Annales de l'institut Fourier

Arnaud De La Pradelle

Remarque sur la valeur d'un potentiel à support ponctuel polaire en son pôle en théorie axiomatique

Annales de l'institut Fourier, tome 19, nº 1 (1969), p. 275-276
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_275_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
19,1 (1969), 275 - 276

REMARQUE SUR LA VALEUR D'UN POTENTIEL A SUPPORT PONCTUEL POLAIRE EN SON PÔLE EN THÉORIE AXIOMATIQUE

par Arnaud de la PRADELLE

Dans notre mémoire ([2]) sur la quasi-analyticité paru dans ces Annales (1967 t. 17 p. 383), nous utilisons en axiomatique Brelot complétée par la théorie des fonctions adjointes, dans le lemme 4, la propriété qu'un potentiel à support ponctuel, noté p_{x_0} [1], prend la valeur $+\infty$ en x_0 quand $\{x_0\}$ est polaire ; nous avons omis d'indiquer que l'on supposait l'identité de l'effilement et de l'effilement adjoint, ce qui se trouvait vérifié dans les applications en vue. Nous montrons ici que $p_{x_0}(x_0)$ est égal à $+\infty$ s'il y a identité des deux effilements seulement pour une classe particulière d'ensembles.

On a plus précisément un équivalent. Notons par Ω l'espace de base muni d'une base dénombrable d'ouverts.

PROPOSITION. – *Supposons les axiomes* 1, 2, 3, *l'existence d'un potentiel* > 0 *dans* Ω, *l'existence d'une base de domaines complètement déterminants*[2] *la proportionnalité des potentiels et des potentiels adjoints à support ponctuel. Alors pour un point polaire* x_0, *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

1) $p_{x_0}(x_0) = +\infty$

2) *Pour toute fonction* φ *finie continue dans* Ω, *l'effilement en* x_0 *(s'il a lieu) de l'ensemble* $\{p_{x_0} > \varphi\}$ *entraîne l'effilement adjoint en* x_0 *de cet ensemble.*

3) *Même énoncé avec l'ineffilement.*

(1) p_y désigne toujours un potentiel à support ponctuel situé dans une base fixée du cône S^+ des fonctions surharmoniques positives.

(2) Un ouvert δ est complètement déterminant (*c.d.*) si pour tout potentiel $P > 0$ dans Ω, harmonique dans δ on a $R_P^{\delta} = P$. Les ouverts *c.d.* sont les ouverts réguliers de la théorie adjointe.

Démonstration.

1) entraîne 2) et 3). En effet x_0 est alors intérieur à $p_{x_0} > \varphi$ et il y a ineffilement et ineffilement adjoint.

2) ou 3) entraînent 1). Supposons que $p_{x_0}(x_0)$ soit fini et soit h une fonction positive, harmonique dans Ω et vérifiant :

$$h(x_0) > p_{x_0}(x_0).$$

L'ouvert $\omega = \{p_{x_0} > h\}$ est non vide et effilé en x_0 (p_{x_0} est non borné supérieurement au voisinage de x_0, sinon il serait harmonique, d'après [1], p. 20, propriété 5c).

Par suite, d'après 2), ω est effilé adjoint en x_0 et $\complement\omega$ est non effilé adjoint en x_0.

De même d'après 3) $\complement\omega$ est non effilé en x_0 et donc encore $\complement\omega$ est non effilé adjoint en x_0.

Comme l'ineffilement adjoint de $\complement\omega$ en x_0 est caractérisé par

$$\hat{\mathrm{R}}_{p_{x_0}}^{\complement\omega} \equiv p_{x_0} \quad ([1], \text{ th. } 32{,}5)$$

on a
$$h \geqslant \mathrm{R}_{p_{x_0}}^{\complement\omega} \geqslant \hat{\mathrm{R}}_{p_{x_0}}^{\complement\omega} \equiv p_{x_0} \quad \text{dans } \Omega$$

ce qui est contradictoire. On conclut que $p_{x_0}(x_0) = +\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.M. HERVE, *Thèse, Ann. Institut Fourier* t. 12 (1962) 514-571.

[2] A. de LA PRADELLE, Approximation et caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques. *Ann. Institut Fourier* t. 17 (1967) 383-399.

Manuscrit reçu le 10 janvier 1969

Arnaud de LA PRADELLE
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre Curie
Paris 5e