F$. Comme de plus $\left|\int \vec{\varphi} . d\mu\right| \leqslant \mu^\bullet_\Phi(|\vec{\varphi}|)$ on peu poser :

6.21. Définition. — Φ *étant une application bilinéaire compatible avec* μ, *l'espace* $\mathcal{L}^1_{F,\Phi}(\mu)$ *est l'adhérence de* $\mathcal{K} \otimes F$

(1) Démonstration dans l'Appendice III.

dans $\mathcal{F}^{\bullet}_{F,\Phi}(\mu)$. *Lorsque* $\vec{f}$ *appartient à* $\mathcal{L}^1_{F,\Phi}(\mu)$ $\int \vec{f}.d\mu$ *est la valeur en* $\vec{f}$ *du prolongement continu à* $\mathcal{L}^1_{F,\Phi}(\mu)$ *de l'application* $\vec{\varphi} \to \int \vec{\varphi}.d\mu$.

L'espace $\mathcal{L}^1_{F,\Phi}(\mu)$ contient alors $\mathcal{K}_F(T)$. Ainsi, pour que l'application $\vec{\varphi} \to \int \vec{\varphi}.d\mu$ de $\mathcal{K} \otimes F$ dans G se prolonge naturellement (continûment) à $\mathcal{K}_F(T)$ il est nécessaire et suffisant que Φ soit compatible avec μ (¹).

6.22. *Exemple.* — Lorsque $G = E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ et que $\Phi(x, y) = x \otimes y$, on a $\mu^{\bullet}_{\Phi} = \mu^{\bullet}$. En effet $\left|\int \vec{\varphi}.d\mu\right| \leqslant \mu^{\bullet}(|\vec{\varphi}|)$ (6.7) d'où $\mu^{\bullet}_{\Phi} \leqslant \mu^{\bullet}$. D'autre part si $\vec{\varphi} = \varphi \otimes a$ avec $|a| = 1$

$$\left|\int \vec{\varphi}.d\mu\right| = \left|\int \varphi \, d\mu \otimes a\right| = \left|\int \varphi \, d\mu\right|$$

et $|\vec{\varphi}(t)|_F = |\varphi(t)|$ de sorte que $\mu^{\bullet} \leqslant \mu^{\bullet}_{\Phi}$.

Il en résulte que le type d'intégration que nous avons considéré au début de ce paragraphe est un cas particulier de celui qui est considéré ici. Il résultera des considérations du § 7 que, dans un sens, la réciproque est également vraie.

6.23. Proposition. — *Lorsque* $G = \mathbf{R}$, i.e. *lorsque* Φ *est une forme bilinéaire (réelle) la* Φ-*variation* $\mu^{\bullet}_{\Phi}$ *est additive sur* $\mathcal{J}^+$.

Démonstration. — Soit $f = f_1 + f_2$ avec $f_i \in \mathcal{J}^+$ $i = 1, 2$. Soient $\lambda_i < \mu^{\bullet}_{\Phi}(f_i)$ et soient $\vec{\varphi}_i \in \mathcal{K} \otimes F$ telles que $|\vec{\varphi}_i| \leqslant f_i$ et que $\lambda_i \leqslant \left|\int \vec{\varphi}_i.d\mu\right|$. Alors on peut, quitte à multiplier les $\vec{\varphi}_i$ par un facteur -1, supposer qu'on a $\lambda_i \leqslant \int \vec{\varphi}_i.d\mu$, et comme alors $|\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2| \leqslant |\vec{\varphi}_1| + |\vec{\varphi}_2| \leqslant f$, on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \int \vec{\varphi}_1.d\mu + \int \vec{\varphi}_2.d\mu = \int \vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2.d\mu \leqslant \mu^{\bullet}_{\Phi}(f),$$

(¹) Dans le cas important où μ est à valeurs dans l'espace des opérateurs $\mathcal{L}(E)$ et où $\Phi(u, x) = u(x)$, cette condition n'est pratiquement jamais réalisée (cf. [11] p. 332-333). Lorsque T est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ la restriction de μ à $\mathcal{D}(T)$ est une distribution vectorielle. Comme $\mathcal{D}$ est nucléaire on pourra sans aucune hypothèse sur μ ou sur Φ définir $\int \vec{\varphi}.d\mu$ pour $\vec{\varphi}$ indéfiniment dérivable à support compact et à valeurs dans F.

ce qui montre, λ_1 et λ_2 étant arbitraires, que

$$\mu^\bullet_\Phi(f_1) + \mu^\bullet_\Phi(f_2) \leqslant \mu^\bullet_\Phi(f),$$

C.Q.F.D.

Le théorème suivant concerne le cas où $F = E'$ et où $\Phi(x, x') = \langle x, x' \rangle$.

Théorème. — *μ étant une mesure de Radon à valeurs dans l'espace de Banach* E, *et Φ étant la forme bilinéaire canonique sur* $E \times E'$, *Φ est compatible avec μ si et seulement si μ est à variation localement bornée, et lorsqu'il en est ainsi on a* $\mu^\bullet_\Phi = |\mu|^\bullet$. *Autrement dit la variation de μ est égale à la Φ-variation de μ et est donnée par la formule :*

6.24. $$|\mu|^\bullet(f) = \sup_{|\vec{\varphi}| \leqslant f} \left| \int \vec{\varphi}.d\mu \right| \quad f \in \mathcal{I}^+,$$

où

$$\vec{\varphi}(t) = \sum_i \varphi_i(t) x'_i \quad \text{et} \quad \int \vec{\varphi}.d\mu = \sum_i \langle \mu(\varphi_i), x'_i \rangle.$$

6.25. Corollaire. — *La variation totale* $|\mu|^\bullet(1)$ *est une fonction semi-continue inférieurement : Si μ_n est une suite de mesures de Radon de variation totale au plus égale à* M, *et telle que pour tout* $\varphi \in \mathcal{K}$ $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\varphi) = \mu(\varphi)$, *la variation totale de μ est au plus égale à* M.

Démonstration. — Supposons que Φ soit compatible avec μ. Alors d'après la proposition précédente l'application $\nu : \varphi \to \mu^\bullet_\Phi(\varphi)$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}_+$, donc une mesure de Radon. Montrons que $|\mu(\varphi)| \leqslant \nu(|\varphi|)$. Pour $x' \in E'$ avec $|x'| = 1$ on a $\langle \mu(\varphi), x' \rangle = \int \vec{\varphi}.d\mu$ où $\vec{\varphi}(t) = \varphi(t)x'$, donc $|\langle \mu(\varphi), x' \rangle| = \left|\int \vec{\varphi}.d\mu\right| \leqslant \mu^\bullet_\Phi(|\vec{\varphi}|) = \nu(|\varphi|)$, de sorte que $|\mu(\varphi)| = \sup_{|x'|=1} |\langle \mu(\varphi), x' \rangle| \leqslant \nu(|\varphi|)$, et que μ est à variation localement bornée, avec $|\mu| \leqslant \nu$. Réciproquement supposons que μ soit à variation localement bornée. Alors il est connu (cf. Bourbaki [2] chap. 6) que pour toute application bilinéaire continue sur $E \times F$ à valeurs dans G, on a l'inégalité $\left|\int \vec{\varphi}.d\mu\right| \leqslant M \int |\vec{\varphi}|\, d|\mu|$, M désignant la norme de l'application bilinéaire. Appliquant ceci à la forme bilinéaire Φ, on voit que l'on a $\mu_\Phi^\bullet \leqslant |\mu|^\bullet$, ce qui prouve que Φ est compatible avec μ et que l'on a $\mu_\Phi^\bullet = |\mu|^\bullet$.

Le théorème de Bourbaki qu'on vient d'utiliser donne un résultat plus précis, à savoir la première partie de la proposition suivante :

6.26. Proposition. — *Soient* E, F *et* G *des espaces de Banach, soit* $\Phi : (x, y) \to x.y$ *une application bilinéaire continue de* $E \times F$ *dans* G, *de norme au plus égale à* 1, *et soit* μ *une mesure de Radon à valeurs dans* E. *Nous définissons la variation de* μ, *finie ou infinie, par la formule* 6.24. *Alors on a l'inégalité* $\mu_\Phi^\bullet \leqslant |\mu|^\bullet$. *Si de plus* $|x| = \sup\limits_{|y| \leqslant 1} |\Phi(x, y)|$ *pour tout* $x \in E$, *on a aussi* $\mu^\bullet \leqslant \mu_\Phi^\bullet$.

Démonstration. — Soit $f \in \mathfrak{J}^+$; si $|\mu|^\bullet(f) = +\infty$ on a évidemment $\mu_\Phi^\bullet(f) \leqslant |\mu|^\bullet(f)$. Si $|\mu|^\bullet(f) < +\infty$, la restriction de μ à l'ouvert $\{t : f(t) > 0\}$ est à variation localement bornée, et en appliquant le résultat de Bourbaki cité ci-dessus à cette restriction on trouve $\mu_\Phi^\bullet(f) \leqslant |\mu|^\bullet(f)$. Démontrons maintenant la seconde assertion : par hypothèse

$$|\mu(\varphi)| = \sup_{|y| \leqslant 1} |\mu(\varphi).y|.$$

Or $\mu(\varphi).y = \int \vec{\varphi}.d\mu$ où $\vec{\varphi}(t) = \varphi(t)y$, et comme $|\vec{\varphi}| \leqslant f$, on a $|\mu(\varphi).y| = \left|\int \vec{\varphi}.d\mu\right| \leqslant \mu_\Phi^\bullet(f)$ de sorte que $|\mu(\varphi)| \leqslant \mu_\Phi^\bullet(f)$ et qu'enfin $\mu^\bullet(f) = \sup\limits_{|\varphi| \leqslant f} |\mu(\varphi)| \leqslant \mu_\Phi^\bullet(f)$.

Il en résulte en particulier que la formule 6.24 s'étend au cas d'une forme bilinéaire quelconque telle que

$$|x| = \sup_{|y| \leqslant 1} |\Phi(x, y)|.$$

Par exemple on peut considérer le cas où μ est à valeurs dans E' et $\vec{\varphi}$ à valeurs dans E (au lieu de considérer alors toutes les fonctions $\vec{\varphi}$ appartenant à $\mathcal{K} \otimes E''$).

Remarque. — Il résulte de ce qui précède que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) μ est à variation localement bornée.

b) Pour toute fonction continue à support compact $\vec{\varphi}$, à valeurs dans E', on peut donner un sens à l'intégrale $\int \vec{\varphi}.d\mu$ (i.e. l'application $\vec{\varphi} \to \int \vec{\varphi}.d\mu$ se prolonge continûment de $\mathcal{K} \otimes E'$ à $\mathcal{K}_{E'}$). Lorsque ces conditions sont remplies il résulte du théorème de Bourbaki déjà invoqué que pour toute application bilinéaire continue $\Phi : (x, y) \to x.y$ de $E \times F$ dans G, on peut définir $\int \vec{f}.d\mu$ pour $\vec{f} \in \mathcal{L}^1_F(|\mu|)$. La proposition 6.26 montre qu'alors $\mathcal{L}^1_F(|\mu|) \hookrightarrow \mathcal{L}^1_{F,\Phi}(\mu)$ (cf. définition 6.21) et on peut par conséquent définir $\int \vec{f}.d\mu$ plus généralement pour $\vec{f} \in \mathcal{L}^1_{F,\Phi}(\mu)$. Au paragraphe suivant on verra que le théorème de convergence dominée est alors valable aussi bien dans l'espace $\mathcal{L}^1_{F,\Phi}(\mu)$ de sorte qu'à priori il n'y a pas de raison de se limiter aux fonctions appartenant à $\mathcal{L}^1_F(|\mu|)$.

7. La classe des espaces $\mathcal{L}^1$.

Fréquemment deux mesures μ et ν ont même espace $\mathcal{L}^1$ et le but de ce paragraphe est d'exposer quelques considérations concernant les espaces $\mathcal{L}^1$ indépendamment d'une mesure particulière.

7.1. *Exemple.* — Soit μ une mesure à valeurs dans un espace localement convexe E. Soit $I : \mathcal{K} \to L^1(\mu)$ l'application naturelle de $\mathcal{K}$ dans $L^1(\mu)$, obtenue par passage au quotient à partir de l'inclusion $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{L}^1(\mu)$. Alors I est une mesure vectorielle et $\mathcal{L}^1(I) = \mathcal{L}^1(\mu)$. Lorsque E est un espace normé, $L^1(\mu)$ est un espace de Banach et l'on a $I^\bullet = \mu^\bullet$. En effet, pour $f \in \mathfrak{J}^+$ $I^\bullet(f) = \sup\limits_{\substack{|\varphi| \leq f \\ \varphi \in \mathcal{K}}} \mu^\bullet(|\varphi|) = \mu^\bullet(f)$.

7.2. *Définition* : *Étant donné un espace $\mathcal{L}^1$, nous dirons que l'application* $I : \mathcal{K} \to L^1$ *est la* mesure canonique *associée à l'espace $\mathcal{L}^1$.*

7.3. *Exemple.* — Soit μ une mesure à valeurs dans un espace normé E, et soit u une isométrie de E. Alors si $\nu = u \circ \mu$ on a $\nu^\bullet = \mu^\bullet$, et à fortiori $\mathcal{L}^1(\nu) = \mathcal{L}^1(\mu)$. Plus particulièrement encore, soit par exemple $\mathcal{F} : \mathcal{K}(R^n) \to L^2(R^n)$ la transformation de Fourier. Alors $\mathcal{L}^1(\mathcal{F}) = \mathcal{L}^2(R^n)$.

Plus généralement si u est une homéomorphie linéaire de l'espace E (ou de E sur F) et si $\nu = u \circ \mu$, on a encore $\mathcal{L}^1(\nu) = \mathcal{L}^1(\mu)$, avec, lorsque E est normé, $\alpha\nu^\bullet \leqslant \mu^\bullet \leqslant \beta\nu^\bullet$ où $0 < \alpha \leqslant \beta$.

7.4. *Exemple.* — Soit E un espace de Banach faiblement Σ-complet (cf. § 5). Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans E, et soit $\tilde{\mu}$ la mesure obtenue à partir de μ en munissant E de sa topologie affaiblie. Alors d'après 5.6 les espaces $\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\mathcal{L}^1(\tilde{\mu})$ coïncident en tant qu'espaces vectoriels mais leurs topologies sont en général différentes.

Ces exemples montrent qu'il convient de préciser ce qu'on entend par deux mesures ayant même espace $\mathcal{L}^1$. Dans le cas du dernier exemple nous ne dirons jamais que les mesures μ et $\tilde{\mu}$ ont même espace $\mathcal{L}^1$, et d'ailleurs, dans la suite nous nous bornerons à considérer des espaces $\mathcal{L}^1$ associés à des mesures à valeurs dans des espaces normés. Lorsque μ et ν sont des mesures à valeurs dans des espaces normés les espaces $L^1(\mu)$ et $L^1(\nu)$ sont aussi normés et nous dirons que les espaces $\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\mathcal{L}^1(\nu)$ sont les mêmes si $\mu^\bullet = \nu^\bullet$. Lorsque les semi-variations sont seulement équivalentes nous dirons que les espaces $\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\mathcal{L}^1(\nu)$ coïncident en tant qu'espaces vectoriels topologiques.

L'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ ne dépend donc pas de la mesure μ mais seulement de la semi-variation $\mu^\bullet$. Pour

$$f \in \mathfrak{I}^+ \ \mu^\bullet(f) = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f,\, \varphi \in \mathcal{K}} \mu^\bullet(\varphi),$$

donc la semi-variation est déterminée par sa restriction à $\mathcal{K}_+$, que, par abus de langage, nous appellerons encore semi-variation de μ.

7.5. Proposition. — *Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace normé* E. *Pour $\varphi \in \mathcal{K}_+$ posons $p(\varphi) = \mu^\bullet(\varphi)$. Alors p possède les propriétés suivantes :*

a) $p(\varphi + \psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi)$; $p(\lambda\varphi) = \lambda p(\varphi)$, $\lambda \geqslant 0$.

b) *Pour* $0 \leqslant \varphi \leqslant \psi$, $p(\varphi) \leqslant p(\psi)$.

Inversement toute application $p : \mathcal{K}_+ \to \mathbf{R}$ satisfaisant les conditions *a*) et *b*) est la semi-variation d'une mesure à valeurs dans un espace normé.

Démonstration. — Seule la réciproque nécessite une démonstration : Soit p une application de $\mathcal{K}_+$ dans $\mathbf{R}$ satisfaisant les conditions *a*) et *b*). Alors d'après *a*) $p(0) = 0$ et d'après *b*) $p(\varphi) \geqslant 0$. Il résulte entre autres de la croissance de p que l'application $\varphi \to p(|\varphi|)$ de $\mathcal{K}$ dans R_+ est une semi-norme, que nous notons encore p. Soit $\mathcal{K}_p$ l'espace $\mathcal{K}$ muni de cette semi-norme. Alors l'identité $\mathcal{K} \to \mathcal{K}_p$ est continue. En effet, si K est un compact, soit $h \in \mathcal{K}_+$ avec $h(t) \geqslant 1$ pour $t \in K$. Alors pour $\varphi \in \mathcal{K}$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ on a $|\varphi| \leqslant \|\varphi\|_\infty h$, de sorte que $p(\varphi) = p(|\varphi|) \leqslant p(h)\|\varphi\|_\infty$, ce qui prouve la continuité. Soit μ l'application composée de l'identité $\mathcal{K} \to \mathcal{K}_p$ et de l'application canonique de $\mathcal{K}_p$ sur l'espace normé associé $\mathcal{K}_p/p^{-1}(0)$. Alors μ est une mesure vectorielle et pour $f \in \mathcal{K}_+$ on a $\mu^\bullet(f) = \sup\limits_{|\varphi| \leqslant f} |\mu(\varphi)| = \sup\limits_{|\varphi| \leqslant f} p(|\varphi|) = p(f)$, de sorte que la mesure μ convient.

7.6. Définition. — *Nous dirons qu'une application p satisfaisant aux conditions a) et b) ci-dessus est une semi-variation.*

Étant donnée une semi-variation p on peut prolonger p aux fonctions positives, comme dans la définition 1.1, et définir ensuite l'espace $\mathcal{L}^1(p)$ (égal à $\mathcal{L}^1(\mu)$ pour toute mesure μ telle que $\mu^\bullet = p$) sans référence à une mesure quelconque. De même on peut définir les fonctions p-mesurables, p-négligeables, l'espace $L^1(p)$, $\mathcal{L}^1_F(p)$ etc... d'une manière évidente.

Certains résultats du paragraphe 3 peuvent alors être formulés ainsi :

7.7. Proposition. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathcal{L}^1(p)$ *contient les fonctions boréliennes bornées à support compact, i.e. la mesure canonique associée est prolongeable.*

b) $\mathcal{L}^1(p)$ *contient les fonctions* χ_K *où* K *est compact (resp. compact* G_δ*).*

c) *Pour tout compact* K *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* $\omega \supset K$, *tel que* $p(\omega - K) \leqslant \varepsilon$.

d) *Pour toute suite* $\varphi_n \in \mathcal{K}_+$ *à support dans un compact fixe, majorée par* 1 *et telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0$ *quel que soit* t, *on a* $\lim\limits_{n\to\infty} p(\varphi_n) = 0$.

De même on a :

7.8. PROPOSITION. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathcal{L}^1(p)$ *est faiblement séquentiellement complet.*

b) $\mathcal{L}^1(p)$ *est faiblement* Σ*-complet.*

c) Toute fonction borélienne f *telle que* $p(|f|) < +\infty$ *appartient à* $\mathcal{L}^1(p)$.

En effet *a*) implique toujours *b*) et ici *b*) implique *a*) comme on le voit en appliquant la proposition 5.9 à la mesure canonique $\mathrm{I} : \mathcal{K} \to \mathrm{L}^1(p)$. De même *b*) implique *c*) grâce à 5.7 appliqué à la mesure canonique. Enfin *c*) implique *a*). On le voit en utilisant une méthode de démonstration semblable à celle employée pour 5.9, en prenant soin de prendre comme fonction limite une fonction borélienne, ce qu'on peut toujours.

Il est clair qu'un grand nombre d'espaces de Banach qu'on rencontre en analyse sont isomorphes à un espace L^1 (avec la norme ou pour la topologie seulement). Ainsi les espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\mathcal{C}(\mathrm{K})$, $\mathcal{C}_0(\mathrm{T})$, certains espaces d'Orlicz et, de façon moins évidente, l'espace $\mathrm{M} = \mathcal{C}_0'$ sont isomorphes à un espace L^1. Tout espace de Hilbert H est isomorphe à un espace L^1 : si $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une base orthonormée de H, H est isomorphe, avec sa norme, à l'espace $\mathrm{L}^1(\mu)$, où μ est la mesure de masse e_i au point $i \in \mathrm{I}$. Plus généralement si E est un espace de Banach admettant une base inconditionnelle $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ (i.e. une famille $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'éléments de E telle que tout $x \in \mathrm{E}$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} x_i e_i$ (famille sommable)) l'espace E est isomorphe à $\mathrm{L}^1(\mu)$, où μ est la mesure de masse e_i au point $i \in \mathrm{I}$. En effet $\mathrm{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\mathcal{L}^1(\mu)$ est l'ensemble des familles $f = (f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de scalaires telle que la famille $(f_i e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ soit sommable dans E (cf. 3.12) et l'application $f \to \int f\,d\mu = \sum_{i\in\mathrm{I}} f_i e_i$ de $\mathrm{L}^1(\mu)$ dans E est continue et ici par hypothèse bijective, donc bi-continue d'après le théorème de Banach.

(Remarque : cela démontre la continuité des formes linéaires $x \to x_i$).

Signalons qu'une classe d'espaces voisins des espaces $\mathcal{L}^1_{\mathrm{C}}$ a été étudiée par Morse et Transue ([1]) sous le nom de « M.T. Spaces ».

Considérons un exemple tiré du paragraphe précédent sur l'intégration de fonctions vectorielles. E, F et G étant des espaces de Banach, $\Phi : (x, y) \to x.y$ étant une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G, et μ étant une mesure de Radon à valeurs dans E, on définit la fonction $\mu^{\bullet}_{\Phi}$ (cf. 6.18) sur $\mathfrak{I}^+$. Lorsque $\mu^{\bullet}_{\Phi}(\varphi) < \infty$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}_+$, $\mu^{\bullet}_{\Phi}$ est une semi-variation au sens précédent. Alors si I est la mesure canonique associée, on a précisément $\mathfrak{L}^1_{F,\Phi}(\mu) = \mathfrak{L}^1_F(I)$ (cf. 6.1 et 6.21). Il en résulte que les propriétés démontrées au début du paragraphe 6 pour les espaces $\mathfrak{L}^1_F(\mu)$ sont aussi valables pour les espaces $\mathfrak{L}^1_{F,\Phi}(\mu)$. En particulier lorsque I est prolongeable, le théorème de convergence dominée est valable dans $\mathfrak{L}^1_{F,\Phi}(\mu)$. Cela est en particulier le cas lorsque μ est à variation localement bornée car alors $\mu^{\bullet}_{\Phi} \leqslant c^{ste} |\mu|^{\bullet}$ (cf. 7.7). Cela justifie les assertions faites à la fin du paragraphe 6.

Considérons enfin un exemple tiré de la théorie du potentiel. Dans la théorie de l'énergie on étudie habituellement une forme quadratique positive Q, définie dans un sous-espace riche D de $\mathcal{K}(T)$, et on complète l'espace préhilbertien correspondant pour obtenir l'espace H des « potentiels d'énergie finie » (cf. Deny [3]). (Le premier exemple de cette situation est en théorie Newtonienne où $Q(\varphi) = \int_{R^n} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^2 dx$). La « capacité » associée à la forme quadratique peut alors être introduite comme suit : Pour $\varphi \in \mathcal{K}$ on définit $q(\varphi) = \inf_{\substack{|\varphi| \leqslant \psi \\ \psi \in D}} Q(\psi)$ de sorte que $p = q^{1/2}$ est une semi-variation, La capacité d'un compact peut alors être définie comme étant $q(K) = p^2(K)$, celle d'un ouvert comme étant $q(\omega) = p^2(\omega) = \sup_{K \subset \omega} q(K)$, et la capacité extérieure d'un ensemble A quelconque est définie comme étant $q^*(A) = \inf_{A \subset \omega,\ \omega \text{ ouvert}} q(\omega) = p^*(A)^2$. Autrement dit, la capacité extérieure n'est autre que le carré du prolongement strict de la semi-variation p (cf. Compléments A, § 1). Lorsqu'on a $Q(|\varphi|) \leqslant Q(\varphi)$, ce qui est le cas en théorie Newtonienne, et dans la théorie des espaces de Dirichlet qui la géné-

([1]) Cf. Bibliographie de Morse and Transue [12].

ralise, on a $q(\varphi) \leqslant Q(\varphi)$, de sorte que le domaine D muni de la semi-norme $Q^{1/2}$ s'injecte continuement dans l'espace $\mathcal{K}$ muni de p, et par suite dans $\mathcal{L}^1(p)$. Alors, dans des conditions inutiles à préciser ici [1] l'espace complété H peut être identifié à un sous-espace de $L^1(p)$. Le fait que H apparaît comme espace de classes de fonctions p-mesurables s'exprime alors en disant que ces fonctions sont (localement) quasi-continues. En fait, lorsqu'on cherche à compléter l'espace D on le fait naturellement avec aussi peu de fonctions que possible, donc par exemple avec les fonctions f qui sont strictement p-intégrables (cf. Compléments § 1). Ces fonctions ont la propriété qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un ouvert ω, avec $p(\omega) \leqslant \varepsilon$, tel que la restriction à $\complement\omega$ soit continue, et c'est cette propriété qu'on appelle quasi-continuité en théorie du potentiel.

[1] On trouvera des précisions dans l'article de Laurent Schwartz [15].

Appendice I.

Critères de compacité faible et théorèmes de convergence dans l'espace des mesures de Radon bornées.

Dans cet appendice nous citons certains théorèmes dont nous nous servons dans ce travail.

T étant un espace localement compact nous désignons par $\mathcal{C}_0(\mathrm{T}) = \mathcal{C}_0$ l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini, muni de la norme $\|\varphi\| = \sup_{t \in \mathrm{T}} |\varphi(t)|$, et par $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\mathrm{T})$ l'espace dual des mesures de Radon bornées. Le corps des scalaires est indifféremment **R** ou **C**. La norme dans M est notée $\|\alpha\| = \sup_{|\varphi| \leqslant 1} |\alpha(\varphi)|$. A chaque mesure $\alpha \in \mathrm{M}$ on associe la mesure positive $|\alpha|$, variation de α, par la formule

$$|\alpha|(\varphi) = \sup_{|\psi| \leqslant \varphi} |\alpha(\psi)|, \ \varphi \geqslant 0.$$

Nous notons $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathrm{T}, \mathcal{B})$ l'espace des mesures (fonctions dénombrablement additives d'ensembles) sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de T. Lorsque $m \in \mathfrak{M}$ la variation $|m|$ de m est une mesure positive définie par $|m|(\mathrm{A}) = \sup_{\Sigma \mathrm{A}_i \subset \mathrm{A}} \Sigma |m(\mathrm{A}_i)|$, la borne supérieure étant prise par rapport à toutes les familles finies de parties boréliennes de A deux à deux disjointes. Muni de la norme $\|m\| = |m|(\mathrm{T})$, l'espace $\mathfrak{M}$ est un espace de Banach.

Quand on pose $m(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} d\alpha$, la correspondance $\alpha \to m$ est linéaire, isométrique, conserve la relation d'ordre entre mesures réelles, et le passage des mesures à leurs variations. M étant en outre complet nous l'identifions à un sous-espace *fermé* de l'espace $\mathfrak{M}$. Les éléments de M se distinguent alors des autres éléments de $\mathfrak{M}$ par leur régularité : Pour tout ensemble borélien A on a $\inf_{K \subset A} |m|(A - K) = 0$, où K est compact.

Lorsque λ est une mesure de Radon positive arbitraire l'application qui à $u \in L^1(\lambda)$ fait correspondre la mesure de densité u par rapport à λ est une isométrie de $L^1(\lambda)$ dans M; nous identifions $L^1(\lambda)$ à son image dans cette application, l'ensemble des mesures absolument continues par rapport à λ. $L^1(\lambda)$ étant complet s'identifie ainsi à un sous-espace fermé de M.

Nous appelons topologie faible de M la topologie $\sigma(M, M')$ (et non la topologie $\sigma(M, \mathcal{C}_0)$ qu'on pourrait appeler étoile-faible (* -faible)). La topologie faible de M est la topologie induite dans M par la topologie faible de $\mathfrak{M}$. M étant aussi faiblement fermé dans l'espace $\mathfrak{M}$, nous pouvons déduire des critères de compacité faible dans $\mathfrak{M}$ des critères correspondants dans l'espace M (ce qui est la motivation de l'introduction de l'espace $\mathfrak{M}$ ici).

La topologie faible de M induit dans $L^1(\lambda)$ la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$, et comme tout élément de L^∞ admet un représentant borélien, cette topologie est identique à $\sigma(L^1, B)$ où B est l'espace des fonctions boréliennes bornées identifié à une partie du dual de M. D'après le théorème d'Eberlein Smulian une partie H de M (ou de $\mathfrak{M}$) est faiblement relativement compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de H on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement. Une suite quelconque d'éléments de M est contenue dans un sous-espace $L^1(\lambda)$ convenable (les mesures α_n sont absolument continues par rapport à la mesure

$$\lambda = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{\alpha_n}{1 + \|\alpha_n\|}\Big),$$

de sorte que la suite α_n converge faiblement vers α si et seulement si $\alpha_n(f)$ converge vers $\alpha(f)$ pour toute fonction borélienne bornée f.

Avant de citer les critères de compacité faible remarquons que toute partie faiblement relativement compacte de M est faiblement bornée donc bornée. Pour simplifier les énoncés nous supposerons donc dans toute la suite que H est une partie bornée de M.

Les critères de compacité faible suivants sont dus à Grothendieck ([10], p. 147). Une partie bornée de M, H, est faiblement relativement compacte si et seulement si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

C_1. *Pour toute suite* $(\varphi_n)_{n\in N}$ *d'éléments de* $\mathcal{C}_0$, *uniformément bornée et tendant vers zéro simplement* $(|\varphi_n| \leqslant k, \lim_n \varphi_n(t) = 0)$ *on a*

$$\lim_n \alpha(\varphi_n) = 0$$

uniformément par rapport à $\alpha \in H$.

C_2. *Pour toute suite* $(\omega_n)_{n\in N}$ *d'ouverts deux à deux disjoints on a*

$$\lim_n \alpha(\omega_n) = 0$$

uniformément par rapport à $\alpha \in H$.

C_3. *L'ensemble des deux conditions suivantes :*

a) Pour tout compact K *et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un ouvert* ω *contenant* K *tel que* $|\alpha|(\omega - K) \leqslant \varepsilon$ *quel que soit* $\alpha \in H$, *et*

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe un compact* K *tel que* $|\alpha|(T - K) \leqslant \varepsilon$, *quel que soit* $\alpha \in H$.

De ce dernier critère de Grothendieck on peut évidemment déduire le critère suivant (condition équivalente aux précédentes) :

C_4. *Pour tout ouvert* ω *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* $K \subset \omega$ *tel que* $|\alpha|(\omega - K) \leqslant \varepsilon$ *quel que soit* $\alpha \in H$.

On voit, en effet, que cette condition est nécessaire en appliquant *b*) aux restrictions des α à ω, (restrictions qui forment évidemment une partie faiblement relativement compacte de $M(\omega)$), et de C_4 on déduit *b*) en prenant $\omega = T$ et *a*) en appliquant C_4 à l'ouvert $\Omega = \complement K$, ce qui permet de trouver un compact $F \subset \Omega$ tel que $|\alpha|(\Omega - F) \leqslant \varepsilon$ quel que soit $\alpha \in H$; si on prend alors $\omega = \complement F$ on a $\omega - K = \Omega - F$ de sorte que $|\alpha|(\omega - K) \leqslant \varepsilon$ pour tout $\alpha \in H$.

Remarque. — De la condition C_3 on déduit immédiatement le fait suivant : Si l'ensemble H est relativement faiblement compact il en est de même de l'ensemble sub$H$ des $\beta \in M$ tel qu'il existe $\alpha \in H$ avec $|\beta| \leqslant |\alpha|$. En particulier, lorsque α parcourt une partie faiblement relativement compacte les variations $|\alpha|$ font de même.

Nous aurons besoin d'une variante de ce critère qui est la suivante :

C_5. *Pour tout ensemble borélien* A *et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* ω *ouvert et* K *compact, avec* $K \subset A \subset \omega$ *tels que* $|\alpha|(\omega - K) \leqslant \varepsilon$ *quel que soit* $\alpha \in H$.

Démonstration. — Que cette condition implique que H, supposé borné, est faiblement compact, résulte de C_4 en prenant $A = \omega$. Réciproquement soit H un ensemble faiblement compact de mesures positives. Pour tout $\alpha \in H$

$$\inf_{K \subset A \subset \omega} \alpha(\omega - K) = 0$$

d'après la régularité intérieure et extérieure de α. Les fonctions $\alpha \to \alpha(\omega - K)$ forment une famille filtrante décroissante de fonctions continues sur H, convergeant vers zéro en chaque point $\alpha \in H$. Il résulte donc du lemme de Dini que la convergence est uniforme par rapport à $\alpha \in H$, ce qui prouve la proposition.

Voici deux autres conditions équivalentes aux précédentes (H étant bornée) :

C_6. *Pour toute suite décroissante* $(A_n)_{n \in N}$ *de parties boréliennes de* T *dont l'intersection est vide, on a*

$$\lim_n \alpha(A_n) = 0$$

uniformément par rapport à $\alpha \in H$.

(On dit que les α sont uniformément σ-additives).

C_7. *Il existe une mesure positive* $\lambda \in M$ *telle que*

$$\lim_{\lambda(A) \to 0} \alpha(A) = 0$$

uniformément par rapport à $\alpha \in H$.

Lorsqu'il en est ainsi on peut choisir la mesure λ *de la forme*

$$\lambda = \sum_n c_n |\alpha_n|$$

ou $(c_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *est une suite sommable de nombres positifs et ou* $(\alpha_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *est une suite extraite de* H.

La condition signifie, de façon précise, que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour A borélien avec $\lambda(\mathrm{A}) \leqslant \eta$ on ait $|\alpha(\mathrm{A})| \leqslant \varepsilon$ quel que soit $\alpha \in \mathrm{H}$.

On pourrait dire que les mesures $\alpha \in \mathrm{H}$ sont uniformément absolument continues par rapport à λ.

Ces critères sont des adaptations de critères de compacité faible démontrés par Bartle, Dunford et Schwartz ([1] 1.3 et 1.4, [8] IV 9.1, 9.2) dans le cadre des mesures ensemblistes. Nous appliquons ces critères à l'espace $\mathfrak{M}(\mathrm{T}, \mathcal{B})$ et en déduisons les conditions ci-dessus concernant des mesures de Radon, en remarquant que M est un sous-espace fermé, donc faiblement fermé, de $\mathfrak{M}(\mathrm{T}, \mathcal{B})$. Le fait que λ appartient à M résulte de la construction de λ comme somme d'une série d'éléments de M.

Remarque. — D'après la remarque suivant C_4 on obtient encore une condition équivalente en écrivant que

$$\lim_{\lambda(\mathrm{A})\to 0} |\alpha|(\mathrm{A}) = 0$$

uniformément par rapport à $\alpha \in \mathrm{H}$.

Voici maintenant quelques théorèmes de convergence :

T_1. Théorème (Dieudonné, Grothendieck) :

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *une suite de mesures de Radon bornées. Pour que* α_n *converge faiblement dans* M *il est suffisant (et évidemment nécessaire) que pour tout ouvert* ω, *la suite* $\alpha_n(\omega)$ *converge.*

Autrement dit : *si pour tout ouvert* ω, *la suite* $\alpha_n(\omega)$ *est convergente, il existe* $\alpha \in \mathrm{M}$ *tel que* $\alpha_n(g)$ *tend vers* $\alpha(g)$ *quel que soit la fonction borélienne bornée* g.

Ce théorème a été démontré par Dieudonné dans le cas où T est un espace compact métrisable ([4] prop. 7, 8, 9.) et sans restriction sur T par Grothendieck ([10], p. 150).

Nous utilisons en outre les corollaires suivants :

T_2. Corollaire. — *Soit* λ *une mesure de Radon arbitraire. Soit* $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{L}^1(|\lambda|)$ *telle que pour tout ouvert* ω *la suite* $\int_\omega f_n\, d\lambda$ *soit convergente. Alors il existe* $f \in \mathcal{L}^1(|\lambda|)$ *tel que* $\lim_n \int_\omega f_n\, d\lambda = \int_\omega f\, d\lambda$ *et que, par conséquent,*

$\lim\limits_n \int gf_n \, d\lambda = \int gf \, d\lambda$ *quelle que soit la fonction* λ*-mesurable bornée* g.

Cela résulte immédiatement du théorème précédent et du fait que l'espace $L^1(|\lambda|)$ est faiblement fermé dans M.

Remarque. — Si, sous les hypothèses du théorème 2 ci-dessus, la suite f_n convergeait de plus presque partout vers une fonction g on aurait nécessairement $f(t) = g(t)$ p.p.. En effet comme f_n converge faiblement vers f il existe une suite de barycentres des f_n convergeant vers f en norme, et de cette suite on peut extraire une sous-suite convergeant presque partout vers f; or la suite des barycentres et la sous-suite extraite convergent encore presque partout vers g, et par conséquent $f(t) = g(t)$ p.p. (On montre qu'en fait f_n converge alors en norme vers f, mais nous n'aurons pas besoin de cela).

T_3. Corollaire. — *Les espaces* M *et* $L^1(\lambda)$ *sont faiblement séquentiellement complets.*

Enfin nous nous servons du théorème suivant de Dieudonné :

T_4. Théorème (Dieudonné). — *Soit* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* M *telle que pour tout ouvert* ω *on ait* $\sup\limits_n |\alpha_n(\omega)| < +\infty$. *Alors* $\sup\limits_n \|\alpha_n\| < +\infty$, i.e. *la suite* α_n *est bornée dans* M.

Remarque. — Naturellement le théorème s'étend aussitôt à une famille quelconque de mesures (une famille dont toute sous-suite est bornée est elle-même bornée).

Dieudonné a démontré ce théorème dans le cas où T est compact ([4] prop. 9) et le cas des mesures bornées s'en déduit immédiatement en prolongeant les mesures au compactifié d'Alexandroff de T en leur attribuant la masse zéro au point à l'infini.

Les prédécesseurs dans le cadre ensembliste de ces théorèmes sont les théorèmes de Vitali-Hahn-Saks et ses corollaires ([8] III, 7.2) et le théorème de Nikodym ([8] IV, 9.8).

Nous utiliserons de façon essentielle le théorème de Vitali-Hahn-Saks :

Théorème. — *Soit* T *un ensemble,* $\mathfrak{B}$ *une tribu sur* T, λ *une mesure positive* bornée *sur* $(T, \mathfrak{B})$ *et soit enfin* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une* *suite de mesures sur* $(\mathrm{T}, \mathscr{B})$ *absolument continues par rapport à* λ (i.e. $\lim\limits_{\lambda(\mathrm{A})\to 0} \mu_n(\mathrm{A}) = 0$) *(éventuellement à valeurs vectorielles). Alors si pour tout* $\mathrm{A} \in \mathscr{B}$, *la suite* $\mu_n(\mathrm{A})$ *converge, les* μ_n *sont uniformément absolument continues par rapport à* λ (i.e. $\lim\limits_{\lambda(\mathrm{A})\to 0} \mu_n(\mathrm{A}) = 0$ *uniformément par rapport à* n). *En particulier pour toute suite* $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{N}}$ *d'éléments de* $\mathscr{B}$, *décroissante et d'intersection vide,* $\lim\limits_{i\to\infty} \mu_n(\mathrm{A}_i) = 0$ *uniformément par rapport à* n, *ce qui entraîne notamment que la fonction additive d'ensemble* μ, *définie par* $\mu(\mathrm{A}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\mathrm{A})$ *est dénombrablement additive.*

Appendice II.

Théorème d'Orlicz et généralisations.

Dans cet appendice nous avons rassemblé quelques résultats concernant des familles sommables, dont nous aurons besoin pour ce travail.

II. 1. Proposition. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique séparé sur* $\mathbf{R}$ *ou sur* $\mathbf{C}$. *Soit* $\mathcal{T}$ *une topologie séparée moins fine que la topologie donnée de* E, *telle que* E *possède un système fondamental de voisinages de zéro, fermés pour* $\mathcal{T}$ (1). *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *Toute famille* $(x_i)_{i \in I}$ *d'éléments de* E *dont toutes les sous-familles sont sommables pour la topologie* $\mathcal{T}$ *est sommable.*

2) *Même énoncé avec* I *dénombrable.*

3) *Pour toute suite* $(x_i)_{i \in N}$ *dont toutes les sous-suites sont sommables pour* $\mathcal{T}$, *on a* $\lim_{i \to \infty} x_i = 0$.

Démonstration : 1) implique 2) et 2) implique 3) trivialement. Montrons que 1) est une conséquence de 3). Pour montrer que la somme $\sum_{i \in I} x_i$ converge au sens de la topologie donnée de E il suffit de montrer que les sommes partielles finies forment une base de filtre de Cauchy. Pour le prouver nous raisonnons par l'absurde. Au cas contraire il existerait un voisinage V de zéro et une suite K_n de parties finies de I deux à deux disjointes tels que $y_n = \sum_{i \in K_n} x_i \notin V$. Or la suite y_n est sommable pour $\mathcal{T}$ ainsi que toutes ses sous-suites, donc tend vers zéro d'après l'hypothèse 3). Cela est contradictoire et prouve la proposition.

(1) Dans le cas où les topologies considérées sont localement convexes, il revient au même de dire que E possède un système fondamental de semi-normes continues qui sont semi-continues inférieurement pour la topologie $\mathcal{T}$; ou si $\mathcal{T} = \sigma(E, H)$, que H est déterminant (cf. note p. 89).

II.2. Définition. — *Nous dirons qu'une topologie* $\mathfrak{T}$ *possède la propriété d'Orlicz, relativement à la topologie donnée de* E, *lorsque toute suite d'éléments de* E, *dont toutes les sous-suites sont sommables pour la topologie* $\mathfrak{T}$, *est sommable pour la topologie donnée de* E. *Lorsque* H *est un ensemble de formes linéaires continues sur* E, *nous dirons que* H *possède la propriété d'Orlicz lorsque la topologie* $\sigma(E, H)$ *de la convergence simple dans* H *la possède.*

Remarque. — Dans tout ce qui suit, et dans le texte principal, l'hypothèse de II.1. sera vérifiée, de sorte qu'on a alors deux autres définitions équivalentes.

Le théorème d'Orlicz et Banach affirme que la topologie affaiblie d'un espace normé possède la propriété d'Orlicz (voir Pettis [13], p. 281) et ce résultat s'étend immédiatement aux espaces localement convexes en considérant chaque semi-norme séparément. Des généralisations ont été données par Dunford ([6], p. 326) et par Grothendieck ([10], p. 141). Le théorème de Pettis (voir [8] IV, 10.1) selon lequel une fonction faiblement dénombrablement additive d'ensembles est dénombrablement additive est évidemment équivalent au théorème d'Orlicz. Nous utiliserons le critère suivant :

II. 3. Théorème. — *Soit* E *un espace normé, et soit* H *une partie de* E' *telle que* :

a) $|x| = \sup\limits_{x' \in H \cap B'} |\langle x, x' \rangle|$ (B' *boule unité de* E') *et que*

b) *Toute partie dénombrable de* E *est contenue dans un sous-espace vectoriel* F, *séparable pour la topologie donnée de* E *et fermé pour la topologie* $\sigma(E, H)$.

Alors H *possède la propriété d'Orlicz.*

Remarque. — la condition *b*) est automatiquement satisfaite si E est séparable.

Remarque. — le même théorème est valable pour les espaces localement convexes si l'on remplace la condition *a*) par : la topologie donnée de E est celle de la convergence uniforme dans les parties équi-continues de H.

Ce théorème est impliqué par le théorème de Dunford ([6], p. 326) dans le cas particulier où H est un sous-espace vectoriel fermé de E', mais nos applications concernent le plus souvent des cas où H, ou l'espace vectoriel engendré par H, n'est pas fermé. Pour la démonstration nous pourrions renvoyer le lecteur à la démonstration donnée dans le traité de Dunford et Schwartz du théorème de Pettis, qui ne nécessiterait aucune modification, mais, vu la grande importance de ce critère pour ce travail, nous préférons reproduire cette démonstration ici :

Démonstration. — Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{N}}$ une suite d'éléments de E dont toutes les sous-suites sont sommables dans E pour la topologie $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{H})$; et montrons que x_i tend vers zéro. Nous nous ramenons d'abord, grâce à l'hypothèse *b*), au cas où E est séparable en remplaçant E par le plus petit sous-espace $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{H})$-fermé contenant les x_i, et contenant par conséquent aussi les sommes s_A définies par

$$\langle s_\mathrm{A}, x'\rangle = \sum_{i\in\mathrm{A}} \langle x_i, x'\rangle \quad x' \in \mathrm{H}, \mathrm{A} \subset \mathrm{N}.$$

Supposons, en raisonnant par l'absurde, que la suite x_i ne tende pas vers zéro dans E. Alors il existe une sous-suite x_{i_k} et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que $|x_{i_k}| > \varepsilon$, et en remplaçant la suite (x_i) par la sous-suite, qui vérifie les mêmes hypothèses que la suite donnée, nous pouvons supposer que l'on a $|x_i| > \varepsilon$. Soit alors $x'_i \in \mathrm{H} \cap \mathrm{B}'$ tel que $|\langle x_i, x'_i\rangle| > \varepsilon$. (Dans le cas localement convexe général on prendra $|x| = \sup_{x'\in\mathrm{H}_1} |\langle x, x'\rangle|$ où H_1 est une partie équi-continue de H, et $x'_i \in \mathrm{H}_1$). La suite x'_i étant équi-continue, et E étant séparable, on peut extraire de cette suite une sous-suite convergeant pour la topologie $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$, et nous pouvons supposer que la suite elle-même converge déjà. Soit A une partie quelconque de N et considérons les fonctions d'ensembles μ_n définies par

$$\mu_n(\mathrm{A}) = \sum_{i\in\mathrm{A}} \langle x_i, x'_n\rangle = \langle s_\mathrm{A}, x'_n\rangle.$$

Alors ces fonctions d'ensembles sont des mesures absolument continues par rapport à la mesure de masse $1/2^i$ placée au point i de N, et pour tout A la limite $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\mathrm{A})$ existe. Il résulte donc du théorème de Vitali-Hahn-Saks, cité à la fin de l'appendice I, que l'on a $\lim_{i\to\infty} \mu_n(\{i\})$ uniformément par rapport à n, c'est-à-dire, que l'on a $\lim_{i\to\infty} \langle x_i, x'_n\rangle = 0$ uniformément par rapport à n, ce qui entraîne que $\lim\limits_{i\to\infty} \langle x_i, x'_i\rangle = 0$ en contradiction avec la construction des x'_i.

Soit K un espace topologique compact et soit E un espace normé. Nous notons $\mathcal{C}_E(K)$ l'espace des fonctions continues sur K à valeurs dans E, muni de la norme $\|\varphi\| = \sup\limits_{t\in K} |\varphi(t)|$. Nous appelons topologie de la convergence simple (resp. simple faible) la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi \to \varphi(t)$ de $\mathcal{C}_E(K)$ dans E (resp. dans E muni de sa topologie affaiblie).

Soit I un ensemble et soit pour $1 \leqslant p < +\infty$, $l^p_E(I)$ l'espace des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E telles que $\|x\| = \left(\sum\limits_{i\in I} |x_i|^p\right)^{1/p} < +\infty$, muni de la topologie définie par cette norme. La topologie de la convergence simple (simple faible) est la moins fine rendant continues les applications $x \to x_i$ de $l^p_E(I)$ dans E (E affaiblie).

II. 4. Théorème. — *Dans* $\mathcal{C}_E(K)$ *et* $l^p_E(I)$ *la topologie de la convergence simple (faible) possède la propriété d'Orlicz. Si* K *est métrisable la topologie de la convergence simple dans une partie partout dense* $D \subset K$ *possède la propriété d'Orlicz.*

II.5. Corollaire. — *Dans l'espace* $c_E(N)$ *des suites convergentes d'éléments de* E, *et dans l'espace* $\mathcal{C}_{0,E}(T)$ (T *localement compacte*) *la topologie de la convergence simple possède la propriété d'Orlicz.*

Démonstration. — On peut d'abord se ramener aussitôt au cas où E est séparable. Si $(\varphi_n)_{n\in N}$ est une suite dans $\mathcal{C}_E(K)$, soit $A_n = \varphi_n(K)$. A_n est compact métrisable, donc contient une partie dénombrable partout dense D_n. Si F est l'espace vectoriel fermé engendré par $\bigcup\limits_n D_n$, F est séparable et $\varphi_n(t) \in F$ pour tout t et tout n. De même si $(x_n)_{n\in N}$ est une suite d'éléments de $l^p_E(I)$ il existe une partie dénombrable $J \subset I$ telle que pour tout n $x_n(i) = 0$ $i \in \complement J$. Si F est l'espace fermé engendré par les $x_n(i)$, on a $x_n(i) \in F$ pour tout i et n, et F est séparable. Alors dans le cas où K est métrisable, la propriété résulte directement du théorème 3. Il suffit de prendre pour H l'ensemble des formes linéaires

$\varphi \to \langle \varphi(t), x' \rangle$ où t parcourt une partie partout dense donnée de K et où x' parcourt la boule unité de E'. H vérifie alors les hypothèses du théorème 3, car

$$\|\varphi\| = \sup_{x' \in B',\, t \in D} |\langle \varphi(t), x' \rangle|$$

et $\mathcal{C}(K)$ et E étant séparables, il en est de même de l'espace $\mathcal{C}_E(K) \subset \mathcal{C}(K) \widehat{\otimes}_\varepsilon E$.

Lorsque K n'est pas métrisable on applique encore le théorème 3 avec H comme précédemment, D étant maintenant égal à K. Il suffit de vérifier l'hypothèse *b*). Soit $(\varphi_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_E(K)$ et supposons déjà E séparable. Soit F le sous-espace de $\mathcal{C}_E(K)$ des fonctions constantes sur les classes d'équivalences de la relation d'équivalence entre points de K : « $\varphi_n(t) = \varphi_s(s)$ quel que soit n ». F est évidemment fermé pour la topologie de la convergence simple faible et F est isomorphe à l'espace $\mathcal{C}_E(K_1)$ où K_1 est le quotient de K par la relation d'équivalence précédente. Comme K_1 est un espace compact métrisable $\mathcal{C}_E(K_1)$ est séparable et il en est de même de F.

Il reste à considérer le cas de l'espace $l^p_E(I)$. On a déjà vu que toute suite de cet espace est contenue dans un espace $l^p_F(J)$ où F est un sous-espace séparable de E, et où J est une partie dénombrable de I. Il est facile de voir qu'un tel sous-espace est séparable, et la propriété résulte alors aussitôt du théorème 3 en prenant pour H l'ensemble des formes linéaires sur $l^p_E(I)$ de la forme $x \to \sum_{i\in K} \langle x_i, x'_i \rangle$ où K est une partie finie de I et où $\sum_{i\in K} |x'_i|^{p'} \leqslant 1$.

Remarque. — Des modifications évidentes dans la démonstration précédente montreraient que si H est une partie de E' satisfaisant aux hypothèses du théorème 3, la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi \to \varphi(t)$ (ou $x \to x_i$) de $\mathcal{C}_E(K)$ (ou $l^p_E(I)$) dans E muni de la topologie $\sigma(E, H)$, possède encore la propriété d'Orlicz.

II. 6. *Exemple.* — Soit $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions continues complexes sur un espace compact K, et supposons que pour tout $t \in K$ on ait $\sum_{i\in I} |\varphi_i(t)| < +\infty$ et que pour toute partie A de I les sommes

$$s_A(t) = \sum_{i \in A} \varphi_i(t)$$

soient des fonctions continues de t. Alors la convergence de ces sommes est uniforme par rapport à t. (En particulier $\varphi_i = 0$ sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de i).

Cet exemple contient comme cas particulier le théorème d'Orlicz lui-même. Il suffit de l'appliquer avec pour espace compact la boule unité du dual d'un espace normé E muni de la topologie $*$-faible.

D'autre part on peut remarquer que le cas des fonctions vectorielles se déduit immédiatement du cas scalaire, en remarquant qu'une fonction continue φ à valeurs dans E peut être identifiée à une fonction scalaire continue sur $K \times B'$ par la formule $\varphi(t, x') = \langle \varphi(t), x' \rangle$, de sorte que $\mathcal{C}_E(K) \subset \mathcal{C}(K \times B')$ (injection isométrique). De cette façon on voit que la généralisation avec une partie $H \subset B'$ est valable si H satisfait la condition *a*) du théorème 3 et si en outre H est fermée dans B' pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Nous aurons besoin d'une autre application de cette propriété que voici :

II. 7. — Corollaire. — *Soient* E *et* F *deux espaces normés. Alors sur* $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ *la topologie la moins fine rendant continue les applications* $u \to u(x', y') = \langle u, x' \otimes y' \rangle$ *où* x' *parcourt* E' *et ou* y' *parcourt* F', *possède la propriété d'Orlicz.*

En effet si B' (resp. C') est la boule unité de E' (resp. F') $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{C}(B' \times C')$.

Remarque: Dans $l^\infty(N)$ la topologie de la convergence simple ne possède pas la propriété d'Orlicz. Même la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$ ne la possède pas, ni par conséquent (d'après le théorème d'Orlicz) la topologie $\tau(l^\infty, l^1)$. En effet si e_n est la suite dont le $n^{\text{ième}}$ terme est 1, les autres étant 0, on a $1_A = \sum_{n \in A} e_n$ au sens de la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$, alors que $|e_n| = 1$. Cela montre d'abord que l'hypothèse *b*) n'est pas superflue dans le théorème 3. et puis, qu'en général la topologie de la convergence simple dans une partie dense d'un espace compact ne possède pas la propriété d'Orlicz. On peut en effet identifier $l^\infty(N)$ à $\mathcal{C}(K)$, K étant le compactifié de Stone-Čech de N.

N est alors une partie partout dense de K et dans $\mathcal{C}(K)$ la topologie de la convergence simple dans N ne possède pas la propriété d'Orlicz.

Par contre il est facile de voir que dans l^∞ la topologie de la convergence simple possède la propriété d'Orlicz relativement à la topologie $\tau(l^\infty, l^1)$. Il suffit en effet de montrer qu'il la possède relativement à la topologie $\sigma(l^\infty, l^1)$, ou relativement à n'importe quelle topologie compatible avec la dualité entre l^∞ et l^1 [1]. Si l'on prend la topologie la moins fine rendant continues les applications de l^∞ dans l^1 définies par $y \to x.y$ où x parcourt l^1, la propriété se déduit aussitôt du fait que dans l^1 la topologie de la convergence simple possède la propriété d'Orlicz.

L'exemple ci-dessus montre qu'en général dans l'espace normé E', la topologie $\sigma(E', E)$ ne possède pas la propriété d'Orlicz. Néanmoins le théorème 3 montre que si E' est un dual fortement *séparable* la topologie $*$-faible possède la propriété d'Orlicz. D'autre part nous montrons au paragraphe 2 que dans l'espace $M = \mathcal{C}_0'$ des mesures bornées, la topologie $\sigma(M, \mathcal{K})$ possède la propriété d'Orlicz.

Voici enfin un résultat concernant les espaces non localement convexes :

II.8. PROPOSITION. — *Dans l'espace $l^p(I)$ avec $0 < p < 1$, la topologie de la convergence simple possède la propriété d'Orlicz.*

Démonstration. — Soit $(x^n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de $l^p(I)$, sommable, ainsi que toutes ses sous-suites, pour la topologie de la convergence simple. Les x^n sont toutes nulles dans le complémentaire d'un sous-ensemble dénombrable de I, donc nous pouvons supposer que $I = N$.

Considérons la fonction d'ensembles μ définie par

$$\mu(A) = \sum_{n\in A} x^n \in l^p(N)$$

(somme convergeant pour la topologie de la convergence simple, de sorte que la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de $\mu(A)$ est $\sum_{n\in A} x_i^n$). Nous voulons démontrer que μ est dénombrablement additive pour

[1] Grâce au théorème d'Orlicz on voit que dans les topologies localement convexes la relation « $\mathcal{T}_1$ possède la propriété d'Orlicz relativement à $\mathcal{T}_2$ », ne concerne en réalité que les classes de topologies compatibles (ayant même dual).

la topologie de $l^p(\mathrm{N})$ associée à la métrique $|x| = \sum_{i \in \mathrm{N}} |x_i|^p$. Soit T_n l'application de $l^p(\mathrm{N})$ dans $l^p(\mathrm{N})$ définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_n(x)_i &= x_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \mathrm{T}_n(x)_i &= 0 \quad \text{pour} \quad i > n. \end{aligned}$$

Alors $|x - \mathrm{T}_n(x)| = \sum_{i<n} |x_i|^p$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. La fonction d'ensemble $\mathrm{T}_n \circ \mu$ est à valeurs dans un sous-espace de dimension finie, dénombrablement additive pour la topologie de la convergence simple, donc aussi dénombrablement additive. D'autre part on a $\mu(\mathrm{A}) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{T}_n \circ \mu(\mathrm{A})$ pour toute partie A de N, et les mesures $\mathrm{T}_n \circ \mu$ sont absolument continues par rapport à la mesure de masse $1/2^i$ au point i de N. Il résulte alors d'une extension du théorème de Vitali-Hahn-Saks que la fonction d'ensembles μ est encore dénombrablement additive, ce que nous voulions démontrer.

Le théorème de Vitali-Hahn-Saks, que nous avons cité à la fin de l'appendice I, est valable non seulement pour des mesures à valeurs dans un espace normé, mais aussi pour des mesures à valeurs dans un espace vectoriel métrique (muni d'une métrique « invariante » $x \to |x|$ satisfaisant à

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|, \, |-x| = |x|)$$

et par conséquent pour des mesures à valeurs dans un espace vectoriel topologique arbitraire (il suffit de regarder chaque écart invariant séparément) et même pour des mesures (fonctions dénombrablement additives d'ensembles) à valeurs dans un groupe abélien topologique. La démonstration de ce théorème donnée par Dunford et Schwartz ([8] III, 7.2 et 7.3) peut en effet être appliquée sans modification au cas d'un espace vectoriel métrique.

Problème. — En vue des résultats précédents, la question suivante, dont j'ignore la réponse, se pose naturellement : Soit μ une mesure de Radon positive. Est-ce que dans $\mathrm{L}^p(\mu)$ $(0 < p < +\infty)$ la topologie de la convergence en mesure sur tout compact possède la propriété d'Orlicz? (1)

(1) *Note ajoutée pendant la correction des épreuves :* Philippe Turpin a démontré que la réponse est affirmative. (Cf. Séminaire d'Analyse Fonctionelle, Université de Bordeaux n° 4, 1969-70).

Appendice III.

Démonstration de 1.3. — *a*) Il est évident que $\mu^\bullet$ est croissant et positivement homogène. Les relations $\mu^\bullet(f) = \sup\limits_{i\in I} \mu^\bullet(f_i)$ et $\mu^\bullet(f_1 + f_2) \leqslant \mu^\bullet(f_1) + \mu^\bullet(f_2)$, résultent des propriétés connues des mesures positives et du lemme 1.4 par passage à la limite (pour une démonstration directe voir 6.19).

b) Soit $s = \sum\limits_n f_n$ avec $f_n \in \mathfrak{I}^+$. Soit $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i$. Alors $\mu^\bullet(s) = \sup\limits_n \mu^\bullet(s_n) \leqslant \sup\limits_n \sum\limits_{i=1}^{n} \mu^\bullet(f_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^\bullet(f_i)$. Soit $s = \sum\limits_n f_n$ avec $\operatorname{supp}(f_n) \subset K$, où K est un compact. Alors si $\sum\limits_n \mu^\bullet(f_n) < +\infty$ il existe $g_n \in \mathfrak{I}^+$ telles que $g_n \geqslant f_n$ et $\mu^\bullet(g_n) \leqslant \mu^\bullet(f_n) + \varepsilon/2^n$. Alors si $g = \sum\limits_n g_n$ on a $g \geqslant s$ et $\mu^\bullet(s) \leqslant \mu^\bullet(g) \leqslant \sum\limits_n \mu^\bullet(g_n) \leqslant \sum\limits_n \mu^\bullet(f_n) + \varepsilon$, donc $\varepsilon > 0$ étant arbitraire on a $\mu^\bullet(s) \leqslant \sum\limits_n \mu^\bullet(f_n)$.

Remarquons que pour $f \geqslant 0$ arbitraire

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{\substack{K \\ \text{compact}}} \mu^\bullet(\chi_K f),$$

car si $h \leqslant f$ avec $\operatorname{supp} h = K$ compact, on a $h \leqslant \chi_K f \leqslant f$. Soit alors $s = \sum\limits_n f_n$ avec $f_n \geqslant 0$ arbitraire. Alors

$$\mu^\bullet(\chi_K s) \leqslant \sum_n \mu^\bullet(\chi_K f_n) \leqslant \sum_n \mu^\bullet(f_n),$$

de sorte que d'après la remarque précédente $\mu^\bullet(s) \leqslant \sum\limits_n \mu^\bullet(f_n)$, ce qui prouve la sous-additivité.

Alors si $A = \bigcup\limits_n A_n$ on a

$$\chi_A \leqslant \sum_n \chi_{A_n} \qquad \text{d'où} \qquad \mu^\bullet(A) \leqslant \sum_n \mu^\bullet(A_n).$$

c) Soit $f \geqslant 0$ tel que $\mu^\bullet(f) = 0$. Soit $A = \{t : f(t) > 0\}$. Alors $A = \bigcup_n A_n$ avec $A_n = \left\{t : f(t) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$. On a $\frac{1}{n}\chi_{A_n} \leqslant f$ donc $\frac{1}{n}\mu^\bullet(A_n) \leqslant \mu^\bullet(f) = 0$, et $\mu^\bullet(A) \leqslant \sum_n \mu^\bullet(A_n) = 0$ d'où $\mu^\bullet(A) = 0$. Inversement supposons que $f(t)$ soit nul μ-presque partout, i.e. que $\mu^\bullet(A) = 0$. Supposons d'abord que f soit bornée : $0 \leqslant f \leqslant n$. Alors $f \leqslant n\chi_A$, et $\mu^\bullet(f) \leqslant n\mu^\bullet(A) = 0$. Dans le cas général soit $f_n = \inf(f, n)$. Alors $f_n(t) = 0$ μ p.p., donc $\mu^\bullet(f_n) = 0$ et comme $f \leqslant \sum_n f_n$, on a $\mu^\bullet(f) \leqslant \sum_n \mu^\bullet(f_n) = 0$ d'où $\mu^\bullet(f) = 0$. Enfin soit $f \geqslant 0$ tel que $\mu^\bullet(f) < +\infty$. Soit $A = \{t : f(t) = +\infty\}$ Alors pour tout n, $n\chi_A \leqslant f$, donc $n\mu^\bullet(A) \leqslant \mu^\bullet(f) < +\infty$ pour tout n, donc $\mu^\bullet(A) = 0$.

C.Q.F.D.

Démonstration de 1.19. — Soit 0 un ouvert et $\lambda < \mu^\bullet(0)$. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{K}$, avec $|\varphi| \leqslant \chi_0$ telle que $\lambda < |\mu(\varphi)|$. Soit $K_1 \subset 0$ un compact tel que $|\varphi(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \in \complement K_1$. Soit α une fonction continue telle que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\alpha(t) = 1$ pour $t \in K_1$, et $\operatorname{supp} \alpha \subset 0$. Alors si $\psi = \alpha\varphi$ on a $|\psi| \leqslant |\varphi|$ et $|\psi(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout t. Grâce à la continuité de μ on aura donc encore $\lambda < |\mu(\psi)|$ lorsque ε est assez petit, autrement dit, on peut supposer que $K = \operatorname{supp} \varphi$ est contenue dans 0. Alors $|\varphi| \leqslant \chi_K$ et pour tout $f \in \mathfrak{I}^+$ telle que $\chi_K \leqslant f$, on a $|\varphi| \leqslant f$, d'où $\lambda < |\mu(\varphi)| \leqslant \mu^\bullet(f)$. Il en résulte que $|\mu(\varphi)| \leqslant \mu^\bullet(K)$, d'où $\lambda \leqslant \mu^\bullet(K)$, et comme K est contenu dans 0 cela prouve la première assertion.

Soit maintenant A une partie relativement compacte, soit $\varepsilon > 0$, et soit $f \in \mathfrak{I}^+$ tel que $\chi_A \leqslant f$ et que $\mu^\bullet(f) < \mu^\bullet(A) + \varepsilon$. Quitte à multiplier f par un facteur $\alpha > 1$ on peut supposer $f(t) > 1$ pour $t \in A$. Alors $A \subset 0 = \{t : f(t) > 1\}$, 0 est ouvert et $\chi_A \leqslant \chi_0 \leqslant f$, de sorte que $\mu^\bullet(0) \leqslant \mu^\bullet(A) + \varepsilon$ d'où la seconde assertion. Enfin la troisième est un cas particulier de la relation $\mu^\bullet(f) = \sup_K \mu^\bullet(\chi_K f)$ qui résulte immédiatement de la définition.

Démonstration de 3.2. — Soit $f \in \mathfrak{I}^+(\omega)$. Il est évident que $\hat{f}$ est dans $\mathfrak{I}^+(T) = \mathfrak{I}^+$. On a

$$\nu^\bullet(f) = \sup_{\substack{|\varphi| \leqslant f \\ \operatorname{supp} \varphi \subset \omega}} |\nu(\varphi)| \leqslant \sup_{|\varphi| \leqslant \hat{f}} |\mu(\varphi)| = \mu^\bullet(\hat{f}).$$

Si $\varphi \in \mathcal{K}(\mathrm{T})$ avec $|\varphi| \leqslant \hat{f}$ on a $\varphi(t) = 0$ pour $t \in \complement\omega$. Alors, comme dans la démonstration ci-dessus, on montre qu'il existe $\psi \in \mathcal{K}(\omega)$ avec $|\psi| \leqslant |\varphi|$ tel que $|\psi(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$. Il résulte donc de la continuité de μ que pour ε assez petit $\mu(\varphi)$ et $\mu(\hat{\psi}) = \nu(\psi)$ sont arbitrairement voisins, de sorte que l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Pour $f \geqslant 0$ à support compact dans ω, $\hat{f}$ est à support compact dans T et

$$\nu^\bullet(f) = \inf_{\substack{f \leqslant g \\ g \in \mathcal{I}^+(\omega)}} \nu^\bullet(g) = \inf_{\hat{f} \leqslant \hat{g}} \mu^\bullet(g) \leqslant \inf_{\substack{\hat{f} \leqslant h \\ h \in \mathcal{I}^+(\mathrm{T})}} \mu^\bullet(h) = \mu^\bullet(\hat{f}).$$

Mais comme pour tout $h \in \mathcal{I}^+$ avec $h \geqslant \hat{f}$ on a $\hat{f} \leqslant \hat{g} \leqslant h$, où $g = {}^h/_\omega$, c'est l'égalité qui doit avoir lieu.

Si f est à support compact dans ω et appartient à $\mathcal{L}^1(\nu)$, il existe $\varphi \in \mathcal{K}(\omega)$ tel que $\nu^\bullet(|f - \varphi|) \leqslant \varepsilon$. Or

$$\mu^\bullet(|\hat{f} - \hat{\varphi}|) = \nu^\bullet(|f - \varphi|)$$

donc $\hat{f}$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$. L'égalité $\int f\, d\nu = \int \hat{f}\, d\mu$ a lieu par définition de ν lorsque f appartient à $\mathcal{K}(\omega)$, et elle se prolonge par continuité aux cas des fonctions de $\mathcal{L}^1(\nu)$ qui sont à support compact, d'après ce qui précède.

Démonstration du lemme employé dans la démonstration de 6.19 :

Démontrons plus généralement :

LEMME. — *Soit* F *un espace normé,* T *un espace topologique,* $\vec{\varphi}$ *une application continue de* T *dans* F, *et* f_i *des fonctions continues réelles avec* $f_i \geqslant 0$, *et telles que*

$$|\vec{\varphi}(t)| \leqslant f_1(t) + f_2(t)$$

pour tout $t \in \mathrm{T}$. *Alors il existe* $\vec{\varphi}_1$ *et* $\vec{\varphi}_2$ *continues à valeurs dans* F *telles que*

a) $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2$, *b*) $|\vec{\varphi}_i| \leqslant f_i$, *c*) $|\vec{\varphi}_i| \leqslant |\vec{\varphi}|$.

En effet soit $\omega = \{t : |\vec{\varphi}(t)| > 0\}$. Dans l'ouvert ω on a $1 \leqslant \frac{f_1}{|\vec{\varphi}|} + \frac{f_2}{|\vec{\varphi}|}$. Soit dans ω, $\alpha_1 = \inf\left(\frac{f_1}{|\vec{\varphi}|}, 1\right)$ et $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. Alors $\alpha_i \geqslant 0$, α_i est continue, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, et $\alpha_i \leqslant \frac{f_i}{|\vec{\varphi}|}$.

Alors nous prenons $\vec{\varphi}_i = \alpha_i \vec{\varphi}$ dans ω et $\vec{\varphi}_i = 0$ dans $\complement \omega$. Les fonctions $\vec{\varphi}_i$ conviennent; en effet on a évidemment les inégalités *a*) *b*) et *c*); les $\vec{\varphi}_i$ sont continues en chaque point $t \in \complement \omega$. D'après *c*) $\lim_{s \to t} |\vec{\varphi}_i(s)| \leqslant \lim_{s \to t} |\vec{\varphi}(s)| = 0$, donc

$$\lim_{s \to t} \vec{\varphi}_i(s) = \vec{\varphi}_i(t),$$

ce qui prouve le lemme.

Il est clair d'après *c*) que si $\vec{\varphi}$ est à support compact il en est de même des $\vec{\varphi}_i$, et enfin il résulte de la construction que si $\vec{\varphi}$ prend ces valeurs dans un sous-espace de dimension finie de F, les $\vec{\varphi}_i$ prennent leurs valeurs dans le même sous-espace. Donc si $\vec{\varphi}$ appartient à $\mathcal{K} \otimes \mathrm{F}$, les $\vec{\varphi}_i$ appartiennent aussi à $\mathcal{K} \otimes \mathrm{F}$, C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. G. Bartle, N. Dunford and J. Schwartz, Weak compactness and vector measures, *Canad. J. of Math.*, t. 7 (1955), 289-305.

[1 *bis*] C. Bessaga et A. Pelczynski, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. Studia Mathematica T. XVII (1958).

[2] Nicolas Bourbaki, Intégration, Chapitres 1-4, 2e édition, 5, 6. Paris, Hermann, 1956, 1965.

[3] J. Deny, Les Potentiels d'Énergie finie, *Acta Mathematica*, 82 (1950), 107-183.

[4] J. Dieudonné, Sur la convergence de suites de Mesures de Radon *Anais da Acad. Bras. Ciencias*, 23 (1951) 81-115.

[5] N. Dinculeanu, Vector Measures (Pergamon Press).

[6] N. Dunford, Uniformity in Linear Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 44 (1938), 305-356.

[7] N. Dunford and B. J. Pettis, Linear Operations on Summable Functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 47 (1940), 323-392.

[8] N. Dundord and J. Schwartz, Linear Operators. vol. I: General Theory. New York, London, Interscience Publishers, (1958).

[9] G. Fox, Extension of a bounded vector measure with values in a reflexive Banach space, *Bull. Canad. Math.* 10, nº 4, (1967) 525-529.

[10] A. Grothendieck, Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K), *Canad. J. of Math.*, t. 5, (1953), 129-173.

[11] W. Hackenbroch, Integration vektorwertiger Funktionen nach operatorwertigen Maben, Math. Zeitschr. 105, 327-344 (1968).

[12] M. Morse and W. Transue, C-Bimeasures and their integral extensions, *Annals of Mathematics*, vol. 64, nº 3 (1956).

[12 *bis*] A. PELCZYNSKI, Projections in certain Banach spaces. Studia Mathematica T. XIX (1960).

[13] J. B. PETTIS, On Integration in Vector Spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 44 (1938), 277-304.

[14] R. S. PHILLIPS, On linear Transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 48 (1940), 516-541.

[15] L. SCHWARTZ, Sous-espaces Hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et Noyaux associés, *Journal d'Analyse Mathématique*, vol. XIII (1964).

[16] E. THOMAS, L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle, Séminaire Choquet (Initiation à l'Analyse), 7e année, 1967-1968, nº B.10.

Manuscrit reçu le 12 novembre 1969.

Erik THOMAS,

Yale University,
Department of Mathematics,
Box 2155 yale Starion,
New Haven, Conn-06520.