Université Grenoble Alpes

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

Régis de la Bretèche, Thomas Stoll & Gérald Tenenbaum

Somme des chiffres et changement de base

Tome 69, nº 6 (2019), p. 2507-2518.

<http://aif.centre-mersenne.org/item/AIF_2019__69_6_2507_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
69, 6 (2019) 2507-2518

SOMME DES CHIFFRES ET CHANGEMENT DE BASE

**par Régis DE LA BRETÈCHE,
Thomas STOLL & Gérald TENENBAUM (*)**

RÉSUMÉ. — Pour $q \geqslant 2$, soit $s_q(n)$ la somme des chiffres d'un entier n en base q. Répondant, sous une forme étendue, à une question de Deshouillers, Habsieger, Laishram, et Landreau, nous montrons que, dès que a et b sont multiplicativement indépendants, tout nombre réel positif est valeur d'adhérence de la suite $\{s_b(n)/s_a(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Nous donnons également un encadrement des fonctions de comptage des sous-suites associées.

ABSTRACT. — For $q \geqslant 2$, let $s_q(n)$ denote the sum of digits of an integer n in the base q expansion. Answering, in an extended form, a question of Deshouillers, Habsieger, Laishram, and Landreau, we show that, provided a and b are multiplicatively independent, any positive real number is a limit point of the sequence $\{s_b(n)/s_a(n)\}_{n=1}^{\infty}$. We also provide upper and lower bounds for the counting functions of the corresponding subsequences.

1. Introduction et énoncé des résultats

Répondant à une question de Steinhaus, Cassels [4] a construit en 1959 un ensemble de mesure de Hausdorff positive dont les éléments sont normaux en toute base qui n'est pas une puissance de 3. Dans le même esprit, alors qu'il est généralement conjecturé que les développements des entiers dans des bases multiplicativement indépendantes sur $\mathbb{Z}$ sont statistiquement indépendants, il est naturel d'attendre un phénomène de dépendance pour une infinité d'entiers exceptionnels. Deshouillers *et al.* [7] ont ainsi

Mots-clés : somme des chiffres, indépendence multiplicative, exposant d'irrationalité, recentrage binomial.
Classification Mathématique (2010) : 11A63, 11K16, 11K60, 11J82.
(*) Ce travail a bénéficié d'un soutien financier de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) et du *Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung* (FWF) dans le cadre du projet bilatéral MuDeRa (France–Autriche), ANR-14-CE34-0009. Le troisième auteur tient également à remercier Yann Bugeaud pour d'intéressantes discussions sur ce problème et pour la référence au travail de Cassels.

observé numériquement une coïncidence des sommes des chiffres $s_2(n)$ et $s_3(n)$ en bases 2 et 3 pour une proportion significative d'entiers n et établi que $|s_3(n)-s_2(n)| \leqslant \delta \log n$ pour une infinité d'entiers n avec $\delta \approx 0,14572$. Ils posent alors le problème de l'existence d'une suite infinie d'entiers n pour lesquels $|s_2(n)-s_3(n)|$ est « significativement petit ». Au vu du résultat précédemment cité, il est naturel de se demander si l'on a $s_2(n) \sim s_3(n)$ pour une sous-suite convenable des entiers naturels. Nous nous proposons ici de répondre positivement à cette question.

Notre approche fonctionne pour les sommes des chiffres $s_a(n)$ et $s_b(n)$ en bases respectives a et b lorsque $\log a$ et $\log b$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. La preuve nécessite seulement que $\vartheta := (\log a)/\log b$ possède un exposant d'irrationalité fini, ce qui est toujours le cas, d'après [2], si le rapport est irrationnel : cela signifie qu'il existe $\gamma \geqslant 2$ tel que

$$\left|\vartheta - \frac{r}{q}\right| \gg \frac{1}{q^\gamma} \qquad \big(q \geqslant 1,\ (r,q)=1\big). \tag{1.1}$$

Améliorant un résultat de [8], Wu et Wang [10] ont montré que $\gamma = 5,117$ est admissible pour $\vartheta := (\log 2)/\log 3$.

Nous établissons en fait que, pour tout $\tau > 0$, il existe une infinité d'entiers n tels que

$$s_b(n) \sim \tau s_a(n). \tag{1.2}$$

Posons

$$\tau_0 = \tau_0(a,b) := \frac{(b-1)\log a}{(a-1)\log b}. \tag{1.3}$$

Lorsque $\tau = \tau_0$ la relation (1.2) a trivialement lieu sur une suite de densité unité. En effet, pour presque tout entier n, nous avons

$$s_b(n) \sim \frac{b-1}{2\log b}\log n, \qquad s_a(n) \sim \frac{a-1}{2\log a}\log n.$$

Pour $\tau > 0$, définissons $\varrho_1 = \varrho_1(\tau) := \tau/(2\tau_0)$, $\varrho_2 = \varrho_2(\tau) := \tau_0/(2\tau)$,

$$\begin{cases} c_1 = c_1(a,b;\tau) := \dfrac{\varrho_1}{\log b}\log\left(\dfrac{1}{\varrho_1}\right) + \dfrac{1-\varrho_1}{\log b}\log\left(\dfrac{1}{1-\varrho_1}\right) & \text{si } \tau < 2\tau_0, \\ c_2 = c_2(a,b;\tau) := \dfrac{\varrho_2}{\log a}\log\left(\dfrac{1}{\varrho_2}\right) + \dfrac{1-\varrho_2}{\log a}\log\left(\dfrac{1}{1-\varrho_2}\right) & \text{si } \tau > \frac{1}{2}\tau_0, \end{cases}$$

et

$$c_0 = c_0(a,b;\tau) := \begin{cases} c_1 & \text{si } \tau \leqslant \frac{1}{2}\tau_0, \\ \max(c_1,c_2) & \text{si } \frac{1}{2}\tau_0 < \tau < 2\tau_0, \\ c_2 & \text{si } \tau \geqslant 2\tau_0. \end{cases}$$

Ainsi, lorsque $\tau = 1$, $a = 2$, $b = 3$, nous avons

$$\tau_0 = (\log 4)/\log 3 \approx 1,26186, \quad \varrho_2 = (\log 2)/\log 3, \quad c_0 = c_2 \approx 0,94996.$$

Nous obtenons le résultat suivant, dans lequel nous notons $M := \max(a,b)$ et

$$\Lambda := \begin{cases} \varrho_1(1-\varrho_1) & \text{si } \tau \leqslant \tau_0, \\ \varrho_2(1-\varrho_2) & \text{si } \tau > \tau_0. \end{cases}$$

Théorème 1.1. — *Soient $\tau > 0$, a, b deux entiers $\geqslant 2$ multiplicativement indépendants, et $c < c_0(a,b;\tau)$. Lorsque x tend vers l'infini, il existe $\gg x^c$ entiers positifs n n'excédant pas x tels que $s_b(n) \sim \tau s_a(n)$ et, plus précisément, si γ est un exposant d'irrationalité de $\vartheta := (\log a)/\log b$,*

$$s_b(n) = \tau s_a(n)\left\{1 + O\left(\frac{1}{(\log n)^{\sigma/\gamma}}\right)\right\}, \tag{1.4}$$

pour tout $\sigma \in \,]0, \Lambda/(6M^3 \log M)[$.

De plus, pour tout nombre réel $\tau \neq \tau_0(a,b)$, il existe un exposant

$$d_0(\tau) = d_0(\tau; a, b) < 1$$

tel que, lorsque $x \to \infty$, la relation asymptotique (1.2) soit réalisée pour au plus $\ll x^{d_0(\tau)+o(1)}$ entiers positifs n n'excédant pas x.

Nous explicitons au paragraphe 2.2 une valeur admissible de $d_0(\tau; a, b)$ pour chaque $\tau \neq \tau_0$. Ainsi, $d_0(1; 2, 3) \approx 0,993702$. À titre de comparaison, mentionnons qu'une hypothèse d'indépendance statistique des représentations en bases 2 et 3 fournit un cardinal $x^{t+o(1)}$ avec $t \approx 0,981513$.

Nous n'avons pas cherché à optimiser la valeur de σ dans l'énoncé du Théorème 1.1.

Il est par ailleurs à noter que, dans le cas $\tau = 1$, le problème de l'existence d'une suite infinie satisfaisant (1.2) est trivial lorsque $\log a$ et $\log b$ sont linéairement dépendants, disons $a^r = b^s$ avec r et s entiers positifs. En effet, il suffit alors de considérer les entiers n dont le développement dans la base a^r ne comporte que des chiffres 0 ou 1, pour lesquels nous avons $s_a(n) = s_b(n)$. Nous pouvons donc finalement énoncer que l'équivalence asymptotique $s_a(n) \sim s_b(n)$ a lieu pour tous a, $b \geqslant 2$ pour une suite de fonction de comptage $\gg x^c$ où $c = c(a,b) > 0$.

Terminons cette introduction par une remarque méthodologique relative aux liens de ce problème avec la théorie des suites automatiques. Pour toute base a, les ensembles de niveau $E_a(k) := \{n \geqslant 1 : s_a(n) = k\}$ sont en effet a-automatiques [1], ou encore a-reconnaissables, au sens où l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, a-1\}$ représentant les éléments de $E_a(k)$ est, pour chaque k, une partie reconnaissable par automate du monoïde libre $\{0,1,\dots,a-1\}^*$.

Or, le théorème de Cobham [5] fournit un critère pour qu'un ensemble d'entiers E soit simultanément reconnaissable en bases a et b lorsque a et b sont multiplicativement indépendants : il en est ainsi, si, et seulement si, E est représentable comme l'union d'un ensemble fini et d'un nombre fini de progressions arithmétiques. Ainsi, sous l'hypothèse indiquée, $E_a(k)$ n'est pas b-reconnaissable. Il s'ensuit que les résultats de répartition connus pour les suites automatiques (e.g., relatifs à la densité logarithmique, cf. [6] etc.) ne sont pas exploitables dans l'étude statistique de la relation (1.2).

2. Démonstration

2.1. Minoration

Soit k un entier assez grand. Posons $N_k := b^k - 1$ et désignons par $\mathcal{M}_k$ l'ensemble des entiers m n'excédant pas N_k et dont le développement en base b ne contient que les chiffres 0 et $b-1$. Étant donné un paramètre $\varrho \in]0,1[$, nous définissons une loi de probabilité sur $\mathcal{M}_k$ par la formule

$$\mathbb{P}(m) = r_k(m) := \varrho^{s_b(m)/(b-1)}(1-\varrho)^{k-s_b(m)/(b-1)},$$

de sorte que

$$\mathbb{P}\big(s_b = j(b-1)\big) = \binom{k}{j}\varrho^j(1-\varrho)^{k-j},$$
$$\sum_{m\in\mathcal{M}_k}\mathbb{P}(m) = \sum_{0\leqslant j\leqslant k}\binom{k}{j}\varrho^j(1-\varrho)^{k-j} = 1,$$
$$\mathbb{E}(s_b) = \varrho(b-1)k.$$

Par un résultat classique relatif à la loi binomiale, nous avons

$$\mathbb{V}(s_b) = \sum_{m\in\mathcal{M}_k} r_k(m)\big\{s_b(m) - \varrho(b-1)k\big\}^2 = \varrho(1-\varrho)k(b-1)^2,$$

de sorte que, en vertu de l'inégalité de Bienaymé–Tchébychev,

$$\mathbb{P}\Big(|s_b - \varrho(b-1)k| > T\sqrt{k}\Big) \leqslant \frac{\varrho(1-\varrho)(b-1)^2}{T^2} \qquad (T\geqslant 1). \tag{2.1}$$

Nous allons montrer que le développement a-adique des éléments de $\mathcal{M}_k$ est simplement normal(1) sauf peut-être pour ceux d'un sous-ensemble $\mathcal{E}_k$

(1) Autrement dit, chaque chiffre y apparaît avec fréquence asymptotique $1/a$.

de probabilité tendant vers 0 lorsque $k \to \infty$. Cela impliquera

$$s_a(m) \sim \frac{a-1}{2\log a}\log N_k \qquad (m \in \mathcal{M}_k \smallsetminus \mathcal{E}_k,\ k \to \infty).$$

Lorsque $0 < \tau < 2\tau_0$, nous choisirons $\varrho = \varrho_1$ et déduirons donc de (2.1) la relation cherchée

$$\mathbb{P}(s_b \sim \tau s_a) = 1 + o(1) \qquad (k \to \infty). \tag{2.2}$$

Lorsque $\tau > \frac{1}{2}\tau_0$, le résultat annoncé sera obtenu en intervertissant les rôles de a et b.

Notons traditionnellement $\mathrm{e}(u) := \mathrm{e}^{2\pi i u}$ $(u \in \mathbb{R})$. Pour étudier le développement a-adique des entiers de $\mathcal{M}_k$, nous introduisons les sommes de Weyl

$$\sigma_h(m,n) := \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant \nu\leqslant n} \mathrm{e}\Big(\frac{hm}{a^\nu}\Big) \qquad (m \in \mathcal{M}_k,\ n \geqslant 1,\ h \in \mathbb{Z})$$

et la quantité

$$\Delta_n(m) := \frac{1}{H+1} + \sum_{1\leqslant h\leqslant H}\frac{|\sigma_h(m,n)|}{h} \quad (H \in \mathbb{Z}^+). \tag{2.3}$$

Notant $\langle x\rangle$ la partie fractionnaire d'un nombre réel x, il résulte alors d'une forme actuelle de la majoration classique d'Erdős–Turán pour la discrépance modulo 1 d'une suite réelle (cf., par exemple, [9, Thm. I.6.15]) que, pour tout intervalle $I \subset [0,1]$, nous avons

$$\Bigg|\frac{1}{n}\sum_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant n\\ \langle m/a^\nu\rangle\in I}} 1 - |I|\Bigg| \leqslant \Delta_n(m) \qquad (m \in \mathcal{M}_k,\ n \geqslant 1).$$

Notons $m = \sum_{r\geqslant 0} e_r(m)a^r$ le développement a-adique d'un entier m. Ainsi, pour $m \geqslant 1$, $0 \leqslant j \leqslant a-1$,

$$\langle m/a^\nu\rangle \in [j/a,(j+1)/a[\quad \Leftrightarrow \ e_{\nu-1}(m) = j.$$

Pour le choix $n := \lfloor(\log N_k)/\log a\rfloor$, nous avons donc

$$s_a(m) = \tfrac{1}{2}(a-1)n + O\big(n\Delta_n(m)\big) = \frac{(a-1)}{2\log a}\log N_k + O\big(n\Delta_n(m)\big). \tag{2.4}$$

Pour compléter la démonstration, il reste donc à montrer que $\Delta_n(m)$ tend vers 0 lorsque $k \to \infty$ pour presque tous les éléments m de $\mathcal{M}_k$. À cette fin, nous considérons l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(|\sigma_h(\,\cdot\,,n)|^2\big) &= \sum_{m\in\mathcal{M}_k} r_k(m)|\sigma_h(m,n)|^2\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant\mu,\nu\leqslant n}\sum_{m\in\mathcal{M}_k} r_k(m)\,\mathrm{e}\left(hm\left(\frac{1}{a^\nu}-\frac{1}{a^\mu}\right)\right).\end{aligned}$$

La somme intérieure vaut

$$V_h(\mu,\nu) := \prod_{0\leqslant j<k}\left\{1-\varrho+\varrho\,\mathrm{e}\left(h(b-1)b^j\left(\frac{1}{a^\nu}-\frac{1}{a^\mu}\right)\right)\right\}.$$

La minoration $|\sin\pi u|\geqslant 2\|u\|$ $(u\in\mathbb{R})$ fournit alors

$$\begin{aligned}|V_h(\mu,\nu)| &= \prod_{0\leqslant j<k}\left\{1-4\varrho(1-\varrho)\sin^2\left(\pi h(b-1)b^j\left(\frac{1}{a^\nu}-\frac{1}{a^\mu}\right)\right)\right\}^{1/2}\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-8\varrho(1-\varrho)S_h(\mu,\nu)},\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$S_h(\mu,\nu) := \sum_{0\leqslant j<k}\left\|h(b-1)b^j\left(\frac{1}{a^\nu}-\frac{1}{a^\mu}\right)\right\|^2.$$

Il résulte de (2.3) que, pour tout entier $H\geqslant 1$,

$$\mathbb{E}(\Delta_n)\leqslant\frac{1}{H+1}+\sum_{1\leqslant h\leqslant H}\frac{1}{h}\mathbb{E}\big(|\sigma_h(\cdot,n)|\big)\leqslant\frac{1}{H}+\sum_{1\leqslant h\leqslant H}\frac{1}{h}M_h(n),\tag{2.5}$$

où $M_h(n)\geqslant 0$ est défini par

$$M_h(n)^2=\frac{1}{n^2}\sum_{\mu,\nu\leqslant n}\mathrm{e}^{-8\varrho(1-\varrho)S_h(\mu,\nu)}.\tag{2.6}$$

Désignons par $M_h^*(n)$ la sous-somme de (2.6) correspondant à la condition supplémentaire $\nu<\min(n-\sqrt{n},\mu)$. Nous avons clairement

$$M_h(n)^2=2M_h^*(n)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posant

$$\vartheta := \frac{\log a}{\log b},\quad \varphi := \frac{1}{\log b},\quad J_\nu=J=\lfloor\nu\vartheta\rfloor,\quad L=\lfloor\varphi\log h\rfloor,\quad \delta=\mu-\nu,$$

et notant que $k-J\geqslant\sqrt{k\vartheta}+O(1)$, nous pouvons donc écrire

$$S_h(\mu,\nu)=\sum_{0\leqslant j<k}\left\|(b-1)b^{j-J+L+\langle\varphi\log h\rangle-\langle\nu\vartheta\rangle}\left(1-\frac{1}{a^{\mu-\nu}}\right)\right\|^2\geqslant S_h^*(\mu,\nu)$$

avec

$$S_h^*(\mu,\nu) := \sum_{L<\ell\leqslant\kappa+L} \left\|b^\ell\alpha\right\|^2,$$

$$\alpha = \alpha(h,\mu,\nu) := (b-1)b^{\langle\varphi\log h\rangle-\langle\nu\vartheta\rangle}\left(1-1/a^\delta\right),$$

où $\kappa\in\mathbb{Z}$ est un paramètre à notre disposition sous la contrainte $\kappa\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{k\vartheta}$.

Dans un premier temps, supposons $b\geqslant 3$. Considérons alors le développement b-adique de α, soit

$$\alpha = \sum_{m\geqslant -1}\varepsilon_m(\alpha)/b^m \qquad \Big(\{\varepsilon_m(\alpha)\}_{m\in\mathbb{Z}}\in\{0,1,\ldots,b-1\}^{\mathbb{Z}}\Big).$$

Notons $\sigma_{L,\kappa}(\alpha)$ le nombre des indices ℓ de $[L+1,\kappa+L]$ tels que $\varepsilon_\ell(\alpha)=1$. Si ℓ est compté dans $\sigma_{L,\kappa}(\alpha)$, nous avons

$$\frac{1}{b}\leqslant\langle b^{\ell-1}\alpha\rangle = \frac{1}{b}+\sum_{m\geqslant\ell+1}\frac{\varepsilon_m(\alpha)}{b^{m-\ell+1}}\leqslant\frac{1}{b}+\sum_{m\geqslant\ell+1}\frac{b-1}{b^{m-\ell+1}}=\frac{2}{b},$$

et donc $\left\|b^{\ell-1}\alpha\right\|\geqslant 1/b$ dès que $b\geqslant 3$. Il s'ensuit que $S_h^*(\mu,\nu)\geqslant\sigma_{L,\kappa}(\alpha)/b^2$.

Soit $s\in[0,\kappa]$. L'ensemble $\mathcal{B}$ des nombres réels β de $[0,(b-1)b]$ tels que $\sigma_{L,\kappa}(\beta)\leqslant s$ est une réunion d'au plus $b^{L+2}\sum_{0\leqslant j\leqslant s}\binom{\kappa}{j}(b-1)^{\kappa-j}$ intervalles de longueurs $\leqslant b^{-\kappa-L}$. Pour tout $v\in\,]0,1]$, nous avons

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant s}\binom{\kappa}{j}(b-1)^{\kappa-j}\leqslant\sum_{0\leqslant j\leqslant\kappa}\binom{\kappa}{j}(b-1)^{\kappa-j}v^{j-s}=(b-1+v)^\kappa v^{-s}.$$

Pour le choix $s=\kappa/2b$, $v=(b-1)/(2b-1)$, la majoration précédente n'excède pas $b^\kappa\,\mathrm{e}^{-\kappa/7b}$. Comme $b^L\leqslant h$, il s'ensuit que $\mathcal{B}$ est la réunion d'au plus $O(hb^\kappa\,\mathrm{e}^{-\kappa/7b})$ intervalles.

Ainsi, nous avons

$$S_h^*(\mu,\nu)\geqslant\frac{\kappa}{2b^3}$$

sauf peut-être lorsque $b^{-\langle\nu\vartheta\rangle}$ appartient à un sous-ensemble de $[0,1]$ de mesure $\ll\mathrm{e}^{-\kappa/7b}$ et constitué d'une réunion d'au plus $\ll hb^\kappa\,\mathrm{e}^{-\kappa/7b}$ intervalles. Comme $b^{-\langle\nu\vartheta\rangle}\geqslant 1/b$, l'ensemble exceptionnel peut-être également caractérisé par une condition du type $\langle\nu\vartheta\rangle\in E$ où E est un sous-ensemble de $]0,1]$ de mesure

$$|E|\ll\mathrm{e}^{-\kappa/7b}$$

et est constitué d'une réunion d'au plus $O(hb^\kappa\,\mathrm{e}^{-\kappa/7b})$ intervalles. Le nombre des indices ν exceptionnels n'excédant pas n est donc

$$\ll\mathrm{e}^{-\kappa/7b}\,n+hb^\kappa\,\mathrm{e}^{-\kappa/7b}\,nD_n,$$

où D_n désigne la discrépance de la suite $\{\langle\nu\vartheta\rangle\}_{\nu=1}^n$. En sommant sur μ et ν, il suit

$$M_h(n)^2 \ll \mathrm{e}^{-4\varrho(1-\varrho)\kappa/b^3} + \frac{1}{n} + \mathrm{e}^{-\kappa/7b} + hb^\kappa\,\mathrm{e}^{-\kappa/7b}\,D_n. \tag{2.7}$$

Pour traiter le cas $b=2$, nous supposons κ pair et remplaçons $\sigma_{L,\kappa}(\alpha)$ par le nombre $\sigma^*_{L,\kappa}(\alpha)$ des indices j de l'intervalle $[\frac12(L+1),\frac12(L+\kappa-1)]$ tels que $\varepsilon_{2j}(\alpha)+\varepsilon_{2j+1}(\alpha)=1$. Pour de tels j, nous avons

$$\langle 2^{2j-1}\alpha\rangle \in \big[\tfrac14,\tfrac34\big],$$

de sorte que $\|2^{2j-1}\alpha\| \geqslant 1/4$ et donc $S^*_h(\mu,\nu)\geqslant \sigma^*_{L,\kappa}(\alpha)/16$. L'ensemble $\mathcal{B}^*$ des nombres réels β de $[0,2]$ tels que $\sigma^*_{L,\kappa}(\alpha)\leqslant s:=\kappa/8$ est une réunion d'au plus $O(hZ)$ intervalles de longueurs $\ll 1/(h2^\kappa)$ avec

$$\begin{aligned} Z &:= 2^{\kappa/2}\sum_{j\leqslant s}\binom{\kappa/2}{j} \\ &\leqslant 2^{\kappa/2}\sum_{0\leqslant j\leqslant \kappa/2}\binom{\kappa/2}{j}\big(\tfrac13\big)^{j-\kappa/8} = 8^{\kappa/2}3^{-3\kappa/8}\leqslant 2^{11\kappa/12}. \end{aligned}$$

En raisonnant comme précédemment, nous obtenons donc, pour $b=2$,

$$M_h(n)^2 \ll \mathrm{e}^{-\varrho(1-\varrho)\kappa/16} + \frac{1}{n} + 2^{-\kappa/12} + h2^{11\kappa/12}D_n. \tag{2.8}$$

Considérons la minoration (1.1). D'après la formule (8) de [3], nous avons

$$D_n \ll \frac{1}{q}+\frac{q}{n} \qquad \big(n\geqslant 1,\ |\vartheta-r/q|\leqslant 2/q^2\big).$$

Or, d'après le théorème de Dirichlet, il existe, pour tout $R\in[1,n]$, des entiers premiers entre eux r et q tels que $1\leqslant q\leqslant n/R$ et

$$\Big|\vartheta-\frac{r}{q}\Big| \leqslant \frac{R}{qn}\cdot$$

En choisissant $R=n^{1/\gamma}$ et n suffisamment grand, nous obtenons

$$q \gg (n/R)^{1/(\gamma-1)} \geqslant n^{1/\gamma}$$

et donc $D_n \ll n^{-1/\gamma}$.

Reportons dans (2.7) et (2.8) en choisissant $\kappa := 2\lfloor(\log n)/(2\gamma\log b)\rfloor$. Il vient finalement, dans tous les cas,

$$M_h(n) \ll \sqrt{h}n^{-3\sigma_1/2\gamma} \ll \sqrt{h}k^{-3\sigma_1/2\gamma},$$

où

$$\sigma_1 = \sigma_1(a,b;\varrho) := \frac{\varrho(1-\varrho)}{6b^3\log b} > 0.$$

Lorsque $\tau < 2\tau_0$, choisissons $\varrho = \varrho_1 = \tau/(2\tau_0) \in \,]0,1[$ et $H := \lfloor k^{\sigma_1/\gamma} \rfloor$. En insérant les évaluations précédentes dans (2.5), il vient $\mathbb{E}(\Delta_n) \ll k^{-\sigma_1/\gamma}$, et donc, par (2.4),

$$\mathbb{P}\Big(|s_a - (b-1)k/2\tau_0| > k^{1-\sigma/\gamma}\Big) \ll k^{-(\sigma_1-\sigma)/\gamma},$$

pour tout $0 < \sigma < \sigma_1(a,b)$. Compte tenu de (2.1), il s'ensuit que la formule asymptotique (2.2) a bien lieu avec un terme d'erreur $\ll k^{-(\sigma_1-\sigma)/\gamma}$.

En intervertissant les rôles de a et b, et en choisissant à présent $\varrho = \varrho_2 = \tau_0/(2\tau)$, nous obtenons le même résultat lorsque $\tau > \frac{1}{2}\tau_0$, quitte à changer b en a dans la définition de σ_1. La loi de probabilité $\mathbb{P}$ étant concentrée sur les entiers de $\mathcal{M}_k$ ayant $k\varrho$ chiffres $b-1$ dans le développement en base b, nous obtenons la valeur de $c_0(a,b;\tau)$ indiquée dans l'énoncé via une évaluation standard du coefficient binomial $\binom{k}{k\varrho}$. Pour les entiers de $\mathcal{M}_k$ considérés, nous avons en fait

$$\min\{s_a(m), s_b(m)\} \gg k, \quad |s_a(m) - \tau s_b(m)| \ll k^{1-\sigma/\gamma},$$

d'où (1.4).

2.2. Majoration

Posons $\tau_a := \frac{1}{2}(a-1)/\log a$, de sorte que $\tau_0 := \tau_b/\tau_a$. Nous cherchons donc à majorer, lorsque $x \to \infty$, la taille $M(x)$ de l'ensemble

$$\mathcal{M} := \{n \leqslant x : s_b(n) \sim \tau s_a(n)\}.$$

Supposons par exemple $\tau < \tau_0$ et introduisons un paramètre $\lambda \in \,]1,2[$.

Soit $M^+(x) := |\{n \in \mathcal{M} : s_a(n) > \lambda\tau_a \log x\}|$, et $M^-(x)$ le cardinal complémentaire. Nous avons, pour tout $v > 0$,

$$M^+(x) \leqslant \sum_{n \leqslant x} \mathrm{e}^{v(s_a(n) - \lambda\tau_a \log x)} \ll x^{-v\lambda\tau_a} \Big(\frac{\mathrm{e}^{av} - 1}{\mathrm{e}^{v} - 1}\Big)^k \ll \mathrm{e}^{kg(v)}$$

avec $k = (\log x)/\log a$, $g(v) := -\frac{1}{2}\lambda(a-1)v + \log(\mathrm{e}^{av} - 1) - \log(\mathrm{e}^{v} - 1)$. L'optimum est atteint pour

$$\tag{2.9} \tfrac{1}{2}\lambda(a-1) = \frac{a\,\mathrm{e}^{av}}{\mathrm{e}^{av} - 1} - \frac{\mathrm{e}^{v}}{\mathrm{e}^{v} - 1}.$$

Le membre de droite est une fonction croissante de v, qui vaut $\frac{1}{2}(a-1)$ en $v = 0$ et $a-1$ à l'infini. Puisque $1 < \lambda < 2$, l'équation (2.9) possède donc une solution $v = v_\lambda$. Il suit

$$M^+(x) \ll x^{g(v_\lambda)/\log a}.$$

Si n est compté dans $M^-(x)$, nous avons $s_b(n) \leqslant \{\lambda\tau\tau_a + o(1)\}\log x$. Posant $\mu := \lambda\tau/\tau_0$ et supposant $\mu < 1$, nous avons alors, pour tout $w > 0$,

$$M^-(x) \leqslant x^{o(1)} \sum_{n\leqslant x} \mathrm{e}^{-w(s_b(n)-\mu\tau_b\log x)}$$

$$\ll x^{w\mu\tau_b+o(1)}\Big(\frac{1-\mathrm{e}^{-wb}}{1-\mathrm{e}^{-w}}\Big)^j \ll x^{o(1)}\,\mathrm{e}^{jh(w)}$$

avec $j = (\log x)/\log b$, $h(w) := \frac{1}{2}w\mu(b-1) + \log(1-\mathrm{e}^{-wb}) - \log(1-\mathrm{e}^{-w})$. L'optimum est atteint pour

$$\tag{2.10} \tfrac{1}{2}\mu(b-1) = \frac{1}{\mathrm{e}^w - 1} - \frac{b}{\mathrm{e}^{wb} - 1}.$$

Le membre de droite est une fonction décroissante de $w > 0$ dont l'image est $\big]0, \frac{1}{2}(b-1)\big[$. Il existe donc toujours une solution $w = w_\lambda$, d'où

$$M^-(x) \ll x^{h(w_\lambda)/\log b + o(1)}.$$

Finalement, nous avons obtenu

$$M(x) \ll x^{d_0(\tau)+o(1)}$$

avec

$$d_0(\tau) := \inf_{1<\lambda<\min(\tau_0/\tau,2)} \max\Big\{g(v_\lambda)/\log a, h(w_\lambda)/\log b\Big\}.$$

Comme $\mathrm{d}g(v_\lambda)/\mathrm{d}\lambda = -\frac{1}{2}(a-1)v_\lambda < 0$ et $\mathrm{d}h(w_\lambda)/\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}\tau(b-1)w_\lambda/\tau_0 > 0$, la valeur $d_0(\tau)$ est atteinte lorsque $g(v_\lambda)/\log a = h(w_\lambda)/\log b$ sous réserve que cette équation possède une solution. Or, c'est toujours le cas puisque $v_{1+} = 0$, $g(0)/\log a = 1$ et $h(w_{1+})/\log b < 1$. Nous avons donc bien $d_0(\tau) < 1$.

Considérons le cas $a = 2$, $b = 3$, $\tau = 1$. Nous avons alors $\tau_2 = 1/\log 4$, $\tau_3 = 1/\log 3$, $\tau_0 = (\log 4)/\log 3 \approx 1,26186$. La solution de (2.9) est

$$v_\lambda = \log\left(\frac{1}{2/\lambda - 1}\right),$$

et, notant $\Delta := 1 + 6\mu - 3\mu^2$, la solution de (2.10) est

$$w_\lambda = \log\left(\frac{\sqrt{\Delta} + \mu - 1}{6}\right),$$

avec à présent $\mu = \lambda/\tau_0 = \lambda(\log 3)/\log 4$.

Nous avons donc

$$d_1(\lambda) := \frac{g(v_\lambda)}{\log 2} = -\frac{\lambda}{\log 4}\log\left(\frac{1}{2/\lambda - 1}\right) + \frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{2}{2-\lambda}\right),$$

$$d_2(\lambda) := \frac{h(w_\lambda)}{\log 3} = \frac{\lambda w_\lambda}{\log 4} + \frac{1}{\log 3}\log\big(1 - \mathrm{e}^{-w_\lambda} + \mathrm{e}^{-2w_\lambda}\big).$$

Le calcul numérique montre que $d_1(\lambda) = d_2(\lambda)$ pour le choix

$$\lambda = \lambda_0 \approx 1,0933694.$$

Nous avons alors $d_0(1;2,3) = d_1(\lambda_0) = d_2(\lambda_0) \approx 0,993702$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. Allouche & J. Shallit, *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations*, Cambridge University Press, 2003, xvi+571 pages.

[2] A. Baker, « A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms », *Acta Arith.* **21** (1972), p. 117-129.

[3] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, « Dérivabilité ponctuelle d'une intégrale liée aux fonctions de Bernoulli », *Proc. Am. Math. Soc.* **143** (2015), n° 11, p. 4791-4796.

[4] J. W. S. Cassels, « On a problem of Steinhaus about normal numbers », *Colloq. Math.* **7** (1959), p. 95-101.

[5] A. Cobham, « On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata », *Math. Syst. Theory* **3** (1969), p. 186-192.

[6] ———, « Uniform tag sequences », *Math. Syst. Theory* **6** (1972), p. 164-192.

[7] J.-M. Deshouillers, L. Habsieger, S. Laishram & B. Landreau, « Sums of the digits in bases 2 and 3 », in *Number theory—Diophantine problems, uniform distribution and applications*, Springer, 2017, p. 211-217.

[8] V. K. Salikhov, « On the irrationality measure of $\ln 3$ », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **417** (2007), n° 6, p. 753-755, English tranlsation in *Dokl. Math.* **76** (2007), no. 3, p. 955-957.

[9] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, quatrième éd., Belin, 2015.

[10] Q. Wu & L. Wang, « On the irrationality measure of $\log 3$ », *J. Number Theory* **142** (2014), p. 264-273.

Manuscrit reçu le 20 juin 2018,
révisé le 16 octobre 2018,
accepté le 17 janvier 2019.

Régis DE LA BRETÈCHE
Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG
UMR 7586
Université Paris Diderot-Paris 7
Sorbonne Paris Cité
Case 7012, F-75013 Paris (France)
regis.de-la-breteche@imj-prg.fr

Thomas STOLL
Institut Élie Cartan
Université de Lorraine
BP 70239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex (France)
thomas.stoll@univ-lorraine.fr

Gérald TENENBAUM
Institut Élie Cartan
Université de Lorraine
BP 70239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex (France)
gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr