

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE RAFFIN

Sur les programmes convexes définis dans des espaces vectoriels topologiques

Annales de l'institut Fourier, tome 20, n° 1 (1970), p. 457-491

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_1_457_0

© Annales de l'institut Fourier, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES PROGRAMMES CONVEXES DÉFINIS DANS DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

par Claude RAFFIN

Introduction.

On considère les programmes convexes : $\text{Sup}\{f(x) \mid g(x) \leq 0\}$ où f est une fonction numérique finie concave et continue définie sur un ouvert convexe d'un espace vectoriel topologique réel E localement convexe et séparé, et où g est une application convexe continue d'un ouvert convexe de E dans un espace vectoriel topologique réel G localement convexe, séparé et ordonné. L'étude du cas où G est un espace produit \mathbb{R}^I a fait l'objet d'un article antérieur [10] et l'on se propose ici d'étendre les résultats déjà obtenus pour ce cas particulier.

On commence par une étude préliminaire concernant essentiellement la sous-différentiabilité des fonctions vectorielles convexes et l'extension de la notion de fonction conjuguée d'une fonction sous-différentiable. On aborde ensuite le problème de la programmation convexe en définissant, grâce à l'utilisation des sous-gradients d'une fonction convexe, une hypothèse de régularité qui généralise la condition de "qualification" de Kuhn et Tucker [5] et qui, moyennant la continuité de l'application g , se révèle moins restrictive que l'hypothèse de Slater [1]. Sous l'hypothèse de régularité ainsi introduite, on obtient des conditions d'optimalité qui généralisent les classiques conditions de Kuhn et Tucker et qui enrichissent les énoncés connus du théorème du col du lagrangien.

En vue de l'étude de la dualité, on introduit la notion de programme linéaire d'appui d'un programme convexe sous-différentiable. On étudie d'abord le programme dual d'un programme linéaire de

même type qu'un programme linéaire d'appui. On en déduit un programme dual d'un programme convexe sous-différentiable en envisageant une famille de programmes linéaires d'appui et leurs duals. Selon la famille de programmes linéaires d'appui choisie, on est conduit à deux formulations différentes du dual qui étendent les résultats obtenus dans [10].

Dans la dernière partie, on établit quelques propriétés des ensembles et fonctions localement convexes. Ces propriétés permettent d'affaiblir les hypothèses initiales concernant les fonctions f et g qui définissent le programme étudié.

Le présent travail développe une Note aux Comptes Rendus [11] et représente la deuxième partie d'une thèse de doctorat. L'auteur exprime sa profonde gratitude à M. R. Pallu de la Barrière qui a dirigé ses recherches et remercie vivement M. P. Lelong pour l'intérêt avec lequel il a bien voulu examiner ce travail.

1. NOTATIONS

Dans toute cette étude, on envisage deux couples d'espaces vectoriels réels en dualité au sens de Bourbaki [2], E et F d'une part mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $E \times F$, G et H d'autre part, mis en dualité par une forme bilinéaire sur $G \times H$ qui sera notée comme la précédente. On appelle topologie $T(E, F)$ toute topologie sur E localement convexe séparée compatible avec la dualité entre E et F . De même, on est amené à considérer les topologies $T(F, E)$ sur F , $T(G, H)$ sur G et $T(H, G)$ sur H . On utilisera plus particulièrement sur E la topologie de Mackey notée $\tau(E, F)$ et sur G la topologie faible notée $\sigma(G, H)$.

On note $\mathcal{L}(E, G)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E muni d'une topologie $T(E, F)$ dans G muni de $\sigma(G, H)$. Pour tout $a \in \mathcal{L}(E, G)$ on note : $a^* \in \mathcal{L}(H, F)$ l'application adjointe de a .

A toute application h d'une partie $\Omega \subset E$ dans G on associe les fonctions numériques h_u , $u \in H$, définies sur Ω par :

$$h_u(x) = \langle h(x), u \rangle$$

Lorsque $h \in \mathcal{L}(E, G)$, on voit que, pour tout $u \in H$, h_u est identique à $h^*(u)$.

D'autre part, l'espace vectoriel G est supposé ordonné par un cône convexe saillant fermé pour les topologies $T(G, H)$, soit G^+ , qui définit les éléments positifs de G . L'écriture : $z \geq 0$ sera équivalente à : $z \in G^+$. On pose $G^- = -G^+$ et on considère dans H le cône polaire H^+ de G^- . Le cône convexe G^+ étant fermé on a l'équivalence suivante que l'on utilisera dans la suite :

$$z \geq 0 \iff \langle z, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in H^+ \tag{1}$$

2. FONCTIONS VECTORIELLES CONVEXES ET FONCTIONS VECTORIELLES SOUS-DIFFERENTIABLES

2.1. Fonctions vectorielles convexes.

Soit Ω un sous-ensemble convexe de E et h une application de Ω dans G . On dira que h est convexe si, pour tout couple de points $x_1 \in \Omega$ et $x_2 \in \Omega$ et pour tout nombre réel $0 \leq \theta \leq 1$, on a :

$$h(\theta x_1 + (1 - \theta) x_2) \leq \theta h(x_1) + (1 - \theta) h(x_2)$$

D'après l'équivalence (1), une condition nécessaire et suffisante pour que h soit convexe est que, pour tout $u \in H^+$, h_u soit une fonction numérique convexe.

On remarque aussi qu'une autre condition nécessaire et suffisante pour que h soit convexe est que son épigraphe

$$\mathcal{E} = \{(x, z) \in \Omega \times G \mid h(x) \leq z\}$$

soit un ensemble convexe.

2.2. Fonctions vectorielles sous-différentiables.

2.2.1. — Définitions.

Etant donné une application h d'une partie $\Omega \subset E$ dans G et un point $x \in \Omega$, on appellera sous-gradient de h au point x tout élément $a \in \mathcal{L}(E, G)$ tel que :

$$\forall y \in \Omega, \quad h(y) \geq h(x) + a(y - x)$$

On notera $A(h, x)$ l'ensemble des sous-gradients de h au point x . Il est immédiat que $A(h, x)$ est un ensemble convexe. Si $A(h, x) \neq \emptyset$, on dira que h est sous-différentiable au point x . L'application h sera dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de Ω .

En vue de l'étude du cas où $-h$ est sous-différentiable, on posera :

$$A^-(h, x) = -A(-h, x)$$

Lorsque $G = \mathbb{R}$ on retrouve la notion de sous-différentiabilité introduite, pour des fonctions numériques, par Rockafellar [12] et Moreau [7].

2.2.2. — Application sous-différentiable au sens faible.

Il est clair que la sous-différentiabilité d'une application h entraîne la sous-différentiabilité des fonctions numériques $h_u, u \in H^+$. Mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple suivant.

Soit $E = G = \mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions numériques continues sur un compact K . Mettons E en dualité avec le dual topologique de $\mathcal{C}(K)$ muni de la topologie de la convergence uniforme (espace des mesures sur K) et mettons G en dualité avec le dual algébrique de $\mathcal{C}(K)$, soit $H = G^*$. Et considérons l'application identique i de E dans G . L'application i n'est pas continue quand E est muni de la topologie de la convergence uniforme et quand G est muni de la topologie faible $\sigma(G, G^*)$. On en déduit que i n'est pas sous-différentiable. Cependant, pour tout $u \in H^+$, la fonction numérique i_u est une forme linéaire continue sur E muni de la topologie de la

convergence uniforme. On sait, en effet, que toute forme linéaire positive sur $\mathcal{C}(K)$ est continue.

Cette remarque nous amène à poser une nouvelle définition.

DEFINITION. — *Une application h sera dite sous-différentiable au sens faible en un point $x \in \Omega$ lorsque, pour tout $u \in H^+$, h_u est sous-différentiable au point x .*

Remarquons que, si Ω est convexe, toute application sous-différentiable au sens faible sur Ω est une application convexe.

2.2.3. — Application sous-différentiable régulière.

DEFINITION. — *Une application h sera dite sous-différentiable régulière en un point $x \in \Omega$ si h est sous-différentiable au point x et si, de plus :*

$$\forall u \in H^+, \quad A(h_u, x) = \{y \in F \mid \exists a \in A(h, x), \quad y = a^*(u)\},$$

L'application h sera dite sous-différentiable régulière si cette propriété est vraie en tout point $x \in \Omega$.

Il est clair que dans le cas où $G = \mathbb{R}$, toute application h sous-différentiable en un point est sous-différentiable régulière en ce point. Il existe cependant des applications sous-différentiables non régulières. Montrons-le en nous appuyant sur l'exemple considéré au paragraphe 2.2.2. Soit i_+ la restriction de i au cône convexe des éléments positifs de E . L'application i_+ est sous-différentiable à l'origine de E ; en effet, l'élément nul de $\mathcal{L}(E, G)$ est un sous-gradient de i_+ à l'origine de E . Cependant, on déduit de 2.2.2 que i_+ n'est pas sous-différentiable régulière en ce point.

2.3. Sous-différentiabilité des fonctions vectorielles convexes.

2.3.1. — Cas où $G = \mathbb{R}^1$.

THEOREME. — *Toute application h convexe et continue d'un ouvert convexe $\Omega \subset E$ muni de $\tau(E, F)$ dans \mathbb{R}^1 muni de la topologie produit est sous-différentiable régulière en tout point $x \in \Omega$ et l'ensemble*

$A(h, x)$ est compact pour la topologie de la convergence simple de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}^I)$.

Démonstration. — Soit $G = \mathbb{R}^I$ en dualité avec $H = \mathbb{R}^{(I)}$ et soit h une application convexe et continue d'un ouvert convexe $\Omega \subset E$ muni de $\tau(E, F)$ dans \mathbb{R}^I muni de la topologie produit qui est la topologie faible $\sigma(G, H)$. Les fonctions numériques composantes $h_i, i \in I$, sont convexes et continues, donc sous-différentiables. On en déduit que h est sous-différentiable et que :

$$A(h, x) = \prod_{i \in I} A(h_i, x)$$

Montrons que h est sous-différentiable régulière en tout point $x \in \Omega$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^{(I)}$ posons $u = (u_i)_{i \in I}$. On a :

$$h_u(x) = \langle h(x), u \rangle = \sum_{i \in I} u_i h_i(x)$$

$$\text{soit : } h_u = \sum_{i \in I} u_i h_i$$

Et, les fonctions numériques h_i étant convexes et continues, on a (voir [7]) :

$$\forall u \in \mathbb{R}^{+(I)}, A(h_u, x) = \sum_{i \in I} u_i A(h_i, x)$$

soit : $A(h_u, x) = \{y \in F \mid \exists a \in A(h, x), y = a^*(u)\}$. Cela montre que h est sous-différentiable régulière.

Sachant d'autre part (voir [7]) que $A(h_i, x)$ est faiblement compact dans F , on en déduit (théorème de Tychonoff) que $A(h, x) = \prod_{i \in I} A(h_i, x)$ est compact dans F^I muni de la topologie produit des topologies faibles $\sigma(F, E)$, laquelle est identique à la topologie de la convergence simple quand on identifie F^I avec $\mathcal{L}(E, \mathbb{R}^I)$.

2.3.2. — Cas où H^+ est engendré par une base de H .

Supposons qu'il existe une base algébrique B de H telle que H^+ soit identique au cône convexe engendré par B . On remarque alors que :

$$z = 0 \iff \langle z, u \rangle = 0 \quad \forall u \in B$$

On en déduit que l'application linéaire de G dans R^B définie par :

$$z \longrightarrow (\langle z, u \rangle)_{u \in B}$$

est injective. L'espace vectoriel G est donc identifiable, du point de vue algébrique, à un sous-espace vectoriel de R^B .

Montrons, de plus, que la topologie induite sur G par la topologie produit de R^B est la topologie faible $\sigma(G, H)$. En effet, un système fondamental de voisinages de 0, pour $\sigma(G, H)$, est défini par un nombre fini d'inégalités :

$$|\langle z, u_i \rangle| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{où } u_i \in H$$

D'autre part, la topologie induite par la topologie produit de R^B admet pour système fondamental de voisinages de 0 les ensembles définis par :

$$|\langle z, u_k \rangle| \leq \eta, \quad 1 \leq k \leq m, \quad \text{où } u_k \in B$$

Il suffit alors de remarquer que tout voisinage élémentaire du premier système, défini par une inégalité de la forme :

$$|\langle z, u \rangle| \leq \varepsilon \quad \text{où } u \in H$$

contient le voisinage élémentaire du second système défini, en posant :

$$u = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \quad \text{où } u_k \in B, \quad \text{par :}$$

$$|\langle z, u_k \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{p |\lambda_k|}, \quad 1 \leq k \leq p$$

Par ailleurs, l'équivalence (1) se ramène ici à :

$$z \geq 0 \iff \langle z, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in B \quad (1')$$

On en déduit que l'ordre induit par l'ordre canonique de R^B sur G est identique à l'ordre initial de G .

En résumé, on peut identifier l'espace vectoriel ordonné G muni de $\sigma(G, H)$ à un sous-espace vectoriel topologique ordonné de R^B . Toute application h convexe et continue d'un ouvert convexe $\Omega \subset E$ muni de $\tau(E, F)$ dans G muni de $\sigma(G, H)$ peut alors être considérée comme une application convexe et continue de Ω dans R^B

et on se trouve ramené au cas précédent, l'application h étant définie par les fonctions numériques composantes h_u , $u \in B$.

Exemple. — I étant un ensemble quelconque, supposons que G soit l'espace l_1^2 des éléments $(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ tels que $\sum |x_i|^2 < \infty$. L'espace $\mathbb{R}^{(I)}$ étant partout dense dans l'espace de Hilbert l_1^2 muni de la topologie de la norme, l'espace l_1^2 peut être identifié au dual de $\mathbb{R}^{(I)}$ muni de la topologie de la norme. Si l'on considère l_1^2 et $\mathbb{R}^{(I)}$ ainsi mis en dualité, la topologie faible $\sigma(l_1^2, \mathbb{R}^{(I)})$ est strictement moins fine que la topologie affaiblie de l_1^2 considéré comme espace de Hilbert, soit $\sigma(l_1^2, l_1^2)$. Par suite, toute application h de $\Omega \subset E$ dans l_1^2 continue pour la topologie affaiblie (et a fortiori pour la topologie de la norme) est continue pour la topologie $\sigma(l_1^2, \mathbb{R}^{(I)})$. On peut donc, en appliquant le résultat précédent, conclure que toute application h convexe et continue d'un ouvert convexe $\Omega \subset E$ dans l'espace de Hilbert l_1^2 est sous-différentiable régulière quand on considère h comme une application de Ω dans \mathbb{R}^I .

2.3.3. — Cas des fonctions différentiables.

Disons qu'une application h de $\Omega \subset E$ dans G est uni-sous-différentiable en un point $x \in \Omega$ si h est sous-différentiable au point x et si $A(h, x)$ se réduit à un seul élément.

Pour que h soit uni-sous-différentiable régulière au point x , il suffit que les fonctions numériques h_u , $u \in H^+$ soient uni-sous-différentiables au point x et qu'il existe $a \in \mathcal{L}(E, G)$ tel que, pour tout $u \in H^+$, $a^*(u)$ soit le sous-gradient (unique) de h_u , au point x .

Dans le cas où E et G sont des espaces de Banach réels et où h est une application convexe et différentiable d'un ouvert convexe $\Omega \subset E$ muni de la topologie de la norme dans G muni de la topologie de la norme, il est immédiat que les fonctions numériques h_u , $u \in H^+$, sont convexes et différentiables, donc uni-sous-différentiables [7] et que si a est l'application linéaire tangente à h au point x , $a^*(u)$ est le sous-gradient (unique) de h_u au point x . Il s'ensuit que a est le sous-gradient (unique) de h au point x . On voit que h est uni-sous-différentiable régulière au point x .

On peut donc énoncer le résultat suivant :

THEOREME. — Si E et G sont des espaces de Banach réels, toute application h convexe et différentiable d'un ouvert convexe $\Omega \subset E$ dans G est uni-sous-différentiable régulière en tout point $x \in \Omega$ et le sous-gradient (unique) de h au point x est l'application linéaire tangente à h au point x .

2.4. Fonction conjuguée d'une fonction vectorielle sous-différentiable.

2.4.1. DEFINITION. — Soit h une application sous-différentiable de $\Omega \subset E$ dans G . Posons :

$$\gamma(a) = a(x) - h(x) \quad \text{où} \quad a \in A(h, x) \quad (1)$$

On remarque que si $a \in A(h, x) \cap A(h, x')$, on a, par suite de la définition même d'un sous-gradient :

$$a(x) - h(x) = a(x') - h(x')$$

La relation (1) définit donc une application γ de

$$A(h) = \bigcup_{x \in \Omega} A(h, x) \subset \mathcal{L}(E, G) \quad \text{dans} \quad G.$$

Nous dirons que γ est l'application conjuguée exacte de h , généralisant ainsi la notion de fonction conjuguée que nous avons introduite dans [10] pour des fonctions numériques sous-différentiables.

On remarquera qu'il n'est pas nécessaire de supposer h sous-différentiable en tout point de Ω pour pouvoir définir l'application conjuguée exacte de h . Il suffit, en fait, de supposer $A(h)$ non vide.

2.4.2. THEOREME. — Lorsque l'on considère $\mathcal{L}(E, G)$ en dualité avec le produit tensoriel $E \otimes H$, l'application conjuguée exacte γ d'une application h de $\Omega \subset E$ dans G est sous-différentiable en tout point où elle est définie, et, en identifiant E avec un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E, G), G)$ on a :

$$a \in A(h, x) \implies x \in A(\gamma, a).$$

Démonstration. — Considérons deux points quelconques de $A(h)$, soit $a \in A(h, x)$ et $b \in A(h, y)$. On a :

$$\begin{aligned}
 & h(x) \geq h(y) + b(x - y) \\
 \text{d'où} & \quad a(x) - \gamma(a) \geq b(x) - \gamma(b) \\
 & \quad \gamma(b) \geq \gamma(a) + (b - a)(x)
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant, pour tout $x \in E$, l'application linéaire : $\alpha \longrightarrow \alpha(x)$ de $\mathcal{L}(E, G)$ dans G . On sait que cette application est continue quand $\mathcal{L}(E, G)$ est muni de la topologie de la convergence simple. On sait également que le dual topologique de $\mathcal{L}(E, G)$ muni de la topologie de la convergence simple peut être identifié au produit tensoriel $E \otimes H$. On en déduit que lorsque l'on considère $\mathcal{L}(E, G)$ en dualité avec $E \otimes H$, l'application γ est sous-différentiable en tout point de $A(h)$ et que, en identifiant E avec un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E, G), G)$ on a :

$$a \in A(h, x) \implies x \in A(\gamma, a).$$

On notera que, du fait que G est muni de $\sigma(G, H)$, la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{L}(E, G)$ s'identifie avec $\sigma(\mathcal{L}(E, G), E \otimes H)$.

En effet, pour la topologie $\sigma(\mathcal{L}(E, G), E \otimes H)$, les ensembles définis par un système fini d'inégalités

$$|\langle \alpha(x_i), u_j \rangle| \leq 1 \quad (x_i \in E, u_j \in H)$$

forment un système fondamental de voisinages de l'origine de $\mathcal{L}(E, F)$. On en déduit que toute application : $\alpha \longrightarrow \alpha(x)$, où $x \in E$, de $\mathcal{L}(E, G)$ dans G est continue lorsque G est muni de $\sigma(G, H)$ et que $\mathcal{L}(E, G)$ est muni de $\sigma(\mathcal{L}(E, G), E \otimes H)$. Or, on sait que la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{L}(E, G)$ est la moins fine rendant continues les applications : $\alpha \longrightarrow \alpha(x)$, pour tout $x \in E$, de $\mathcal{L}(E, G)$ dans G .

Remarque. — Dans le cas où $-h$ est sous-différentiable sur Ω , on posera :

$$\gamma(a) = a(x) - h(x) \quad \text{où} \quad a \in A^-(h, x)$$

Et l'application γ ainsi définie sur $A^-(h) = \bigcup_{x \in \Omega} A^-(h, x)$ sera dite conjuguée exacte de h . On vérifie que, dans ce cas, $-\gamma$ est sous-différentiable et est conjuguée de $-h$ au sens premier du terme.

3. PROGRAMMES CONVEXES, HYPOTHESE DE REGULARITE ET CONDITIONS D'OPTIMALITE

3.1. Notations.

On considère le programme convexe \mathcal{Q} :

$$\text{Sup } \{f(x) \mid g(x) \leq 0\}$$

où f est une fonction numérique finie concave et continue définie sur un ouvert convexe Ω_0 de E muni de $\tau(E, F)$ et où g est une application convexe et continue d'un ouvert convexe Ω de E muni de $\tau(E, F)$ dans G muni de $\sigma(G, H)$.

On note $D = \{x \in \Omega \mid g(x) \leq 0\}$, l'ensemble convexe des solutions "réalisables" de \mathcal{Q} et on appelle "valeur" de \mathcal{Q} le nombre : $\text{Sup } \{f(x) \mid x \in \Omega_0 \cap D\}$. Un point $\bar{x} \in \Omega_0 \cap D$ est dit "solution optimale" de \mathcal{Q} si, pour tout $x \in \Omega_0 \cap D$, on a : $f(\bar{x}) \geq f(x)$.

Etant donné un point $x \in \Omega$, on note $\Delta(x)$ le cône convexe engendré par $D - \{x\}$. D'autre part, on envisage les cônes convexes suivants, attachés à la définition analytique de D :

$$H^+(x) = \{u \in H^+ \mid \langle g(x), u \rangle = 0\}$$

$$\Gamma(x) = \{y \in F \mid \exists \beta \in A(g, x), \exists u \in H^+(x), y = \beta^*(u)\}$$

Soit \hat{g} l'application de Ω dans R^{H^+} définie par les fonctions numériques $g_u, u \in H^+$. On a :

$$D = \{x \in \Omega \mid \hat{g}(x) \leq 0\}$$

A cette nouvelle définition analytique de D on attachera le cône convexe

$$\hat{\Gamma}(x) = \bigcup_{u \in H^+(x)} A(g_u, x)$$

Les cônes $\Gamma(x)$ et $\hat{\Gamma}(x)$ sont identiques si et seulement si l'application g est sous-différentiable régulière au point x . Et l'on a toujours, en désignant par $\Delta(x)^*$ le cône polaire de $\Delta(x)$:

$$\Gamma(x) \subset \hat{\Gamma}(x) \subset \Delta(x)^*$$

3.2. Hypothèse de régularité.

3.2.1. DEFINITION. — *Un point $x \in \Omega$ sera dit régulier pour g lorsque*

$$\Gamma(x) = \Delta(x)^* .$$

On voit qu'un point $x \in \Omega$ est régulier pour g lorsque x est régulier pour \hat{g} et que, de plus, g est une application sous-différentiable régulière au point x .

Pour faciliter le langage, nous conviendrons de dire qu'un point x est régulier quand il est régulier pour g et qu'un point x est faiblement régulier quand il est régulier pour \hat{g} .

Cette condition de régularité généralise celle que nous avons introduite dans [10] et constitue donc une nouvelle extension de la condition de "qualification" de Kuhn et Tucker.

3.2.2. THEOREME. — *S'il existe un point $x_0 \in D$ tel que $g(x_0)$ appartienne à l'intérieur de G^- quand G est muni de la topologie $T(G, H)$ la plus fine pour laquelle g est continue (E étant muni de $\tau(E, F)$), alors tout point $x \in D$ est faiblement régulier.*

Démonstration. — Par hypothèse, l'intérieur de D est non vide. Pour tout point x intérieur à D , on a : $\Delta(x) = E$. On en déduit que :

$$\hat{\Gamma}(x) = \Delta(x)^* = \{0\}$$

Ainsi, tout point intérieur à D est faiblement régulier.

Pour montrer qu'un point x de la frontière de D est faiblement régulier, il suffira d'établir que :

$$\Delta(x)^* \subset \hat{\Gamma}(x)$$

Pour cela, considérons l'épigraphe \mathcal{G} de g , dans $E \times G$. L'ensemble D est la trace de \mathcal{G} dans E . Si x est un point de la frontière de D dans E , $(x, 0)$ est un point de la frontière de \mathcal{G} dans $E \times F$. D'autre part, l'intérieur de \mathcal{G} n'est pas vide en raison de l'hypothèse faite : g est continue et il existe x_0 tel que $g(x_0) \in (\overset{\circ}{G}^-)$. Ces remarques étant faites, soit x un point de la frontière de D dans E et soit $a \in \Delta(x)^*$. L'hyperplan H d'équation $\langle \xi - x, a \rangle = 0$ est un hyperplan d'appui de D au point x . Dans $E \times G$, on a donc : $L \cap \overset{\circ}{\mathcal{G}} \neq \emptyset$. D'après le théorème

de Hahn-Banach, il existe un hyperplan d'appui L_1 de \mathcal{G} au point $(x, 0)$ contenant L . Un tel hyperplan d'appui a une équation de la forme :

$$\langle z, u \rangle - \langle y - x, a \rangle = 0 \quad \text{où} \quad u \in H^+$$

Comme x est un point de la frontière de D dans E , et l'application g étant continue, $g(x)$ est un point de la frontière de G^- dans G . On en déduit que, si $g(x) \neq 0$, la demi-droite d'origine $(x, g(x))$, parallèle et de même sens que le rayon G^+ défini par le point $(0, -g(x))$, est contenu dans \mathcal{G} , tout point de cette demi-droite étant d'ailleurs un point de la frontière de \mathcal{G} . Il s'ensuit que, dans le cas où $g(x) \neq 0$, le point $(x, 0)$ étant un point de cette demi-droite distinct de son origine, l'hyperplan d'appui L_1 qui contient cette demi-droite, contient le point $(x, g(x))$. On a donc :

$$\langle g(x), u \rangle = 0$$

et par suite : $u \in H^+(x)$

On en déduit que, pour tout $\xi \in \Omega_0$, on a :

$$\langle g(\xi), u \rangle \geq \langle \xi - x, a \rangle$$

et par suite : $a \in A(g_u, x)$

Cela démontre l'inclusion : $\Delta(x)^* \subset \hat{\Gamma}(x)$.

Remarque. — En supposant l'application g continue, nous avons introduit une hypothèse de régularité qui est donc moins restrictive que l'hypothèse de Slater (existence d'un point x_0 tel que $g(x_0) \in (\overset{\circ}{G}^-)$) [1]. L'hypothèse de Slater suppose l'intérieur de G^+ non vide, ce qui n'est pas vérifié en particulier, pour les espaces de Banach de type L^p . Montrons, par un exemple, que l'hypothèse de régularité introduite ici peut être vérifiée alors que l'intérieur de G^+ est vide. Soit $L^2[0, 1]$ l'espace de Hilbert réel des classes de fonctions numériques de carré sommable sur $[0, 1]$ quand on considère comme équivalentes deux fonctions qui ont même valeur presque partout sur $[0, 1]$. Et soit :

$$D = \{x \in L^2[0, 1] \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

On vérifie aisément (voir [10]) que tout point de D est régulier.

3.3. Conditions d'optimalité.

3.3.1. THEOREME. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $\bar{x} \in \Omega_0 \cap D$ soit une solution optimale de \mathcal{P} est que :

$$A^-(f, \bar{x}) \cap \Delta(\bar{x})^* \neq \emptyset .$$

Ce théorème étend un résultat établi par Psenicnyj [9] dans le cas d'espaces normés. Nous en avons donné dans [10], (voir théorème III.2), une démonstration qui repose sur le théorème de Hahn-Banach. On peut également déduire ce théorème d'un résultat établi par Rockafellar (voir [13], théorème 2). Dans les deux cas, on note que la démonstration ne fait pas intervenir la définition analytique de D . En fait, on voit que le résultat demeure vrai pour tout programme convexe :

$$\text{Sup} \{ f(x) \mid x \in D \}$$

où f est une fonction numérique finie concave définie sur un ensemble convexe $\Omega_0 \subset E$, continue sur l'intérieur de Ω_0 (pour $\tau(E, F)$) et où D est un ensemble convexe tel que : $\Omega_0 \cap D \neq \emptyset$. La question soulevée ici de l'affaiblissement des hypothèses initiales sera étudiée de manière plus complète au chapitre 6.

3.3.2. — Corollaires.

3.3.2.(1). COROLLAIRE 1. — Pour qu'un point $\bar{x} \in \Omega_0 \cap D$, régulier (resp. faiblement régulier), soit une solution optimale de \mathcal{P} , il faut que :

$$A^-(f, \bar{x}) \cap \Gamma(\bar{x}) \neq \emptyset$$

$$\text{(resp. } A^-(f, \bar{x}) \cap \hat{\Gamma}(\bar{x}) \neq \emptyset \text{)}$$

Cette condition est suffisante pour qu'un point $\bar{x} \in \Omega_0 \cap D$ soit une solution optimale de \mathcal{P} .

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème précédent et s'explique comme suit :

$$\text{il existe : } \bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x}), \bar{u} \in H^+, \bar{\beta} \in A(g, \bar{x})$$

$$\text{tels que : } \langle g(\bar{x}), \bar{u} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta}^*(\bar{u})$$

$$\text{(resp. il existe : } \bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x}), \bar{u} \in H^+, \bar{\beta}_u \in A(g_u, \bar{x})$$

$$\text{tels que : } \langle g(\bar{x}), \bar{u} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta}_u)$$

On reconnaît une extension des conditions classiques de Kuhn et Tucker.

3.3.2.(2). – Considérons la fonction numérique (lagrangien)

$$L(x, u) = f(x) - \langle g(x), u \rangle$$

définie pour $x \in \Omega_0 \cap \Omega$ et $u \in H$.

COROLLAIRE 2. – *Pour qu'un point $\bar{x} \in \Omega_0 \cap D$, régulier, soit une solution optimale de \mathcal{R} , il faut qu'il existe $\bar{u} \in H^+$ tel que, pour tout $x \in \Omega_0 \cap \Omega$ et pour tout $u \in H^+$, on ait*

$$L(x, \bar{u}) \leq L(\bar{x}, \bar{u}) \leq L(\bar{x}, u)$$

Cette condition est, d'ailleurs, suffisante pour qu'un point $\bar{x} \in \Omega_0 \cap D$ soit une solution optimale de \mathcal{R} .

La condition nécessaire est une conséquence du corollaire 1. En effet, $L(x, \bar{u})$ est une fonction concave et continue de x et la relation : $\bar{\alpha} = \bar{\beta}_u$ entraîne :

$$0 \in A^-(L(x, \bar{u}), \bar{x})$$

Par suite, pour tout $x \in \Omega_0 \cap \Omega$, on a : $L(x, \bar{u}) \leq L(\bar{x}, \bar{u})$. D'autre part, en tenant compte de : $\langle g(\bar{x}), \bar{u} \rangle = 0$, on montre la deuxième inégalité.

On note que la condition suffisante peut se démontrer simplement sans tenir compte de ce qui précède et sans condition de continuité pour f et g .

Ce corollaire 2 est une extension du théorème du col du lagrangien dont l'intérêt par rapport aux théorèmes connus [1] réside dans l'hypothèse de régularité sous laquelle il est établi.

4. PROGRAMME DUAL D'UN PROGRAMME LINEAIRE

4.1. Lemme.

Etant donné $a \in \mathcal{L}(E, G)$, soit, d'une part le cône convexe fermé pour les topologies $T(E, F)$:

$$C = \{x \in E \mid a(x) \leq 0\}$$

et d'autre part, le cône convexe :

$$\Gamma = \{y \in F \mid \exists u \in H^+, y = a^*(u)\}.$$

Alors le cône polaire C^* de C est identique à l'adhérence de Γ pour les topologies $T(F, E)$.

Ce lemme peut être déduit d'un résultat plus général établi dans [1] (page 76). On en donne ici la démonstration suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= \{x \in E \mid \forall u \in H^+, \langle x, a^*(u) \rangle \leq 0\} \\ &= \{x \in E \mid \forall u \in H^+, \langle a(x), u \rangle \leq 0\} \\ &= \{x \in E \mid a(x) \leq 0\} = C \end{aligned}$$

Sachant que $\Gamma^{**} = \bar{\Gamma}$ (voir [2] ou [3]), on en déduit que $C^* = \bar{\Gamma}$.

4.2. Programme dual d'un programme linéaire.

On considère le programme linéaire \mathcal{L} :

$$\text{Sup}_x \{ \langle x, c \rangle \mid a(x) \leq b \}$$

où $x \in E$, $c \in F$, $a \in \mathcal{L}(E, G)$ et $b \in G$.

On pose :

$$D = \{x \in E \mid a(x) \leq b\}$$

$$C_D = \{(x, t) \in E \times \mathbf{R} \mid a(x) \leq b, t, t \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_D &= \{(y, t) \in F \times \mathbf{R} \mid \exists u \in H^+, \exists \lambda \in \mathbf{R}^+, y = a^*(u), \\ &\quad t = -\langle b, u \rangle - \lambda\} \end{aligned}$$

On remarque que, dans le cas où $D \neq \emptyset$, le programme \mathcal{L} peut s'écrire :

$$\text{Sup}_x \{ \langle x, c \rangle \mid x \in D \} = \text{Min} \{ \mu \in \mathbf{R} \mid \forall x \in D, \langle x, c \rangle \leq \mu \}$$

D'autre part, si $D \neq \emptyset$, on montre aisément (voir [10], lemme IV-2) que :

$$\{ \mu \in \mathbf{R} \mid \forall x \in D, \langle x, c \rangle \leq \mu \} = \{ \mu \in \mathbf{R} \mid (c, -\mu) \in C_D^* \}$$

Or, d'après le lemme précédent, on a :

$$C_D = \bar{\Gamma}_D \text{ (adhérence pour les topologies } T(F \times R, E \times R))$$

On est ainsi amené à formuler le programme dual Λ de \mathcal{L} :

$$\text{Inf } \{ \mu \in R \mid (c, -\mu) \in \Gamma_D \}$$

soit :
$$\text{Inf } \{ \langle b, u \rangle \mid a^*(u) = c, u \in H^+ \}$$

On obtient ainsi un programme dual voisin du dual introduit par Duffin [3] et également étudié par Krestchmer [4]. On déduit immédiatement ici de ce qui précède le théorème de dualité suivant.

THEOREME.

1) Si la valeur de \mathcal{L} est $+\infty$, Λ n'admet pas de solution réalisable.

2) a) Si chacun des programmes \mathcal{L} et Λ admet au moins une solution réalisable, alors la valeur de \mathcal{L} est inférieure ou égale à la valeur de Λ .

b) Si la valeur de \mathcal{L} est finie et si Γ_D est fermé dans $F \times R$ (pour les topologies $T(F \times R, E \times R)$), alors Λ admet au moins une solution optimale et a même valeur que \mathcal{L} .

Ce théorème étend le théorème analogue établi dans [10] pour le cas où $G = R^I$. De la même manière, on étend les relations de complémentarité comme suit : si \bar{x} et \bar{u} sont deux solutions optimales de \mathcal{L} et Λ et si Γ_D est fermé alors,

$$\langle a(\bar{x}) - b, \bar{u} \rangle = 0 .$$

4.3. Compléments au théorème de dualité.

4.3.1. — Une condition suffisante pour que Γ_D soit fermé.

Considérons le cône convexe :

$$K_D = \{ (y, t) \in F \times R \mid u \in H^+, y = a^*(u), t = \langle -b, u \rangle \}$$

THEOREME. — Si $D \neq \emptyset$, une condition suffisante pour que Γ_D soit fermé est que K_D soit fermé (pour les topologies $T(F, E)$).

La démonstration découle du résultat suivant de Ky Fan [6] :

“E et F étant en dualité, soient A et B deux ensembles fermés dans F pour $\sigma(F, E)$. Si l'intérieur pour une topologie $T(E, F)$ de A rencontre B, alors $A + B$ est fermé dans F pour $\sigma(F, E)$ ”.

En notant R^- le cône convexe engendré dans $F \times R$ par $(0, -1)$, on voit que :

$$\Gamma_D = K_D + R^-$$

Si $D \neq \emptyset$, il existe $(x, t) \in K_p$ avec $t = 1$. Donc K_D rencontre l'intérieur de R^- et le théorème de Ky Fan permet de conclure.

4.3.2. – Cas où $D = \emptyset$.

Considérons le cône convexe :

$$\Gamma_A = \{y \in F \mid \exists u \in H^+, y = a^*(u)\}$$

Si $D = \emptyset$ et si Γ_D est fermé, on voit que :

$$\Gamma_D = \Gamma_A \times R$$

Par suite, le dual Λ s'écrit :

$$\text{Inf} \{ \mu \in R \mid (c, -\mu) \in \Gamma_A \times R \}$$

on obtient donc le résultat suivant :

THEOREME. – Dans le cas où $D = \emptyset$.

- 1) Si $c \notin \Gamma_A$, le programme Λ n'admet pas de solution réalisable.
- 2) Si $c \in \Gamma_A$ et si Γ_D est fermé, alors la valeur de Λ est $-\infty$.

**5. PROGRAMMES LINEAIRES D'APPUI
D'UN PROGRAMME CONVEXE SOUS-DIFFERENTIABLE
APPLICATION A LA DUALITE**

5.1. Programmes linéaires d'appui.

5.1.1. DEFINITION.

Un programme convexe \mathcal{P} sera dit sous-différentiable en un point $x \in \Omega$ si l'application g est sous-différentiable au point x .

On appellera programme linéaire d'appui (en abrégé p. l. a.) aux points $x_0 \in \Omega_0$, $x \in \Omega$, d'un programme convexe \mathcal{P} sous-différentiable au point x , tout programme :

$$\text{Sup}_{\xi} \{f(x_0) + \langle \xi - x_0, \alpha \rangle \mid g(x) + \beta(\xi - x) \leq 0\}$$

où $\alpha \in A^-(f(x_0))$ et $\beta \in A(g, x)$.

Un tel programme sera noté p. l. a. (x_0, x) et, dans le cas où $x = x_0$, le p. l. a. sera dit homogène et noté p. l. a. (x) .

5.1.2. — Propriétés immédiates.

Etant donné $\beta \in A(g, x)$, posons :

$$D(x, \beta) = \{\xi \in E \mid g(x) + \beta(\xi - x) \leq 0\}$$

On voit que : $D \subset D(x, \beta)$. Il s'ensuit que, dans le cas où $D \neq \emptyset$, la valeur de tout p. l. a. de \mathcal{P} (et, par suite, la valeur de son dual) est supérieure ou égale à la valeur de \mathcal{P} . De plus, en supposant toujours $D \neq \emptyset$, on voit que, si f est strictement concave en un point $x_0 \in \Omega_0$, c'est-à-dire si, pour tout $y_0 \in \Omega_0$ et pour tout $\theta \in]0, 1[$ on a :

$$f(\theta x_0 + (1 - \theta) y_0) > \theta f(x_0) + (1 - \theta) f(y_0)$$

alors, pour tout $z_0 \in D \cap \Omega_0$ et $z_0 \neq x_0$, la valeur de tout p. l. a. (x_0, x) (et, par suite, la valeur de son dual) est strictement supérieure à $f(z_0)$.

5.1.3. — Programmes linéaires d'appui et condition d'optimalité.

5.1.3.(1). — Condition nécessaire d'optimalité.

THEOREME. — Si \bar{x} est une solution optimale régulière de \mathcal{P} il existe un p. l. a. (\bar{x}) de \mathcal{P} qui admet \bar{x} comme solution optimale et dont le dual admet une solution optimale \bar{u} et a même valeur que \mathcal{P} .

Démonstration. — D'après le corollaire 3.3.2.1 il existe

$$\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x}), \bar{u} \in H^+ \quad \text{et} \quad \bar{\beta} \in A(g, \bar{x})$$

tels que :

$$\langle g(\bar{x}), \bar{u} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta}^*(\bar{u})$$

On en déduit que le p. l. a. (\bar{x}) défini par $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ admet \bar{x} comme solution optimale. De plus, le dual d'un tel p. l. a. (\bar{x}) s'écrit :

$$\inf_u \{f(\bar{x}) - \langle g(\bar{x}), u \rangle \mid \bar{\alpha} = \bar{\beta}^*(u), u \in H^+\}$$

Il est clair que \bar{u} est solution de ce dual et que sa valeur est alors $f(\bar{x})$.

5.1.3.(2). — Condition suffisante d'optimalité.

THEOREME. — Pour qu'un point $\bar{x} \in \Omega_0 \cap \Omega$ soit une solution optimale de \mathcal{P} il suffit qu'il existe un p. l. a. (\bar{x}) admettant \bar{x} comme solution optimale.

Démonstration. — Supposons qu'il existe un p. l. a. (\bar{x}) défini par $\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x})$ et $\bar{\beta} \in A(g, \bar{x})$ admettant \bar{x} comme solution optimale. Du fait que $\bar{x} \in D(\bar{x}, \bar{\beta})$, on déduit que $\bar{x} \in D$. Sachant que $D \subset D(\bar{x}, \bar{\beta})$ et que $\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x})$, on déduit que :

$$\forall x \in D, f(x) \leq f(\bar{x}) + \langle x - \bar{x}, \bar{\alpha} \rangle \leq f(\bar{x})$$

COROLLAIRE. — Pour qu'un point $\bar{x} \in \Omega_0 \cap D$ soit une solution optimale de \mathcal{P} il suffit qu'il existe un p. l. a. (\bar{x}) dont le dual ait pour valeur $f(\bar{x})$.

En effet, si $\bar{x} \in \Omega_0 \cap D$ et s'il existe un p. l. a. (\bar{x}) dont le dual a pour valeur $f(\bar{x})$, on en déduit que \bar{x} est une solution optimale de ce p. l. a. (\bar{x}) .

5.2. Programme dual d'un programme convexe \mathcal{P} sous-différentiable.

On suppose ici que le programme convexe \mathcal{P} est sous-différentiable en tout point $x \in \Omega$.

5.2.1. — Première formulation : programme dual π_1 .

Le dual d'un p. l. a. (x) (homogène) de \mathcal{P} s'écrit :

$$\inf_u \{ L(x, u) \mid \alpha = \beta^*(u), u \in H^+ \}$$

Considérant la famille des p. l. a. (x), $x \in \Omega_0 \cap \Omega$ et tenant compte de ce qui précède, on est amené à formuler le programme dual π_1 suivant :

$$\inf_{x, u} \{ L(x, u) \mid \alpha = \beta^*(u), \alpha \in A^-(f, x), \beta \in A(g, x), u \in H^+ \}$$

Et on obtient le théorème de dualité suivant qui découle des propriétés précédentes des p. l. a. de \mathcal{P} .

THEOREME.

- 1) Si la valeur de \mathcal{P} est $+\infty$, π_1 n'admet pas de solution réalisable.
- 2) a) Si chacun des programmes \mathcal{P} et π_1 admet au moins une solution réalisable, alors la valeur de \mathcal{P} est inférieure ou égale à la valeur de π_1 .
- b) Si \bar{x} est une solution optimale régulière de \mathcal{P} et si l'application g est sous-différentiable régulière au point \bar{x} , il existe une solution optimale (\bar{x}, \bar{u}) de π_1 et les deux programmes ont même valeur.
- c) Si \mathcal{P} admet une solution optimale régulière, si (\bar{x}, \bar{u}) est une solution optimale de π_1 et si f est strictement concave au point \bar{x} , alors \bar{x} est une solution optimale de \mathcal{P} , et les deux programmes ont même valeur.
- d) Si (\bar{x}, \bar{u}) est une solution optimale de π_1 telle que $\bar{x} \in D$ et $\langle g(\bar{x}), \bar{u} \rangle = 0$, alors \bar{x} est une solution optimale de \mathcal{P} , et les deux programmes ont même valeur.

Ce programme dual π_1 est une extension du dual de Wolfe également étudié par d'autres auteurs (voir [10] pour une bibliographie plus complète).

5.2.2. — *Deuxième formulation : Programme dual π_2 .*

5.2.2.(1). — *Programme linéaire d'appui non homogène et dual.*

Soit φ et ψ les fonctions conjuguées exactes de f et g .

Un p. l. a. quelconque de \mathcal{P} s'écrit alors :

$$\text{Sup}_{\xi} \{ \langle \xi, \alpha \rangle - \varphi(\alpha) \mid \beta(\xi) \leq \psi(\beta) \}$$

et le dual d'un tel p. l. a. s'écrit donc :

$$\text{Inf}_u \{ -\varphi(\alpha) + \langle \psi(\beta), u \rangle \mid \alpha = \beta^*(u), u \in H^+ \}$$

5.2.2.(2). — *Programme dual π_2 .*

Considérant la famille de tous les p. l. a. de \mathcal{P} homogènes ou non, on est amené à formuler maintenant le programme dual π_2 suivant :

$$\text{Inf}_{\alpha, \beta, u} \{ -\varphi(\alpha) + \langle \psi(\beta), u \rangle \mid \alpha = \beta^*(u), u \in H^+ \}$$

où l'on suppose naturellement : $\alpha \in A^-(f)$ et $\beta \in A(g)$. Sous une forme plus condensée, on peut écrire π_2 comme suit :

$$\text{Inf}_{\beta, u} \{ \langle \psi(\beta), u \rangle - \varphi(\beta^*(u)) \mid u \in H^+ \}$$

où l'on suppose naturellement : $\beta \in A(g)$ et $\beta^*(u) \in A^-(f)$. Et l'on obtient le théorème de dualité suivant :

THEOREME.

1) Si la valeur de \mathcal{P} est $+\infty$, π_2 n'admet pas de solution réalisable.

2) a) Si chacun des programmes \mathcal{P} et π_2 admet au moins une solution réalisable, la valeur de π_2 est au moins égale à valeur de \mathcal{P} .

b) Si \bar{x} est une solution optimale régulière de \mathcal{P} et si l'application g est sous-différentiable régulière au point \bar{x} , alors il existe une solution $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{u})$ de π_2 telle que :

$$\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x}), \bar{\beta} \in A(g, \bar{x}), \langle g(\bar{x}), u \rangle = 0$$

et les deux programmes ont même valeur.

c) Si \mathfrak{P} admet une solution optimale régulière, si $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{u})$ est une solution optimale π_2 , et si f est strictement concave en un point \bar{x} tel que $\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x})$, alors \bar{x} est une solution optimale de \mathfrak{P} , et les deux programmes ont même valeur.

d) Si $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{u})$ est une solution optimale de π_2 et s'il existe $\bar{x} \in D$ tel que $\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x})$, $\bar{\beta} \in A(g, \bar{x})$ et $\langle g(\bar{x}), \bar{u} \rangle = 0$, alors \bar{x} est une solution optimale de \mathfrak{P} et les deux programmes ont même valeur.

5.2.2.(3). Remarque. – Dans le cas où $G = \prod_{i \in I} G_i$, on peut définir un p. l. a. de \mathfrak{P} de manière un peu différente.

DEFINITION. – Dans le cas où $G = \prod_{i \in I} G_i$, appelons programme linéaire d'appui de \mathfrak{P} aux points $x_0 \in \Omega_0, x_i \in \Omega_i, i \in I$, tout programme :

$$\text{Sup}_{\xi} \{ f(x_0) + \langle \xi - x_0, \alpha \rangle \mid g_i(x_i) + \beta_i(\xi - x_i) \leq 0, i \in I \}$$

où $\alpha \in A^-(f, x_0)$ et $\beta_i \in A(g_i, x_i)$.

Dans le cas où $x_i = x$ pour tout $i \in I$, on retrouve la notion de p. l. a. (x_0, x) définie plus haut. En considérant la famille des p. l. a. $(x_0, x_i, i \in I)$ définis ici on est conduit à un programme dual π'_2 légèrement différent de π_2 . Ce programme π'_2 s'écrit, avec des notations évidentes :

$$\text{Inf}_{\alpha, \beta_i, u_i} \left\{ -\varphi(\alpha) + \sum_{i \in K} \langle \psi_i(\beta_i), u_i \rangle \mid \alpha = \sum_{i \in K} \beta_i^*(u_i), u_i \in H_i^+, i \in I, \right. \\ \left. K \subset I, K \text{ fini} \right\}$$

Du fait que la famille des p. l. a. $(x_0, x_i, i \in I)$ contient la famille des p. l. a. (x_0, x) , on déduit que le théorème de dualité précédent relatif au dual π_2 demeure vrai pour π'_2 . On obtient le même énoncé à condition de poser :

$$\beta = (\beta_i)_{i \in I} \quad \text{et} \quad u = (u_i)_{i \in I}$$

où $u_i = 0$ pour tout i sauf pour un nombre fini d'indices.

Dans le cas particulier où $G = \mathbb{R}^1$, on retrouve avec π'_2 le dual déjà introduit dans [10] et également obtenu par d'autres voies par Rockafellar [13] [14].

5.2.2.(4). *Exemple.* – Considérons le programme \mathcal{R} suivant où $E = G = L^2[0, 1]$

$$\text{Inf } \left\{ \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle \mid 0 \leq x \leq 1 \right\}$$

où $b \in L^2[0, 1]$ et A est un noyau de type positif.

Le programme dual π_2 s'écrit :

$$\text{Inf } \{ \varphi(\alpha) + \langle 1, \nu \rangle \mid \alpha = u - \nu, u \geq 0, \nu \geq 0 \}$$

En explicitant $\varphi(\alpha)$, on voit que π_2 se ramène au problème d'extrémum sans contrainte π_3 :

$$\text{Inf } \left\{ \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle 1, (Ax + b)^- \rangle \right\}$$

Remarquant que \mathcal{R} admet toujours une solution optimale, que tout point de D est ici régulier, et que l'application g qui est linéaire est évidemment sous-différentiable régulière, on peut appliquer le théorème de dualité précédent et en déduire que π_3 a même valeur que \mathcal{R} et que toute solution optimale de \mathcal{R} est une solution optimale de π_3 .

Remarquant de plus que si A est un noyau strictement positif, la fonction f est alors strictement convexe, on déduit de ce même théorème de dualité la proposition réciproque : si A est un noyau strictement positif, toute solution optimale de π_3 est solution optimale de \mathcal{R} . Dans ce cas, les deux problèmes sont donc équivalents.

On retrouve ainsi des résultats établis précédemment pour ce problème particulier [8], [10].

5.3. Programme dual d'un programme convexe sans hypothèse de sous-différentiabilité.

Considérons un programme convexe \mathcal{R} :

$\text{Sup } \{ f(x) \mid g(x) \leq 0 \}$, comme il a été défini plus haut et sans

hypothèse de sous-différentiabilité sur g . Ce programme est équivalent au programme convexe sous-différentiable \mathcal{P} : $\text{Sup}\{f(x) \mid \hat{g}(x) \leq 0\}$, où \hat{g} est l'application de Ω dans \mathbb{R}^{H^+} définie par les fonctions numériques composantes g_u , $u \in H^+$. On peut écrire les duals $\hat{\pi}_1$ et $\hat{\pi}_2$ de \mathcal{P} et les théorèmes de dualité précédents s'appliqueront à condition de remplacer dans leurs énoncés l'hypothèse de régularité par l'hypothèse de régularité faible.

Pour le dual $\hat{\pi}_1$, on obtient la formulation suivante :

$$\text{Inf}_{x,u} \{L(x, u) \mid \alpha = \beta_u, \alpha \in A^-(f, x), \beta_u \in A(g_u, x), u \in H^+\}$$

Dans le cas où g est une application sous-différentiable régulière, le dual $\hat{\pi}_1$ est alors identique au dual π_1 de \mathcal{P} .

En désignant par ψ_u l'application conjuguée exacte de g_u , on peut écrire le dual $\hat{\pi}_2$ comme suit :

$$\text{Inf}_{x,u} \{-\varphi(\alpha) + \psi_u(\alpha) \mid u \in H^+\}$$

où l'on suppose :

$$\alpha \in A^-(f) \cap A(g_u)$$

Dans le cas où g est une application sous-différentiable régulière, on a :

$$\psi_u(\beta^*(u)) = \langle \psi(\beta), u \rangle$$

Et le dual $\hat{\pi}_2$ est alors identique au dual π_2 de \mathcal{P} .

6. ENSEMBLES ET FONCTIONS LOCALEMENT CONVEXES AFFAIBLISSEMENT DES HYPOTHESES DE LA PROGRAMMATION CONVEXE.

6.1. Ensembles et fonctions localement convexes.

Dans cette partie, on désigne par E un espace vectoriel topologique réel localement convexe.

6.1.1. Ensembles localement convexes.

6.1.1.(1). DEFINITION. — *Un ensemble $\Omega \subset E$ sera dit localement convexe si, pour tout point $x \in \Omega$, il existe un voisinage convexe $V(x)$ de x tel que $V(x) \cap \Omega$ soit convexe.*

Les ouverts de E et les convexes de E sont des exemples d'ensembles localement convexes.

Il découle de la définition que l'intersection d'un nombre fini d'ensembles localement convexes est un ensemble localement convexe.

6.1.1.(2). THEOREME. — *Soit Ω un ensemble localement convexe et connexe dans E . Si l'intérieur de Ω est non vide, alors tout point de Ω est adhérent à l'intérieur de Ω .*

Dans un espace vectoriel topologique réel localement convexe, on généralise ainsi un résultat bien connu pour un ensemble convexe dans un espace vectoriel topologique réel quelconque (Bourbaki, E.V.T. ch II, § 1)

Démonstration. — Soit Ω_1 l'ensemble des points $x \in \Omega$ pour lesquels il existe un voisinage ouvert convexe $V(x)$ tel que $V(x) \cap \Omega$ soit un convexe d'intérieur non vide.

Montrons que Ω_1 est ouvert pour la topologie induite sur Ω par la topologie de E . Soit $x \in \Omega_1$ et soit $V(x)$ un voisinage ouvert convexe de x tel que $V(x) \cap \Omega$ soit un convexe d'intérieur non vide. Pour tout $y \in V(x) \cap \Omega$, $V(x)$ est un voisinage ouvert de y et, par suite, $y \in \Omega_1$. Ceci montre que Ω_1 est ouvert pour la topologie induite.

Soit Ω_2 le complémentaire de Ω_1 par rapport à Ω . L'ensemble Ω_2 est l'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que, pour tout voisinage ouvert convexe $V(x)$ de x tel que $V(x) \cap \Omega$ soit convexe, l'intérieur de $V(x) \cap \Omega$ est vide. Montrons que Ω_2 est ouvert pour la topologie induite sur Ω . Soit $x \in \Omega_2$ et soit $V(x)$ un voisinage ouvert convexe de x tel que $V(x) \cap \Omega$ soit convexe. Il suffit de montrer que tout point $y \in V(x) \cap \Omega$ appartient à Ω_2 . Soit $y \in V(x) \cap \Omega$ et supposons que $y \in \Omega_1$. Soit alors $V(y)$ un voisinage ouvert convexe de y tel que $V(y) \cap \Omega$ soit un convexe d'intérieur non vide. Soit z un point intérieur à $V(y) \cap \Omega$. D'après Bourbaki (E.V.T., ch. II, § 1) tout segment semi-ouvert $]yz]$ est inclus dans l'intérieur de $V(y) \cap \Omega$. Puisque $V(x)$ est ouvert et contient y on a $V(x) \cap]yz] \neq \emptyset$.

Donc $V(x) \cap \Omega$ a un intérieur non vide, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

L'intérieur de Ω étant supposé non vide, Ω_1 est non vide (Ω_1 contient en effet l'intérieur de Ω).

Comme Ω est supposé connexe, on en déduit que Ω_1 est identique à Ω et que $\Omega_2 = \emptyset$.

6.1.1.(3). COROLLAIRE. — *L'intérieur de tout ensemble localement convexe et connexe est connexe.*

Démonstration. — Soit Ω un ensemble localement convexe et connexe dans E et supposons que l'intérieur de Ω soit la réunion de deux ouverts disjoints non vides :

$$\Omega = O_1 \cup O_2 \quad \text{avec} \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset .$$

D'après le théorème précédent Ω a même adhérence que son intérieur, soit :

$$\Omega = \bar{O}_1 \cup \bar{O}_2$$

Comme Ω est connexe, on a nécessairement

$$\Omega \cap \bar{O}_1 \cap \bar{O}_2 \neq \emptyset$$

(Sinon $\Omega \cap \bar{O}_1$ et $\Omega \cap \bar{O}_2$ formeraient une partition de Ω en deux fermés disjoints).

Soit donc $x \in \Omega \cap \bar{O}_1 \cap \bar{O}_2$ et soit $V(x)$ un voisinage ouvert convexe de x tel que $V(x) \cap \Omega$ soit convexe.

L'intérieur de $V(x) \cap \Omega$ qui est non vide, d'après le théorème précédent, est donc convexe. Mais on a, d'autre part

$$\begin{aligned} (V(x) \cap \Omega) &= V(x) \cap \Omega = V(x) \cap (O_1 \cup O_2) \\ &= (V(x) \cap O_1) \cup (V(x) \cap O_2) \end{aligned}$$

Comme $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$, ceci est en contradiction avec le fait que l'intérieur de $V(x) \cap \Omega$ soit convexe.

6.1.1.(4). — *Ensemble localement convexe unilatéral.*

DEFINITION. — *Un ensemble localement convexe $\Omega \cap E$ sera dit unilatéral par rapport à un point $x \in \Omega$ s'il existe un voisinage*

convexe $V(x)$ de x tel que $V(x) \cap \Omega$ soit convexe et que tout hyperplan d'appui de $V(x) \cap \Omega$ au point x soit un hyperplan d'appui de Ω . (Tout hyperplan d'appui local au point x est hyperplan d'appui global).

On en déduit immédiatement que, si Ω est un ensemble localement unilatéral par rapport à x , pour tout voisinage convexe $V(x)$ de x tel que $V(x) \cap \Omega$ soit convexe, tout hyperplan d'appui de $V(x) \cap \Omega$ au point x est un hyperplan d'appui de Ω .

On en déduit également que l'intersection d'un nombre fini d'ensembles localement convexes unilatéraux par rapport à un même point x est un ensemble localement convexe unilatéral par rapport au point x .

Un ensemble localement convexe Ω sera dit unilatéral s'il est unilatéral par rapport à tout point $x \in \Omega$.

L'intersection d'un nombre fini d'ensembles localement convexes unilatéraux est donc un ensemble localement convexe unilatéral.

Exemples. — Les ouverts de E et les convexes de E sont des ensembles localement convexes unilatéraux. Toute intersection finie d'ouverts et de convexes de E est donc aussi un ensemble localement convexe unilatéral.

6.1.2. — Fonctions localement convexes.

6.1.2.(1). DEFINITION. — Une fonction numérique finie h définie sur $\Omega \subset E$ sera dite localement convexe si :

1) Ω est localement convexe.

2) Pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage convexe $V(x)$ de x tel que la restriction de h sur $V(x)$ soit une fonction convexe.

On remarque que toute fonction h localement convexe sur un ensemble Ω convexe est une fonction convexe. Soit, en effet, deux points $x_1 \in \Omega$ et $x_2 \in \Omega$. La restriction de h sur le segment $[x_1, x_2]$ est localement convexe. On en déduit aisément que cette fonction est convexe sur le segment $[x_1, x_2]$. On peut s'appuyer, par exemple, sur le fait qu'en tout point $x \in]x_1, x_2[$ la fonction h étant localement convexe admet deux demi-dérivées $h'_+(x)$ et $h'_-(x)$ telles que : $h'_+(x) \geq h'_-(x)$.

6.1.2.(2). — *Caractérisation.*

De la définition précédente, on déduit la caractérisation suivante des fonctions localement convexes.

THEOREME. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction h soit localement convexe est que son épigraphe soit localement convexe dans $E \times R$.*

6.1.2.(3). — *Une propriété des fonctions localement convexes.*

6.1.2.(3.1). LEMME. — *Soit Ω un ouvert connexe dans E . Pour tout couple de points $x \in \Omega$ et $x' \in \Omega$, il existe une chaîne finie d'ouverts convexes contenus dans Ω reliant x et x' , c'est-à-dire un nombre fini d'ouverts convexes $V_i, i = 1, 2, \dots, n$ contenus dans Ω et tels que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in V_1 \\ x' \in V_n \\ V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \end{array} \right.$$

Démonstration. — Etant donné un point $x \in \Omega$, soit Ω_1 l'ensemble des points $y \in \Omega$ tels qu'il existe une chaîne finie d'ouverts convexes contenus dans Ω reliant x et y . L'ensemble Ω_1 est ouvert. En effet, le dernier ouvert d'une chaîne finie reliant x et y est un voisinage de y .

Soit Ω_2 le complémentaire de Ω_1 par rapport à Ω . Montrons que Ω_2 est ouvert. Soit $y \in \Omega_2$ et supposons qu'il existe un voisinage ouvert convexe $V(y)$ contenu dans Ω et contenant un point $z \in \Omega_1$. On en déduirait que $y \in \Omega_1$. En effet on peut constituer une chaîne finie reliant x et y en ajoutant l'ouvert $V(y)$ à une chaîne finie reliant x et z . Il s'ensuit que Ω_2 contient tout voisinage ouvert convexe $V(y)$ contenu dans Ω . Par suite, Ω_2 est ouvert.

D'autre part Ω_1 est non vide. Comme Ω est connexe on a :

$$\Omega_1 = \Omega \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \emptyset$$

6.1.2.(3.2). THEOREME. — *Soit h une fonction localement convexe sur un ensemble $\Omega \subset E$ localement convexe et connexe. Si h est continue en un point intérieur à Ω , alors h est continue en tout point intérieur à Ω .*

Démonstration. — Dans le cas où Ω est convexe, h est alors une fonction convexe et ce résultat est classique (Bourbaki, ch. II, § 1).

On l'étend ici en remarquant, d'après le corollaire 6.1.1.(3) que l'intérieur de Ω est connexe et en s'appuyant ensuite sur le lemme 6.1.2.(3.1). Soit, en effet, x un point intérieur à Ω où h est continue.

La continuité se prolonge à tout point y que l'on peut relier à x par une chaîne finie d'ouverts convexes contenus dans Ω . D'après le lemme 6.1.2.(3.1), il en est ainsi pour tout point intérieur à Ω .

6.1.2.(4) — Fonctions localement convexes unilatérales.

DEFINITION. — Une fonction h localement convexe sera dite unilatérale par rapport à un point x si :

1) Son ensemble de définition Ω est localement convexe unilatéral par rapport à x .

2) Il existe un voisinage convexe $V(x)$ de x tel que $V(x) \cap \Omega$ soit une fonction convexe et que tout sous-gradient de la fonction h restreinte sur $V(x) \cap \Omega$ soit un sous-gradient de h sur Ω (tout-sous-gradient local est sous-gradient global).

Une fonction localement convexe sera dite unilatérale si elle est unilatérale par rapport à tout point de son domaine de définition.

De cette définition, on déduit aisément qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit localement convexe unilatérale est que son épigraphe soit un ensemble localement convexe unilatéral dans $E \times \mathbb{R}$.

Exemples. — Une fonction convexe est localement convexe unilatérale. Une fonction sous-différentiable sur un ouvert est localement convexe unilatérale.

Et on déduit de ce qui précède que la borne supérieure d'une famille finie de fonctions localement convexes unilatérales est une fonction localement convexe unilatérale. Son épigraphe qui est l'intersection d'un nombre fini d'ensembles localement convexes unilatéraux est en effet un ensemble localement convexe unilatéral.

6.1.2.(5). — *Fonctions vectorielles localement convexes.*

La définition des fonctions localement convexes données dans le cas d'une fonction numérique s'étend sans difficulté au cas d'une application dans un espace vectoriel ordonné G .

Si G est en dualité avec H , on a l'équivalence :

$$h \text{ continue pour } \sigma(G, H) \iff h_u \text{ continue } \forall u \in H$$

Par suite, le théorème 6.1.2.(3.2) s'étend au cas d'une application localement convexe dans G muni de la topologie faible $\sigma(G, H)$.

La notion de fonction localement convexe unilatérale s'étend également sans difficulté au cas d'une application dans G . Une application h de $\Omega \subset E$ dans G sera dite localement convexe unilatérale si tout sous-gradient local de h est un sous-gradient global.

6.2. Programmes localement convexes.

6.2.1. DEFINITION. — On se donne, comme précédemment, deux couples d'espaces vectoriels réels en dualité, E et F d'une part, G et H d'autre part, G étant ordonné. Et on considère ici le programme \mathfrak{P}_0 :

$$\text{Sup} \{ f(x) \mid g(x) \leq 0 \}$$

avec les hypothèses suivantes :

i) f est une fonction numérique finie localement convexe unilatérale, continue sur l'intérieur de son ensemble de définition Ω_0 (E étant muni de $\tau(E, F)$).

ii) Chaque composante connexe de Ω_0 a un intérieur non vide.

iii) g est une application localement convexe unilatérale de $\Omega \subset E$ dans G .

iiii) l'ensemble ; $D = \{x \in \Omega \mid g(x) \leq 0\}$ rencontre l'intérieur de Ω_0 .

Nous allons voir que ces hypothèses suffisent pour que demeurent vrais les résultats de notre étude précédente des programmes convexes.

6.2.2. – Hypothèse de régularité.

On remarque d'abord que, g étant une application localement convexe, D est un ensemble localement convexe.

Etant donné un point $x \in \Omega$, soit $V(x)$ un voisinage de x sur lequel l'application g est convexe, et soit $\Delta(x)$ le cône convexe engendré par $D \cap V(x) - \{x\}$.

On considère, d'autre part, les cônes convexes :

$$H^+(x) = \{u \in H^+ \mid g_u(x) = 0\}$$

$$\Gamma(x) = \{y \in F \mid \exists \beta \in A(g, x), \exists u \in H^+(x), y = \beta^*(u)\}$$

$$\hat{\Gamma}(x) = \bigcup_{u \in H^+(x)} A(g_u, x)$$

DEFINITION. – Un point $x \in \Omega$ sera dit régulier pour g (ou plus brièvement régulier) si : $\Gamma(x) = \Delta(x)^*$.

Cette hypothèse de régularité implique que l'application g soit sous-différentiable régulière au point x .

On dira que x est faiblement régulier si x est régulier pour \hat{g} , c'est-à-dire si : $\hat{\Gamma}(x) = \Delta(x)^*$

Du fait que l'application g est localement convexe unilatérale on déduit que D est un ensemble convexe unilatéral en tout point faiblement régulier. Soit, en effet, x un point faiblement régulier de D . Tout hyperplan d'appui local de D au point x a une équation de la forme :

$$\langle y - x, \beta_u \rangle = 0$$

où $u \in H^+(x)$ et $\beta_u \in A(g_u, x)$. L'application g étant unilatérale il en est de même de g_u et il s'ensuit que l'hyperplan d'appui local est hyperplan d'appui global.

6.2.3. – Conditions d'optimalité et dualité.

6.2.3.(1). – Considérons le programme \mathcal{Q}'_0 :

$$\text{Sup} \{ f(x) \mid x \in D \}$$

où f est une fonction numérique finie localement concave unilatérale

où f est une fonction numérique finie localement concave unilatérale continue sur l'intérieur de son ensemble de définition Ω_0 dont chaque composante connexe est supposée avoir un intérieur non vide et où D est un ensemble localement convexe unilatéral rencontrant l'intérieur de Ω_0 .

THEOREME. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $\bar{x} \in \Omega_0$ soit optimal pour \mathcal{P}'_0 est que*

$$A^-(f, \bar{x}) \cap \Delta(x)^* \neq \emptyset$$

Démonstration. — Ce résultat étend le théorème 3.3.1. Il suffit de montrer que la condition nécessaire est encore vraie avec les hypothèses ci-dessus. Soit \bar{x} une solution optimale de \mathcal{P}'_0 . Il existe un voisinage convexe $V(\bar{x})$ de \bar{x} tel que $V(\bar{x}) \cap D$ soit convexe, d'une part, et que, d'autre part, la restriction de f sur $V(\bar{x}) \cap \Omega_0$ soit une fonction convexe. Le programme $\mathcal{P}''_0 : \text{Sup}\{f(x) \mid x \in V(\bar{x}) \cap D\}$ est un programme convexe qui admet \bar{x} pour solution optimale. En raison du théorème 6.1.1.(2) l'intérieur de $V(\bar{x}) \cap \Omega_0$ est non vide. Et de l'hypothèse selon laquelle D rencontre l'intérieur de $V(\bar{x}) \cap \Omega_0$ on déduit que $V(\bar{x}) \cap \Omega_0$ rencontre l'intérieur de

$$V(\bar{x}) \cap \Omega_0$$

(sinon il existerait un hyperplan de séparation entre ces deux ensembles convexes qui serait aussi, en raison des hypothèses d'unilatéralité, un hyperplan de séparation global des ensembles D et Ω_0). On peut donc appliquer le théorème 3.3.1 et la remarque qui l'accompagne au programme convexe \mathcal{P}''_0 et on en déduit que :

$$A^-(f, \bar{x}) \cap \Delta(\bar{x})^* \neq \emptyset$$

Notons que, pour établir cette condition nécessaire, il suffisait de supposer f et D unilatéraux par rapport au point \bar{x} .

6.2.3.(2). — *Conséquences.*

Considérons un programme \mathcal{P}_0 tel qu'il a été défini au paragraphe 6.2.1. Du fait que D est alors unilatéral par rapport à tout point faiblement régulier et du théorème précédent on déduit que l'ensemble des résultats de l'étude précédente concernant les conditions d'optimalité demeurent vrais pour \mathcal{P}_0 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K.J. ARROW, L. HURWICZ, H. UZAWA, *Studies in linear and non-linear programming*, Stanford University Press (California) (1958).
- [2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, Paris.
- [3] R.J. DUFFIN, *Infinite programs, Linear inequalities and related systems* (edited by Kuhn and Tucker) (1956) 158-170.
- [4] K.S. KRESTCHMER, Programmes in paired spaces, *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. XIII, N° 2, (1961) 221-238.
- [5] H.W. KUHN and A.W. TUCKER, Non linear programming, *Proceedings of the second Berkeley Symposium University of California Press* (1951) 481-492.
- [6] K. FAN, A generalization of the Alaoglu-Bourbaki theorem and its applications, *Math. Zeitschr.* 88 (1965) 48-60.
- [7] J.J. MOREAU, Fonctions convexes, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, 1966-1967.
- [8] R. PALLU de la BARRIERE, Duality in dynamic programming, First International Conference on programming and control, Colorado Springs, *SIAM Journal of control*, Vol. 4 n° 1, fév. 1966.
- [9] B.N. PSENICNYJ, Programmation convexe dans un espace normé, *Kibernetika*, (1965), 5, p. 46-54.
- [10] Cl. RAFFIN, Programmes linéaires d'appui d'un programme convexe, application aux conditions d'optimalité et à la dualité, *Revue Française d'Informatique et de Recherche opérationnelle*, (Série rouge, n° 13, 1968, p. 27-60).
- [11] Cl. RAFFIN, Sur les programmes convexes définis dans des espaces vectoriels topologiques, Note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris (t. 268, A, 1969, p. 738-741).
- [12] R.T. ROCKAFELLAR, Characterisation of the subdifferentials of convex functions, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. XVII (1966) 497-510.

- [13] R.T. ROCKAFELLAR, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, *Duke Math. Journal* 33-1, March 1966, 81-89.
- [14] R.T. ROCKAFELLAR, Duality in non linear programming Amer. Math. Soc. 11 (1968) p. 400-422.

Manuscrit reçu le 16 décembre 1969

Claude RAFFIN
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Domaine de la Borie,
123 rue Albert Thomas
87 Limoges