

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

Guy CASALE & Damien DAVY

Spécialisation du groupoïde de Galois d'un champ de vecteurs

Tome 72, n° 6 (2022), p. 2399-2447.

<https://doi.org/10.5802/aif.3506>

Article mis à disposition par ses auteurs selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE



<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>



Les *Annales de l'Institut Fourier* sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

e-ISSN : 1777-5310

SPÉCIALISATION DU GROUPOÏDE DE GALOIS D'UN CHAMP DE VECTEURS

par Guy CASALE & Damien DAVY

RÉSUMÉ. — Nous montrons un résultat de “ semi-continuité ” du groupoïde de Galois d'un champ de vecteurs dépendant d'un paramètre. Appliqué aux équations de Painlevé, ce résultat nous permet de calculer le groupoïde de Galois de ces équations pour des valeurs générales des paramètres.

ABSTRACT. — We prove lower semicontinuity of the Galois groupoid of a vector field depending on parameters. Apply to Painlevé equations, this result can be used to compute their Galois groupoids for general values of parameters.

1. Introduction

1.1. Théories de Galois différentielles et équations de Painlevé

À la fin du dix-neuvième siècle, les idées d'É. Galois ont été étendues aux équations différentielles linéaires par É. Picard [27] puis ont été complétées par E. Vessiot [34]. Dans les années 1950, E. Kolchin développe cette théorie du point de vue des extensions de corps différentiels [3, 15].

Dans [11], J. Drach avance une théorie de Galois pour les équations différentielles non-linéaires. Malgré les erreurs qui invalident la plupart de ses définitions, il donne des indications pour calculer le groupe de rationalité des équations de Painlevé [12]. Dans [35], E. Vessiot esquisse une définition rigoureuse. Elle est à l'origine de la définition du groupe de Galois infinitésimal de H. Umemura [31] généralisant le groupe de Picard–Vessiot d'un système différentiel linéaire. Le groupoïde de Galois d'un feuilletage a été introduit par B. Malgrange dans [17]. Cette définition concerne les

feuilletages holomorphes (singuliers) sur une variété \mathbb{C} -analytique lisse. Cet objet généralise le groupe de Galois intrinsèque d'un système différentiel linéaire [2].

Les premières tentatives de calcul du groupoïde de Galois de la première équation de Painlevé sont dûs à P. Painlevé [25] et J. Drach [12]. Ces calculs ont été rendus rigoureux dans [8] en utilisant la classification des pseudo-groupes de Lie agissant sur \mathbb{C}^2 due à E. Cartan [6].

Dans les Leçons de Stockholm [26], P. Painlevé définit une notion de réductibilité d'une solution d'une équation différentielle. Une équation est dite réductible si sa solution générale l'est.

Cette définition est très restrictive comme le montre P. Painlevé dans la remarque 28 de [24]. Elle a néanmoins l'intérêt de faire apparaître les différences entre la réductibilité d'une équation (ou du feuilletage sous-jacent) et celle d'une solution particulière. L'étude de la réductibilité des solutions particulières des équations de Painlevé est l'œuvre de l'école japonaise. H. Umemura [29] et K. Nishioka [19] donnent un critère permettant de trouver les familles à un paramètre de solutions réductibles d'une équation du second ordre et l'appliquent à l'étude de la première équation de Painlevé. À la suite de ces articles, Murata [18], Watanabe [36, 37], Noumi–Okamoto [20] et Umemura–Watanabe [32, 33] et Kitaev–Law–McLeod [14] trouvent les solutions réductibles non algébriques des autres équations de Painlevé.

Ces résultats prouvent l'irréductibilité (au sens des Leçons de Stockholm) des solutions des équations de Painlevé pour des valeurs génériques des paramètres. Dans [24] P. Painlevé pose la question du rapport entre une définition de l'irréductibilité d'une équation différentielle et le groupe de rationalité de J. Drach. Dans [9], le premier auteur répond en partie à cette question. Considérons un champ de vecteurs rationnel X sur une variété de dimension trois modélisant une équation différentielle du second ordre. Si le corps des invariants différentiels rationnels de X est engendré par les invariants provenant d'une forme « temps » dx , d'une forme « volume » $d\text{vol}$ invariante et de X lui même alors l'équation différentielle est irréductible.

Ces conditions ont été vérifiées pour P_I dans [8], $P_{II}(0)$ dans [10] et $P_{VI}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, \frac{1}{2})$ dans [5]. Le cas $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0, \frac{1}{2})$ est traité dans [7].

Les équations de Painlevé apparaissent naturellement en famille. Nous utiliserons [21] comme référence.

$$\begin{aligned}
 (P_I) \quad & u'' = 6u^2 + x \\
 (P_{II}(\alpha)) \quad & u'' = 2u^3 + xu + \alpha \\
 (P_{III}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) \quad & u'' = \frac{u'^2}{u} - \frac{u'}{x} + \frac{\alpha u^2 + \beta}{x} + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u} \\
 (P_{IV}(\alpha, \beta)) \quad & u'' = \frac{u'^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 + 4xu^2 + 2(t^2 - \alpha)u + \frac{\beta}{u} \\
 (P_V(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) \quad & u'' = \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1}\right)u'^2 - \frac{u'}{x} + \frac{(u-1)^2}{x^2} \left(\alpha u + \frac{\beta}{u}\right) + \gamma \frac{u}{x} + \delta \frac{u(u+1)}{u-1} \\
 (P_{VI}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) \quad & u'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-x}\right)u'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{u-x}\right)u' \\
 & \quad + \frac{u(u-1)(u-x)}{x^2(x-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{x}{u^2} + \gamma \frac{x-1}{(u-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(u-x)^2}\right)
 \end{aligned}$$

Nous nous proposons d'étudier les variations du groupoïde de Galois d'une famille d'équations différentielles en fonction des paramètres et d'en déduire les résultats d'irréductibilité des équations de Painlevé.

Dans le cas d'équations différentielles linéaires, ces variations ont été étudiées par L. Goldmann [13] puis M.F. Singer [28]. En particulier, ces articles montrent que la dimension du groupe de Picard–Vessiot d'un système linéaire différentiel dépendant de paramètres varie semi-continument inférieurement avec les paramètres. Ces résultats ont été étendus à des situations très générales par Y. André [1] incluant les confluences d'équations aux différences vers des équations différentielles.

1.2. Les résultats

Considérons la deuxième équation de Painlevé :

$$(P_{II}) \quad \begin{cases} u'' = 2u^3 + xu + \alpha \\ x' = 1 \\ \alpha' = 0 \end{cases}$$

Cette équation peut être vue comme un champ de vecteurs sur \mathbb{C}^4

$$X_{II} = \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial u} + (2u^3 + xu + \alpha) \frac{\partial}{\partial v}$$

Pour une valeur de α fixée à α_0 , l'équation

$$(P_{II}(\alpha_0)) \quad u'' = 2u^3 + xu + \alpha_0$$

peut être vue comme le champ de vecteurs sur \mathbb{C}^3

$$X_{\Pi}|_{\alpha_0} = \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial u} + (2u^3 + xu + \alpha_0) \frac{\partial}{\partial v}$$

Notre but est de comparer les groupoïdes de Galois des champs $X_{\Pi}|_{\alpha_0}$ pour différentes valeurs de α_0 . Pour ce faire, nous les comparerons au groupoïde de Galois de X_{Π} .

La taille du groupoïde de Galois d'un champ de vecteurs sera mesuré par son type différentiel, noté tdiff , défini par E. R. Kolchin dans ([15]). Le groupoïde de Galois étant décrit par un système d'équations aux dérivées partielles, l'expression de ses solutions locales peuvent dépendent de fonctions arbitraires. Heuristiquement, le type de transcendance mesure le nombre de variables libres dans ces fonctions. Par exemple l'edp d'inconnue une fonction de deux variables (x, y) , $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ a un type différentiel égal à 1 : les solutions s'écrivent $f(y)$. Par contre l'edp d'inconnue deux fonctions de deux variables (x, y) , $\frac{\partial(f.g)}{\partial(x,y)} = 1$ a un type différentiel égal à 2 : n'importe quelle fonction $f(x, y)$ est la première composante d'une solution de l'edp. Une définition formelle est rappelée en section 4. Nous obtenons le résultat suivant :

THÉOREME 1.1. — *Soient $\rho : M \rightarrow S$ un morphisme lisse à fibres connexes entre deux variétés lisses irréductibles, $q_0 \in S$ et X un champ de vecteurs rationnel tangent aux fibres de ρ . Pour $q \in S$ général,*

$$\text{tdiff}(\text{Gal}(X|_{q_0})) \leq \text{tdiff}(\text{Gal}(X|_q))$$

Une propriété de q est dite générale dans l'espace des paramètres S si elle est vraie en dehors d'une union dénombrable de sous-variétés fermées strictes de S .

Le type différentiel du groupoïde de Galois d'une équation d'ordre 2 est toujours inférieur ou égal à 2. Nous savons par ailleurs [10] que

$$\text{tdiff}(\text{Gal}(P_{\Pi}(0))) = 2.$$

Le théorème précédent montre ainsi que pour $\alpha \in \mathbb{C}$ général,

$$\text{tdiff}(\text{Gal}(P_{\Pi}(\alpha))) = 2.$$

La classification d'E. Cartan des pseudo-groupes de Lie de transformations du plan dans [6] donne le résultat suivant.

THÉOREME 1.2. — *Considérons l'équation du second ordre*

$$(E) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = F \left(x, u, \frac{du}{dx} \right)$$

où $F \in \mathbb{C}(x, u, v)$. Soient X_F le champ de vecteurs associé, $dvol$ une 3-forme rationnelle sur \mathbb{C}^3 . Notons

$$\text{Vol}(E) := \{ \widehat{\phi} \in \widehat{\text{Aut}}(\mathbb{C}^3) \mid \widehat{\phi}^* dx = dx, \widehat{\phi}^* X_F = X_F \text{ et } \widehat{\phi}^* dvol = dvol \}$$

Si $\mathcal{L}_{X_F} dvol = 0$ et $\text{tdiff}(\text{Gal}(E)) = 2$, alors $\text{Gal}(E) = \text{Vol}(E)$.

Les champs $X_{II}|_\alpha$ vérifiant les hypothèses du théorème, nous obtenons :

COROLLAIRE 1.3. — Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ général, $\text{Gal}(P_{II}(\alpha)) = \text{Vol}(P_{II}(\alpha))$.

Associé au résultat de [9] donnant un lien entre la structure du groupoïde de Galois et irréductibilité d'une équation, nous en déduisons :

COROLLAIRE 1.4. — Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ général, $P_{II}(\alpha)$ est irréductible.

Ces résultats obtenus sur la deuxième équation de Painlevé s'étendent aux autres équations de Painlevé. Ces équations dégénèrent les unes sur les autres en suivant le diagramme (voir [21]) :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{P}_{VI} & \longrightarrow & \mathbf{P}_V & \longrightarrow & \mathbf{P}_{III} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbf{P}_{IV} & \longrightarrow & \mathbf{P}_{II} \longrightarrow \mathbf{P}_I \end{array}$$

Nous utilisons cette dégénérescence pour montrer :

THÉORÈME 1.5. — Pour $J = I, II, III, IV, V, VI$ et pour q général dans l'espace des paramètres de P_J , $\text{Gal}(P_J(q)) = \text{Vol}(P_J(q))$.

Grâce à [9], nous retrouvons un résultat connu (voir [16, 18, 19, 20, 29, 32, 33, 36, 37]) :

COROLLAIRE 1.6. — Pour $J = I, II, III, IV, V, VI$ et pour q général dans l'espace des paramètres de P_J , l'équation $P_J(q)$ est irréductible au sens de Nishioka–Umemura.

Plusieurs valeurs des paramètres pour lesquelles les équations de Painlevé sont réductibles sont connues, par exemple :

- P_{III} avec les paramètres $\alpha = \gamma = 0$ ou avec $\beta = \delta = 0$ est intégrable par quadratures et donc réductible,
- P_V avec les paramètres $\gamma = \delta = 0$ est intégrable par quadrature et donc réductible.

1.3. Organisation de l'article

Cet article est composé de quatre parties. Dans la première partie, nous rappelons les définitions des objets avec lesquels nous travaillons. Nous définissons des espaces de jets d'applications à valeurs dans les fibres d'un morphisme $M \rightarrow S$, l'ouvert des repères des fibres $R(M/S)$ et le groupoïde associé $\text{Aut}(M/S)$. Nous donnons leurs structures algébriques et décrivons les prolongements canoniques d'un champ de vecteurs tangent aux fibres de M/S à ces espaces de jets.

Dans une deuxième partie, nous définissons trois sous-espaces de $\text{Aut}(M/S)$

- (1) la plus petite sous-variété tangente au prolongement du champ de vecteurs sur $\text{Aut}(M/S)$ et contenant l'identité
- (2) le plus petit sous-groupoïde tangent au prolongement du champ de vecteurs sur $\text{Aut}(M/S)$
- (3) la sous-variété constituée des automorphismes préservant les intégrales premières rationnelles du prolongement du champ de vecteurs sur $R(M/S)$

Nous montrons que ces trois définitions coïncident en utilisant les résultats de P. Bonnet [4] et nommons cet objet le groupoïde de Galois de X sur S .

Lorsqu'il n'y a pas de paramètres, *i.e.* S est un point, nous montrons que ce groupoïde est le groupoïde de Galois de B. Malgrange défini dans [17].

Dans la troisième partie, nous comparons les « tailles » de différents groupoïdes de Galois en terme de type différentiel. Nous montrons le théorème 4.8 de spécialisation dont la conséquence immédiate est la « semi-continuité » du type différentiel du groupoïde de Galois par rapport aux paramètres : théorème 4.9.

Dans la dernière partie, nous donnons des applications du résultat de spécialisation aux équations différentielles du second ordre dépendant de paramètres, notamment aux équations de Painlevé.

2. Les espaces de repères

Soient S et M deux variétés algébriques complexes, affines, lisses, connexes, de dimensions respectives d , $m + d$. Soit $\rho : M \rightarrow S$ un morphisme lisse à fibres connexes. Nous noterons M_q la fibre du morphisme en $q \in S$. La variété S sera appelée espace des paramètres.

2.1. Le fibré principal des S -repères

DÉFINITION 2.1. — *Un S -repère en $p \in M$ est une application formelle $r : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (M, p)$ telle que :*

- *la matrice jacobienne D_0r soit de rang m*
- *$\rho \circ r$ soit l'application constante égale à $\rho(p)$*

Un S -repère d'ordre k est le jet d'ordre k d'un S -repère. Si S est un point, nous dirons que r est un repère sur M .

2.1.1. Définition

Soit U un ouvert de Zarisky contenant $p \in M$ qui soit un revêtement non ramifié d'un ouvert de \mathbb{C}^{m+d} et qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m+d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \mathbb{C}^d \end{array}$$

Nous appellerons U une carte de M/S en p . Il vient un système de coordonnées $p = (p', q) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ dans lequel un S -repère s'écrit :

$$(2.1) \quad r(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} r_1^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \dots, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} r_m^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, q \right)$$

où, pour $1 \leq i \leq m$, $r_i^\alpha \in \mathbb{C}$, $\epsilon^\alpha = \epsilon_1^{\alpha_1} \dots \epsilon_m^{\alpha_m}$ est un monôme et $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_m!$. Notons 1_j le multi-indice ayant 1 sur la j -ème coordonnée et 0 sur les autres. Dans ces coordonnées, D_0r est la matrice $\left(r_i^{1_j} \right)_{ij}$ complétée par zéro sur les d dernières lignes. Nous noterons $\text{jac}(r) = \det(r_i^{1_j})$. Le m -uplet de séries (2.1) tronquées à l'ordre $k \in \mathbb{N}$ est un S -repère d'ordre k .

DÉFINITION 2.2. — *L'espace des S -repères est $R(M/S)$ et l'espace des S -repères d'ordre $k \in \mathbb{N}$ est $R_k(M/S)$.*

Par définition, l'espace des S -repères est la limite projective des espaces des S -repères d'ordre $k \in \mathbb{N}$.

2.1.2. Structure de variété pro-algébrique

La description locale de la structure algébrique de $R(M/S)$ se fait de la manière suivante.

Prenons $U \subset M$ une carte de M/S en p , de coordonnées $y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_d$. L'ensemble des S -repères d'ordre $k \in \mathbb{N}$ sur U est muni d'une structure de variété affine dont l'anneau de coordonnées est

$$\mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m, 1 \leq |\alpha| \leq k][1/\det(y_i^{1j})],$$

où y_i^α est la fonction définie par $y_i^\alpha(r) = r_i^\alpha$. L'anneau de coordonnées de la limite projective $R(U/S)$ est

$$\mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m][1/\det(y_i^{1j})],$$

Les dérivations $\partial_1, \dots, \partial_m$ définies par $\partial_i y_j^\alpha := y_j^{\alpha+1_i}$, $\partial_i z_j = 0$ donne une structure de $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$ -algèbre différentielle à cet anneau.

Cette structure admet une description globale. Le faisceau structural de RM est entièrement déterminée par son image directe sur M par $R(M/S) \rightarrow M$. Par abus, nous parlerons indifféremment du faisceau structural de $R(M/S)$ et de son image directe sur M .

Notons Jac le faisceau cohérent d'idéaux engendré par $\det(y_i^{1j})$ où y_1, \dots, y_m sont les coordonnées sur une carte U de M/S . Ce faisceau en idéaux est bien défini car si $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m$ sont d'autres coordonnées, alors $\det(\tilde{y}_i^{1j}) = c \det(y_i^{1j})$ où c est une fonction non nulle.

DÉFINITION 2.3. — *Le faisceau $\mathcal{O}_{R(M/S)}$ des coordonnées de l'espace des S -repères est :*

$$(\text{Sym}(\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M)/\mathcal{L})[1/\text{Jac}]$$

où

- $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M$ est un produit tensoriel de \mathbb{C} -espaces vectoriels,
- $\text{Sym}(\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M)$ est l'algèbre symétrique engendrée l'espace vectoriel précédent,
- cette algèbre a une structure de $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$ -algèbre différentielle à gauche,
- elle est quotientée par l'idéal différentiel \mathcal{L} engendré par le noyau de $\text{Sym}(1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_M) \rightarrow \mathcal{O}_M$ et par les $\partial_i \otimes \mathcal{O}_S$,
- Jac est le faisceau en idéaux engendré par $\det(\partial_j \otimes y_i)$ où y_1, \dots, y_m sont des coordonnées locales sur M et $\mathcal{O}_{R(M/S)}$ est le localisé du faisceau d'anneaux ci-dessus par Jac .

Le faisceau $\mathcal{O}_{R_k(M/S)}$ des coordonnées de l'espace des S -repères d'ordre $k \in \mathbb{N}$ est le sous-anneau de $\mathcal{O}_{R(M/S)}$ engendré par

$$(\text{Sym}(\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]^{\leq k} \otimes \mathcal{O}_M)$$

où $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]^{\leq k}$ désigne l'ensemble des polynômes en les ∂_i de degré au plus k .

Les espaces des S -repères d'ordre $k \in \mathbb{N}$ sont des variétés irréductibles et l'espace des S -repères est une variété pro-algébrique.

Nous retrouvons la structure locale, sur une carte de M/S . Soit $U \subset M$ une carte de M/S de coordonnées $y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_d$:

LEMME 2.4. — *Nous avons un isomorphisme*

$$\mathcal{O}_{R(M/S)}(U) \simeq \mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m, 1 \leq |\alpha| \leq 1/\det(y_i^{1_j})]$$

qui est compatible aux actions de $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$. La filtration de $\mathcal{O}_{R(M/S)}(U)$ par l'ordre des opérateurs différentiels coïncide avec la filtration par le poids $|\alpha|$ des nouvelles variables y_i^α .

Démonstration. — Commençons par définir un morphisme d'espace vectoriel à partir de l'injection canonique :

$$\begin{aligned} \phi : 1 \otimes \mathcal{O}_M(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m, 1 \leq |\alpha|] \\ 1 \otimes P &\longmapsto P \end{aligned}$$

Nous allons le prolonger en utilisant la structure de $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$ -module puis en utilisant la structure d'anneau de l'espace d'arrivée. L'anneau $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$ agit sur $1 \otimes \mathcal{O}_M(U)$ par multiplication sur le premier facteur. Cette application se prolonge en un morphisme de $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$ -module

$$\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M(U) \longrightarrow \mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m, 1 \leq |\alpha|]$$

Nous en déduisons un morphisme d'algèbre

$$\text{Sym}(\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M(U)) \longrightarrow \mathcal{O}_M(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m, 1 \leq |\alpha|]$$

Il est encore compatible aux actions des opérateurs différentiels de M car elles doivent toutes deux vérifier la règle de Leibniz. Le noyau du morphisme est donc invariant sous cette action. Ce noyau contient les éléments $(1 \otimes f)(1 \otimes g) - (1 \otimes fg)$, $(f, g) \in \mathcal{O}_M(U)^2$. Il contient l'idéal \mathcal{L} . Le morphisme passe au quotient par cet idéal.

Montrons que c'est un isomorphisme. Il est surjectif. Montrons l'injectivité. Par respect de la règle de Leibniz, un élément de $\mathcal{O}_{RM}(U)$ s'écrit

$$P = \sum_{i, \alpha, \ell} c_{i, \alpha, \ell} (\partial^{\alpha_1} \otimes y_{i_1})^{\ell_1} \dots (\partial^{\alpha_n} \otimes y_{i_n})^{\ell_n}$$

pour $c_{i, \alpha, \ell} \in \mathbb{C}$. Il est envoyé par ϕ sur $\sum_{i, \alpha, \ell} c_{i, \alpha, \ell} (y_{i_1}^{\alpha_1})^{\ell_1} \dots (y_{i_n}^{\alpha_n})^{\ell_n}$. Si P est dans le noyau de ϕ alors pour tout i, α, ℓ , $c_{i, \alpha, \ell} = 0$ puisque la famille $\{(y_{i_1}^{\alpha_1})^{\ell_1} \dots (y_{i_n}^{\alpha_n})^{\ell_n}\}$ est libre. Donc $P = 0$ et ϕ est injectif. Après inversion du déterminant jacobien dans les anneaux de départ et d'arrivée, nous obtenons l'isomorphisme escompté.

La restriction de ϕ à $\mathcal{O}_{R_k M}(U)$ donne la deuxième assertion. \square

2.1.3. Structure de fibré principal

Notons Γ le groupe des applications formelles inversibles de $(\mathbb{C}^m, 0)$ dans $(\mathbb{C}^m, 0)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons Γ_k le groupe des jets d'ordre k des éléments de Γ . Le groupe Γ , resp. Γ_k , agit sur $R(M/S)$, resp. $R_k(M/S)$, par composition à la source. Ces actions :

$$\begin{aligned} R(M/S) \times \Gamma &\longrightarrow R(M/S) & R_k(M/S) \times \Gamma_k &\longrightarrow R_k(M/S) \\ (r, \gamma) &\longmapsto r \circ \gamma & (j_k(r), j_k(\gamma)) &\longmapsto j_k(r \circ \gamma) \end{aligned}$$

sont notées $S_\gamma(r) := r \circ \gamma$ et $S_{j_k \gamma}(j_k r) := j_k(r \circ \gamma)$.

LEMME 2.5. — *Les espaces des S -repères d'ordre $k \in \mathbb{N}$ sont des fibrés principaux. Autrement dit, les applications*

$$\begin{aligned} R_k(M/S) \times \Gamma_k &\longrightarrow R_k(M/S) \times_M R_k(M/S) \\ (j_k(r), j_k(\gamma)) &\longmapsto (j_k(r), j_k(r \circ \gamma)) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes. Ces fibrés principaux sont localement triviaux pour la topologie de Zariski.

Démonstration. — Les applications réciproques sont données par

$$\begin{aligned} R_k(M/S) \times_M R_k(M/S) &\longrightarrow R_k(M/S) \times \Gamma_k \\ (j_k(r_1), j_k(r_2)) &\longmapsto (j_k(r_1), j_k(r_1^{-1} \circ r_2)) \end{aligned}$$

Plaçons-nous dans les coordonnées données par l'ouvert $U \subset M$ du lemme 2.4 et reprenons les notations de ce lemme. Grâce aux formules de Faà di Bruno, nous savons que les applications induites sur les anneaux de coordonnées sont polynomiales en les y_i^α pour $1 \leq i \leq m$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$. La variété M peut être recouverte par de tels ouverts. Ceci conclut la preuve du lemme. \square

2.2. Le groupoïde des S -automorphismes associé

2.2.1. Définition du groupoïde

DÉFINITION 2.6. — *Un S -automorphisme de $p_1 \in M$ vers $p_2 \in M$, est une application formelle inversible $(M_{\rho(p_1)}, p_1) \rightarrow (M_{\rho(p_2)}, p_2)$. Un S -automorphisme d'ordre k est le jet d'ordre k d'un S -automorphisme.*

Soit $U \subset M \times M$ un voisinage ouvert de $(p_1, p_2) \in M \times M$ qui soit un revêtement non ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^{2(m+d)}$ et qui fasse commuter les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
 U & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m+d} \times \mathbb{C}^{m+d} \\
 \text{pr}_1 / \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 / \text{pr}_2 \\
 M & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m+d} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 S & \longrightarrow & \mathbb{C}^d
 \end{array}$$

où pr_1 et pr_2 sont les projections respectives sur les premiers et derniers facteurs. Il vient un système de coordonnées $p_1 = (p'_1, q_1) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, $p_2 = (p'_2, q_2) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$ dans lequel un S -automorphisme s'écrit :

$$\phi(p'_1 + (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m), q_1) = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \phi_1^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \dots, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \phi_m^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, q_2 \right)$$

où, pour $1 \leq i \leq m$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $\phi_i^\alpha \in \mathbb{C}$. La série tronquée à l'ordre k est un S -repère d'ordre k .

DÉFINITION 2.7. — L'espace des S -automorphismes est $\text{Aut}(M/S)$ et l'espace des S -automorphismes d'ordre $k \in \mathbb{N}$ est $\text{Aut}_k(M/S)$.

Par définition, l'espace des S -automorphismes est la limite projective des espaces des S -automorphismes d'ordre $k \in \mathbb{N}$.

Ces espaces sont des groupoïdes où :

- la base est M
- les applications source et but sont :

$$\begin{aligned}
 s : & \quad \text{Aut}(M/S) \longrightarrow M \\
 (M_{\rho(p_1)}, p_1) \rightarrow (M_{\rho(p_2)}, p_2) & \longmapsto p_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t : & \quad \text{Aut}(M/S) \longrightarrow M \\
 (M_{\rho(p_1)}, p_1) \rightarrow (M_{\rho(p_2)}, p_2) & \longmapsto p_2
 \end{aligned}$$

- l'identité est

$$\begin{aligned}
 e : & \quad M \longrightarrow \text{Aut}(M/S) \\
 p & \longmapsto \text{id} : (M_{\rho(p)}, p) \rightarrow (M_{\rho(p)}, p)
 \end{aligned}$$

- en notant $\text{Aut}(M/S) \times_{sM^t} \text{Aut}(M/S)$ le produit fibré de $\text{Aut}(M/S) \xrightarrow{s}$

M et $\text{Aut}(M/S) \xrightarrow{t} M$, la composition partielle est

$$\begin{aligned}
 m : & \quad \text{Aut}(M/S) \times_{sM^t} \text{Aut}(M/S) \longrightarrow \text{Aut}(M/S) \\
 (\phi_1, \phi_2) & \longmapsto \phi_1 \circ \phi_2
 \end{aligned}$$

- l'inverse est

$$\begin{aligned} \text{inv} : \text{Aut}(M/S) &\longrightarrow \text{Aut}(M/S) \\ \phi &\longmapsto \phi^{-1} \end{aligned}$$

2.2.2. Structure algébrique

La description locale de la structure algébrique de $\text{Aut}(M/S)$ se fait de la manière suivante.

Reprenons un ouvert $U \subset M \times M$ comme ci-dessus avec pour coordonnées $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_d, y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_d$. L'ensemble des S -automorphismes d'ordre $k \in \mathbb{N}$ sur U est muni d'une structure de variété affine dont l'anneau de coordonnées est

$$\mathcal{O}_{M \times M}(U)[y_i^\alpha \ 1 \leq i \leq m \ \alpha \in \mathbb{N}^m \ 1 \leq |\alpha| \leq k] \left[1/\det(y_i^{1j}) \right]$$

où y_i^α la fonction définie par $y_i^\alpha(\phi) = \frac{\partial^\alpha \phi_i}{\partial x^\alpha}(p'_1)$. L'anneau de coordonnées de la limite projective $\text{Aut}(M/S)|_U$ est

$$\mathcal{O}_{M \times M}(U)[y_i^\alpha \ 1 \leq i \leq m \ \alpha \in \mathbb{N}^m] \left[1/\det(y_i^{1j}) \right]$$

Notons $\mathcal{D}_{M/S}$ le \mathcal{O}_M -module des opérateurs différentiels sur M \mathcal{O}_S -linéaire et $\text{pr}_1 : M \times M \rightarrow M$ la projection sur le premier facteur. Dans les coordonnées que nous nous sommes données, $\mathcal{D}_{M/S}(\text{pr}_1(U))$ est engendré par $\mathcal{O}_M(\text{pr}_1(U))$ et les dérivations $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$. Ces dérivations agissent sur l'anneau de coordonnées de $\text{Aut}(M/S)|_U$ de la manière suivante : $\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij}$, $\frac{\partial}{\partial x_i} z_j = 0$, $\frac{\partial}{\partial x_i} y_j^\alpha = y_j^{\alpha+1_j}$, $\frac{\partial}{\partial x_i} t_j = 0$. Ceci donne une structure de $\mathcal{D}_{M/S}(\text{pr}_1(U))$ -algèbre différentielle à cet anneau.

Passons à la description globale de la structure algébrique de $\text{Aut}(M/S)$. Cette structure est entièrement déterminée par son image directe sur $M \times M$ par $\text{Aut}(M/S) \xrightarrow{s \times t} M \times M$. Par abus, nous parlerons indifféremment de la structure algébrique de $\text{Aut}(M/S)$ et de son image directe sur $M \times M$.

Notons Jac le faisceau en idéaux engendré par $\det(y_i^{1j})$ où y_1, \dots, y_m sont des coordonnées locales des fibres de $\rho \circ \text{pr}_2$ sur $U \subset M \times M$.

DÉFINITION 2.8. — *Le faisceau $\mathcal{O}_{\text{Aut}(M/S)}$ des coordonnées de l'espace des S -automorphismes est :*

$$(\text{Sym}(\text{pr}_1^* \mathcal{D}_{M/S} \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_M) / \mathcal{L}) [1/\text{Jac}]$$

où

- $\mathcal{D}_{M/S}$ est le \mathcal{O}_M -module des opérateurs différentiels sur M \mathcal{O}_S -linéaire

- pr_1 et pr_2 sont les projections sur le premier et le deuxième facteur de $M \times M$
- $\text{pr}_1^* \mathcal{D}_{M/S} \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_M$ est un produit tensoriel d'espace vectoriel,
- $\text{Sym}(\text{pr}_1^* \mathcal{D}_{M/S} \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_M)$ est l'algèbre symétrique engendrée,
- cette algèbre a une structure de $\mathcal{D}_{M/S}$ -algèbre différentielle,
- elle est quotientée par l'idéal différentiel \mathcal{L} engendré par le noyau de $\text{Sym}(\text{pr}_1^* \mathcal{O}_M \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_M) \rightarrow \mathcal{O}_{M \times M}$,
- elle est enfin localisée en Jac

Le faisceau $\mathcal{O}_{\text{Aut}_k(M/S)}$ des coordonnées de l'espace des S -automorphismes d'ordre $k \in \mathbb{N}$ est :

$$\left(\text{Sym}(\text{pr}_1^* \mathcal{D}_{M/S}^{\leq k} \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_M) / (\mathcal{L} \cap \text{Sym}(\text{pr}_1^* \mathcal{D}_{M/S}^{\leq k} \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_M)) \right) [1/\text{Jac}]$$

où $\mathcal{D}_{M/S}^{\leq k}$ désigne l'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre au plus k .

L'espace des S -automorphismes d'ordre $k \in \mathbb{N}$ devient un groupoïde algébrique. Nous retrouvons la structure locale. Soit $U \subset M \times_S M$ un revêtement non-ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^{2(m+d)}$ comme ci-dessus de coordonnées $x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_d, y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_d$:

LEMME 2.9. — Nous avons un isomorphisme :

$$\mathcal{O}_{\text{Aut}(M/S)}(U) \simeq \mathcal{O}_{M \times M}(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq n, \alpha \in \mathbb{N}^m, 1 \leq |\alpha|] \left[1/\det(y_i^{1j}) \right]$$

qui est compatible avec l'action des opérateurs différentiels. Sa restriction induit :

$$\mathcal{O}_{\text{Aut}_k(M/S)}(U) \simeq \mathcal{O}_{M \times M}(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m, 1 \leq |\alpha| \leq k] \left[1/\det(y_i^{1j}) \right]$$

Démonstration. — La preuve est la même que celle du lemme 2.4. Commençons par définir un morphisme d'espace vectoriel à partir de l'injection canonique :

$$\begin{aligned} \phi : \text{pr}_1^* \mathcal{O}_M \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_M(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_{M \times M}(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m, 1 \leq |\alpha|] \\ f \otimes g &\longmapsto f \otimes g \end{aligned}$$

Nous allons le prolonger en utilisant la structure de $\mathcal{D}_{M/S}(\text{pr}_1(U))$ -module puis en utilisant la structure d'anneau de l'espace d'arrivé. Puisque $\mathcal{D}_{M/S}(\text{pr}_1(U))$ agit sur $\text{pr}_1^* \mathcal{O}_M \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_M(U)$, cette application se prolonge en un morphisme de $\mathcal{D}_{M/S}(\text{pr}_1(U))$ -module

$$\text{pr}_1^* \mathcal{D}_{M/S} \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_M(U) \rightarrow \mathcal{O}_{M \times M}(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m, 1 \leq |\alpha|]$$

Nous en déduisons un morphisme d'algèbre

$$\text{Sym}(\text{pr}_1^* \mathcal{D}_{M/S} \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_M)(U) \rightarrow \mathcal{O}_{M \times M}(U)[y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m, 1 \leq |\alpha|]$$

Il est encore compatible aux actions des opérateurs différentiels de M car elles doivent toutes deux vérifier la règle de Leibniz. Le noyau du morphisme est donc invariant sous cette action.

On vérifie comme en 2.4 que le noyau de ce morphisme est l'idéal différentiel engendré par le noyau de $\text{Sym}(\text{pr}_1^* \mathcal{O}_M \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_M) \rightarrow \mathcal{O}_{M \times M}$.

La restriction de ϕ à $\mathcal{O}_{\text{Aut}_k(M/S)}$ donne la deuxième assertion. □

Pour $k \in \mathbb{N}$, le groupe Γ_k agit diagonalement sur le produit $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$. Le quotient $(R_k(M/S) \times R_k(M/S))/\Gamma_k$ hérite de la structure algébrique de $\text{Aut}_k(M/S)$. Ceci est donné par le lemme :

LEMME 2.10. — Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application

$$\begin{aligned} \Phi_k : R_k(M/S) \times R_k(M/S) &\longrightarrow \text{Aut}_k(M/S) \\ (j_k(r), j_k(s)) &\longmapsto j_k(s \circ r^{-1}) \end{aligned}$$

est un morphisme surjectif. Les fibres sont les orbites sous l'action diagonale du groupe Γ_k .

Démonstration. — Nous savons que l'application est un morphisme grâce aux formules de Faà Di Bruno. Ce morphisme est surjectif puisque pour $\phi \in \text{Aut}(M/S)$, $s \in R(M/S)$, $j_k(\phi) = j_k(s \circ (s^{-1} \circ \phi))$.

Les fibres contiennent les orbites : pour $(s, r) \in R(M/S)^2$, $\gamma \in \Gamma$, $j_k(s \circ r^{-1}) = j_k(s \circ \gamma \circ \gamma^{-1} \circ r^{-1})$. Les orbites contiennent les fibres : soit $(r, r', s, s') \in R(M/S)^4$ tels que $j_k(s \circ r^{-1}) = j_k(s' \circ r'^{-1})$. Posons $j_k(\gamma) = j_k(s^{-1} \circ s') = j_k(r^{-1} \circ r')$. Nous avons $j_k(r') = j_k(r \circ \gamma)$ et $j_k(s') = j_k(s \circ \gamma)$. □

Sur le produit $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ sont définies les applications

- identité :

$$\begin{aligned} e : R_k(M/S) &\longrightarrow R_k(M/S) \times R_k(M/S) \\ j_k(r) &\longmapsto (j_k(r), j_k(r)) \end{aligned}$$

- composition partielle :

$$\begin{aligned} m : R_k(M/S) \times R_k(M/S) &\underset{\text{pr}_1 \text{Mpr}_2}{\times} R_k(M/S) \\ &\times R_k(M/S) \longrightarrow R_k(M/S) \times R_k(M/S) \\ (j_k(r_1), j_k(r_2)), (j_k(r_3), j_k(r_1)) &\longmapsto (j_k(r_3), j_k(r_2)) \end{aligned}$$

- inverse

$$\begin{aligned} \text{inv} : R_k(M/S) \times R_k(M/S) &\longrightarrow R_k(M/S) \times R_k(M/S) \\ (j_k(r_1), j_k(r_2)) &\longmapsto (j_k(r_2), j_k(r_1)) \end{aligned}$$

Le morphisme Φ_k donne une correspondance entre les relations d'équivalence de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ (i.e. les variétés stables par ces trois applications) qui sont stables sous l'action diagonale du groupe Γ_k et les sous-groupoïdes algébriques de $\text{Aut}_k(M/S)$.

Nous terminons cette sous-section en comparant les structures différentielles du produit $R(M/S) \times R(M/S)$ et $\text{Aut}(M/S)$. Notons Φ l'application quotient envoyant l'un sur l'autre.

LEMME 2.11. — *Un I un idéal de $\mathcal{O}_{\text{Aut}(M/S)}$ est $\mathcal{D}_{M/S}$ -invariant si et seulement si $\Phi^*I \subset \mathcal{O}_{R(M/S) \times R(M/S)}$ est $(\partial_i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i)$ -invariant pour tout $1 \leq i \leq m$.*

2.3. Prolongements de champs de vecteurs

Soit X un champ de vecteurs rationnel sur la variété M tangent aux fibres de ρ . Ce champ se prolonge naturellement aux espaces des S -repères puis aux espaces des S -automorphismes.

2.3.1. Prolongements aux espaces des S -repères

Décrivons deux constructions du prolongement du champ X .

Une description algébrique consiste à étendre la dérivation X de \mathcal{O}_M sur $\mathcal{O}_{R(M/S)}$. La dérivation $X : \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M$ s'étend en un endomorphisme $1 \otimes X : \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M \rightarrow \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M$. Puis en une dérivation $1 \otimes X : \text{Sym}(\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M) \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M)$. On vérifie que $[1 \otimes X](\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, ce qui induit une dérivation RX sur $\mathcal{O}_{R(M/S)}$. L'endomorphisme $1 \otimes X : \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M \rightarrow \mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M$ préserve la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels. Ceci implique que RX préserve $\mathcal{O}_{R_k(M/S)}$. Sa restriction à cette sous-algèbre est notée R_kX . Nous voyons dans cette construction que les prolongements commutent à l'action de $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m]$ définie dans la sous-section 2.1.2, i.e. vérifient les égalités

$$(2.2) \quad R_{k+1}X \circ \partial_i - \partial_i \circ R_kX = 0$$

Une description analytique consiste à prendre le champ tangent aux prolongements des flots du champ X sur $R(M/S)$. Les flots du champ X définissent des biholomorphismes dans les fibres de ρ sur leurs ouverts de définition. Un flot au temps $\tau \in \mathbb{C}$ sera noté $\text{exp}(\tau X)$ indépendamment de son ouvert de définition. Leurs jets définissent des S -automorphismes. Or

l'espace des S -automorphismes agit sur l'espace des S -repères par composition au but :

$$\begin{aligned} \text{Aut}(M/S) \times_{s_M} R(M/S) &\longrightarrow R(M/S) \\ (\phi, r) &\longmapsto \phi \circ r \end{aligned}$$

Les prolongements RX et $R_k X$ de X sont définis sur $R(M/S)$ et $R_k(M/S)$ grâce à cette action. Pour $r \in R(M/S)$ tel que $r(0)$ soit dans le domaine de définition de X :

$$\begin{aligned} RX|_r &:= \left. \frac{d}{d\tau} \exp(\tau X) \circ r \right|_{\tau=0} \\ R_k X|_{j_k r} &:= \left. \frac{d}{d\tau} j_k(\exp(\tau X) \circ r) \right|_{\tau=0} \end{aligned}$$

LEMME 2.12. — *Les deux manières de prolonger le champ X en RX et en $R_k X$ aux espaces des S -repères $R(M/S)$ et $R_k(M/S)$ décrites ci-dessus coïncident.*

Démonstration. — D'après [23, p. 117–135] la construction analytique vérifient aussi les relations (2.2) et ces relations définissent complètement le champ de vecteurs. □

L'action de Γ sur l'anneau de coordonnées de $R(M/S)$ provient de son action sur le facteur de gauche dans $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_m] \otimes \mathcal{O}_M$. (c.f. ??). La dérivation RX est induite par un endomorphisme agissant sur le membre de droite du même produit tensoriel. Ces deux actions commutent. Autrement dit, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$(2.3) \quad S_\gamma^* RX = RX \quad \text{et} \quad (S_{j_k(\gamma)})^* R_k X = R_k X$$

2.3.2. Prolongements aux espaces des S -automorphismes

Le champ de vecteurs X peut se prolonger aux espaces des S -automorphismes par la source ou par le but. Ces prolongements s'expriment à l'aide du morphisme $\Phi_k : R_k(M/S) \times R_k(M/S) \rightarrow \text{Aut}_k(M/S)$ donné dans le lemme 2.10 :

DÉFINITION 2.13. — *Les prolongements du champ X aux espaces des S -automorphismes par la source et par le but sont respectivement :*

$$R_k^s X = d\Phi_k.(R_k X + 0) \quad R_k^t X = d\Phi_k.(0 + R_k X)$$

Ces champs sont bien définis puisque les champs $R_k X + 0$ et $0 + R_k X$ sont invariants sous l'action diagonale de Γ_k .

3. Le groupoïde de Galois

3.1. Trois définitions d'un groupoïde

Nous présentons ici trois définitions d'une sous-variété de $\text{Aut}_k(M/S)$ associé au champ X . Cette sous-variété est un sous-groupoïde au-dessus d'un ouvert de M . Par abus de langage, nous appellerons sous-groupoïde ce type de sous-variété. Il est commode d'utiliser la correspondance donnée par le morphisme Φ_k du lemme 2.10 entre les relations d'équivalence de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ stables sous l'action diagonale du groupe Γ_k et sous-groupoïdes de $\text{Aut}_k(M/S)$. Par ailleurs, il sera régulièrement nécessaire de se restreindre à des ouverts de la base M . Si U est un tel ouvert, si \mathcal{G} est une sous-variété de $\text{Aut}_k(M/S)$ et si \mathcal{R} est une sous-variété de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$, alors les restrictions respectives au-dessus de cet ouvert seront notées $\mathcal{G}|_{U \times U}$ et $\mathcal{R}|_{U \times U}$, autrement dit : $\mathcal{G}|_{U \times U} := \mathcal{G} \cap (s \times t)^{-1}(U \times U)$ et $\mathcal{R}|_{U \times U} := \mathcal{R} \cap (\text{pr}_1 \times \text{pr}_2)^{-1}(U \times U)$.

3.1.1. Définition algébrique

Voici la définition du groupoïde en tant que plus petit groupoïde algébrique contenant le flot de X :

DÉFINITION 3.1. — *Le groupoïde $\mathcal{G}_k^a(X)$, est la plus petite sous-variété de $\text{Aut}_k(M/S)$ telle qu'il existe un ouvert $U^a \subset M$ vérifiant :*

- (1) $R_k^t X \subset T\mathcal{G}_k^a(X)$;
- (2) la restriction $\mathcal{G}_k^a(X)|_{U^a \times U^a}$ est un sous-groupoïde de

$$\text{Aut}_k(M/S)|_{U^a \times U^a}.$$

Afin de voir que cette variété est bien définie, donnons la définition d'une sous-variété minimale tangente de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ qui soit une relation d'équivalence au-dessus d'un ouvert. Nous allons montrer que l'existence de l'une est équivalente à l'existence de l'autre, puis que cette deuxième variété est bien définie.

DÉFINITION 3.2. — *La variété $\mathcal{R}_k^a(X)$ est la plus petite sous-variété de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ telle qu'il existe un ouvert $U^a \subset B$ vérifiant :*

- (1) $0 + R_k X \subset T\mathcal{R}_k^a(X)$;
- (2) la restriction $\mathcal{R}_k^a(X)|_{U^a \times U^a}$ est une relation d'équivalence de $R_k(U^a/S) \times R_k(U^a/S)$.

LEMME 3.3. — *En supposant que les variétés $\mathcal{G}_k^a(X)$ et $\mathcal{R}_k^a(X)$ existent, nous avons les égalités : $\mathcal{G}_k^a(X) = \Phi_k(\mathcal{R}_k^a(X))$ et $\Phi_k^{-1}(\mathcal{G}_k^a(X)) = \mathcal{R}_k^a(X)$.*

Démonstration. — Grâce à la correspondance donnée par Φ_k , il suffit de montrer que la variété $\mathcal{R}_k^a(X)$ est stable sous l'action diagonale du groupe Γ_k . Soit $j_k(\gamma) \in \Gamma_k$. L'action diagonale de $j_k(\gamma)$ est notée $\Delta_{j_k(\gamma)}$.

Montrons que la sous-variété $\Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^a(X))$ vérifie la condition (1) de la définition 3.2. Le champ $R_k X$ est invariant sous l'action du groupe Γ_k . Nous avons l'inclusion

$$0 + R_k X = d\Delta_{j_k(\gamma)} \cdot (0 + R_k X) \subset d\Delta_{j_k(\gamma)} \cdot T\mathcal{R}_k^a(X) = T(\Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^a(X))).$$

Montrons que la sous-variété $\Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^a(X))$ vérifie la condition (2). Dans la sous-section 2.2.2, nous avons défini l'identité e , la composition partielle m et l'inversion inv sur le produit $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$. Montrons la stabilité de la sous-variété sous ces trois applications au-dessus de l'ouvert U^a :

$$\begin{aligned} e(U^a) &= \Delta_{j_k(\gamma)}(e(U^a)) \\ &\subset \Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^a(X)|_{U^a \times U^a}) \end{aligned}$$

L'inversion et la composition partielle commutent avec l'action diagonale et stabilisent $\mathcal{R}_k^a(X)|_{U^a \times U^a}$, donc

$$\begin{aligned} \text{inv} \circ \Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^a(X)|_{U^a \times U^a}) &= \Delta_{j_k(\gamma)} \circ \text{inv}(\mathcal{R}_k^a(X)|_{U^a \times U^a}) \\ &\subset \Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^a(X)|_{U^a \times U^a}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m \left(\Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^a(X)|_{U^a \times U^a}) \times_{sR_k(U^a/S)^t} \Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^a(X)|_{U^a \times U^a}) \right) \\ = \Delta_{j_k(\gamma)} \circ m \left(\mathcal{R}_k^a(X)|_{U^a \times U^a} \times_{sR_k(U^a/S)^t} \mathcal{R}_k^a(X)|_{U^a \times U^a} \right) \\ \subset \Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^a(X)|_{U^a \times U^a}) \end{aligned}$$

En appelant la minimalité de $\mathcal{R}_k^a(X)$, il vient l'inclusion

$$\mathcal{R}_k^a(X) \subset \Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^a(X)).$$

Pour tout $j_k(\gamma) \in \Gamma_k$, nous avons l'inclusion souhaitée $\Delta_{j_k(\gamma^{-1})}(\mathcal{R}_k^a(X)) \subset \mathcal{R}_k^a(X)$. □

LEMME 3.4. — *La sous-variété $\mathcal{R}_k^a(X)$ est bien définie.*

Démonstration. — Par le lemme 2.4, il existe un ouvert affine $M^\circ \subset M$ tel que le fibré des S -repères $R_k(M^\circ/S)$ soit aussi affine. Cet ouvert peut être pris de telle sorte que le prolongement $R_k X$ soit bien défini sur

$R_k(M^\circ/S)$. Notons $K := \mathcal{O}(R_k(M^\circ/S)) \otimes_{\mathcal{O}(M^\circ)} \mathbb{C}(M)$ l'anneau des fonctions régulières sur $R_k(M^\circ/S)$ localisé en les fonctions régulières de l'ouvert affine M° . Notons $L := K \otimes K$ l'anneau des fonctions régulières de $R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S)$ localisé en les fonctions régulières de l'ouvert M° par la source et par le but. Regardons les idéaux I de L vérifiant :

- (i) L'idéal $\mathcal{I}(e(M^\circ))$ de L associé à l'identité $e(M^\circ)$ de $R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S)$ contient I
- (ii) $\text{inv}^*(I) \subset I$ et $m^*(I) \subset I \otimes_{sK^t} 1 + 1 \otimes_{sK^t} I$
- (iii) $(0 + R_k X)(I) \subset I$

Si I_1 et I_2 sont deux tels idéaux de L , c'est-à-dire qui vérifient (i), (ii) et (iii), alors l'idéal $I_1 + I_2$ vérifie encore (i). De plus inv^* , m^* et l'action d'un champ de vecteurs X étant additifs, il vient que $I_1 + I_2$ vérifie aussi (ii) et (iii). Par noëthérianité, il existe un idéal maximal, à nouveau noté I , vérifiant les trois conditions ci-dessus. Notons $N := \mathcal{V}(I \cap \mathcal{O}(R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S)))$ la sous-variété de $R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S)$ correspondant à l'idéal I .

Montrons que son adhérence \overline{N} est la sous-variété de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ recherchée, c'est-à-dire qu'elle vérifie (1), (2) et qu'elle est minimale.

La stabilité de l'idéal I sous inv^* et m^* perdure en n'inversant qu'une seule fonction de $\mathcal{O}(M^\circ)$. L'idéal I est engendré par des éléments f_1, \dots, f_n , qui peuvent être pris dans l'anneau $\mathcal{O}(R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S))$. L'idéal I vérifiant (ii), il existe des éléments $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij}$ dans l'anneau localisé L tels que $m^*(f_i) = \sum_j \alpha_{ij} f_j \otimes_{\overline{K}} \beta_{ij} + \gamma_{ij} \otimes_{\overline{K}} \delta_{ij} f_j$. Il existe un multiple commun $h \in \mathcal{O}(M^\circ)$ des dénominateurs de tous ces éléments, c'est-à-dire, pour tout i, j , les éléments $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij}$ sont contenus dans l'anneau $\mathcal{O}(R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S)) \left[\frac{1}{h} \otimes 1, 1 \otimes \frac{1}{h} \right]$. Cet anneau a de plus la particularité d'être stable sous les morphismes inv^* et m^* puisque l'anneau $\mathcal{O}(R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S))$ l'est et que $\text{inv}^* \left(\frac{1}{h} \otimes 1 \right) = 1 \otimes \frac{1}{h}$, $\text{inv}^* \left(1 \otimes \frac{1}{h} \right) = \frac{1}{h} \otimes 1$, $m^* \left(\frac{1}{h} \otimes 1 \right) = \left(\frac{1}{h} \otimes 1 \right) \otimes (1 \otimes 1)$ et $m^* \left(1 \otimes \frac{1}{h} \right) = (1 \otimes 1) \otimes \left(1 \otimes \frac{1}{h} \right)$. Il vient alors la stabilité recherchée : en posant $I' = I \cap \mathcal{O}(R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S)) \left[\frac{1}{h} \otimes 1, 1 \otimes \frac{1}{h} \right]$, alors $\text{inv}^*(I') \subset I'$ et $m^*(I') \subset I' \otimes 1 + 1 \otimes I'$. Autrement dit, la sous-variété N est stable par inversion et par composition partielle au-dessus de l'ouvert $M^\circ - \{h = 0\}$. De plus, l'inclusion (i) : $I \cap \mathcal{O}(R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S)) \subset \mathcal{I}(e(M^\circ))$ implique $e(M^\circ - \{h = 0\}) \subset N$. Donc son adhérence \overline{N} dans $R_k(M/S)$ vérifie la condition (2) avec cet ouvert.

La condition (iii) implique que le prolongement $0 + R_k X$ est tangent à la sous-variété N . Cette condition est fermée. Il vient que le prolongement $0 + R_k X$ est tangent à son adhérence, i.e. \bar{N} vérifie (1).

Il reste enfin la minimalité. Soit N' une sous-variété de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ vérifiant (1) et (2). Notons O' l'ouvert de M correspondant à la condition (2). Montrons que cette sous-variété contient \bar{N} . L'intersection $N'' = N' \cap \bar{N}$ vérifie elle aussi ces deux conditions où l'ouvert correspondant à la condition (2) est l'intersection $O' \cap (M^\circ - \{k = 0\})$. Notons N''_{M° la restriction de N'' à l'ouvert affine $R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S)$ et $J := \mathcal{I}(N''_{M^\circ})$ l'idéal associé. L'inclusion des sous-variétés $N''_{M^\circ} \subset N$ implique l'inclusion inverse des idéaux associés $(I \cap \mathcal{O}(R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S))) \subset J$. Ainsi, il vient $I = (I \cap \mathcal{O}(R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S)))L \subset JL$. Or, tout comme l'idéal I , l'idéal JL de l'anneau localisé L vérifie aussi les conditions (i), (ii) et (iii). La maximalité de I implique $I = JL$. Ceci donne l'inclusion $J \subset (JL \cap \mathcal{O}(R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S))) = I \cap \mathcal{O}(R_k(M^\circ/S) \times R_k(M^\circ/S))$. En revenant aux sous-variétés associées, il vient l'inclusion inverse $N \subset N''_{M^\circ}$. Puis en passant aux adhérences, il vient $\bar{N} \subset \bar{N}''_{M^\circ} \subset N''$. Finalement, nous avons montré l'égalité $\bar{N} = N''$, ce qui donne l'inclusion $\bar{N} \subset N'$ escomptée. □

3.1.2. Définition topologique

Voici la définition du groupoïde en tant que clôture de Zariski du flot de X .

DÉFINITION 3.5. — *Le groupoïde $\mathcal{G}_k^b(X)$ est la plus petite sous-variété de $\text{Aut}_k(M/S)$ qui est tangente au prolongement $R_k^t X$ et qui contient l'identité. Autrement dit, en reprenant les notations de la définition [4, définition 1.2] $\mathcal{G}_k^b(X) := V(R_k^t X, e(M))$.*

Le corollaire [4, Corollary 2.6] nous dit que cette variété minimale tangente est bien définie et qu'elle est irréductible. De plus, comme précédemment, il lui correspond une sous-variété minimale tangente de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$.

DÉFINITION 3.6. — *La variété $\mathcal{R}_k^b(X)$, est la plus petite sous-variété de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ qui est tangente au prolongement $0 + R_k X$ et qui contient l'identité. Autrement dit, $\mathcal{R}_k^b(X) := V(0 + R_k X, e(M))$.*

De la même manière que dans la preuve du lemme 3.4, nous pouvons montrer que cette variété est invariante sous l'action diagonale et correspond par Φ_k au groupoïde $\mathcal{G}_k^b(X)$:

LEMME 3.7. — *Les variétés minimales tangentes vérifient*

$$\mathcal{G}_k^b(X) = \Phi_k(\mathcal{R}_k^b(X)) \quad \text{et} \quad \Phi_k^{-1}(\mathcal{G}_k^b(X)) = \mathcal{R}_k^b(X).$$

3.1.3. Définition via les intégrales premières

DÉFINITION 3.8. — *Une fonction rationnelle $H \in \mathbb{C}(R_k(M/S))$ est une intégrale première rationnelle du prolongement R_kX si $R_kX.H = 0$.*

Le sous-corps de $\mathbb{C}(R_k(M/S))$ constitué des intégrales premières rationnelles du prolongement R_kX est noté $\mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_kX}$.

Dans cette sous-section, le groupoïde est l'ensemble des S -automorphismes qui préservent les niveaux des intégrales premières rationnelles de R_kX :

DÉFINITION 3.9. — *Soient $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille génératrice de $\mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_kX}$ et $R_k(M/S)^\circ$ un ouvert de $R_k(M/S)$ sur lequel les applications H_i sont bien définies. Le groupoïde $\mathcal{G}_k^c(X)$ est la clôture de Zariski de l'ensemble $\{\phi \in \Phi_k(R_k(M/S)^\circ \times R_k(M/S)^\circ) \mid \forall i, H_i \circ \phi = H_i\}$.*

Cette définition du groupoïde demande de faire un choix parmi les intégrales premières du prolongement du champ X . Nous allons définir une sous-variété de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ qui lui correspond. Nous allons montrer qu'elle est intrinsèque au champ X , qu'elle est invariante sous l'action diagonale du groupe Γ_k et que son image par Φ_k est le groupoïde. Commençons par rappeler la définition d'intégrale première maximale donnée en annexe :

DÉFINITION 3.10. — *Soient N une variété irréductible et $\pi : R_k(M/S) \dashrightarrow N$ une application rationnelle dominante. L'application π est une intégrale première maximale de R_kX si $\pi^*\mathbb{C}(N) = \mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_kX}$.*

Voici la définition de la sous-variété dont nous avons parlé :

DÉFINITION 3.11. — *Soient $\pi : R_k(M/S) \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale du prolongement R_kX et $R_k(M/S)^\circ$ le domaine de définition de π . La sous-variété $\mathcal{R}_k^c(X)$ de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ est la clôture de Zariski du produit fibré associé, i.e. $\mathcal{R}_k^c(X) := \overline{R_k(M/S)^\circ \times_N R_k(M/S)^\circ}$. Cette clôture sera aussi notée $R_k(M/S) \times_N R_k(M/S)$.*

Dans cette définition nous avons dû choisir une intégrale première maximale du prolongement du champ X . Nous donnons deux lemmes qui seront utiles pour montrer que la sous-variété définie est intrinsèque au champ X et ne dépend pas de l'intégrale première maximale choisie. Ces lemmes seront aussi utiles dans la preuve de l'équivalence des trois définitions dans

la section suivante puis dans le théorème de spécialisation qui est donné en fin de chapitre.

LEMME 3.12. — *Soit $f : P \rightarrow N$ un morphisme dominant où N est une variété irréductible. Soit O un ouvert dense de P . Il existe un ouvert $W \subset N$ tel que pour tout $y \in W$, $f^{-1}(y) \cap O$ est un ouvert dense de $f^{-1}(y)$.*

Démonstration. — Soient n la dimension de la variété N , $(P_i)_{i \in I}$ l'ensemble des composantes irréductibles de P , $(P_i)_{i \in J}$ l'ensemble des composantes irréductibles de P qui dominant N , $(P_i)_{i \in J'}$ le sous-ensemble des composantes irréductibles de P qui dominant N et telles que $P_i - O$ ne domine pas N . Soit $N_0 = N - \left(\bigcup_{i \in I-J} f(P_i) \cup \bigcup_{i \in J'} f(P_i - O) \right)$.

Par définition, pour tout $i \in J'$, $y \in N_0$, $f|_{P_i}^{-1}(y) \cap O = f|_{P_i}^{-1}(y)$. Soit $i \in J - J'$ et d_i la dimension de P_i . L'ensemble $P_i - O$ est de dimension inférieure à $d_i - 1$ car O est un ouvert dense. Une fibre générique de la restriction $f|_{P_i}$ est de dimension pure $d_i - n$ et la dimension d'une fibre générique de la restriction $f|_{P_i - O}$ est inférieure à $d_i - 1 - n$. Autrement dit, il existe un ouvert $W_i \subset N_0$ tel que pour tout $y \in W_i$, $f|_{P_i}^{-1}(y)$ est de dimension pure $d_i - n$ et tel que le complémentaire de $f|_{P_i}^{-1}(y) \cap O$ dans $f|_{P_i}^{-1}(y)$ est de dimension inférieure à $d_i - 1 - n$. Donc pour tout $y \in W_i$, $f|_{P_i}^{-1}(y) \cap O$ est dense dans $f|_{P_i}^{-1}(y)$. L'ouvert $W := \bigcap_{i \in J} W_i \subset N_0$ est l'ouvert recherché puisque pour tout $y \in W$, $f^{-1}(y) \cap O$ est dense dans $f^{-1}(y)$. \square

LEMME 3.13. — *Soit $f : P \dashrightarrow N$ une application rationnelle dominante où N est une variété irréductible. Soit E un ensemble général de P . Le produit fibré $E \times_N E$ est dense dans le produit fibré $P \times_N P$.*

Démonstration. — *Fait :* Notons P° le domaine de définition de f . Il existe un ensemble général $U \subset P$ tel que pour tout $x \in U$, $\{x\} \times f^{-1}(f(x))$ est inclus dans l'adhérence de Zariski de $E \times_N E$ dans $P^\circ \times_N P^\circ$. Cette adhérence est notée $\overline{E \times_N E}^{P^\circ}$.

L'ensemble E est l'intersection dénombrable d'ouverts $O_i \subset P$, $i \in \mathbb{N}$. Fixons $i \in \mathbb{N}$. Le lemme 3.12 appliqué au morphisme $f : P^\circ \rightarrow N$ et à l'ouvert O_i donne l'existence d'un ouvert $W_i \subset N$ tel que pour tout $y \in W_i$, $f^{-1}(y) \cap O_i$ est un ouvert dense de $f^{-1}(y)$. Pour tout $x \in U_i := f^{-1}(W_i) \cap O_i$, $f^{-1}(f(x)) \cap O_i$ est un ouvert dense de $f^{-1}(f(x))$. Notons $U = \bigcap_i U_i$. Pour tout $x \in U$, $f^{-1}(f(x)) \cap E$ est dense dans $f^{-1}(f(x))$ car une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Ainsi, pour tout $x \in U \subset E$, $\{x\} \times f^{-1}(f(x)) = \overline{\{x\} \times f^{-1}(f(x)) \cap E}^{P^\circ} \subset \overline{E \times_N E}^{P^\circ}$ ce qui montre le fait.

Notons maintenant $V = P^\circ \times_N P^\circ - \overline{E \times_N E}^{P^\circ}$ et montrons que cet ouvert de $P^\circ \times_N P^\circ$ est vide. Notons $\text{pr}_1 : P^\circ \times_N P^\circ \rightarrow P^\circ$ la projection sur la première coordonnée. Si $x \in \text{pr}_1(V)$ alors $\{x\} \times f^{-1}(f(x)) \not\subset \overline{E \times_N E}^{P^\circ}$. Si U est l'ensemble général donné dans le fait précédent alors $\text{pr}_1(V) \cap U = \emptyset$. Si V était non vide alors $\text{pr}_1(V)$ contiendrait un ouvert de P° ce qui contredirait la vacuité de son intersection avec l'ensemble général U . Donc $E \times_N E$ est dense dans $P^\circ \times_N P^\circ$ qui est lui-même dense dans $P \times_N P$ par définition. Ceci termine la preuve du lemme. \square

LEMME 3.14. — *La sous-variété $\mathcal{R}_k^c(X)$ définie en 3.11 ne dépend pas de l'intégrale première maximale choisie. Elle est de plus invariante sous l'action diagonale du groupe Γ_k .*

Démonstration. — Soient $\pi : R_k(M/S) \dashrightarrow N$ et $\pi' : R_k(M/S) \dashrightarrow N'$ deux intégrales premières maximales. Aux égalités

$$\mathbb{C}(N) = \mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_k X} = \mathbb{C}(N')$$

il est associé le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R_k(M/S) & & \\ \pi \downarrow & \searrow \pi' & \\ N & \xrightarrow[\psi]{\sim} & N' \end{array}$$

qui induit sur des ouverts convenables :

$$\begin{array}{ccc} R_k(M/S)^\circ & & \\ \pi \downarrow & \searrow \pi' & \\ N^\circ & \xrightarrow[\psi]{\sim} & N'^\circ \end{array}$$

La commutativité du dernier diagramme donne l'égalité des produits fibrés $R_k(M/S)^\circ \times_{N^\circ} R_k(M/S)^\circ = R_k(M/S)^\circ \times_{N'^\circ} R_k(M/S)^\circ$. En appliquant le lemme 3.13 à π puis à π' avec l'ouvert $R_k(M/S)^\circ$ qui est en particulier un ensemble général, nous obtenons les égalités $\overline{R_k(M/S) \times_N R_k(M/S)} = \overline{R_k(M/S)^\circ \times_{N^\circ} R_k(M/S)^\circ} = \overline{R_k(M/S)^\circ \times_{N'^\circ} R_k(M/S)^\circ} = \overline{R_k(M/S) \times_{N'} R_k(M/S)}$. Ce qui conclut la preuve de la première assertion.

Montrons la stabilité sous l'action diagonale. Soit $j_k(\gamma) \in \Gamma_k$. Notons $\Delta_{j_k(\gamma)}$ l'action diagonale de $j_k(\gamma)$ sur le produit $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ et montrons que $\Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^c(X)) = \mathcal{R}_k^c(X)$. Soit $\pi : R_k(M/S) \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale du prolongement $R_k X$. Notons $R_k(M/S)^\circ$ le domaine de définition de π et N' une copie de N de telle sorte que l'application $\pi \circ S_{j_k(\gamma^{-1})}$ s'écrive $\pi \circ S_{j_k(\gamma^{-1})} : R_k(M/S) \dashrightarrow N'$. Nous avons l'égalité

$R_k(M/S)^\circ \cdot j_k(\gamma) \times_{N'} R_k(M/S)^\circ \cdot j_k(\gamma) = \Delta_{j_k(\gamma)}(R_k(M/S)^\circ \times_N R_k(M/S)^\circ)$.
De plus l'application $\pi \circ S_{j_k(\gamma^{-1})}$ est aussi une intégrale première maximale puisque :

$$\begin{aligned} (\pi \circ S_{j_k(\gamma^{-1})})^* \mathbb{C}(R_k(M/S)) &= S_{j_k(\gamma^{-1})}^* \mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_k X} \\ &= \{f \circ S_{j_k(\gamma^{-1})} \mid R_k X(f) = 0, f \in \mathbb{C}(R_k(M/S))\} \\ &= \{h \in \mathbb{C}(R_k(M/S)) \mid R_k X(h \circ S_{j_k(\gamma)}) = 0\} \\ &= \{h \in \mathbb{C}(R_k(M/S)) \mid S_{j_k(\gamma)}^* R_k X(h) = 0\} \\ &= \mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_k X} \quad \text{car } S_{j_k(\gamma)}^* R_k X = R_k X \end{aligned}$$

La non-dépendance envers l'intégrale première maximale choisie nous permet d'obtenir l'égalité

$$\mathcal{R}_k^c(X) = \overline{R_k(M/S)^\circ \times_{N'} R_k(M/S)^\circ} = \overline{\Delta_{j_k(\gamma)}(R_k(M/S)^\circ \times_N R_k(M/S)^\circ)}.$$

Sachant que $\Delta_{j_k(\gamma)}$ est un isomorphisme de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$, il vient $\mathcal{R}_k^c(X) = R_k(M/S) \times_{N'} R_k(M/S) = \Delta_{j_k(\gamma)}(R_k(M/S) \times_N R_k(M/S)) = \Delta_{j_k(\gamma)}(\mathcal{R}_k^c(X))$ ce qui termine la preuve. \square

Nous donnons maintenant le lien entre les variétés $\mathcal{R}_k^c(X)$ et $\mathcal{G}_k^c(X)$ qui montre que cette dernière est intrinsèque à la distribution.

LEMME 3.15. — *Les variétés $\mathcal{R}_k^c(X)$ et $\mathcal{G}_k^c(X)$ se correspondent par la projection $\Phi_k : R_k(M/S) \times R_k(M/S) \rightarrow \text{Aut}_k(M/S)$, i.e. $\mathcal{G}_k^c(X) = \Phi_k(\mathcal{R}_k^c(X))$ et $\Phi_k^{-1}(\mathcal{G}_k^c(X)) = \mathcal{R}_k^c(X)$.*

Démonstration. — Soient $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille génératrice de $\mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_k X}$ et $\pi : R_k(M/S) \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale du prolongement $R_k X$. Soit $R_k(M/S)^\circ$ un ouvert de $R_k(M/S)$ sur lequel les applications H_i , π sont bien définies. Par définition, $\mathcal{R}_k^c(X)$ et $\mathcal{G}_k^c(X)$ sont les clôtures respectives des ensembles $R_k(M/S)^\circ \times_N R_k(M/S)^\circ$ et $\{\phi \in \Phi_k(R_k(M/S)^\circ \times_N R_k(M/S)^\circ) \mid \forall i, H_i \circ \phi = H_i\}$. Commençons par montrer que ces ensembles se correspondent par Φ_k . Soient $(j_k(r), j_k(s)) \in (R_k(M/S)^\circ)^2$ et $j_k(\phi) = \Phi_k(j_k(r), j_k(s))$. Les équivalences suivantes montrent la correspondance :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n, H_i \circ \phi &= H_i \\ \iff \pi(j_k(r)) &= \pi(j_k(s)) \\ \iff \forall j_k(\gamma) \in \Gamma_k, (j_k(r \circ \gamma), j_k(s \circ \gamma)) &\in (R_k(M/S)^\circ)^2, \\ \pi(j_k(r \circ \gamma)) &= \pi(j_k(s \circ \gamma)) \end{aligned}$$

où la dernière équivalence découle du fait que $S_{j_k(\gamma)}^* \pi$ est aussi une intégrale première maximale. Nous avons l'inclusion $\Phi^{-1}(\mathcal{G}_k^c(X)) \supset \mathcal{R}_k^c(X)$ car $\Phi^{-1}(\mathcal{G}_k^c(X))$ est fermé et contient $R_k(M/S)^\circ \times_N R_k(M/S)^\circ$. La stabilité de la sous-variété $\mathcal{R}_k^c(X)$ sous l'action diagonale donne $\Phi_k^{-1} \Phi_k(\mathcal{R}_k^c(X)) = \mathcal{R}_k^c(X)$. L'image $\Phi(\mathcal{R}_k^c(X))$ est fermée puisque la topologie sur $\text{Aut}_k(M/S)$ est la topologie quotient. Nous avons l'inclusion $\mathcal{G}_k^c(X) \subset \Phi(\mathcal{R}_k^c(X))$ car $\Phi(\mathcal{R}_k^c(X))$ est un fermé qui contient

$$\{\phi \in \Phi_k(R_k(M/S)^\circ \times R_k(M/S)^\circ) \mid \forall i, H_i \circ \phi = H_i\}.$$

Ceci donne l'inclusion $\Phi^{-1}(\mathcal{G}_k^c(X)) \subset \mathcal{R}_k^c(X)$ et termine la preuve. □

3.2. Équivalence des trois définitions

THÉOREME 3.16. — *Soient S et M deux variétés complexes, lisses, irréductibles, $\rho : M \rightarrow S$ un morphisme lisse à fibres connexes et X un champ de vecteurs sur M tangent aux fibres de ρ . Les trois définitions de groupoïde données dans la sous-section précédente sont équivalentes, i.e. $\mathcal{G}_k^a(X) = \mathcal{G}_k^b(X) = \mathcal{G}_k^c(X)$. Cette sous-variété de $\text{Aut}_k(M/S)$ est appelée le groupoïde de Galois d'ordre k . Elle est notée $\text{Gal}_k(X/S)$.*

Démonstration. — Grâce au lemmes 3.3, 3.7 et 3.15, il suffit de montrer les égalités $\mathcal{R}_k^a(X) = \mathcal{R}_k^b(X) = \mathcal{R}_k^c(X)$. Nous montrons dans l'ordre : $\mathcal{R}_k^b(X) \subset \mathcal{R}_k^a(X)$, $\mathcal{R}_k^c(X) \subset \mathcal{R}_k^b(X)$ et $\mathcal{R}_k^a(X) \subset \mathcal{R}_k^c(X)$.

La variété $\mathcal{R}_k^a(X)$ contient la diagonale de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ et est tangente au prolongement $0 + R_k X$. Elle contient $\mathcal{R}_k^b(X)$ par minimalité de cette dernière.

Soit $\pi : R_k(M/S) \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale de $R_k X$. Le théorème [4, theorem 1.1.] nous donne l'existence d'un ensemble général $E \subset R_k(M/S)$ tel que pour tout $j_k(r) \in E$, $\overline{\pi^{-1}(\pi(j_k(r)))}$ est $V(R_k X, j_k(r))$ la sous-variété minimale tangente à $R_k X$ contenant $j_k(r)$. Par définition, la sous-variété $\mathcal{R}_k^b(X)$ contient la diagonale de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ et est tangente à $0 + R_k X$. Pour tout $j_k(r) \in E$, $\{j_k(r)\} \times V(R_k X, j_k(r)) \subset \mathcal{R}_k^b(X)$. Donc $E \times_N E \subset \{\{j_k(r)\} \times V(R_k X, j_k(r)) \mid j_k(r) \in E\} \subset \mathcal{R}_k^b(X)$. Grâce au lemme 3.13 nous obtenons $\mathcal{R}_k^c(X) = \overline{E \times_N E} \subset \mathcal{R}_k^b(X)$.

Il reste la dernière inclusion $\mathcal{R}_k^a(X) \subset \mathcal{R}_k^c(X)$ à montrer. Soient $\pi : R_k(M/S) \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale du prolongement $R_k X$ et $R_k(M/S)^\circ$ son domaine de définition. L'ensemble $R_k(M/S)^\circ \times_N R_k(M/S)^\circ$ est tangent au champ $0 + R_k X$ puisque le champ $R_k X$ est tangent aux fibres de π . La propriété de tangence est une propriété fermée. La variété $\mathcal{R}_k^c(X)$

est tangente au champ $0 + R_k X$. Montrons que cette variété est une relation d'équivalence au-dessus d'un ouvert. Ceci nous permettra de conclure sur l'inclusion cherchée grâce à la minimalité de la variété $\mathcal{R}_k^a(X)$. Quitte à réduire l'ouvert $R_k(M/S)^\circ$, nous pouvons supposer que son image M° par la projection $R_k(M/S) \rightarrow M$ soit un ouvert de M .

Fait. — Soit $(j_k(r_1), j_k(r_2), j_k(r_3)) \in R^k(M^\circ/S)^\circ$. Il existe $j_k(\gamma) \in \Gamma_k$ tel que $(j_k(r_1), j_k(r_2), j_k(r_3)) \in (R_k(M/S)^\circ \cdot j_k(\gamma))^\circ$.

Pour $i = 1, 2, 3$, les ensembles $\{j_k(\gamma) \in \Gamma_k, j_k(r_i) \cdot j_k(\gamma)^{-1} \in R_k(M/S)^\circ\}$ sont trois ouverts de Γ_k . Chacun d'eux est non vide grâce à la transitivité de l'action de Γ_k sur chaque fibre de $R_k(M^\circ/S) \rightarrow M^\circ$. L'irréductibilité de Γ_k implique que leur intersection est non vide. Ce qui montre le fait.

Soit $(j_k(r_1), j_k(r_2), j_k(r_3)) \in R_k(M^\circ/S)^\circ$. Notons Δ l'action diagonale de Γ_k . Le fait nous donne l'existence d'un élément $j_k(\gamma) \in \Gamma_k$ tel que

$$(j_k(r_1), j_k(r_2)) \in \Delta_{j_k(\gamma)}(R_k(M/S)^\circ \times R_k(M/S)^\circ)$$

et

$$(j_k(r_2), j_k(r_3)) \in \Delta_{j_k(\gamma)}(R_k(M/S)^\circ \times R_k(M/S)^\circ).$$

Soit N' une copie de N de telle sorte que l'application $\pi \circ S_{j_k(\gamma^{-1})}$ s'écrive $\pi \circ S_{j_k(\gamma^{-1})} : R_k(M/S) \dashrightarrow N'$. Le lemme 3.14 nous dit que $\mathcal{R}_k^c(X) \cap \Delta_{j_k(\gamma)}(R_k(M/S)^\circ \times R_k(M/S)^\circ) = R_k(M/S)^\circ \cdot j_k(\gamma) \times_{N'} R_k(M/S)^\circ \cdot j_k(\gamma)$. Nous obtenons ainsi les implications

$$\begin{aligned} (j_k(r_1), j_k(r_2)) \in \mathcal{R}_k^c(X)|_{M^\circ \times M^\circ} &\implies \pi(j_k(r_1 \circ \gamma^{-1})) = \pi(j_k(r_2 \circ \gamma^{-1})) \\ &\implies (j_k(r_2), j_k(r_1)) \in \mathcal{R}_k^c(X)|_{M^\circ \times M^\circ} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (j_k(r_1), j_k(r_2)) \in \mathcal{R}_k^c(X)|_{M^\circ \times M^\circ} \text{ et } (j_k(r_2), j_k(r_3)) \in \mathcal{R}_k^c(X)|_{M^\circ \times M^\circ} \\ \implies \pi(j_k(r_1 \circ \gamma^{-1})) = \pi(j_k(r_2 \circ \gamma^{-1})) \\ \text{et } \pi(j_k(r_2 \circ \gamma^{-1})) = \pi(j_k(r_3 \circ \gamma^{-1})) \\ \implies \pi(j_k(r_1 \circ \gamma^{-1})) = \pi(j_k(r_3 \circ \gamma^{-1})) \\ \implies (j_k(r_1), j_k(r_3)) \in \mathcal{R}_k^c(X)|_{M^\circ \times M^\circ} \end{aligned}$$

qui nous donnent la stabilité de la variété $\mathcal{R}_k^c(X)|_{M^\circ \times M^\circ}$ par inversion et par composition partielle. Autrement dit, la variété $\mathcal{R}_k^c(X)|_{M^\circ \times M^\circ}$ est une relation d'équivalence, ce qui conclut la preuve de la dernière inclusion. \square

PROPOSITION 3.17. — *Soit $v \in \mathbb{N}$ le maximum des dimensions des sous-variétés minimales tangentes à $R_k X$ (voir [4]). Le groupoïde de Galois d'ordre k du champ X est une variété irréductible de dimension $\dim(R_k(M/S)) + v - \dim(\Gamma_k)$.*

Démonstration. — Nous savons par la définition dite topologique que le groupoïde de Galois est la sous-variété minimale tangente à $0 + R_k X$ qui contient l'identité. Le corollaire [4, corollary 2.6] nous dit que cette sous-variété est irréductible. Utilisons la définition avec les intégrales premières pour le calcul de la dimension. Soit $\pi : R_k(M/S) \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale. Le théorème [4, theorem 1.1] nous dit que les fibres génériques sont de dimension v et que la variété N est de dimension $\dim(R_k(M/S)) - v$. Le produit fibré $R_k(M/S) \times_N R_k(M/S)$ est de dimension $2 \dim(R_k(M/S)) - (\dim(R_k(M/S)) - v) = \dim(R_k(M/S)) + v$. Le groupoïde de Galois étant l'image de ce produit fibré par Φ_k , il est donc de dimension $\dim(R_k(M/S)) + v - \dim(\Gamma_k)$. □

3.3. Le groupoïde de Galois

LEMME 3.18. — *La restriction de la projection $\text{Aut}_k(M/S) \rightarrow \text{Aut}_{k-1}(M/S)$ au groupoïde de Galois d'ordre k induit un morphisme dominant $\text{Gal}_k(X/S) \rightarrow \text{Gal}_{k-1}(X/S)$.*

Démonstration. — Notons π_k la projection $\text{Aut}_k(M/S) \rightarrow \text{Aut}_{k-1}(M/S)$. Il suffit de montrer que $\overline{\pi_k(\text{Gal}_k(X/S))} = \text{Gal}_{k-1}(X/S)$. Remarquons déjà que $d\pi_k \cdot R_k^t X = R_{k-1}^t X$ puisque leurs flots sont les mêmes, à savoir : $\pi_k \circ j_k(\exp(\tau X)) = j_{k-1}(\exp(\tau X))$. Nous savons aussi que l'image de l'identité de $\text{Aut}_k(M/S)$ par π_k est l'identité de $\text{Aut}_{k-1}(M/S)$. Nous en déduisons que $\overline{\pi(\text{Gal}_k(X/S))}$ est une variété contenant l'identité et tangente à $R_{k-1}^t X$ puisque la tangence est une propriété fermée. La minimalité de $\text{Gal}_{k-1}(X/S)$ implique l'inclusion $\overline{\pi(\text{Gal}_k(X/S))} \supset \text{Gal}_{k-1}(X/S)$. Inversement, la variété $\pi_k^{-1}(\text{Gal}_{k-1}(X/S))$ contient l'identité de $\text{Aut}_k(M/S)$ et est tangente à $R_k^t X$. La minimalité de $\text{Gal}_k(X/S)$ implique l'inclusion $\text{Gal}_k(X/S) \subset \pi_k^{-1}(\text{Gal}_{k-1}(X/S))$. En prenant l'image par π_k de part et d'autre de l'inclusion cela donne l'inclusion $\pi_k(\text{Gal}_k(X/S)) \subset \text{Gal}_{k-1}(X/S)$ ce qui termine la preuve. □

Ce lemme permet de donner la définition suivante :

DÉFINITION 3.19. — *Le groupoïde de Galois $\text{Gal}(X/S)$ est la limite projective de la famille des groupoïdes de Galois d'ordre $k : (\text{Gal}_k(X/S))_k$. Lorsque l'espace des paramètres S est réduit à un point, il est noté $\text{Gal}(X)$.*

La définition du groupoïde de Galois d'ordre k avec les intégrales premières du champ X amène à décrire le groupoïde de Galois de la façon suivante :

$$\text{Gal}(X/S) = \{ \phi \in \text{Aut}(M/S) \mid \forall k \in \mathbb{N}, \forall H \in \mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_k X}, H \circ j_k(\phi) = H \}$$

Exemple 3.20. — Soit Y un champ de vecteurs sur M tangent aux fibres de ρ . Il définit m fonctions $H_i \in \mathbb{C}(R_1(M/S))$ donnant les coordonnées de $j_0(r^*Y)$:

$$j_0(r^*Y) = \sum_i H_i(j_1r) \frac{\partial}{\partial \epsilon_i}$$

Le champ Y est invariant par le champ X , i.e. $\mathcal{L}_X Y = 0$, si et seulement si $R_1 X(H_i) = 0$ pour tout i . En particulier, si $Y = X$ alors $R_1 X(H_i) = 0$ pour tout i .

Pour $\phi \in \text{Aut}(M/S)$, par définition des fonctions H_i , $j_0((\phi \circ r)^*Y) = \sum_i H_i(j_1(\phi \circ r)) \frac{\partial}{\partial \epsilon_i}$. Ainsi $\phi^*Y = Y$ si et seulement si $H_i \circ R_1(\phi) = H_i$ pour tout i .

Exemple 3.21. — Soit $\omega \in \Omega^1(M/S)$ le dual de l'espace des dérivations \mathcal{O}_S -linéaire. Cette 1-forme définit m fonctions $H_i \in \mathbb{C}(R_1(M/S))$ par

$$j_0(r^*\omega) = \sum H_i(j_1r) d\epsilon_i$$

La 1-forme ω est invariante par X , i.e. $\mathcal{L}_X \omega = 0$, si et seulement si $R_1 X(H_i) = 0$ pour tout i . Pour $\phi \in \text{Aut}(M/S)$, nous avons l'équivalence $\phi^*\omega = \omega$ si et seulement si $H_i \circ R_1\phi = H_i$ pour tout i .

La proposition qui va suivre fait le lien avec entre notre définition de groupoïde de Galois et celle donnée par B. Malgrange [17] dans le cas où l'espace des paramètres S est réduit à un point. Commençons par un lemme. L'espace des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{M/S}$ agit sur $\mathcal{O}_{\text{Aut}(M/S)}$ (voir la sous-section 2.2.2).

LEMME 3.22. — Soit $I \subset \mathcal{O}_{\text{Aut}(M/S)}$ l'idéal associé au groupoïde de Galois $\text{Gal}(X/S)$. Cet idéal est $\mathcal{D}_{M/S}$ -invariant. Nous dirons que le groupoïde de Galois est une $\mathcal{D}_{M/S}$ -sous-pro-variété de $\text{Aut}(M/S)$.

Démonstration. — Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $I_k \subset \mathcal{O}_{R_k(M/S) \times R_k(M/S)}$ l'idéal associé à la sous-variété de $R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ correspondante au groupoïde de Galois d'ordre k : $\text{Gal}_k(X/S)$. Par le lemme 2.11, il suffit de montrer que $(\partial_i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i)I_k \subset I_{k+1}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, décrivons I_k en utilisant la définition 3.9 du groupoïde de Galois d'ordre k . Si U est un ouvert affine de M , alors $I_k(U \times U) = \{P \otimes Q - Q \otimes P \mid (P, Q) \in \mathcal{O}_{R_k(M/S)}(U)^2 \text{ et } P/Q \in \mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_k X}\}$. Soit $(P, Q) \in \mathcal{O}_{R_k(M/S)}(U)^2$

vérifiant $P/Q \in \mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_k X}$. Un petit calcul donne l'égalité

$$\begin{aligned}
 (\star) \quad & (Q \otimes Q)(\partial_i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i)(P \otimes Q - Q \otimes P) \\
 & + (P \otimes Q - Q \otimes P)(\partial_i Q \otimes Q + Q \otimes \partial_i Q) \\
 & = (Q \partial_i P - P \partial_i Q) \otimes Q^2 - Q^2 \otimes (Q \partial_i P - P \partial_i Q)
 \end{aligned}$$

Or le fait que $P/Q \in \mathbb{C}(R_k(M/S))^{R_k X}$ et les relations (2.2) que vérifient le champ de vecteurs $R_k X$ nous donnent $R_{k+1} X \partial_i(P/Q) = \partial_i R_k X(P/Q) = 0$. Ceci implique que $\frac{Q \partial_i P - P \partial_i Q}{Q^2} = \partial_i(P/Q) \in \mathbb{C}(R_{k+1}(M))^{R_{k+1} X}$ et donc que $(Q \partial_i P - P \partial_i Q) \otimes Q^2 - Q^2 \otimes (Q \partial_i P - P \partial_i Q) \in I_{k+1}(U \times U)$. De plus $P \otimes Q - Q \otimes P \in I_k(U \times U) \subset I_{k+1}(U \times U)$ par le lemme 3.18. Donc l'égalité (\star) nous donne $(Q \otimes Q)(\partial_i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i)(P \otimes Q - Q \otimes P) \in I_{k+1}(U \times U)$. L'élément $Q \otimes Q$ n'est pas inclus dans $I_{k+1}(U \times U)$ car sinon il devrait s'annuler sur l'identité ce qui impliquerait que $Q = 0$. Le groupoïde de Galois $\text{Gal}_{k+1}(X)$ est irréductible donc l'idéal $I_{k+1}(U \times U)$ est premier. Ceci entraîne que $(\partial_i \otimes 1 + 1 \otimes \partial_i)(P \otimes Q - Q \otimes P) \in I_{k+1}(U \times U)$. Ce qui donne l'inclusion recherchée et montre que le groupoïde $\text{Gal}(X/S)$ est une $\mathcal{D}_{M/S}$ -pro-variété. \square

PROPOSITION 3.23. — *Nous supposons que la variété S est réduite à un point. Le groupoïde de Galois $\text{Gal}(X)$ est la sous-pro-variété minimal de $\text{Aut}(M)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

- *$\text{Gal}(X)$ est une \mathcal{D}_M -sous-pro-variété de $\text{Aut}(M)$.*
- *Il existe un ouvert $U \subset M$ au-dessus duquel tous les groupoïdes de Galois d'ordre k sont des sous-groupoïdes algébriques de $\text{Aut}_k(M)$. En suivant ([17]), si $\text{Gal}(X)$ vérifie ces deux premières conditions, alors $\text{Gal}(X)$ est appelé un groupoïde de Lie.*
- *Les groupoïdes de Galois d'ordre k sont tangents au champ $R_k^t X$, i.e. $R_k^t X \subset T \text{Gal}_k(X)$.*

La définition présente dans [17] de groupoïde de Lie diffère légèrement de celle donnée ci-dessus. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons π_n la projection $\text{Aut}(M) \rightarrow \text{Aut}_n(M)$. La définition de [17] dit qu'une \mathcal{D}_M -sous-pro-variété G de l'espace des automorphismes de M est un groupoïde de Lie s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'au-dessus d'un ouvert, $\pi_k(G)$ est un groupoïde pour $k \geq n$. Mais ces deux définitions coïncident. Les opérations de composition partielle et d'inversion commutent aux projections $\text{Aut}_n(M) \rightarrow \text{Aut}_k(M)$ pour $k \leq n$. Si l'ensemble constructible $\pi_n(G)$ est stable par ces opérations au-dessus d'un ouvert alors pour $k \leq n$ l'ensemble constructible $\pi_k(G)$ est aussi stable par ces opérations au-dessus d'un ouvert éventuellement plus petit. Quitte à

prendre un plus petit ouvert pour $\pi_n(G)$, nous n'aurons pas besoin de le réduire pour $\pi_k(G)$.

Démonstration. — Le groupoïde de Galois vérifie la première et la troisième propriété. Nous allons montrer qu'il vérifie la deuxième. Pour montrer que l'ouvert de cette deuxième condition peut être choisi indépendamment de k nous utilisons un théorème de B. Malgrange qui est donné dans [17] dans un cadre analytique mais qui reste valable dans un cadre algébrique. Nous montrons ensuite la minimalité.

Pour montrer la deuxième propriété nous allons construire un groupoïde de Lie puis voir qu'il coïncide avec le groupoïde de Galois. Notons $I \subset \mathcal{O}_{\text{Aut}(M)}$ l'idéal associé à $\text{Gal}(X)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons π_k la projection $\text{Aut}(M) \rightarrow \text{Aut}_k(M)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\text{Gal}(X)(k)$ la \mathcal{D}_M -sous-variété de $\text{Aut}(M)$ qui est définie par le faisceau d'idéaux différentiel engendré par $I \cap \mathcal{O}_{\text{Aut}_k(M)}$. Montrons que $\text{Gal}(X)(k)$ est un groupoïde de Lie. D'après le lemme 3.22, $\text{Gal}(X)$ est une \mathcal{D}_M -sous-pro-variété de $\text{Aut}(M)$. Donc $\text{Gal}(X) \subset \text{Gal}(X)(k)$ et $\overline{\pi_k(\text{Gal}(X)(k))} = \overline{\pi_k(\text{Gal}(X))} = \text{Gal}_k(X)$. La définition 3.5 dite algébrique du groupoïde de Galois d'ordre k de X nous dit que $\overline{\pi_k(\text{Gal}(X)(k))}$ est un groupoïde au-dessus d'un ouvert. Le théorème [17, 4.4.1] nous dit que $\text{Gal}(X)(k)$ est un groupoïde de Lie. Le théorème [17, 4.5.1] nous dit que l'intersection $\bigcap_k \text{Gal}(X)(k)$ est encore un groupoïde de Lie. Pour montrer que le groupoïde de Galois $\text{Gal}(X)$ est bien un groupoïde de Lie, il suffit de montrer qu'il coïncide avec cette intersection. Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons vu que $\text{Gal}(X) \subset \text{Gal}(X)(k)$ donc $\text{Gal}(X)$ est contenu dans l'intersection. Sachant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\overline{\pi_k(\text{Gal}(X)(k))} = \overline{\pi_k(\text{Gal}(X))}$, nous obtenons l'inclusion inverse et terminons la preuve pour la deuxième propriété.

Il reste la minimalité. Si W est une pro-variété vérifiant les trois propriétés de la proposition alors la minimalité de W implique $W \subset \text{Gal}(X)$. Or W est la limite projective d'une famille de variété $(W_k)_k$. Si l'inclusion est stricte alors il existe un entier k tel que l'inclusion $W_k \subset \text{Gal}_k(X)$ est stricte. Mais ceci contredit la minimalité de $\text{Gal}_k(X)$. Il vient donc $W = \text{Gal}(X)$. Ceci termine la preuve de la proposition. \square

COROLLAIRE 3.24. — *Lorsque l'espace des paramètres S est réduit à un point, la définition 3.19 du groupoïde de Galois de X coïncide avec celle donnée par B. Malgrange dans [17].*

Démonstration. — Le groupoïde de Galois défini par B. Malgrange est la sous-pro-variété minimal de $\text{Aut}(M)$ vérifiant les trois propriétés décrites dans la proposition 3.23. \square

Pour conclure cette partie nous allons décrire une partie des équations du groupoïde de Galois d'un système linéaire. Suivant les cas particuliers effectivement considérés d'autres équations pourront apparaître.

Exemple 3.25. — Posons $S = \mathbb{C}$ et $M = S \times \mathbb{C}^{n+1}$. Nous noterons q la coordonnée sur S et t, x_1, \dots, x_n les coordonnées sur \mathbb{C}^{n+1} . Considérons un champ de vecteurs de la forme

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum A_i^j(t, q)x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}(t, q))$. Ce champ de vecteurs représente le système linéaire à paramètres : $\frac{dX}{dt} = A(t, q)X$.

L'espace des repères d'ordre 1 est $R_1(M/S) = M \times \text{GL}(\mathbb{C}^{n+1})$ de coordonnées $q, t, x_1, \dots, x_n, t^{1^i}$ et $x_j^{1^k}$, $j = 1, \dots, n$ et $i = 0, \dots, n$. Le prolongement du champ de vecteurs est

$$R_1X = X + \sum \left(\frac{\partial A_i^j}{\partial t} t^{1^k} x_j + A_i^j x_j^{1^k} \right) \frac{\partial}{\partial x_i^{1^k}}$$

- (1) Les fonctions t^{1^i} sont des intégrales premières de R_1X . Elles sont préservées par $\text{Gal}_1(X/S)$. Ceci signifie que les éléments de $\text{Gal}(X/S)$ sont de la forme :

$$(M_q, p_1) \rightarrow (M_q, p_2) : (t, x) \mapsto (t + c, \varphi_q(t, x)) \quad \text{avec } c \in \mathbb{C}$$

- (2) Plaçons nous sur $V \subset R_1(M/S)$ décrite par $t^{1^i} = \delta_{0i}$ pour $i = 0, \dots, n$. Notons x' la matrice $(x_j^{1^i})_{\substack{j=1, \dots, n \\ i=1, \dots, n}}$. Les coefficients de $(x')^{-1}x$ sont des intégrales premières de R_1X . Le groupoïde les préservant est l'ensemble des transformations de la forme :

$$(M_q, p_1) \rightarrow (M_q, p_2) : (t, x) \mapsto (t + c, \alpha_q(t)x)$$

avec $\frac{d}{dt} \alpha_q = A(t, q)\alpha_q - \alpha_q A(t + c, q)$

Les réductions supplémentaires qui peuvent éventuellement être faites dépendront de la matrice A . Elles seront données par des équations polynomiales en les coefficients de α , i.e. dans $\mathbb{C}[q, t][\alpha_i^j]$.

Notez que le sous-groupoïde de $\text{Gal}(X/S)$ des éléments fixant t est le groupe de Galois intrinsèque sur $\mathbb{C}(q, t)$ avec sa structure différentielle par rapport à $\frac{d}{dt}$.

Exemple 3.26. — Posons $S = \{*\}$ et $M = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$. Nous noterons q la coordonnée sur \mathbb{C} et t, x_1, \dots, x_n les coordonnées sur \mathbb{C}^{n+1} . Considérons un champ de vecteurs de la forme

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum A_i^j(t, q)x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}(t, q))$. Ce champ de vecteur représente le système non linéaire :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A(t, q)X \\ \frac{dq}{dt} = 0 \end{cases}$$

L'espace des repères d'ordre 1 est $R_1(M) = M \times \text{GL}(\mathbb{C}^{n+2})$ de coordonnées $q, t, x_1, \dots, x_n, q^{1_i}, t^{1_i}$ et $x_j^{1_i}, j = 1, \dots, n$ et $i = -1, \dots, n$. Le prolongement du champ de vecteurs est

$$R_1X = X + \sum \left(\left(\frac{\partial A_i^j}{\partial t} t^{1_k} + \frac{\partial A_i^j}{\partial q} q^{1_k} \right) x_j + A_i^j x_j^{1_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_i^{1_k}}$$

- (1) Les fonctions q, q^{1_i} et t^{1_i} sont des intégrales premières de R_1X . Elles sont préservées par $\text{Gal}_1(X)$. Ceci signifie que les éléments de $\text{Gal}(X)$ sont de la forme :

$$(M, p_1) \rightarrow (M, p_2) : (q, t, x) \mapsto (q, t + c, \varphi(q, t, x))$$

- (2) Plaçons nous sur $V \subset R_1(M)$ décrite par $q^{1_{-1}} = 1, q^{1_i} = 0, t^{1_i} = \delta_{0i}$ pour $i = -1, \dots, n$. Notons x' la matrice $(x_j^{1_i})_{j=1, \dots, n; i=1, \dots, n}$. Les coordonnées de $(x')^{-1}x$ sont des intégrales premières de R_1X . Le groupoïde les préservant est l'ensemble des transformation de la forme :

$$(M, p_1) \rightarrow (M, p_2) : (q, t, x) \mapsto (q, t + c, \alpha(q, t, x))$$

avec $\frac{\partial}{\partial t} \alpha = A(t, q)\alpha - \alpha A(t + c, q)$

Les réductions supplémentaires qui peuvent éventuellement être faites dépendront de la matrice A . Elles seront données par des équations différentielles en les coefficients de α , i.e. dans $\mathbb{C}[q, t][\frac{\partial^k \alpha_j^i}{\partial q^k}]$.

Notez que le sous-groupoïde de $\text{Gal}(X)$ des éléments fixant t est une version intrinsèque du groupe de Galois à paramètres sur $\mathbb{C}(q)$ avec sa structure différentielle par rapport à $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial q}$.

4. Théorèmes de projection et de spécialisation

Ces théorèmes se proposent de comparer les « tailles » de différents groupoïde de Galois. Avant de les énoncer nous devons préciser la manière de mesurer la « taille » d'objets de dimension infinie.

4.1. Type différentiel du groupoïde de Galois

Pour mesurer la taille du groupoïde de Galois, nous allons regarder la suite des dimensions donnée par la filtration par les jets d'ordre fini. Plus généralement, E.R. Kolchin a donné dans [15] un analogue du polynôme de Hilbert dans le cadre de l'algèbre différentielle :

THÉORÈME 4.1. — Soient (K, D_1, \dots, D_m) un corps différentiel dans lequel les dérivations D_i commutent entre elles, des éléments η_1, \dots, η_n d'une extension différentielle de (K, D_1, \dots, D_m) , $L = K\langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ le corps différentiel engendré par ces éléments et pour $k \in \mathbb{N}$, $L^{\leq k}$ le sous corps de L engendré par K et les dérivées au plus k -ième de ces éléments. Il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[x]$ de degré ℓ appelé polynôme de dimension différentielle tel que :

- il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $P(k) = \text{trdeg}_K(L^{\leq k})$
- $\ell \leq m$ et le polynôme P peut s'écrire sous la forme

$$P(k) = \sum_{0 \leq i \leq \ell} a_i \binom{k+i}{i}$$

où $a_i \in \mathbb{Z}$

- le degré ℓ et le coefficient a_ℓ ne dépendent pas des éléments η_1, \dots, η_n mais seulement de L
- l'entier ℓ est le type différentiel de L sur K .
- le coefficient a_ℓ est le degré de transcendance différentielle de L sur K .

Exemple 4.2. — Soit $U \subset \mathbb{C}^2$ un ouvert affine muni de deux systèmes de coordonnées (x_1, x_2) et (y_1, y_2) . Considérons l'extension différentielle

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{C}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) &\subset \left(\mathbb{C}(\text{Aut}(U)), \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &= \left(\mathbb{C}(x_1, x_2, y_1^\alpha, y_2^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^2), \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

où $\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij}$, $\frac{\partial}{\partial x_i} y_j^\alpha = y_j^{\alpha+1_i}$. Le degré de transcendance de $\mathbb{C}(\text{Aut}_k(U))$ sur \mathbb{C} est deux fois le cardinal de $\{\alpha \in \mathbb{N}^2 \mid |\alpha| \leq k\}$ plus deux :

$$2(1 + 2 + \dots + (k + 1)) + 2 = 2 \binom{k+2}{2} + 2$$

COROLLAIRE 4.3. — Il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[x]$ de degré ℓ tel que :

- il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $P(k) = \dim(\text{Gal}_k(X/S))$

- $\ell \leq \dim_S(M)$ et le polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(k) = \sum_{0 \leq i \leq \ell} a_i \binom{k+i}{i}$ où $a_i \in \mathbb{Z}$
- le coefficient a_ℓ est le degré de transcendance différentiel de $\mathbb{C}(\text{Gal}(X/S))$ sur \mathbb{C}

Démonstration. — Soit $U \subset M \times M$ le revêtement non-ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^{2(m+d)}$ présenté dans le lemme 2.9. Ses coordonnées sont notées $x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_d, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_d$. D'après ce lemme,

$$\mathbb{C}(\text{Aut}(M/S)) = \mathbb{C}(M \times M)(y_i^\alpha, 1 \leq i \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^m, 1 \leq |\alpha|).$$

Les dérivations $D_1 := \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, D_m := \frac{\partial}{\partial x_m}$ engendrent $\mathcal{D}_{M/S}$. Elles vérifient

$$D_i x_j = \delta_{ij}, \quad D_i t_j = 0, \quad D_i y_j^\alpha = y_j^{\alpha+1_i}, \quad D_i z_j = 0.$$

Ainsi, $(\mathbb{C}(\text{Aut}(M/S)), D_1, \dots, D_m)$ est une extension différentielle de $(\mathbb{C}, D_1, \dots, D_m)$ qui est différentiellement engendrée par les $2(m+d)$ d'éléments : $x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_d, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_d$.

L'idéal I associé au groupoïde de Galois est premier par la proposition 3.17 et $\mathcal{D}_{M/S}$ -invariant par le lemme 3.22. Les dérivations D_i passent au quotient $\mathcal{O}_{\text{Aut}(M/S)}(U)/I(U)$. Le corps des fractions du quotient $\mathbb{C}(\text{Gal}(X/S))$ est différentiellement engendré par la classe des $2(m+d)$ d'éléments $x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_d, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_d$ modulo I . Le théorème 4.1 nous donne alors l'existence du polynôme appelé polynôme de dimension différentielle. □

DÉFINITION 4.4. — *Le type différentiel du groupoïde de Galois du champ X sur S est le degré de son polynôme de dimension différentielle. Il est noté $\text{tdiff}(\text{Gal}(X/S))$.*

4.2. Le théorème de projection

Soient N une variété irréductible lisse de dimension $n \leq m$, $\pi : M \dashrightarrow N$ une application rationnelle dominante et $\tilde{\rho} : N \rightarrow S$ un morphisme lisse à fibres connexes tels que le diagramme commute

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & N \\ & \searrow \rho & \downarrow \tilde{\rho} \\ & & S \end{array}$$

DÉFINITION 4.5. — *La sous-variété des S -automorphismes d'ordre k de M adaptés au feuilletage induit par π est notée $\text{Aut}_k(\mathcal{F}_\pi)$, i.e.*

$$\text{Aut}_k(\mathcal{F}_\pi) := \overline{\{j_k(\phi) \in R(M/S) \mid j_k(\phi)^*(\pi^*\Omega_N) \subset \pi^*\Omega_N\}}$$

Soient $U \subset M \times M$, $\tilde{U} \subset N \times N$ deux voisinages ouverts qui sont respectivement des revêtements non ramifiés d'ouverts de $\mathbb{C}^{2(m+d)}$, $\mathbb{C}^{2(n+d)}$ et qui font commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 U & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m+d} \times \mathbb{C}^{m+d} \\
 \text{pr}_1 / \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 / \text{pr}_2 \\
 M & \longrightarrow & \mathbb{C}^{m+d} \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{U} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+d} \\
 \tilde{\rho} \downarrow & & \downarrow \\
 S & \longrightarrow & \mathbb{C}^d
 \end{array}$$

Les flèches verticales sans noms du diagramme sont les projections sur les dernières coordonnées. Il vient un système de coordonnées $p_1 = (p'_1, \tilde{p}_1, q_1) \in \mathbb{C}^{m-n} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$, $p_2 = (p'_2, \tilde{p}_2, q_2) \in \mathbb{C}^{m-n} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$ dans lequel un élément de $\text{Aut}_k(\mathcal{F}_\pi)$ s'écrit :

$$j_k(\phi)((p'_1, \tilde{p}_1) + (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m), q_1) = \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ |\alpha| \leq k}} \phi_1^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \dots, \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ |\alpha| \leq k}} \phi_{m-n}^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \right. \\
 \left. \sum_{\substack{\alpha \in \{0\}^{m-n} \times \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} \phi_{m-n+1}^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \dots, \sum_{\substack{\alpha \in \{0\}^{m-n} \times \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} \phi_m^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, q_2 \right)$$

où pour tout $i = 1, \dots, m$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\phi_i^\alpha \in \mathbb{C}$. Il vient une application $\pi_* : \text{Aut}_k(\mathcal{F}_\pi) \rightarrow \text{Aut}_k(N/S)$ telle que

$$\begin{aligned}
 &\pi_*(j_k(\phi))(\tilde{p}_1 + (\epsilon_{m-n+1}, \dots, \epsilon_m), q_1) \\
 &= \left(\sum_{\substack{\alpha \in \{0\}^{m-n} \times \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} \phi_{m-n+1}^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, \dots, \sum_{\substack{\alpha \in \{0\}^{m-n} \times \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k}} \phi_m^\alpha \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha!}, q_2 \right)
 \end{aligned}$$

THÉORÈME 4.6. — Soit X et Y des champs de vecteurs rationnels sur M et N vérifiant $d\pi.X = Y$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\pi_* \text{Gal}_k(X/S)} = \text{Gal}_k(Y/S)$$

Démonstration. — Notons $\exp(\tau X)$ les flots du champ X et $\exp(\tau Y)$ les flots du champ Y . Nous avons $\pi \circ \exp(\tau X) = \exp(\tau Y) \circ \pi$. L'action au but des flots $j_k(\exp(\tau X))$ sur $\text{Aut}_k(M/S)$ préserve $\text{Aut}_k(\mathcal{F}_\pi)$. Le prolongement $R_k^t X$ est tangent à $\text{Aut}_k(\mathcal{F}_\pi)$. Or, l'image de l'identité de $\text{Aut}_k(M/S)$ par π_* est l'identité de $\text{Aut}_k(N/S)$. Par minimalité $\text{Gal}_k(X/S) \subset \text{Aut}_k(\mathcal{F}_\pi)$. L'image de $\text{Gal}_k(X/S)$ par π_* a un sens.

L'égalité $\pi \circ \exp(\tau X) = \exp(\tau Y) \circ \pi$ donne $\pi_* j_k(\exp(\tau X)) = j_k(\exp(\tau Y))$, donc $\pi_* R_k^t X = R_k^t Y$. La sous-variété $\overline{\pi_*(\text{Gal}_k(X/S))} \subset \text{Aut}(N/S)$ contient l'identité. Elle est tangente à $R_k^t Y$ puisque la tangence est une propriété fermée. Par minimalité nous avons l'inclusion $\overline{\pi_*(\text{Gal}_k(X/S))} \supset \text{Gal}_k(Y/S)$. Inversement, la variété $\pi_*^{-1}(\text{Gal}_k(Y/S))$ contient l'identité de $\text{Aut}_k(M/S)$ et est tangente à $R_k^t X$. La minimalité de $\text{Gal}_k(X/S)$ implique l'inclusion $\text{Gal}_k(X/S) \subset \pi_*^{-1}(\text{Gal}_k(Y/S))$. En prenant l'image par π_* de part et d'autre de l'inclusion cela donne l'inclusion $\pi_*(\text{Gal}_k(X/S)) \subset \text{Gal}_k(Y/S)$ ce qui termine la preuve. \square

COROLLAIRE 4.7. — *Soit Y un champ de vecteurs rationnel sur N vérifiant $d\pi.X = Y$. Alors*

$$\text{tdiff}(\text{Gal}(Y/S)) \leq \text{tdiff}(\text{Gal}(X/S))$$

Démonstration. — Par le théorème 4.6, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\dim(\text{Gal}_k(Y/S)) = \dim(\pi_* \text{Gal}_k(X/S)).$$

Donc $\dim(\text{Gal}_k(Y/S)) \leq \dim(\text{Gal}_k(X/S))$. Le polynôme de dimension différentielle du groupoïde de Galois de Y sur S croit moins vite que celui de X sur S . Ceci donne l'inégalité attendue sur les degrés de ces polynômes. \square

4.3. Le théorème de spécialisation

Le théorème de spécialisation compare le groupoïde de Galois d'ordre $k \in \mathbb{N}$ du champ de vecteurs X tangent aux fibres du morphisme lisse $\rho : M \rightarrow S$ et le groupoïde de Galois d'ordre k de la restriction $X|_q$ de ce champ de vecteurs à la fibre M_q de ρ en $q \in S$.

Remarquons que la fibre $R_k(M/S)_q$ du morphisme $R_k(M/S) \rightarrow S$ en $q \in S$ est exactement l'espace $R_k(M_q)$ des repères d'ordre k de la fibre M_q . Remarquons aussi que la restriction $(R_k X)|_q$ du prolongement du champ de vecteurs X à la fibre $R_k(M_q)$ et le prolongement $R_k X|_q$ de la restriction du champ de vecteurs $X|_q$ sur la fibre $R_k(M_q)$ sont deux champs de vecteurs

construits avec les mêmes flots : les flots de la restriction $X|_q$ sur M_q . Ils sont donc égaux. En résumé :

$$R_k(M/S)_q = R_k(M_q) \quad \text{et} \quad (R_k X)|_q = R_k X|_q$$

THÉORÈME 4.8. — Soient $\rho : M \rightarrow S$ un morphisme lisse à fibre connexes entre deux variétés lisses irréductibles et X un champ de vecteurs rationnel tangent aux fibres de ρ , i.e. $d\rho.X = 0$. Alors :

- (1) Pour tout $q \in S$ où cela a un sens :
 - $\text{Gal}_k(X|_q) \subset \text{Gal}_k(X/S)|_{M_q \times M_q}$
 - $\dim_S(\text{Gal}_k(X/S)) \geq \dim_{\mathbb{C}}(\text{Gal}_k(X|_q))$
- (2) Pour $q \in S$ général,
 - $\text{Gal}_k(X|_q) = \text{Gal}_k(X/S)|_{M_q \times M_q}$
 - $\dim_S(\text{Gal}_k(X/S)) = \dim_{\mathbb{C}}(\text{Gal}_k(X|_q))$

Démonstration. — Intéressons nous d’abord au cas des dimensions. Suivant P. Bonnet, [4] nous utiliserons les notations suivantes. Pour $j_k(r) \in R_k(M/S) V(R_k X, j_k(r))$ est la clôture de Zariski de la trajectoire passant par $j_k(r)$. Ce maximum est atteint sur un ensemble général E de jets de repères. Pour $q \in S$ où cela a un sens, notons v_q le maximum de la dimension de $V(R_k X, j_k(r)) = V(R_k X|_q, j_k(r))$ pour $j_k(r) \in R_k(M_q)$. Remarquons déjà que $v_q \leq v$. L’image F de E par $R_k(M/S) \rightarrow S$ est un ensemble général de S . Pour tout $q \in F$, l’ensemble $R_k(M_q) \cap E$ est non vide. Ceci donne l’égalité $v_q = v$ pour tout $q \in F$. Par la proposition 3.17, la dimension du groupoïde de Galois du champ X est $\dim(R_k(M/S)) + v - \dim(\Gamma_k)$. De même, $\dim(\text{Gal}(R_k X|_q)) = \dim(R_k(M_q)) + v_q - \dim(\Gamma_k) = \dim(R_k(M/S)) - \dim(S) + v_q - \dim(\Gamma_k)$. Donc

$$\dim(\text{Gal}(X/S)) \geq \dim(\text{Gal}(X|_q)) + \dim(S)$$

avec égalité pour q dans l’ensemble général F .

Pour les inclusions, nous faisons appel à la définition 3.5 dite topologique du groupoïde de Galois. Pour $q \in S$ où cela a un sens, la sous-variété $\text{Gal}(X/S)|_{R_k(M_q) \times R_k(M_q)}$ est une sous-variété tangente à $R_k^t X|_q$ et contient l’identité de $\text{Aut}(M_q)$. Elle contient donc $\text{Gal}(X|_q)$ par minimalité de cette dernière. Ceci nous donne les inclusions escomptées.

Enfin, montrons les égalités en faisant appel à la définition qui utilise les intégrales premières. L’application quotient $\Phi_k : R_k(M/S) \times R_k(M/S) \rightarrow \text{Aut}_k(M/S)$ fait correspondre une sous-variété $\mathcal{R} \subset R_k(M/S) \times R_k(M/S)$ au groupoïde de Galois d’ordre k de X sur S . De même, pour $q \in S$, il correspond une sous-variété $\mathcal{R}_q \subset R_k(M_q) \times R_k(M_q)$ au groupoïde de Galois d’ordre k de $X|_q$. Il suffit de montrer que pour $q \in S$ général, $\mathcal{R}_q =$

$\mathcal{R} \cap (R_k(M_q) \times R_k(M_q))$. Soit $\pi : R_k(M/S) \dashrightarrow N$ une intégrale première maximale du champ X . Soient $q \in F$, $j_k(r) \in R_k(M_q) \cap E$. Nous savons que la fibre en $j_k(r)$ de la restriction $\pi|_{R_k(M_q)} : R_k(M_q) \dashrightarrow \overline{\pi(R_k(M_q))}$, vérifie $\overline{\pi|_{R_k(M_q)}^{-1}(\pi|_{R_k(M_q)}(j_k(r)))} = V(\mathcal{D}, j_k(r))$. Cette restriction est une intégrale première maximale du champ $X|_q$. Donc $\mathcal{R}_q = R_k(M_q) \times_N R_k(M_q)$. Notons O un ouvert de N inclus dans l'image de π . Nous savons par le lemme 3.13 que $\mathcal{R} = \overline{\pi^{-1}(O)} \times_O \pi^{-1}(O)$. Le lemme 3.12 appliqué au morphisme $\mathcal{R} \rightarrow S$, noté $\tilde{\rho}$, et à l'ouvert dense $\pi^{-1}(O) \times_O \pi^{-1}(O)$ de \mathcal{R} nous dit que pour $q \in S$ générique, $\tilde{\rho}^{-1}(q) \cap \pi^{-1}(O) \times_O \pi^{-1}(O)$ est dense dans $\tilde{\rho}^{-1}(q)$. Autrement dit, pour $q \in S$ générique, $\overline{\pi|_{R_k(M_q)}^{-1}(O) \times_O \pi|_{R_k(M_q)}^{-1}(O)} = \mathcal{R} \cap R_k(M_q) \times R_k(M_q)$. Au final nous en déduisons que pour $q \in S$ général, $\mathcal{R}_q = \mathcal{R} \cap R_k(M_q) \times R_k(M_q)$ ce qui achève la preuve du théorème. \square

Voici la conséquence directe du résultat de spécialisation :

THÉORÈME 4.9. — Soit $q_0 \in S$. Pour $q \in S$ général,

$$\text{tdiff}(\text{Gal}(X|_{q_0})) \leq \text{tdiff}(\text{Gal}(X|_q))$$

Démonstration. — Le théorème 4.8 nous dit que pour $q \in S$ général

$$\dim_{\mathbb{C}}(\text{Gal}_k(X|_q)) = \dim_S(\text{Gal}_k(X/S)) \geq \dim_{\mathbb{C}}(\text{Gal}_k(X|_{q_0}))$$

Ceci conclut la preuve du théorème. \square

5. Équations du second ordre

Dans cette section, nous supposons que $M = \mathbb{C}^3 \times S$ dont les coordonnées sont (x, u, v, q) . Nous nous intéressons à l'équation

$$(E) \quad \frac{d^2u}{dx^2} = F\left(x, u, \frac{du}{dx}, q\right)$$

où $F \in \mathbb{C}(x, u, v, q)$. Le groupoïde de Galois $\text{Gal}((E)/\mathbb{C}(S))$ de l'équation est le groupoïde de Galois $\text{Gal}(X_F/S)$ du champ de vecteurs associé :

$$X_F = \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial u} + F(x, u, v, q) \frac{\partial}{\partial v}$$

L'équation spécialisée en $q_0 \in S$ tel que cela a un sens est

$$(E(q_0)) \quad \frac{d^2u}{dx^2} = F\left(x, u, \frac{du}{dx}, q_0\right)$$

Le groupoïde de Galois $\text{Gal}(E(q_0))$ de l'équation spécialisée est le groupoïde de Galois $\text{Gal}(X_F|_{q_0})$.

5.1. Calcul du groupoïde de Galois

Commençons par un lemme qui donne une limite sur le type différentiel du groupoïde de Galois de ces équations.

LEMME 5.1.

$$\text{tdiff}(\text{Gal}(X_F)/S) \leq 2$$

Démonstration. — La 1-forme dx et la fonction q sont préservées par le champ $X_F : \mathcal{L}_{X_F} dx = 0, \mathcal{L}_{X_F} q = 0$. En se rappelant les exemples 3.20 et 3.21, nous avons l’inclusion :

$$\text{Gal}(X_F/S) \subset \{ \phi \in \text{Aut}(M/S) \mid \phi^* dx = dx, \phi^* q = q, \phi^* X_F = X_F \}$$

Soient $U \subset M$ un ouvert analytique, pr_{uv} la projection de U sur les coordonnées (u, v) et $\phi \in \text{Aut}(U/S)$. Si l’application ϕ préserve la 1-forme dx et la fonction q alors elle s’écrit $(x, u, v, q) \rightarrow (x + c, f_1(x, u, v), f_2(x, u, v), q)$. Après un changement de variables analytiques en diminuant éventuellement l’ouvert U , le champ de vecteurs X_F se redresse en $\frac{\partial}{\partial x}$. Si ϕ préserve en plus le champ X_F alors elle s’écrit dans les nouvelles coordonnées $(x, u, v, q) \rightarrow (x + c, f_1(u, v), f_2(u, v), q)$. Autrement dit, $\text{Gal}(X_F/S)|_{U \times U}$ est inclus dans l’ensemble

$$\mathcal{G} = \left\{ \phi \in \text{Aut}(U/S) \mid \phi(x, u, v, q) = (x + c, f_1(u, v), f_2(u, v), q), \right. \\ \left. c \in \mathbb{C}, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} \neq 0 \right\}$$

C’est l’exemple 4.2 donné dans la section 4.1. L’ensemble des jets d’ordre $k \in \mathbb{N}$ de \mathcal{G} est une variété analytique de dimension $2 + 2\binom{k+2}{2} + 2 + d$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dimension de la variété analytique $\text{Gal}_k(X_F)|_{U \times U}$ est la même que celle de la variété algébrique $\text{Gal}_k(X_F)$. L’inclusion précédente nous dit que $\dim(\text{Gal}_k(X_F)) \leq 2\binom{k+2}{2} + 4 + d$, ce qui achève la preuve. \square

Soit U un ouvert analytique de \mathbb{C}^2 . E.Cartan a donné dans ([6]) une classification analytique des sous-groupoïdes de $\text{Aut}(U)$ définis par des invariants différentiels et vérifiant une hypothèse de régularité appelée involutivité. Cette hypothèse est équivalente à l’hypothèse d’involutivité présente dans l’article [17] de B. Malgrange. Pour chaque paramètre fixé, les théorèmes (4.2.2) et (4.3.1) de cet article appliqués à notre situation nous disent qu’il existe un ouvert $O \subset \mathbb{C}^3$ Zariski dense au-dessus duquel le groupoïde de Galois vérifie cette hypothèse.

THÉORÈME 5.2. — Soient $q_0 \in S$, $d\text{vol}$ une 3-forme rationnelle sur \mathbb{C}^3 et $O \subset \mathbb{C}^3$ un ouvert sur lequel $d\text{vol}$ et $X_F|_{q_0}$ sont bien définis. Notons $\text{Vol}(E(q_0))$ la clôture dans $\text{Aut}(\mathbb{C}^3)$ de

$$\{\phi \in \text{Aut}(O) \mid \phi^* dx = dx, \phi^* X_F|_{q_0} = X_F|_{q_0}, \phi^* d\text{vol} = d\text{vol}\}$$

Si $\mathcal{L}_{X_F|_{q_0}} d\text{vol} = 0$ et $\text{tdiff}(\text{Gal}(E(q_0))) = 2$, alors $\text{Gal}(E(q_0)) = \text{Vol}(E(q_0))$.

Démonstration. — Puisque $\mathcal{L}_{X_F|_{q_0}} dx = 0$, $\mathcal{L}_{X_F|_{q_0}} X_F|_{q_0} = 0$ et $\mathcal{L}_{X_F|_{q_0}} d\text{vol} = 0$, nous avons l’inclusion $\text{Gal}(E(q_0)) \subset \text{Vol}(E(q_0))$.

Soit $U \subset O$ un ouvert analytique convenable. La preuve du lemme 5.1 permet de se ramener à

$$(*) \quad \text{Gal}(E(q_0))|_{U \times U} \subset \left\{ \phi \in \text{Aut}(U) \mid \phi(x, u, v) = (x + c, f_1(u, v), f_2(u, v)), \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} \neq 0 \right\}$$

et $d\text{vol} = dx \wedge du \wedge dv$. Les fonctions f_1 et f_2 vérifient $\text{jac}(f_1, f_2) = 1$. Nous devons montrer qu’aucune autre équation aux dérivées partielles sur f_1 et f_2 n’est compatible avec les hypothèses du théorème.

La classification des pseudo-groupes de Lie au-dessus d’un ouvert analytique de \mathbb{C}^2 aboutit à 64 sous-groupoïdes dont un récapitulatif est donné à la page 193 de [6]. Parmi ces sous-groupoïdes, 31 sont de dimension fini, i.e. de type différentiel 0, 26 dépendent de fonctions d’une seule variable, i.e. de type différentiel 1, 7 dépendent de fonctions de deux variables, i.e. de type différentiel 2. Ces 7 derniers sous-groupoïdes sont dénommés $g, g_1, g_2, g_3, g_{01}, g_{22}, g_{29}$. Le sous-groupoïde g est le groupoïde de toutes les applications. Le sous-groupoïde g_1 est celui formé des applications dont le déterminant jacobien vaut 1 et aucun des 5 autres sous-groupoïdes n’est inclus dans g_1 .

Notons pr_{uv} la projection de l’ouvert U sur le plan \mathbb{C}^2 de coordonnées u et v . En reprenant l’application $\text{pr}_{uv*} : \text{Aut}(\mathcal{F}_{\text{pr}_{uv}}) \rightarrow \text{Aut}(\text{pr}_{uv}(U))$ de la sous-section 4.2, nous avons par hypothèse $\text{tdiff}(\text{pr}_{uv*} \text{Gal}(E(q_0))|_{U \times U}) = \text{tdiff}(\text{Gal}(E(q_0))|_{U \times U}) = 2$. La classification décrite ci-dessus donne

$$\text{pr}_{uv*} \text{Gal}(E(q_0))|_{U \times U} = g_1.$$

Les fonctions f_1 et f_2 de l’inclusion (*) ne vérifient pas d’autre équation aux dérivées partielles que $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} = 1$. Autrement dit : $\text{Gal}(E(q_0))|_{U \times U} = \text{Vol}(E(q_0))|_{U \times U}$.

Notons $\text{Vol}_k(E(q_0))$ la projection de $\text{Vol}(E(q_0))$ sur l’espace des jets d’ordre $k \in \mathbb{N}$. Par ce qui précède, les sous-variétés $\text{Gal}_k(E(q_0))$ et

$\text{Vol}_k(E(q_0))$ ont même dimension. Par irréductibilité de cette dernière, l'inclusion $\text{Gal}_k(E(q_0)) \subset \text{Vol}_k(E(q_0))$ donnée en début de preuve est une égalité : $\text{Gal}(E(q_0)) = \text{Vol}(E(q_0))$. \square

COROLLAIRE 5.3. — *Si le champ de vecteurs X_F associé à l'équation (E) préserve une 3-forme $f dx \wedge du \wedge dv$ et s'il existe $q_0 \in S$ tel que $\text{tdiff}(\text{Gal}(X_F|_{q_0})) = 2$, alors pour $q \in S$ général, $\text{Gal}(E(q)) = \text{Vol}(E(q))$.*

Démonstration. — Par le théorème 4.9, pour $q \in S$ général,

$$\text{tdiff}(\text{Gal}(E(q))) = 2.$$

Par le théorème 5.2, pour ces valeurs des paramètres,

$$\text{Gal}(E(q)) = \text{Vol}(E(q)). \quad \square$$

5.2. Irréductibilité d'une équation

Nous allons utiliser les résultats précédents pour obtenir des résultats d'irréductibilité d'une équation différentielle. Nous rappelons la définition de solutions d'équations du second ordre réductible telle que nous pouvons l'extraire des travaux de Nishioka [19] et Umemura [29]. Cette notion generalise celle de solution classique qu'on trouve dans [30].

DÉFINITION 5.4 (Réductibilité au sens de Nishioka–Umemura). — *Soient $q_0 \in S$ et f une solution de $(E(q_0))$ appartenant à une extension différentielle du corps $(\mathbb{C}(x), \frac{d}{dx})$. Cette solution est réductible si elle appartient à une extension différentielle K_N de $\mathbb{C}(x)$ telle qu'il existe une suite d'extensions $(\mathbb{C}(x), \frac{d}{dx}) \subset (K_1, \delta_1) \subset \dots \subset (K_N, \delta_N)$ vérifiant :*

- soit : K_i est algébrique sur K_{i-1}*
- soit : $K_i = K_{i-1}(g_{pq})$ où $(g_{pq})_{pq}$ est une matrice fondamentale de solutions d'un système différentiel linéaire à coefficients dans K_{i-1} .*
- soit : $K_i = K_{i-1}(g)$ où g est une solution d'une équation différentielle d'ordre 1 sur K_{i-1} .*
- soit : $K_i = K_{i-1}(\varphi(\tau(a_1, \dots, a_n))) \mid \varphi \in \mathbb{C}(A)$ où*
 - A est une variété abélienne*
 - $\tau : \mathbb{C}^n \rightarrow A$ est son revêtement universel*
 - $a_1, \dots, a_n \in K_{i-1}$*

Remarquons que l'extension faisant appel à un système différentiel linéaire n'est pas supposée de Picard–Vessiot, il pourra être ajoutées de nouvelles constantes. Remarquons aussi que dans l'extension du troisième

type, nous nous autorisons à résoudre n'importe quelle équation différentielle ordinaire non-linéaire d'ordre 1.

Une équation peut avoir une solution réductible sans que nous n'ayons aucune information sur les autres solutions :

Exemple 5.5. — Pour $(P, Q) \in \mathbb{C}[x, u, v]^2$, l'équation $(E) : u'' = P(x, u, u')u + Q(x, u, u')u'$ admet 0 pour solution réductible.

Il nous faut alors une hypothèse de généricité sur les solutions réductibles :

DÉFINITION 5.6. — *Soit $q_0 \in S$. Une solution f de $(E(q_0))$ est appelée solution générale si*

$$\text{trdeg}_{\mathbb{C}(x)}(\mathbb{C}(x, f, f')) = 2$$

Si l'équation $(E(q_0))$ possède une solution réductible générale, alors $(E(q_0))$ est dite réductible. Sinon elle est dite irréductible.

Exemple 5.7. — L'équation $(E) : u'' = 0$ est réductible puisqu'elle admet $f = ax + b$ comme solution réductible générale où a et b sont des constantes transcendentes sur \mathbb{C} . Remarquons que l'extension $\mathbb{C}(x) \subset \mathbb{C}(x, a, b)$ n'est pas de Picard Vessiot.

Le lien entre la réductibilité d'une équation et la structure du groupoïde de Galois du champ de vecteurs associé est donné par G.Casale dans [8].

THÉORÈME 5.8. — *Soit $q_0 \in S$. Si $\text{Gal}(E(q_0)) = \text{Vol}(E(q_0))$ alors $(E(q_0))$ est irréductible.*

COROLLAIRE 5.9. — *Si le champ de vecteurs X_F associé à l'équation (E) préserve une 3-forme et s'il existe $q_0 \in S$ tel que $\text{tdiff}(\text{Gal}(E(q_0))) = 2$ alors pour $q \in S$ général, l'équation (E_q) est irréductible.*

Démonstration. — Par le corollaire 5.3, pour $q \in S$ général, $\text{Gal}(E(q)) = \text{Vol}(E(q))$. Par le théorème 5.8, pour ces valeurs des paramètres, (E_q) est irréductible. \square

Remarque 5.10. — Dans le corollaire 5.9, l'hypothèse sur le type différentiel du groupoïde de Galois de $(E(q_0))$ ne peut pas être remplacée par l'hypothèse d'irréductibilité de $(E(q_0))$. En effet, l'équation $P_{\text{VI}}(0, 0, 0, 1/2)$ donnée ci-dessous est irréductible mais le type différentiel de son groupoïde de Galois est 0 (voir [7, 37]).

5.3. Les équations de Painlevé

La classification des solutions réductibles des équations de Painlevé est connue (voir [16, 18, 19, 20, 29, 32, 33, 36, 37]). Les théorèmes précédents vont nous permettre de montrer l'irréductibilité des équations pour des valeurs générales des paramètres. Le résultat que nous retrouvons est un peu plus faible que le résultat connu mais la preuve n'est pas spécialisée aux équations de Painlevé. Voici la liste de ces équations qui peut être trouvée dans [21] :

$$\begin{aligned}
 (P_I) \quad & u'' = 6u^2 + x \\
 (P_{II}(\alpha)) \quad & u'' = 2u^3 + xu + \alpha \\
 (P_{III}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) \quad & u'' = \frac{u'^2}{u} - \frac{u'}{x} + \frac{\alpha u^2 + \beta}{x} + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u} \\
 (P_{IV}(\alpha, \beta)) \quad & u'' = \frac{u'^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 + 4xu^2 + 2(t^2 - \alpha)u + \frac{\beta}{u} \\
 (P_V(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) \quad & u'' = \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1}\right)u'^2 - \frac{u'}{x} + \frac{(u-1)^2}{x^2} \left(\alpha u + \frac{\beta}{u}\right) + \gamma \frac{u}{x} + \delta \frac{u(u+1)}{u-1} \\
 & u'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-x}\right)u'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{u-x}\right)u' \\
 (P_{VI}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) \quad & + \frac{u(u-1)(u-x)}{x^2(x-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{x}{u^2} + \gamma \frac{x-1}{(u-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(u-x)^2}\right)
 \end{aligned}$$

Pour $J = I, \dots, VI$, l'espace des paramètres S_J est \mathbb{C}^d où $d = 0, 1, 2, 4$ dépend de l'équation considérée.

G. Casale dans [8], G. Casale et J. A. Weil dans [10], F. Loray et S. Cantat dans [5] ont respectivement calculé le groupoïde de Galois des équation P_I , $P_{II}(0)$ et $P_{VI}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:

THÉORÈME 5.11. — Nous avons les égalités de groupoïdes suivantes :

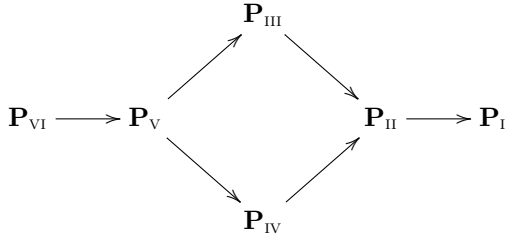
- $\text{Gal}(P_I) = \text{Vol}(P_I)$;
- $\text{Gal}(P_{II}(0)) = \text{Vol}(P_{II}(0))$;
- pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ générique,

$$\text{Gal}(P_{VI}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) = \text{Vol}(P_{VI}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)).$$

COROLLAIRE 5.12. — Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ général, $\text{Gal}(P_{II}(\alpha)) = \text{Vol}(P_{II}(\alpha))$ et $P_{II}(\alpha)$ est irréductible.

Démonstration. — Par le théorème 5.11, $\text{tdiff}(\text{Gal}(P_{II}(0))) = 2$. Le champ de vecteurs associé à l'équation P_{II} préserve la 3-forme $dx \wedge du \wedge dv$. Par le corollaire 5.3, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ général, $\text{Gal}(P_{II}(\alpha)) = \text{Vol}(P_{II}(\alpha))$. Par le théorème 5.8, pour ces valeurs du paramètre, $P_{II}(\alpha)$ est irréductible. \square

Pendant l'étude des équations de Painlevé, il a été découvert qu'elles dégénéraient les unes sur les autres en suivant le diagramme suivant (voir [21]) :



Nous allons utiliser ces dégénérescences pour obtenir les mêmes résultats sur les groupoïdes de Galois et sur l'irréductibilité des autres équations de Painlevé.

PROPOSITION 5.13. — Pour $J = \text{I, II, III, IV, V, VI}$ et $q \in S_J$ général,
 $\text{tdiff}(\text{Gal}(P_J(q))) = 2$

Démonstration. — Pour $J = \text{I, II}$, c'est le théorème 5.11 et le corollaire 5.12. Nous détaillons la preuve pour l'équation P_{III} . Pour les autres équations, la méthode reste la même. Les changements de variables qui permettent de faire dégénérer les équations de Painlevé les unes sur les autres sont donnés dans [21]. Le changement de variables qui permet de faire dégénérer P_{III} sur P_{II} est :

$$\begin{aligned}
 \phi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4 \\
 (t, f, g, a, \epsilon) &\longmapsto \left(1 + \epsilon^2 t, 1 + 2\epsilon f, \frac{2g}{\epsilon}, \tilde{\phi}(\epsilon, a) \right)
 \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\phi}(a, \epsilon) = \left(-\frac{1}{2\epsilon^6}, \frac{2a}{\epsilon^3} + \frac{1}{2\epsilon^6}, \frac{1}{4\epsilon^6}, -\frac{1}{4\epsilon^6} \right)$$

Notons X_{II} le champ de vecteurs rationnel sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \times \{0\}$ associé à P_{II} et X_{III} le champ de vecteurs rationnel sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4$ associé à P_{III} . Autrement dit

$$X_{\text{II}} = \frac{\partial}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial f} + F_{\text{II}}(t, f, g, a) \frac{\partial}{\partial g}$$

et

$$X_{\text{III}} = \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial u} + F_{\text{III}}(x, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \frac{\partial}{\partial v}$$

où

- $F_{\text{II}}(t, f, g, a) = 2f^3 + tf + a$
- $F_{\text{III}}(x, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{v^2}{u} - \frac{v}{x} + \frac{\alpha u^2 + \beta}{x} + \gamma u^3 + \frac{\delta}{v}$

Le feuilletage donné par les trajectoires de X_{III} est décrit par le système de formes

$$d\alpha, d\beta, d\gamma, d\delta, du - vdx, dv - F_{III}dx$$

Le tiré en arrière par ϕ sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ est décrit par le système de formes

$$d\epsilon, da, df - gdt, dg - \frac{\epsilon^3}{2} F_{III} \circ \phi dt$$

i.e. c'est le feuilletage donné par le champ $Y_{III} := \epsilon^2 \phi^* X_{III}$ qui correspond à l'équation du second ordre : $f'' = \frac{\epsilon^3}{2} F_{III}(\phi(t, f, g, \epsilon, a))$. La dégénérescence de P_{III} sur P_{II} s'exprime de la manière suivante : $\frac{\epsilon^3}{2} F_{III} \circ \phi|_{\epsilon=0} = F_{II}$, autrement dit $Y_{III}|_{\epsilon=0} = X_{II}$. La situation de dégénérescence étant décrite nous pouvons appeler les théorèmes rencontrés dans la section précédente.

Par le théorème 5.11, $\text{tdiff}(\text{Gal}(Y_{III}|_{(0,0)})) = 2$. Le théorème 4.9 nous dit que pour (a, ϵ) général dans l'espace des paramètres \mathbb{C}^2 , $\text{tdiff}(\text{Gal}(Y_{III}|_{(a,\epsilon)})) = 2$. Choisissons $(a_0, \epsilon_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ l'un de ces paramètres pour lequel la deuxième coordonnée ϵ_0 est non nulle. La restriction $\phi|_{(a_0, \epsilon_0)}$ conjugue $Y_{III}|_{(a_0, \epsilon_0)}$ à $\epsilon_0^2 X_{III}|_{\tilde{\phi}(a_0, \epsilon_0)}$. En appliquant le théorème de projection 4.6 à $\phi|_{(a_0, \epsilon_0)}$ et à $\phi|_{(a_0, \epsilon_0)}^{-1}$, il vient que le groupoïde de Galois du champ $Y_{III}|_{(a_0, \epsilon_0)}$ est isomorphe au groupoïde de Galois du champ $X_{III}|_{\tilde{\phi}(a_0, \epsilon_0)}$. Le théorème 4.9 nous dit que pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ général dans l'espace des paramètres \mathbb{C}^4 , $\text{tdiff}(\text{Gal}(X_{III}|_{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)})) = 2$. Ceci qui conclut la preuve pour P_{III} .

Le changement de variables qui permet de faire dégénérer P_{IV} sur P_{II} est

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \\ (t, f, g, a, \epsilon) &\longmapsto \left(\frac{\epsilon t}{2^{2/3}} - \frac{1}{\epsilon^3}, \frac{2^{2/3} f}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon^3}, \frac{2^{4/3} g}{\epsilon^2}, \tilde{\phi}(a, \epsilon) \right) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\phi}(\epsilon, a) = \left(-2a - \frac{1}{2\epsilon^6}, -\frac{1}{2\epsilon^{12}} \right)$$

Soient X_{IV} le champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2$ associé à P_{IV} et $Y_{IV} := \frac{\epsilon}{2^{2/3}} \phi^* X_{IV}$ champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. La dégénérescence de P_{IV} sur P_{II} s'exprime de la manière suivante : $Y_{IV}|_{\epsilon=0} = X_{II}$ où X_{II} est le champ de vecteurs donné précédemment. Nous avons $\text{tdiff}(\text{Gal}(Y_{IV}|_{(0,0)})) = 2$. En reprenant le même raisonnement il s'ensuit que pour des paramètres $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ généraux, $\text{tdiff}(\text{Gal}(X_{IV}|_{(\alpha, \beta)})) = 2$.

Le changement de variables qui permet de faire dégénérer P_V sur P_{IV} est

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4 \\ (t, f, g, a, b, \epsilon) &\longmapsto \left(1 + \epsilon\sqrt{2}t, \frac{\epsilon f}{\sqrt{2}}, \frac{g}{2}, \tilde{\phi}(a, b, \epsilon) \right) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\phi}(a, b, \epsilon) = \left(\frac{1}{2\epsilon^4}, \frac{b}{4}, -\frac{1}{\epsilon^4}, \frac{a}{\epsilon^2} - \frac{1}{2\epsilon^4} \right)$$

Soient X_V le champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4$ associé à P_V et $Y_V := \epsilon\sqrt{2}\phi^* X_V$ champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$. La dégénérescence de P_V sur P_{IV} s'exprime de la manière suivante : $Y_V|_{\epsilon=0} = X_{IV}$ où le champ X_{IV} est cette fois-ci défini sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \times \{0\}$. Nous savons maintenant que pour des paramètres $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ généraux, $\text{tdiff}(\text{Gal}(Y_V|_{(a,b,0)})) = 2$. Choisissons en un. En reprenant le même raisonnement avec ce paramètre il s'ensuit que pour des paramètres $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ généraux, $\text{tdiff}(\text{Gal}(X_V|_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)})) = 2$.

Enfin, le changement de variables qui permet de faire dégénérer P_{VI} sur P_V est

$$\begin{aligned} \phi : \quad & \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4 \\ (t, f, g, a, b, c, d, \epsilon) & \longmapsto \left(1 + \epsilon t, f, \frac{g}{\epsilon}, \tilde{\phi}(a, b, c, d, \epsilon) \right) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\phi}(a, b, c, d, \epsilon) = \left(a, b, -\frac{d}{\epsilon^2} + \frac{c}{\epsilon}, \frac{d}{\epsilon^2} \right)$$

Soient X_{VI} le champs de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4$ associé à P_{VI} et $Y_{VI} := \epsilon\phi^* X_{VI}$ champ de vecteurs sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}$. La dégénérescence de P_{VI} sur P_V s'exprime de la manière suivante : $Y_{VI}|_{\epsilon=0} = X_V$ où cette fois-ci le champ X_V est défini sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4 \times \{0\}$. Nous savons maintenant que pour des paramètres $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ généraux, $\text{tdiff}(\text{Gal}(Y_V|_{(a,b,c,d,0)})) = 2$. Choisissons en un. En reprenant le même raisonnement il s'ensuit que pour des paramètres $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ généraux, $\text{tdiff}(\text{Gal}(X_{VI}|_{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)})) = 2$. □

THÉORÈME 5.14. — *Pour $J = I, II, III, IV, V, VI$ et pour $q \in S_J$ général, $\text{Gal}(P_J(q)) = \text{Vol}(P_J(q))$.*

Démonstration. — Pour $J = I, II$, c'est le théorème 5.11 et le corollaire 5.12.

Par la proposition 5.13, pour $J = III, IV, V, VI$ et $q \in S_J$ général, $\text{tdiff}(\text{Gal}(P_J(q))) = 2$. Fixons J et q parmi ces valeurs. Par le théorème 5.2, il suffit de montrer que le champ associé à l'équation $P_J(q)$ préserve une 3-forme. Nous allons nous placer dans des coordonnées hamiltoniennes que nous pouvons trouver dans [22]. Notons $F_{J,q} \in \mathbb{C}(x, u, v)$ la fonction rationnelle vérifiant $(P_J(q)) : u'' = F_{J,q}(x, u, u')$. Il existe $H_{J,q} \in \mathbb{C}(x, u, v)$

tel que le système associé à l'équation $P_J(q)$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= v \\ \frac{dv}{dx} &= F_{J,q} \end{aligned}$$

soit équivalent au système hamiltonien

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial H_{J,q}}{\partial v} \\ \frac{dv}{dx} &= -\frac{\partial H_{J,q}}{\partial u} \end{aligned}$$

Le tiré en arrière du champ $\frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial u} + F_{J,q} \frac{\partial}{\partial v}$ par l'application birationnelle de $\mathbb{C}^3 : (x, u, v) \mapsto (x, u, \frac{\partial H_{J,q}}{\partial v})$ est le champ

$$Y_{J,q} := \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H_{J,q}}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial H_{J,q}}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Donnons la liste de ces applications :

$$H_{III,q} = \frac{1}{x} [2u^2v^2 - (2axu^2 + (2b + 1)u - 2cx)v + a(b + d)xu]$$

$$H_{IV,q} = 2uv^2 - (u^2 + 2xu + 2a)v + bu$$

$$H_{V,q} = \frac{1}{x} \left[u(u - 1)^2v^2 - (a(u - 1)^2 + bu(u - 1) - cxu) + \frac{1}{4} ((a + b)^2 - d^2)(u - 1) \right]$$

$$H_{VI,q} = \frac{1}{x(x - 1)} \left[u(u - 1)(u - x)v^2 - (a(u - 1)(u - x) + bu(u - x) + (c - 1)u(u - 1)) + \frac{1}{4} ((a + b + c - 1)^2 - d^2)(u - x) \right]$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$. Ainsi $\mathcal{L}_{Y_{J,q}}(dx \wedge du \wedge dv) = 0$. Ceci conclut la preuve du théorème. □

COROLLAIRE 5.15. — *Pour $J = I, II, III, IV, V, VI$ et pour $q \in S_J$ général, l'équation $P_J(q)$ est irréductible.*

Démonstration. — Par le théorème 5.14, pour $J = I, II, III, IV, V, VI$ et pour $q \in S_J$ général, $\text{Gal}(P_J(q)) = \text{Vol}(P_J(q))$. Le théorème 5.8 termine la preuve. □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. ANDRÉ, « Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **34** (2001), n° 5, p. 685-739.
- [2] D. BERTRAND, « Groupes algébriques et équations différentielles linéaires », *Astérisque* (1992), n° 206, p. 183-204, Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92, Exp. No. 750, 4.
- [3] A. BIALYNICKI-BIRULA, « On Galois theory of fields with operators », *Amer. J. Math.* **84** (1962), p. 89-109.
- [4] P. BONNET, « Minimal invariant varieties and first integrals for algebraic foliations », *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **37** (2006), n° 1, p. 1-17.
- [5] S. CANTAT & F. LORAY, « Dynamics on character varieties and Malgrange irreducibility of Painlevé VI equation », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), n° 7, p. 2927-2978.
- [6] E. CARTAN, « Les sous-groupes des groupes continus de transformations », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **25** (1908), p. 57-194.
- [7] G. CASALE, « The Galois groupoid of Picard–Painlevé VI equation », in *Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007, p. 15-20.
- [8] ———, « Le groupoïde de Galois de P_1 et son irréductibilité », *Comment. Math. Helv.* **83** (2008), n° 3, p. 471-519.
- [9] ———, « Une preuve galoisienne de l'irréductibilité au sens de Nishioka–Umemura de la première équation de Painlevé », *Astérisque* (2009), n° 323, p. 83-100.
- [10] G. CASALE & J.-A. WEIL, « Galoisian methods for testing irreducibility of order two nonlinear differential equations », *Pacific J. Math.* **297** (2018), n° 2, p. 299-337.
- [11] J. DRACH, « Essai sur la théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendentes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **15** (1898), p. 243-384.
- [12] ———, « Sur le groupe de rationalité des équations du second ordre de M. Painlevé », *Bull. Sci. Math.* **39** (1915), p. 149-166.
- [13] L. GOLDMAN, « Specialization and Picard–Vessiot theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), p. 327-356.
- [14] A. V. KITAEV, C. K. LAW & J. B. MCLEOD, « Rational solutions of the fifth Painlevé equation », *Differential Integral Equations* **7** (1994), n° 3-4, p. 967-1000.
- [15] E. R. KOLCHIN, *Differential algebra and algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 54, Academic Press, New York-London, 1973, xviii+446 pages.
- [16] O. LISOVYY & Y. TYKHYY, « Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation », *J. Geom. Phys.* **85** (2014), p. 124-163.
- [17] B. MALGRANGE, « Le groupoïde de Galois d'un feuilletage », in *Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2*, Monogr. Enseign. Math., vol. 38, Enseignement Math., Geneva, 2001, p. 465-501.
- [18] Y. MURATA, « Classical solutions of the third Painlevé equation », *Nagoya Math. J.* **139** (1995), p. 37-65.
- [19] K. NISHIOKA, « A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent », *Nagoya Math. J.* **109** (1988), p. 63-67.
- [20] M. NOUMI & K. OKAMOTO, « Irreducibility of the second and the fourth Painlevé equations », *Funkcial. Ekvac.* **40** (1997), n° 1, p. 139-163.
- [21] Y. OHYAMA & S. OKUMURA, « A coalescent diagram of the Painlevé equations from the viewpoint of isomonodromic deformations », *J. Phys. A* **39** (2006), n° 39, p. 12129-12151.

- [22] K. OKAMOTO, « Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations. I », *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **56** (1980), n° 6, p. 264-268.
- [23] P. J. OLVER, *Equivalence, invariants, and symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, xvi+525 pages.
- [24] PAINLEVÉ, « Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme », *Bull. Soc. Math.* **28** (1900), p. 201-261.
- [25] ———, « Démonstration de l'irréductibilité absolue de l'équation $y_{xx} = 6y^2 + x$ », *C.R. Acad. Sci. Paris* **135** (1902), p. 641-647.
- [26] ———, « Leçons de Stockholm (1875) », in *Œuvres complètes Tome 1*, Éditions du CNRS, 1972.
- [27] É. PICARD, « Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.* **1** (1887), n° 1, p. A1-A15.
- [28] M. F. SINGER, « Moduli of linear differential equations on the Riemann sphere with fixed Galois groups », *Pacific J. Math.* **160** (1993), n° 2, p. 343-395.
- [29] H. UMEMURA, « On the irreducibility of the first differential equation of Painlevé », in *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II*, Kinokuniya, Tokyo, 1988, p. 771-789.
- [30] ———, « Second proof of the irreducibility of the first differential equation of Painlevé », *Nagoya Math. J.* **117** (1990), p. 125-171.
- [31] ———, « Differential Galois theory of infinite dimension », *Nagoya Math. J.* **144** (1996), p. 59-135.
- [32] H. UMEMURA & H. WATANABE, « Solutions of the second and fourth Painlevé equations. I », *Nagoya Math. J.* **148** (1997), p. 151-198.
- [33] ———, « Solutions of the third Painlevé equation. I », *Nagoya Math. J.* **151** (1998), p. 1-24.
- [34] E. VESSIOT, « Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **21** (1904), p. 9-85.
- [35] ———, « Sur la réductibilité et l'intégration des systèmes complets », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **29** (1912), p. 209-278.
- [36] H. WATANABE, « Solutions of the fifth Painlevé equation. I », *Hokkaido Math. J.* **24** (1995), n° 2, p. 231-267.
- [37] ———, « Birational canonical transformations and classical solutions of the sixth Painlevé equation », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **27** (1998), n° 3-4, p. 379-425.

Manuscrit reçu le 14 avril 2020,
révisé le 8 avril 2021,
accepté le 6 mai 2021.

Guy CASALE
Univ Rennes, CNRS,
IRMAR-UMR 6625,
F-35000 Rennes (France)
guy.casale@univ-rennes1.fr
Damien DAVY
Univ Rennes, CNRS,
IRMAR-UMR 6625,
F-35000 Rennes (France)
brandavy@outlook.fr