ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL SIBONY

Théorème de limites fines et problème de Dirichlet

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 2 (1968), p. 121-134
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_2_121_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 2 (1968), 121-134.

THÉORÈME DE LIMITES FINES ET PROBLÈME DE DIRICHLET

par Daniel SIBONY

Introduction.

On connaît le théorème de Fatou-Naïm-Doob affirmant que sur un espace de Green toute fonction surharmonique positive possède une limite fine presque partout à la frontière de Martin; (cf. [4], [7]). Ce théorème a été étendu par K. Gowrisankaran (cf. [5]), au cadre de la théorie axiomatique de M. Brelot ([2]), grâce à la représentation intégrale et à l'introduction de filtres fins $\mathcal{F}_h$ associés aux fonctions harmoniques minimales sous la forme suivante : pour toute fonction surharmonique $\varphi \geqslant 0$ et toute fonction harmonique $u > 0$, $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} \dfrac{\varphi}{u}$ existe et est finie μ_u-presque partout où μ_u est la mesure qui assure la représentation intégrale de u dans une base fixée du cône des surharmoniques $\geqslant 0$, μ_u étant portée par l'ensemble des fonctions harmoniques minimales h de cette base.

Nous donnerons ici une extension de ce résultat avec un énoncé analogue dans un cadre assez général pouvant s'appliquer aux théories locales des fonctions surharmoniques telles que celle de M. Bauer [1], mais aussi aux théories des fonctions excessives où l'on sait faire la représentation intégrale (cf. les travaux de Kunita-Watanabe [6]). Notre théorème exclut donc toute considération de caractère local, et l'existence d'une limite fine de $\dfrac{\varphi}{u}$ pour u harmonique qu'il fournit en particulier, supposera dans les applications que l'on sache faire la représentation intégrale des fonctions harmoniques seulement, ce qui est possible de manière assez rapide par le théorème de Choquet.

Énoncé du résultat.

Sur un ensemble abstrait Ω on se donne un cône convexe S de fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$ et stable par enveloppe inférieure finie. On suppose que S est somme de deux cônes convexes S_1 et S_2 vérifiant les propriétés suivantes :

F 1. *Le cône* S_1 *est complètement réticulé, réticulé pour son ordre propre, et archimédien pour l'ordre naturel.*

F 2. *Le cône* S_1 *est affinement isomorphe à un cône faiblement complet, bien coiffé* (1) *d'un espace localement convexe.*

Cette condition est pour assurer que tout élément $u \in S_1$ s'écrit comme résultante d'une *mesure conique* maximale — unique d'après F 1 — soit μ_u, portée par les génératrices extrémales de S_1 (cf. [3]),

$$u = \int h \, d\mu_u(h).$$

La mesure μ_u est localisable sur des compacts de S_1, ce cône étant bien coiffé ([3]).

F 3. « *Commutation* » *de la réduite avec la représentation intégrale.*

Rappelons que la réduite de $u \in S_1$ sur $e \in \Omega$ relativement à S est la fonction $R_u^e = \inf\{v \in S;\, v \geqslant u \text{ sur } e\}$. La condition F 3 peut s'exprimer ainsi :

si $u = \int h \, d\mu_u(h)$ $(u \in S_1)$, et $v \in S$, a réel > 0, ou $a \in S_1$ on a en posant $e = \{v \leqslant a\}$ ou $\{v > a\}$,

a) $(R_u^e = u) \Longleftrightarrow (R_h^e = h,$ μ_u-presque partout), et

b) l'ensemble des $h \in S_1$ extrémales telles que $R_h^e \neq h$ est μ_u-mesurable $\forall u \in S_1$.

F 4. *Propriété de domination* (cf. [5]).

Si $u_1, u_2 \in S_1$ et $v_1, v_2 \in S_2$, alors la condition $u_1 + v_1 \leqslant u_2 + v_2$

(1) Rappelons qu'un cône convexe C dans un e.l.c. est dit bien coiffé s'il est réunion de ses chapeaux, un chapeau étant un convexe compact de C, dont le complémentaire est convexe.

implique $u_1 \leqslant u_2$. En particulier cela entraîne que S est somme directe de S_1 et de S_2.

Rappelons (cf. [5]) que si $u \in S_1$ appartient à une génératrice extrémale du cône S_1, et si $e \subset \Omega$ on dit que e est *effilé* en u si $R_u^e \not\equiv u$ et l'ensemble des complémentaires de parties effilées en u est un filtre [5] qu'on désignera par $\mathcal{F}_u$.

On peut alors énoncer le

Théorème. — *Soit* $S = S_1 + S_2$ *vérifiant les conditions* F 1, ... F 4. *Alors pour tout* $u \in S_1$, $u > 0$ *et tout* $v \in S$, $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} \dfrac{v}{u}$ *existe et est finie presque partout pour la mesure* μ_u *associée à* u, *et pour* h *dans l'ensemble des génératrices extrémales de* S_1.

Démonstration du théorème.

Remarquons qu'il suffit de faire la démonstration du théorème pour $u = 1$, puisque u étant supposé > 0 dans Ω, on peut diviser toutes les fonctions de S par u, le cône ainsi obtenu aura les mêmes propriétés que le premier. On supposera donc $u = 1$ et pour établir l'existence de $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} v$ $\mu_1 - pp$ (μ_1 : mesure conique représentant la fonction 1) pour $v \in S$, on l'établira d'abord pour $v \in S_2$, puis pour les éléments bornés de S_1, puis pour ceux qui sont dans la bande engendrée par 1 dans S_1.

On désignera par M l'ensemble des fonctions de S_1 qui sont dans des génératrices extrémales, et on identifiera deux fonctions de la même génératrice.

a) On démontre d'abord l'existence d'une limite nulle $\mu_1 - pp$ pour les éléments de S_2.

Proposition 1. — *Pour tout* $p \in S_2$, $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} p = 0$, $\mu_1 - pp$ *pour* $h \in$ M.

Preuve. — Pour tout a réel > 0, soit M_a l'ensemble des $h \in$ M tels que $(p \leqslant a) \in \mathcal{F}_h$. Du fait que M_a est mesurable pour μ_1 on peut considérer la fonction

$$u = \int_{M \setminus M_a} hd\,\mu_1(h)$$

qui est dans S_1 et bornée par 1. On a $R_u^{(p>a)} = u$, car les h qui interviennent dans l'expression de u ne sont pas dans M_a. Donc

$$u \leqslant R_1^{(p>a)} \leqslant \inf\left(\frac{p}{a}, 1\right).$$

Comme $\inf\left(\frac{p}{a}, 1\right) \in S_2$, on a $u = 0$. Par suite, à un ensemble μ_1-négligeable près, l'ensemble $\bigcap_{a>0} M_a$ est identique à M, d'où le résultat.

b) On établit ensuite l'existence d'une limite fine pour les éléments bornés de S_1.

Soit $S_{1,b}$ le cône des éléments *bornés* de S_1.

Lemme 2. — *Soient* u_1, $u_2 \in S_{1,b}$ *tels que* $1 = u_1 + u_2$, u_1 *et* u_2 *étant des éléments étrangers pour l'ordre de* S_1. *Alors* $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} u_i$ *existe* $\mu_1 - pp$, $(i = 1,2)$.

Preuve. — Soit $q = \inf(u_1, u_2)$ en tout point. La fonction q est dans S_2, donc d'après la proposition 1, $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} q = 0$ $\mu_1 - pp$. Il est clair que si μ_{u_1} et μ_{u_2} sont les mesures coniques représentant u_1 et u_2, elles sont étrangères au sens que pour tout chapeau K de S_1, leurs localisées sur K le sont au sens habituel. Considérons les ensembles

$$e_1 = (u_1 \leqslant u_2), \qquad e_2 = (u_2 < u_1).$$

On a $R_{u_1}^{e_1} \leqslant q$, donc e_1 est effilé $\mu_{u_1} - pp$ aux points $h \in M$. Donc $e_2 = \complement e_1 \in \mathcal{F}_h$ $\mu_{u_1} - pp$ pour $h \in M$. De même

$$e_1 \in \mathcal{F}_h \quad \mu_{u_2} - pp \qquad \text{pour} \qquad h \in M.$$

Par suite, il existe $B \subset M$, négligeable pour μ_1 tel que si $h \in M \setminus B$, e_1 ou e_2 appartient à $\mathcal{F}_h$, c'est-à-dire : $\sup(u_1, u_2)$, qui possède une limite fine $\mu_1 - pp$, vaut u_1 ou u_2 sur un élément du filtre $\mathcal{F}_h$. Par suite $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} u_i$ existe $\mu_1 - pp$ pour $h \in M$.

Proposition 3. — *Pour tout* $u \in S_{1,b}$, $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} u$ *existe* $\mu_1 - pp$ *pour* $h \in M$.

Preuve. — Soit $E = S_{1,b} - S_{1,b}$. Cet espace vectoriel étant complètement réticulé, il est bien connu qu'on peut l'identifier à l'espace $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues sur un espace X compact stonien. Soit $\varepsilon > 0$ et $u \in S_{1,b}$. Il existe $(\omega_i)_{i \leqslant n}$ un recouvrement fini de X tel que l'oscillation de u sur chaque ω_i soit inférieure à ε, les ω_i étant ouverts, fermés et deux à deux disjoints. Posons

$$u_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x \in \omega_i} u(x)\right) . 1_{\omega_i},$$

où 1_{ω_i} est la fonction caractéristique de l'ouvert ω_i, qui est continue dans X, donc s'identifie à un élément $u_i \in S_{1,b}$. Il est clair qu'on a $0 \leqslant u - u_\varepsilon \leqslant \varepsilon . 1$. Par suite toute $u \in S_{1,b}$ est limite uniforme d'une suite $(u_n) \subset S_{1,b}$ telle que chaque u_n s'écrive $u_n = \sum_{i=1} \lambda_i u_n^i$ avec $\sum_{i=1}^{k_n} u_n^i = 1$ pour tout n, u_n^i et u_n^j étant étrangères pour $i \neq j$. D'après le lemme 2, chaque u_n a une limite fine $\mu_1 - pp$, donc aussi u.

c) Existence d'une limite fine pour tout élément de S.

Lemme 4. — *Soit* (r_n) *une suite de nombres réels* > 0, *dense dans* $\mathbf{R}^+$; *soit* (p_n) *la suite de fonctions sur* $\overline{\mathbf{R}}^+$ *définie par* $p_n(t) = \inf(t, r_n)$ *pour tout* n. *La suite* (p_n) *sépare* $\overline{\mathbf{R}}^+$ *et pour tout* $v \in S$, *tout* n *entier*, $\lim_{\mathcal{F}_h} p_n \circ v$ *existe* $\mu_1 - pp$ *pour* $h \in M$.

Preuve. — Pour tout n on a $p_n \circ v = u_n + q_n$ où $u_n \in S_1$ et $q_n \in S_2$, car $p_n \circ v \in S$. Du fait que u_n est borné, $\lim_{\mathcal{F}_h} u_n$ existe $\mu_1 - pp$ d'après la proposition 3 et $\lim_{\mathcal{F}_h} q_n = 0$ $\mu_1 - pp$.

Lemme 5. — *Soit* $v \in S$. *L'ensemble des* $h \in M$ *où*

$$\lim_{\mathcal{F}_h} v = +\infty$$

est un ensemble μ_1-*négligeable.*

Preuve. — Il suffit de supposer $v \in S_1$. Dire que $\lim_{\mathcal{F}_h} v = +\infty$ signifie que pour tout n, l'ensemble $\{v > n\}$ est non effilé en h. Si $e = \left\{h \in M; \lim_{\mathcal{F}_h} v = +\infty\right\}$ et $e_n = \{h \in M;\ (v > n)$

non effilé en $h\}$, (ces ensembles sont mesurables), on a : $e = \bigcap_n e_n$. Posons $u_n = \int_{e_n} h\, d\mu_1(h)$. On a $R_{u_n}^{(\varphi > n)} = u_n$ d'après la condition F 3 a), donc

$$\int_{e_n} h\, d\mu_1(h) \leqslant R_1^{(\varphi > n)} \leqslant \frac{\varphi}{n};$$

par suite, S étant archimédien pour l'ordre naturel, on a

$$\int h\, d\mu_1(h) = 0,$$

c.q.f.d.

Proposition 6. — *Pour tout* $\varphi \in S$, $\lim_{\mathcal{F}_h} \varphi$ *existe et est finie* $\mu_1 - pp$ *pour* $h \in M$.

Preuve. — Pour tout $h \in M$ soit $\mathcal{A}(h)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbf{R}}^+$ de la fonction φ suivant le filtre $\mathcal{F}_h$. Soit, pour tout n, $\psi_n(h) = \lim_{\mathcal{F}_h} p_n \circ \varphi$ qui est définie et finie $\mu_1 - pp$. On montre de manière standard que la fonction ψ_n est mesurable en raison de la condition F 3 b). Soit pour tout n un ensemble $D_n \subset \mathbf{R}^+$ dénombrable et dense tel que pour tout $a \in D_n$, $\mu_1\{h \in M,\ \psi_n(h) = a\} = 0$. Posons $U_{a,n} = \{p_n \circ \varphi > a\}$, et pour toute partie $e \subset \Omega$, $M(e) = \{h \in M;\ e \in \mathcal{F}_h\}$. On a

$$\mu_1 \big\}M \diagdown (M(U_{a,n}) \cup M(\complement U_{a,n}))\big\{ = 0$$

pour tout n et tout $a \in D_n$; car si $h \in M$ est tel que $\lim_{\mathcal{F}_h} p_n \circ \varphi$ existe et si $\psi_n(h) \neq a$, alors on a $U_{a,n} \in \mathcal{F}_h$ ou $\complement U_{a,n} \in \mathcal{F}_h$ selon que $\psi_n(h) > a$ ou $\psi_n(n) < a$.

Soit alors $B = \bigcup_n \bigcup_{a \in D_n} \big\}M \diagdown (M(U_{a,n}) \cup M(\complement U_{a,n}))\big\{$; B est μ_1-négligeable. Soit $h \in M \diagdown B$. Si $\mathcal{A}(h)$ contenait deux points distincts y_1 et y_2, il existerait n tel que $p_n(y_1) \neq p_n(y_2)$, donc $a \in D_n$ tel que $p_n(y_2) < a$ et $p_n(y_1) > a$. Il est clair que ni $U_{a,n}$ ni $\complement U_{a,n}$ n'appartiennent à $\mathcal{F}_h$, donc $h \in B$, ce qui contredit le choix initial de h dans $M \diagdown B$, et achève la démonstration.

Problème de Dirichlet associé aux filtres fins.

Remarquons que tout $u \in S_{1,b}$ peut s'écrire $u = u_1 + u_2$ où u_1 est dans la bande engendrée par 1 et u_2 étrangère à 1. De plus, toute $v \in S_1$ étrangère à 1 est telle que $\lim_{\mathcal{F}_h} v = 0$ $\mu_1 - pp$, car la fonction $\inf(v, \lambda)$ pour tout λ réel > 0 appartient à S_2.

DÉFINITION. — *Une fonction numérique* φ *définie sur une partie* $A \subset S_1$ *est dite conique si elle est constante sur toute intersection de* A *avec une génératrice du cône* S_1.

Pour $A \subset M$ on désignera par 1_A la fonction (conique) qui vaut 1 sur toute génératrice passant par A et O sur toute génératrice disjointe de A.

Si $A \subset M$ est μ_1-mesurable, $1_A . \mu_1$ définit une mesure conique.

PROPOSITION 7. — *Pour toute partie* $A \subset M$ *qui est* μ_1*-mesurable, si on pose*

$$u = \int h . 1_A(h)\, d\mu_1(h),$$

alors $\lim_{\mathcal{F}_h} u = 1_A(h)$, $\mu_1 - pp$.

Preuve. — Soit $A' = M \setminus A$ et $u' = \int h 1_{A'}(h)\, d\mu_1(h)$. On On voit sans peine que u et u' sont étrangères. Donc $\inf(u, u') \in S_2$ et par suite on a $\lim_{\mathcal{F}_h} [\inf(u, u')] = 0$, $\mu_1 - pp$. De plus $\lim_{\mathcal{F}_h} u + \lim_{\mathcal{F}_h} u' = 1$ $\mu_1 - pp$, donc en reprenant l'argument du lemme 2 sur les ensembles $(u < u')$ et $(u' \leqslant u)$ on en tire que $\lim_{\mathcal{F}_h} u = 1_A$, $\mu_1 - pp$.

PROPOSITION 8. — *Pour toute fonction bornée* $u \in S_1$, *si* $\hat{u}(h) = \lim_{\mathcal{F}_h} u$ $\mu_1 - pp$, *on a*

$$u = \int h\hat{u}(h)\, d\mu_1(h). \tag{1}$$

Preuve. — Supposons que $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$ avec $\sum_1^k u_i = 1$ et u_i étrangère à u_j si $i \neq j$. D'après la proposition précédente on a la formule (1). Comme u est limite uniforme d'une suite de fonctions du type précédent, la proposition résulte de l'assertion suivante, qui est immédiate : si $(u_n) \subset S_{1,b}$ converge uniformément dans Ω vers $u \in S_{1,b}$, alors $\hat{u}_n$ converge uniformément sur M vers $\hat{u}$, sauf sur l'ensemble μ_1-négligeable où l'une des fonctions $\hat{u}$, $\hat{u}_n$ n'est pas définie.

PROPOSITION 9. — *Soit* $u \in S_1$ *et* $u_1 \in S_{1,b}$. *Si*

$$\lim_{\mathcal{F}_h} (u - u_1) \geqslant 0 \quad \mu_1 - pp,$$

alors on a $u - u_1 \geqslant 0$.

Preuve. — Soit $v = \inf(u - u_1, 0) = \inf(u, u_1) - u_1$. On a $v = w + p - u_1$ où $w \in S_{1,b}$ et $p \in S_2$, et $\lim_{\mathcal{F}_h} v \geqslant 0$ $\mu_1 - pp$. Donc $\lim_{\mathcal{F}_h} (w - u_1) \geqslant 0$, donc $w \geqslant 0$, et par suite $v = 0$. c.q.f.d.

PROPOSITION 10. — *Soit* $u \in S_1$, u *de base* 1. *Alors si* $\hat{u}(h) = \lim_{\mathcal{F}_h} u$ $\mu_1 - pp$, *on a*

$$u = \int h\hat{u}(h)\, d\mu_1(h).$$

Preuve. — Soit $u_n = \int h \inf(\hat{u}, n)(h)\, d\mu_1(h)$. On a $u_n \in S_{1,b}$ et $\lim_{\mathcal{F}_h} (u - u_n) \geqslant 0$ $\mu_1 - pp$. Donc $u_n \leqslant u$ pour tout n. Donc on peut passer à la limite et écrire

$$u = \int h\hat{u}(h)\, d\mu_1(h).$$

THÉORÈME 11. — *Pour tout* $v \in S$, *si* $\hat{v}(h) = \lim_{\mathcal{F}_h} \frac{v}{u}$ (*où* $u \in S_1, u > 0$), *alors* $\hat{v}$ *est* μ_u-*intégrable et* $\frac{1}{u} \int h\hat{v}(h)\, d\mu_u(h)$ *est le quotient par* u *de la composante de* v *dans la bande engendrée par* u *dans* S_1. *Réciproquement pour toute fonction conique* φ *sur* M *qui est* μ_u-*intégrable, la fonction*

$$\frac{1}{u} \int h\varphi(h)\, d\mu_u(h)$$

— *quotient par* u *d'une fonction de* S_1 — *a pour limite fine* $\mu_u - pp$ *la fonction* φ.

Preuve. — On peut supposer $u = 1$. Pour $v \in S$ on écrit $v = v_1 + v_2$, où $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_2$ et $v_1 = u_1 + u_2$ où u_1 est dans le bande engendrée par 1 et u_2 étrangère à 1. On a $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} u_2 = \lim\limits_{\mathcal{F}_h} v_2 = 0 \;\; \mu_1 - pp$, et la proposition précédente montre que $\hat{v} = \hat{u}_1$ est μ_1-intégrable. Si on considère

$$w = \int h\hat{v}(h)\, d\mu_1(h),$$

w est dans la bande engendrée par 1 dans S_1; si $s \in S_{1,b}$, $s \leqslant v$, on a $\hat{s} \leqslant \hat{v}$, $\mu_1 - pp$, d'où

$$w = \int h\hat{v}(h)\, d\mu_1(h) \geqslant \int h\hat{s}(h)\, d\mu_1(h) = s \quad \text{(Prop. 8)}$$

Donc $w = u_1$.

Réciproque. — Soit $v = \int h\varphi(h)\, d\mu_1(h)$ et montrons que $\hat{v} = \varphi \;\; \mu_1 - pp$. D'après la première partie,

$$\int h\hat{v}(h)\, d\mu_1(h) = \int h\varphi(h)\, d\mu_1(h)$$

car v est de base 1. D'après l'unicité de la représentation intégrale, on a $\hat{v}(h)\, d\mu_1(h) = \varphi(h)\, d\mu_1(h)$, et par suite $\hat{v} = \varphi$ $\mu_1 - pp$. c.q.f.d.

Le théorème précédent complète la proposition 6 et contient notre *théorème d'existence des limites fines*. De plus, il assure la résolution du *problème de Dirichlet*, puisque pour tout $u \in S_1$, $u > 0$ dans Ω, et toute fonction $\varphi \geqslant 0$ sur M, conique et μ_u-sommable, il existe une fonction $v \in S_1$, à savoir $\int h\varphi(h)\, d\mu_u(h)$, dont le quotient par u possède une limite fine $\mu_u - pp$ suivant les filtres fins $\mathcal{F}_h$ qui est égale presque partout à la donnée-frontière φ.

Remarquons que la solution $\dfrac{1}{u}\displaystyle\int h\varphi(h)\, d\mu_u(h)$ est celle que fournirait la méthode de Perron-Wiener-Brelot, c'est-à-dire que c'est l'enveloppe inférieure des fonctions $w = \dfrac{v}{u}$ où $v \in S$, telles que $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} w \geqslant \varphi(h) \;\; \mu_u - pp$.

Remarquons aussi que *l'unicité de la solution* du problème de Dirichlet pour une donnée frontière φ, qui est μ_u-sommable, est assurée car elle l'est pour φ bornée et on passe au cas général au moyen de la proposition 9.

Application.

1) *Allure des fonctions u-surharmoniques à la frontière minimale d'un espace harmonique.*

L'ensemble initial Ω sera ici un espace harmonique de Bauer (cf. [1]) avec l'axiome de convergence de Doob; (on pourrait se placer dans un espace harmonique où pour tout ouvert $U \subset \Omega$ l'espace $\mathcal{H}_U$ des fonctions harmoniques dans U est nucléaire pour la topologie de la convergence compacte, ce qui suffit à assurer la représentation intégrale). On prend $S_1 = H$: cône des fonctions harmoniques $\geqslant 0$ dans Ω et $S_2 = P$, cône des potentiels dans Ω. $S = S_1 + S_2$ sera alors le cône des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω. Il est clair que S est stable par inf, que les propriétés F 1 et F 4 sont vérifiées. La propriété F 2 de représentation intégrale des fonctions harmoniques $\geqslant 0$ est un résultat de G. Mokobodzki (inédit). La propriété F 3 est une conséquence d'un résultat de G. Mokobodzki et D. Sibony [9] sur le caractère borélien de la fonction affine $h \to \hat{R}^e_h(x)$.

On peut énoncer le

Théorème 12. — *Dans un espace harmonique de Bauer, pour toute fonction u harmonique $u > 0$ dans Ω, et toute fonction surharmonique $v \geqslant 0$, $\lim\limits_{\mathcal{F}_h} \frac{v}{u}$ existe et est finie $\mu_u - pp$ pour h harmonique minimale ($\mathcal{F}_h$ étant le filtre fin associé à h). De plus, pour toute fonction conique φ définie sur l'ensemble M des fonctions extrémales de H, et μ_u-intégrable, la fonction $\int h\varphi(h)\, d\mu_u(h) \in H$ et son quotient par u a une limite $\mu_u - pp$ suivant les filtres $\mathcal{F}_h$, égale à φ, $\mu_u - pp$.*

2) *Allure en un point intérieur de certains quotients $\frac{v}{u}$.*

L'espace Ω étant toujours un espace harmonique, soit $x \in \Omega$ un point polaire et prenons maintenant $S_1 =$ cône des potentiels à support $\{x\}$ et $S_2 =$ cône des surharmoniques $\geqslant 0$ qui s'écrivent Σv_n où v_n est à support compact disjoint de $\{x\}$ pour tout n. On a toujours $S_1 + S_2 = S$, cône des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω.

PROPOSITION 13. — *Soient* $u, v, w \in S$ *avec* $u \leqslant v + w$. *Alors il existe* $u_1, u_2 \in S$ *tels que*

$$u = u_1 + u_2 \qquad \textit{avec} \qquad u_1 \leqslant v \textit{ et } u_2 \leqslant w.$$

Preuve. — Supposons d'abord u, v, w, continues. Soient

$$u_1 = \inf\{s \in S;\ s \geqslant u - w\}$$
$$u_2 = \inf\{t \in S;\ t \geqslant u - u_1\}.$$

Il est immédiat que u_1 et u_2 sont surharmoniques continues et que

$$u_1 = \inf\{s \in S;\ s \geqslant u - u_2\}.$$

On a donc $u_1 \leqslant v$, $u_2 \leqslant w$, et $u \leqslant u_1 + u_2$. Par un argument standard de théorie locale on voit que dans l'ouvert $(u < u_1 + u_2)$ u_1 et u_2 sont harmoniques. Donc u étant supérieur à $u_1 + u_2$ sur le support de $u_1 + u_2$, lui est supérieur partout.

Dans le cas général, soient (u_n), (v_n), et $(w_n) \subset S$ continues et croissant vers u, v, et w respectivement. Soit

$$u'_n = \inf(u_n,\ v_n + w_n).$$

(u'_n) croît vers u. En appliquant nos considérations précédentes on peut écrire :

$$u'_n = u^1_n + u^2_n$$

avec $u^1_n \leqslant v_n$, $u^2_n \leqslant w_n$, u^1_n et u^2_n surharmoniques $\geqslant 0$ continues pour tout n. Le cône S étant saillant et faiblement complet, d'après un résultat de G. Choquet ([3]), (u^1_n) et (u^2_n) convergent vers u^1 et u^2 éléments de S, et on a $u = u^1 + u^2$ avec $u^1 \leqslant v$ et $u^2 \leqslant w$. c.q.f.d.

Remarque. — Cette propriété, remarquée par G. Mokobodzki en 1965 dans le cas de la théorie de Brelot, a été étudiée dans le cadre d'une théorie globale par G. Mokobodzki et D. Sibony ([8], où il est démontré qu'elle équivaut à la propriété d'additivité des réduites).

PROPOSITION 14. — *La condition* F 4 *est vérifiée, c'est-à-dire si* $p, p' \in S_1$ *et* $s, s' \in S_2$, *on a* $(p + s \leqslant p' + s') \Longrightarrow (p \leqslant p')$.

Preuve. — D'après la proposition précédente on peut écrire $p = p_1 + p_2$ avec $p_1 \leqslant p'$ et $p_2 \leqslant s'$, et $p_1, p_2 \in \mathrm{S}$. Si $p_2 \not\equiv 0$, on aurait $p_2 \in \mathrm{S}_1$, et $p_2 \leqslant s' = \Sigma u_n$; soit $y \neq x$, $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que $\sum_1^{n_0} u_n(y) + \varepsilon > \sum_1^{\infty} u_n(y)$. On a

$$p_2(y) \leqslant \sum_1^{n_0} \mathrm{R}_{u_n}^{\omega}(y) + \varepsilon$$

pour tout ω ouvert, $\omega \ni x$. Donc $p_2(y) \leqslant \varepsilon$. Par suite $p_2 = 0$. c.q.f.d.

Proposition 15. — *Le cône* S_1 *est complètement réticulé pour son ordre propre.*

Preuve. — Soit $(u_\alpha) \subset \mathrm{S}_1$ un ordonné filtrant spécifiquement croissant avec $u_\alpha \prec w \in \mathrm{S}_1$ pour l'ordre de S_1. On a $w = u_\alpha + u'_\alpha$. Soit $u = \sup\limits_\alpha u_\alpha$ en tout point et $u' = \inf {}'_\alpha$. On a $u \in \mathrm{S}$ et $w = u + u' = u + \hat{u}'$ ($\hat{u}'$ régularisé s.c.i.), donc $u' = \hat{u}' \in \mathrm{S}$. Par suite $u \in \mathrm{S}_1$. Pour $\beta < \alpha$ on a $u_\alpha = u_\beta + v_{\alpha,\beta}$. Donc $u = u_\beta + v_\alpha$, où $v_\beta = \sup\limits_\alpha v_{\alpha,\beta}$. Par suite $v_\beta \in \mathrm{S}_1$, et u_β est majoré par u pour l'ordre de S_1, et si $v \in \mathrm{S}_1$ majore pour cet ordre tous les u_α, on a $v = u_\alpha + t_\alpha$, donc $v = u + t$, avec $t \in \mathrm{S}$, donc v majore u spécifiquement.

Il est clair d'autre part que S_1 est réticulé, car si u_1, $u_2 \in \mathrm{S}_1$, et $u_1 \vee v_2$ est le sup de u_1 et u_2 pour l'ordre propre de S, qui est réticulé, $u_1 \vee u_2$ est spécifiquement majoré par $u_1 + u_2$, donc est dans S_1.

La condition F 2 résulte de ce que S est faiblement complet métrisable pour une topologie convenable sur l'espace des différences de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ et la propriété F 3 se déduit du résultat de ([9]) et peut s'établir rapidement.

On peut donc énoncer le

Théorème 16. — *Dans un espace harmonique de Bauer* Ω, *pour tout* $x \in \Omega$ *polaire, toute fonction surharmonique* $v \geqslant 0$, *tout potentiel* $u > 0$ *de support* $\{x\}$, $\lim\limits_{\mathcal{F}_s} \dfrac{v}{u}$ *existe et est* *finie* μ_u — *pp pour* s *décrivant les génératrices extrémales du cône* S_1 *des potentiels de support* $\{x\}$, μ_u *étant la mesure conique associée à* u *dans la représentation intégrale dans* S_1, $\mathcal{F}_s$ *étant le filtre fin associé à l'élément extrêmal* s *de* S_1.

Pour toute φ *fonction conique définie sur l'ensemble des génératrices extrémales du cône* S_1 *et* μ_u*-intégrable, la fonction* $p = \int s\varphi(s)\, d\mu_u(s)$ *est dans* S_1 *et* $\lim_{\mathcal{F}_s} \frac{p}{u} = \varphi$ μ_u — *pp. Pour tout* $v \in S$, *si* $v = v_1 + v_2$ *avec* $v_1 \in S_1$ *et* $v_2 \in S_2$, *et si* $\psi(s) = \lim_{\mathcal{F}_s} \frac{v}{u}$ μ_u — *pp, la fonction*

$$\frac{1}{u} \int s\psi(s)\, d\mu_u(s)$$

est la composante de v_1 *dans la bande engendrée par* u *dans* S_1.

Corollaire 17. — *Si* x *est tel que les potentiels de support* $\{x\}$ *sont proportionnels à* u, *alors pour tout* $v \in S$, $\lim_{\mathcal{F}_u} \frac{v}{u}$ *existe et est finie, où* $\mathcal{F}_u$ *est le filtre minimal associé à* u.

Remarque 18. — Le théorème subsiste évidemment quand on prend au lieu d'un point x un *compact polaire* K.

L'application à la théorie globale sera faite ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bauer, Harmonische Raüme, Springer Verlag, 1966.

[2] Brelot, Axiomatique des fonctions harmoniques, *Séminaire de Math. Sup.*, Montréal, été 1965.

[3] Choquet, Les cônes faiblement complets dans l'analyse, *Proc. Int. Congr. Math., Stockholm* (1962).

[4] Doob, A non probabilistic proof of the relative Fatou theorem, *Ann. Unst. Fourier*, 9, 293-300 (1959).

[5] K. Gowrisankaran, Extreme harmonic functions and boundary value problems, *Ann. I.F.* 13/2, (1963), 307-356.

[5′] K. Gowrisankaran, Extreme harmonic functions, *Math. Z.* 94 (1966), 256-270.

[6] Kunita-Watanabe, Markov Processes and Martin boundary, *Illinois J. of Math.*, 9, n° 3, Sept. 1965.

[7] Mme L. Lumer-Naïm, Sur le théorème de Fatou généralisé, *Ann. Inst., Fourier* 12 (1962), p. 623.

[8] G. Mokobodzki et D. Sibony, Sur une propriété caractéristique des cônes de potentiels, *C.R. Acad. Sci.*, 266, 22 janvier 1968, p. 215.

[9] G. Mokobodzki et D. Sibony, Sur l'opération de réduite (à paraître).

[10] D. Sibony, Allure à la frontière de certaines transformations. et *C.R. Acad. Sci.*, 260, mars 1965.

Manuscrit reçu le 25 février 1968.

Daniel Sibony
Institut Henri-Poincaré, 11, rue P.-Curie,
Paris, Ve.