



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Sylvain BARRÉ & Mikaël PICHOT

**La propriété de décroissance rapide pour le groupe de Wise**

Tome 65, n° 2 (2015), p. 709-724.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2015\\_\\_65\\_2\\_709\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2015__65_2_709_0)



© Association des Annales de l'institut Fourier, 2015,

*Certains droits réservés.*



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier »  
(<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales  
d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## LA PROPRIÉTÉ DE DÉCROISSANCE RAPIDE POUR LE GROUPE DE WISE

par Sylvain BARRÉ & Mikaël PICHOT

---

RÉSUMÉ. — On montre que le groupe  $G$  de présentation  $\langle a, b, c, s, t \mid c = ab = ba, c^2 = sas^{-1} = tbt^{-1} \rangle$  (introduit par D. Wise) a la propriété de décroissance rapide de Haagerup–Jolissaint, et qu’il vérifie donc la conjecture de Baum–Connes.

ABSTRACT. — We show that the group of presentation  $\langle a, b, c, s, t \mid c = ab = ba, c^2 = sas^{-1} = tbt^{-1} \rangle$  (introduced by D. Wise) has the property of rapid decay.

Le groupe  $G$  de présentation

$$\langle a, b, c, s, t \mid c = ab = ba, c^2 = sas^{-1} = tbt^{-1} \rangle$$

a été introduit par D. Wise dans [10]. Il montre que  $G$  est non Hopfien, et donc non résiduellement fini.

Notons  $\ell$  la longueur des mots associée à la présentation de  $G$  donnée.

On dit que  $G$  a la *propriété de décroissance rapide* relativement à  $\ell$  s’il existe un polynôme  $P$  tel que, pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$  et  $f, g \in \mathbb{C}G$  tels que  $\text{supp}(f) \subset B_r$ , on a

$$\|f * g\|_2 \leq P(r) \|f\|_2 \|g\|_2$$

où  $B_r = \{x \in G, \ell(x) \leq r\}$  est la boule de rayon  $r$  dans  $G$ ,  $\text{supp}(f)$  est l’ensemble des éléments  $x \in G$  tels que  $f(x) \neq 0$ , et  $\mathbb{C}G$  l’algèbre de groupe à coefficients complexes de  $G$ .

Nous renvoyons à l’article d’Alain Valette [9] pour une introduction à la propriété de décroissance rapide. Par exemple :

- les groupes à croissance polynomiale, les groupes libres, les groupes hyperboliques, ainsi que certains réseaux uniformes (essentiellement dans  $SL_3$ ) satisfont cette propriété,

---

*Mots-clés* : Géométrie des groupes discrets, propriété RD.

*Classification math.* : 20F65, 46L35, 46L80, 51E24.

— les groupes moyennables à croissance non polynomiale, les réseaux non uniformes, tels que  $SL_3(\mathbf{Z})$ , ne la satisfont pas.

Une conjecture de Valette affirme que la propriété de décroissance rapide est satisfaite pour tout réseau uniforme dans un groupe de Lie semi-simple. Répondant à une question de Mark Sapir, nous montrons :

**THÉORÈME 0.1.** — *Le groupe  $G$  a la propriété de décroissance rapide relativement à  $\ell$ .*

Le corollaire suivant est une application immédiate des travaux de Laforgue [8, Corollaire 0.0.3].

**COROLLAIRE 0.2.** — *Le groupe de Wise  $G$  satisfait à la conjecture de Baum-Connes, i.e. l'application de Baum-Connes (sans coefficient)*

$$\mu_r : K_*^{\text{top}}(G) \rightarrow K_*(C_r^*(G))$$

*est un isomorphisme.*

La preuve du théorème 0.1 repose sur l'étude des propriétés « de rang intermédiaire » du groupe  $G$  (au sens où nous l'entendons dans [2]). Il faut y ajouter un ingrédient supplémentaire, une propriété dite « de prolongement analytique » (décrite dans la section 3 ci-dessous), qui n'est pas satisfaite en général pour les groupes étudiés dans [2].

*Remarques.*

- (1) Le présent article est une mise à jour d'une courte note des auteurs (non publiée) portant le même titre [3], écrite fin 2007. Le contenu de la nouvelle version (2012) est essentiellement identique, mais la présentation est plus détaillée.
- (2) Le problème de déterminer si  $G$  possède la propriété de décroissance rapide a été soulevé par exemple dans [5]. Comme mentionné dans [6], le groupe  $G$  n'est pas relativement hyperbolique et il n'est pas non plus un groupe CAT(0) cubique. Par ailleurs, n'étant pas résiduellement fini, il n'est pas isomorphe à un sous groupe de type fini de  $SL_3$  sur un corps (d'après un théorème de Malcev), et il ne satisfait donc pas aux critères connus pour la propriété de décroissance rapide. Parfois, le groupe  $G$  était proposé comme contre-exemple potentiel à cette propriété (voir par exemple la Question 6.6 de [6]).

Les sections qui suivent contiennent la preuve du théorème. La propriété de décroissance rapide est obtenue aux sections 5 et 6 en appliquant les critères connus. Les quatre premières sections permettent de se ramener à ces critères. Nous montrons en fait un résultat plus fort, qui affirme que le

groupe de Wise  $G$  est à *branchement polynomial*, au sens de [2], définition 16 (voir le théorème 5.1 ci-dessous).

Plus précisément, les quatre premières sections concernent la géométrie  $CAT(0)$  de  $G$  et présentent une « classification de chromosomes » qui permet la réduction des triangles le long « d’enveloppes analytiques réduites ».

### 1. Propriétés du link

La présentation de  $G$  donnée ci-dessus

$$\langle a, b, c, s, t \mid c = ab = ba, c^2 = sas^{-1} = tbt^{-1} \rangle$$

détermine un complexe  $X$  à courbure négative (au sens  $CAT(0)$ ) de dimension 2 et une action libre cocompacte de  $G$  avec une orbite de sommets (voir [10]).

On rappelle que le link en un sommet de  $X$  est le graphe métrique donnée par la trace sur  $X$  d’une sphère de petit rayon centrée en ce sommet, munie de la métrique angulaire.

Le link  $L$  aux sommets de  $X$  est représenté sur la figure suivante.

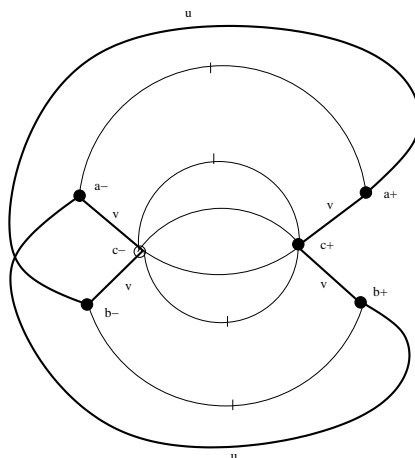


FIGURE 1.1. Le link du groupe de Wise

Le calcul du link se fait directement à partir de la présentation  $CAT(0)$  du complexe  $X$  telle que donnée dans [10]. (En fait, on peut voir que la « coupure verticale » du link permet de définir un espace à murs puis de montrer la propriété de Haagerup pour  $G$ , cf. [1].)

Les faces de  $X$  sont composées de triangles isocèles ayant deux côtés de longueur 1 (générateur  $a$  et  $b$ ) et un de longueur  $\frac{1}{2}$  (générateur  $c$ ), et de carrés dont les côtés ont longueur 1 (correspondant à  $s$  et  $t$ ). On note  $u$  et  $v$  les angles aux sommets des triangles, de sorte que  $u + 2v = \pi$ . Dans  $L$  la longueur des arêtes en gras est indiquée sur la Figure 1.1. Les autres arêtes sont de longueur  $\pi$ . Les cycles (i.e. courbes fermées simples) de longueur  $2\pi$  de  $L$  sont de trois sortes :

- (1) le cycle gras, donné par le chemin  $u + 2v + u + 2v$ ,
- (2) les cycles mixtes, donnés par les chemins  $u + 2v + \pi$ ,
- (3) les cycles non gras, donnés par les chemins centraux de la forme  $\pi + \pi$ .

Le cycle gras correspond aux pavages du plan en triangles isocèles dans  $X$ . Les arêtes de longueur  $\pi$  viennent compléter ce cycle pour former le link tout entier. Notons que les cycles non gras se répartissent eux-mêmes en trois sous-catégories : le cycle de la forme  $\pi + \pi$ , les quatre cycles de la forme  $(\pi/2 + \pi/2) + \pi$ , et le cycle de la forme  $(\pi/2 + \pi/2) + (\pi/2 + \pi/2)$ .

Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 1.1. — *Soient  $\alpha, \beta$  deux points de  $L$  à distance  $> \pi$ . Alors  $\alpha$  et  $\beta$  appartiennent à un cycle de  $L$  de longueur  $2\pi + 2u$  ou de longueur  $2\pi + 2v$ . Ce cycle est alors l'unique plus petit cycle qui contient  $\alpha$  et  $\beta$ .*

*Démonstration.* — Il s'agit d'une vérification immédiate. □

## 2. Classification des chromosomes

Nous introduisons une notion de « chromosome » pour le complexe  $X$  et classifions ces sous-structures.

DÉFINITION 2.1. — *On appelle bande dans le revêtement universel  $X$  l'adhérence d'une composante connexe non bornée du complémentaire du lieu singulier. (Le lieu singulier est l'ensemble des points de branchement, ici c'est exactement la réunion des arêtes de  $X$ .)*

On voit que les bandes de  $X$  sont de largeur 1.

LEMME 2.2. — *Dans  $X$  étant données deux bandes  $B_1$  et  $B_2$  il y a trois types d'intersections possibles :*

- (i) soit  $B_1$  et  $B_2$  ont un bord commun,
- (ii) soit  $B_1$  et  $B_2$  ont un unique sommet commun  $x \in X$ , et elles définissent dans le link en  $x$  un cycle de longueur  $2\pi + 2u$ ,

(iii) soit  $B_1$  et  $B_2$  ont un unique sommet commun  $x \in X$ , et elles définissent dans le link en  $x$  un cycle de longueur  $2\pi + 2v$ ,

*Démonstration.* — Soient deux bandes  $B_1$  et  $B_2$  et  $x$  un point commun à  $B_1$  et  $B_2$ . Deux cas se présentent.

Supposons dans un premier temps que  $x$  n'est pas l'unique point commun. Notons  $I$  le plus grand segment (éventuellement infini) contenant  $x$  et inclus dans  $B_1 \cap B_2$ . Par hypothèse, ce segment n'est pas réduit à  $x$ . Il s'agit de montrer que  $I$  est bi-infini. Si ce n'est pas le cas,  $I$  a une extrémité  $y$  dans  $X$ . Il est facile de voir que cette extrémité est un sommet de  $X$ . De plus  $y$  est soit un sommet de carré, soit un milieu de carré dans  $B_1$  et  $B_2$ . Dans les deux cas, la trace de  $B_1 \cup B_2$  sur le link  $L_y$  de  $y$  est un chemin non gras connexe de longueur  $2\pi$ . Or, un tel chemin est nécessairement un cycle non gras de longueur  $2\pi$  dans  $L_y$ , ce qui contredit la maximalité de  $I$ . Donc  $I = B_1 \cap B_2$  est bi-infini et nous obtenons l'assertion (i).

Supposons maintenant que  $B_1 \cap B_2 = \{x\}$ . Notons  $I_1$  et  $I_2$  les deux segments de longueur  $\pi$  dans  $L_x$  (le link de  $x$ ) correspondant à  $B_1$  et  $B_2$ . Alors : soit  $I_1$  et  $I_2$  sont dans un cycle mixte de longueur  $2\pi + 2u$ , soit ils sont dans un cycle mixte de longueur  $2\pi + 2v$ . Ceci correspond aux deux cas (ii) et (iii) ci-dessus. □

**DÉFINITION 2.3.** — On appelle chromosome de  $X$  la réunion de deux bandes d'intersection non vide. Un chromosome est dit respectivement collé, de type  $u$ , ou de type  $v$ , suivant les cas (i), (ii) et (iii) du Lemme 2.2 ci-dessus. Dans les cas (ii) et (iii) le point  $x$  est appelé centromère.

Les trois types de chromosomes de  $X$  sont représentés sur la figure suivante (le troisième est de type  $u$ , les deux derniers de type  $v$ ).

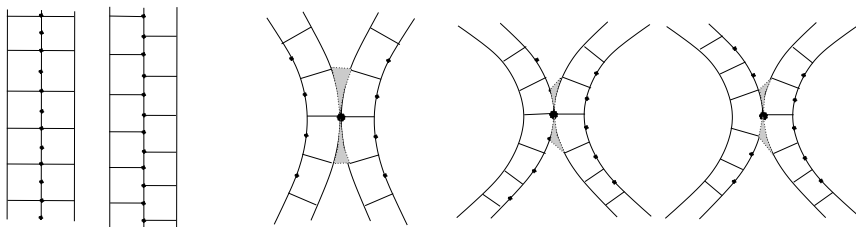


FIGURE 2.1. Chromosomes collés, de type  $u$ , de type  $v$

Soit  $\gamma$  un segment géodésique de  $X$  et soit  $B$  une bande. On dit que  $\gamma$  rencontre  $B$  s'il contient au moins un point intérieur à  $B$ . On dit que  $\gamma$  rencontre successivement deux bandes  $B_1$  et  $B_2$  de  $X$  si  $\gamma$  rencontre  $B_1$  et

$B_2$  et si l'intérieur de toute autre bande  $B$  de  $X$ ,  $B \neq B_1$ ,  $B \neq B_2$ , est disjoint du sous-segment géodésique  $\gamma_0$  de  $\gamma$  compris entre  $B_1$  et  $B_2$  (i.e.  $\gamma_0$  ne rencontre pas  $B$ ).

LEMME 2.4.

- (i) Soit  $\Pi$  un plat de triangles isocèles de  $X$ . Une bande dans  $X$  dont l'intersection avec  $\Pi$  est non vide, et non réduite à un point, contient une géodésique singulière de  $\Pi$ .
- (ii) Soit  $\gamma$  un segment géodésique de  $X$ . Si  $\gamma$  ne rencontre aucune bande de  $X$ , alors  $\gamma$  est contenu dans un unique plat en triangles isocèles de  $X$ .
- (iii) Soit  $\gamma$  un segment géodésique et soient  $B_1, B_2$  deux bandes de  $X$  d'intersection vide. Si  $\gamma$  rencontre successivement  $B_1$  et  $B_2$ , alors il existe un plat de triangles isocèles  $\Pi$  dans  $X$  tel que les intersections  $\Pi \cap B_1$  et  $\Pi \cap B_2$  sont deux droites singulières parallèles de  $\Pi$ .

*Démonstration.* — (i) Soit  $B$  une bande et  $\Pi$  un plat en triangles isocèles tel que  $I = B \cap \Pi$  contient au moins deux points. Par convexité,  $I$  est un segment du bord de  $B$ . Il suffit de montrer que  $I$  est bi-infini. Sinon, notons  $x$  une extrémité de  $I$  dans  $X$ . Alors  $x$  est un sommet de  $X$ . De plus, nous avons un cycle de longueur  $2\pi = 2(u + 2v)$  correspondant aux triangles isocèles et un chemin de longueur  $\pi$  d'origine sur ce cycle et correspondant à  $B$ . La section 1 montre que la singularité obtenue est de type livre, ce qui contredit le fait que  $x$  est extrémal dans  $B \cap \Pi$ .

(ii) Si  $\gamma$  est un segment géodésique qui ne rencontre aucune bande, alors il est entièrement contenu dans une réunion de triangles isocèles. Il suffit donc de montrer que tout point d'un triangle isocèle est contenu dans un unique plat en triangle isocèle. Soit  $t$  un triangle isocèle contenant un tel point, et soit  $x$  un sommet de  $t$ . Alors  $t$  détermine une arête grasse du link  $L_x$ , qui se complète d'une unique façon en un cycle d'arêtes grasses. Ce cycle gras détermine un disque simplicial plat  $D_1$  dans  $X$  de centre  $x$ . On construit ensuite par récurrence une suite emboîtée  $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \dots$  de disques simpliciaux plats en triangles isocèles de rayons (simpliciaux) respectifs  $1, 2, 3, \dots$ , de la façon suivante. Supposons  $D_i$  construit pour  $i \geq 1$ . Notons  $x_i^1, \dots, x_i^{k_i}$  les sommets du bord de  $D_i$  organisés par ordre cyclique. Pour chaque entier  $j \in [1, k_i]$ , la trace de  $D_i$  dans  $L_{x_i^j}$  est un chemin gras de longueur au plus  $\pi$ . Celui se complète d'exactlyement une façon en un cycle gras de longueur  $2\pi$ . En outre, il est facile de voir que ces complétions sont deux-à-deux compatibles. Ceci montre qu'il existe exactement une extension de  $D_i$  en un disque plat  $D_{i+1}$  en triangles isocèles

de rayon simplicial  $i + 1$ . Par suite,  $\Pi = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$  est l'unique plat en triangles isocèle contenant le point donné.

(iii) Notons  $C$  l'enveloppe convexe de  $B_1$  et  $B_2$  privée de  $B_1$  et  $B_2$ . Comme  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ,  $C \neq \emptyset$ . D'après (ii),  $C$  est inclus dans un (unique) plat en triangle isocèles. Il est facile d'en déduire que  $B_1 \cap \bar{C}$  et  $B_2 \cap \bar{C}$  sont deux droites parallèles de ce plat. □

### 3. Enveloppe analytique et enveloppe analytique réduite d'un segment

Soit  $\gamma$  un segment géodésique de  $X$ . On appelle *enveloppe analytique* de  $\gamma$  la surface  $H(\gamma)$  de  $X$  (éventuellement à bords, branchée, et non nécessairement totalement géodésique) construite de la façon suivante.

- Si  $\gamma$  ne rencontre aucune bande de  $X$ , alors  $H(\gamma)$  est soit :
  - (1) l'enveloppe convexe simpliciale de  $\gamma$  dans le plat  $\Pi$  en triangles isocèles donné par le lemme 2.4 (ii) si  $\gamma$  est non singulier,
  - (2) la réunion des chromosomes collés de  $X$  qui intersectent  $\gamma$  en au moins deux points si  $\gamma$  est singulier.

• Si  $\gamma$  rencontre au moins une bande de  $X$ , notons  $B_1, \dots, B_n$  les bandes de  $X$  que  $\gamma$  rencontrent successivement en partant de son origine (pour une orientation fixée de  $\gamma$ ) et procédons de la façon suivante. Soit  $H_0(\gamma)$  la réunion des bandes  $B_i$ ,  $i = 1 \dots n$ . Construisons par récurrence une suite emboîtée de surfaces à bords

$$H_0(\gamma) \subset H_1(\gamma) \subset \dots \subset H_{n-1}(\gamma).$$

Supposons  $H_{i-1}(\gamma)$  construite pour un entier  $i \geq 1$  et construisons  $H_i(\gamma)$  pour  $i < n$ . On distingue les cas suivant.

- (1)  $B_i$  et  $B_{i+1}$  ne s'intersectent pas : on applique la partie (iii) du Lemme 2.4 en posant  $H_i(\gamma) = H_{i-1}(\gamma) \cup P$ , où  $P$  est la partie du plat  $\Pi$  entre les deux droites singulières définies dans (iii).
- (2)  $B_i$  et  $B_{i+1}$  ont un bord commun : on pose  $H_i(\gamma) = H_{i-1}(\gamma)$ .
- (3)  $B_i$  et  $B_{i+1}$  ont exactement un point commun  $x \in X$  : dans ce cas  $B_i \cup B_{i+1}$  est un chromosome  $C$  non collé de  $X$  de centromère  $x$ . Par construction  $\gamma$  et  $C$  sont transverses, i.e.  $\gamma$  a une intersection non vide avec l'intérieur des deux branches de  $C$ , et on complète en posant  $H_i(\gamma) = H_{i-1}(\gamma) \cup P$ , où  $P$  est la réunion des deux secteurs de triangles d'angles  $u$  (ou  $v$ ) en  $x$ , déterminés par le type  $u$  (ou  $v$ ) du chromosome  $C$ .



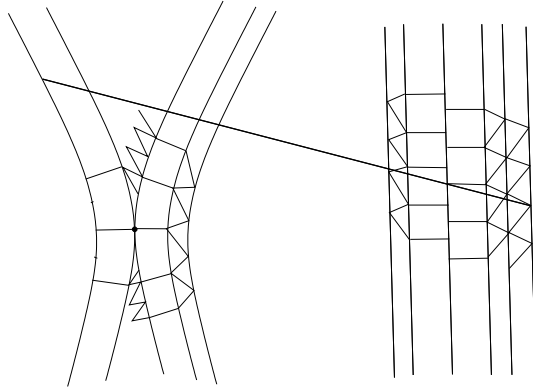


FIGURE 3.1. Une enveloppe analytique rencontrant 4 bandes

D’après le lemme 2.2 il n’y a pas d’autre possibilité d’intersection.

La construction ci-dessus détermine une surface  $H_{n-1}(\gamma)$  dans  $X$ . On pose alors  $H(\gamma) = H_{n-1}(\gamma) \cup P_1 \cup P_2 \cup Q$  où  $Q$  est la réunion des chromosomes collés de  $X$  qui intersectent  $\gamma$  en au moins deux points, et  $P_1, P_2$  sont définis comme suit : si l’origine de  $\gamma$  (resp. l’extrémité de  $\gamma$ ) n’est pas incluse dans  $H_{n-1}$ , alors  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) est le demi-plan en triangles isocèles bordant  $B_1$  et contenant l’origine (resp. l’extrémité) de  $\gamma$ ; sinon on pose  $P_1 = \emptyset$  (resp.  $P_2 = \emptyset$ ).

Ceci termine la construction de  $H(\gamma)$ . On a choisi le terme ‘analytique’ en référence au prolongement analytique usuel : nous voyons l’enveloppe  $H(\gamma)$  comme le « prolongement analytique » du segment  $\gamma$  dans  $X$ .

Enfin nous tronquons cette enveloppe :

DÉFINITION 3.1. — Soit  $\gamma$  un segment géodésique de  $X$ . On appelle enveloppe analytique réduite de  $\gamma$ , et on note  $H'(\gamma)$ , l’ensemble des points de l’enveloppe analytique  $H(\gamma)$  de  $\gamma$  qui sont à distance au plus  $2|\gamma|$  du milieu de  $\gamma$ , où  $|\gamma|$  est la longueur CAT(0) de  $\gamma$  dans  $X$ .

#### 4. Réduction des triangles géodésiques

LEMME 4.1. — Soient  $A, B, C$  trois sommets de  $X$  et soit  $D$  le disque totalement géodésique de  $X$  de bord le triangle géodésique  $(ABC)$ . Alors l’une des deux possibilités suivantes est satisfaite :

(1) L’intersection

$$H'([AB]) \cap H'([BC]) \cap H'([AC])$$

est non vide.

(2) L'ensemble

$$D_0 = D \setminus (H'([AB]) \cup H'([BC]) \cup H'([AC]))$$

est un disque non vide inclus dans un plat  $\Pi$  en triangles isocèles, dont le bord  $T = \partial D_0$  est un triangle isocèle géodésique simplicial de  $\Pi$ .

Dans la plupart des cas  $D_0$  est vide, et c'est la situation (1) qui prévaut. Le lemme 4.1 se démontre en étudiant les positions possibles des chromosomes à l'intérieur de  $D$ . On a représenté un cas significatif sur la figure 2.1 (où les centromères de  $D$  se trouvent sur les bords).

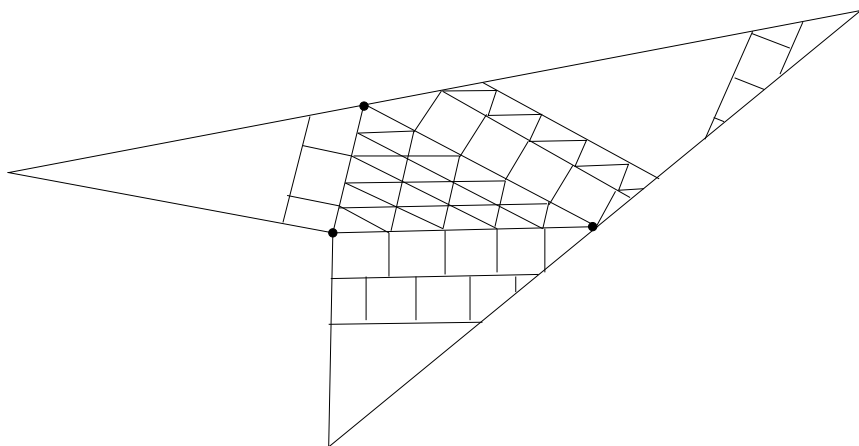


FIGURE 4.1. Réduction le long des enveloppes analytiques réduites

Avant d'aborder la démonstration du lemme 4.1, nous montrons deux résultats préliminaires. Le premier est élémentaire et général :

LEMME 4.2. — Soient  $A, B, C$  trois sommets de  $X$  et soit  $(ABC)$  le triangle géodésique correspondant. Alors les boules centrées aux milieux des cotés de  $(ABC)$  et de rayons respectifs le double de la longueur du coté correspondant à leur centre, ont une intersection commune contenant le petit coté de  $(ABC)$ .

Le résultat suivant est propre au complexe  $X$  :

LEMME 4.3. — Soient  $A, B, C$  trois sommets de  $X$ . Si  $[A, B]$  rencontre une bande de  $X$ , alors soit  $[B, C]$  soit  $[A, C]$  rencontre cette même bande de  $X$ .

*Démonstration.* — Supposons qu'il existe une bande que rencontre  $[A, B]$  mais que ne rencontrent ni  $[B, C]$ , ni  $[A, C]$ . Alors les deux points  $x$  et  $y$  de son bord les plus éloignés de  $[A, B]$  qui appartiennent au disque de bord le triangle  $(ABC)$  sont intérieurs à ce disque  $D$ . Il en résulte que le segment  $[x, y]$  est singulier. Mais cela contredit la définition d'une bande comme complémentaire du lieu singulier.  $\square$

*Démonstration du lemme 4.1.* — Nous distinguons plusieurs cas et sous-cas.

(1) Supposons d'abord que l'un des côtés, disons  $[A, B]$  de  $ABC$  rencontre une bande de  $X$ . D'après le lemme 4.3, nous pouvons supposer, quitte à permuter les lettres, que  $[A, C]$  rencontre cette bande également. Notons  $B_1$  la bande de  $X$  la plus éloignée de  $A$  et qui rencontre à la fois  $[A, B]$  et  $[A, C]$ , et  $x$  (resp.  $y$ ) le sommet de  $[A, B] \cap B_1$  (resp.  $[A, C] \cap B_1$ ) le plus éloigné de  $A$ .

Deux cas se présentent :

- (1a)  $[A, B]$  rencontre successivement  $B_1$  et une autre bande  $B_2$  plus proche de  $B$  que  $B_1$ .
- (1b)  $[x, B]$  ne rencontre aucune bande de  $X$ .

Traisons d'abord le cas (1a). Par maximalité de  $B_1$  et d'après le lemme 4.3, la bande  $B_2$  rencontre nécessairement  $[B, C]$ .

Alors :

(1a $\alpha$ ) Si  $B_1$  et  $B_2$  sont disjointes, alors elles intersectent un plat  $\Pi$  en triangles isocèles suivant deux droites parallèles (cf. lemme 2.4 iii). Par construction, l'enveloppe convexe  $\Pi'$  de ces deux droites dans  $\Pi$  est incluse dans  $H([A, B])$ . De plus, il est facile de voir que  $\Pi'$  contient aussi  $[y, C]$ , et qu'elle est donc incluse dans  $H([A, C])$ . Par suite  $H([A, B]) \cap H([A, C])$  contient  $\Pi'$ . Un raisonnement analogue montre que  $H([B, A]) \cap H([B, C])$  contient également  $\Pi'$ . Nous en déduisons que  $\Pi' \subset H([A, B]) \cap H([A, C]) \cap H([B, C])$ . Il résulte alors du lemme 4.2 que  $H'([A, B]) \cap H'([A, C]) \cap H'([B, C])$  est non vide.

(1a $\beta$ ) Si  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ , nous appliquons la classification des chromosomes (lemme 2.2) et distinguons deux sous-cas :

(1a $\beta$ i) Si  $B_1$  et  $B_2$  forment un chromosome collé, alors  $B$  appartient à  $d = B_1 \cap B_2$ . Un raisonnement analogue au cas (1a $\alpha$ ) permet de déduire que  $d \subset H([A, B]) \cap H([A, C]) \cap H([B, C])$  et il résulte du lemme 4.2 que  $H'([A, B]) \cap H'([A, C]) \cap H'([B, C])$  est non vide.

(1a $\beta$ ii) Sinon,  $B_1$  et  $B_2$  forment un chromosome  $\chi$  non collé. Notons  $z$  le point le plus éloigné de  $B$  qui appartient à  $[B, C] \cap B_2$ . Alors  $[y, z]$  est dans l'enveloppe convexe de  $\chi$  et le triangle  $(xyz)$  est inclus dans l'un des deux

cônes en triangles isocèles de  $\chi$  issus de son centromère. Deux nouveaux cas se présentent.

(1a $\beta$ ii')  $[A, C]$  rencontre successivement  $B_1$  et une autre bande de  $X$ , disons  $B_3$ . Par maximalité de  $B_1$ , le segment  $[B, C]$  doit rencontrer successivement  $B_2$  et  $B_3$ . De plus, les bandes  $B_1$  et  $B_3$  (resp. les bandes  $B_2$  et  $B_3$ ) déterminent un chromosome non collé  $\chi'$  (resp.  $\chi''$ ) de  $X$ . On en déduit alors que le triangle  $(xyz)$  est inclus dans deux cônes en triangles isocèles de  $\chi'$  et de  $\chi''$  issus de leurs centromères. Donc  $(xyz)$  est inclus dans  $H([A, B]) \cap H([A, C]) \cap H([B, C])$  et il résulte du lemme 4.2 que  $H'([A, B]) \cap H'([A, C]) \cap H'([B, C])$  est non vide.

(1a $\beta$ ii'') Si (1a $\beta$ ii') n'est pas satisfait, alors les segments  $[y, C]$  et  $[z, C]$  ne rencontrent pas de bande de  $X$ . Par construction de nos enveloppes convexes,  $H([A, B]) \cap H([A, C]) \cap H([B, C])$  contient  $(xyz)$  et il résulte encore du lemme 4.2 que  $H'([A, B]) \cap H'([A, C]) \cap H'([B, C])$  est non vide.

Ceci termine la preuve dans le cas (1a).

Passons au cas (1b). Nous avons encore deux options :

(1b $\alpha$ ) Supposons que  $[A, C]$  rencontre successivement  $B_1$  et une autre bande  $B_2$  de  $X$ . D'après le lemme 4.3,  $[B, C]$  rencontre  $B_2$  également. Ce cas est donc un symétrique du cas (1a $\beta$ ii'') et se traite de la même façon.

(1b $\beta$ ) Sinon,  $[y, C]$  ne rencontre aucune bande de  $X$ . Il en résulte que  $[B, C]$  ne rencontre aucune bande de  $X$ . Dans ce cas, le segment  $[B, C]$  est inclus dans  $H([A, B]) \cap H([A, C])$  et le lemme 4.2 permet encore de conclure que  $H'([A, B]) \cap H'([A, C]) \cap H'([B, C])$  est non vide.

Ceci termine la preuve dans le cas (1).

Dans le cas (2), aucun des segments  $[A, B]$ ,  $[B, C]$  et  $[A, C]$  ne rencontre de bande de  $X$ . Il en résulte que le triangle  $(ABC)$  est inclus dans un plat en triangles isocèles  $\Pi$ . Dans ce cas, on montre directement que

$$D_0 = D \setminus (H'([AB]) \cup H'([BC]) \cup H'([AC]))$$

est un triangle isocèle (éventuellement vide) géodésique simplicial de  $\Pi$ . (Une autre solution, sensiblement moins économique, est de déformer les triangles isocèles de  $\Pi$  en des triangles équilatéraux et d'appliquer le lemme 29 de [2].) □

### 5. En déduire la propriété de décroissance rapide

Ce qui précède permet de montrer que  $G$  vérifie la propriété dite de branchement polynomial »relativement à la métrique  $\ell$ , au sens de la définition 16 de [2] (rappelée ci-dessous). La propriété de décroissance rapide (théorème 0.1) résultera alors directement de la proposition 17 de [2].

Le résultat principal de cet article est le suivant :

**THÉOREME 5.1.** — *Le groupe de Wise  $G$  est à branchement polynomial relativement à la métrique des mots.*

Commençons par des rappels terminologiques. Soit  $\Gamma$  un groupe dénombrable. Un 3-chemin de l'identité  $e$  à  $z \in \Gamma$  est un triplet  $\gamma = (a_3, a_2, a_1)$  dans  $\Gamma^3$  tel que  $z = a_3 a_2 a_1$ . Un triplet  $(x, y, z) \in \Gamma^3$  tel que  $xy = z$  est dit triangle de  $\Gamma$ . Notons  $|\cdot|$  la longueur sur  $\Gamma$ .

**DÉFINITION 5.2.** — *Une famille  $\Gamma$ -indexée de 3-chemins dans  $\Gamma$ , disons  $C = (C_z^r)_{z \in \Gamma, r \in \mathbb{N}^*}$  où  $C_z^r$  un ensemble de 3-chemins de  $e$  à  $z$  dans  $\Gamma$  pour tout  $z \in \Gamma$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ , est dite à croissance polynomiale s'il existe un polynôme  $p_1$  tel que pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$  et tout  $z \in \Gamma$  on a  $\#C_z^r \leq p_1(r)$ .*

Soient  $\mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{s}^-$  deux ensembles de triangles de  $\Gamma$  et  $C = (C_z^r)_{z \in \Gamma, r \in \mathbb{R}_+}$  une famille  $\Gamma$ -indexée de 3-chemins. Pour  $(u, v, w) \in \mathfrak{s}^-$  et  $r \in \mathbb{R}_+$  définissons  $D_{(u,v,w)}^r$  comme l'ensemble des triplets  $(a, b, c)$  de  $\Gamma^3$  tels que  $(b^{-1}, u, a) \in C_{b^{-1}ua}^r$ ,  $(c^{-1}, v, b) \in C_{c^{-1}vb}^r$  et  $(c^{-1}, w, a) \in C_{c^{-1}wa}^r$ .

**DÉFINITION 5.3.** — *On dit que  $\mathfrak{s}^-$  est un retract de  $\mathfrak{s}$  le long de  $C$  s'il existe un polynôme  $p_2$  tel que pour tout  $(x, y, z) \in \mathfrak{s}$  il existe  $(u, v, w) \in \mathfrak{s}^-$  avec  $|u| \leq p_2(|x|)$  et  $(a, b, c) \in D_{(u,v,w)}^{|x|}$  tel que  $b^{-1}ua = x$  and  $c^{-1}wa = z$ .*

Rappelons la définition 16 de [2]. Un 3-chemin  $(a_3, a_2, a_1)$  dans  $\Gamma$  est dit  $(\kappa, \delta)$ -géodésique si  $|a_1| + |a_2| + |a_3| \leq \kappa |a_3 a_2 a_1| + \delta$ , où  $\kappa \geq 1$ ,  $\delta \geq 0$  sont donnés.

**DÉFINITION 5.4.** — *On dit que  $\Gamma$  est à branchement polynomial relativement à  $|\cdot|$  s'il existe  $\kappa \geq 1$ ,  $\delta \geq 0$ , une famille  $C = (C_z^r)_{z \in \Gamma, r \in \mathbb{N}^*}$  d'ensembles  $C_z^r$  de 3-chemins  $(\kappa, \delta)$ -géodésiques de  $e$  à  $z$  à croissance polynomiale, un ensemble  $\mathfrak{s}$  de triangles dans  $\Gamma$  qui sont des rétracts le long de  $C$  de l'ensemble de tous les triangles de  $\Gamma$ , et un polynôme  $p_3$  tel que pour tout  $z$  dans  $\Gamma$  et tout  $r \in \mathbb{R}_+$ , le nombre de triangles dans  $\mathfrak{s}$  de la forme  $(x, y, z)$  avec  $|x| \leq r$  est au plus  $p_3(r)$  (on dit alors que  $\mathfrak{s}$  est à croissance polynomiale).*

On a alors :

**PROPOSITION 5.5** (Voir la prop. 17 de [2]). — *Soit  $\Gamma$  un groupe dénombrable et  $|\cdot|$  une longueur sur  $\Gamma$ . Si  $\Gamma$  est à branchement polynomial relativement à  $|\cdot|$ , alors  $\Gamma$  satisfait à la propriété de décroissance rapide relativement à  $|\cdot|$ .*

Nous montrons maintenant que le groupe de Wise  $G$  est à branchement polynomial.

Soit  $z \in G$  et  $r \geq 0$ . Voyons  $G$  comme l'ensemble des sommets de  $X$  et notons  $H'[z]$  l'enveloppe convexe réduite du segment géodésique de  $e$  à  $z$  dans  $X$ . Nous considérons la famille  $C_z^r$  des 3-chemins  $(8,0)$ -géodésiques  $(a_3, a_2, a_1)$  de  $e$  à  $z$  tels que  $a_1, a_2 a_1 \in H'[z]$  et, si  $|z| \geq r$ , tels que  $|a_1| \leq 3r$  et  $|a_2| \leq r$ .

Nous avons alors :

LEMME 5.6. — *La famille  $(C_z^r)_{z,r}$  est à croissance polynomiale.*

*Démonstration.* — Nous montrons qu'il existe une constante  $K > 0$  tel que, pour tout segment géodésique  $\gamma$  de  $X$  et tout  $r > 0$ , le nombre de sommets de  $H'(\gamma)$  à distance au plus  $r$  est de l'origine de  $\gamma$  est majoré par  $Kr^3$ . Ceci entraîne que le cardinal de  $C_z^r$  est au majoré par un polynôme (de degré 6), ce qu'il faut démontrer.

Si  $\gamma$  ne rencontre pas de bande de  $X$ , alors il est inclus dans un plat en triangles isocèles de  $X$  et le résultat est clair (le polynôme cherché peut être choisi de degré 2).

Sinon, soit  $B_1, \dots, B_n$  la suite des bandes que rencontre (successivement)  $\gamma$  et qui sont à distance au plus  $r$  de l'origine de  $\gamma$ . Comme les bandes sont de largeur 1,  $n \leq r$ . De plus il existe une constante  $K'$  de sorte que l'ensemble  $B_i^r$  des sommets de  $B_i$  à distance au plus  $r$  de  $\gamma$  soit borné par  $K'r$ . Notons  $C_i$  l'ensemble des sommets de  $H(\gamma)$  situés entre les bandes  $B_i$  et  $B_{i+1}$ . Définissons également  $C_0$  et  $C_n$  les plats en triangles contenant l'origine de  $\gamma$  et, respectivement : son extrémité si  $|\gamma| \leq r$ , ou bien le point de  $\gamma$  à distance  $r$  de son origine si  $|\gamma| \geq r$ . Comme  $C_i$  est inclus dans un plat en triangles pour tout  $i = 0 \dots n$ , il est facile de voir qu'il existe une constante  $K''$  tel que l'ensemble  $C_i^r$  des sommets de  $C_i$  à distance au plus  $r$  de l'extrémité de  $\gamma$  soit de cardinal au plus  $K''r^2$ . Par suite, l'ensemble des points de  $H'(\gamma)$  à distance au plus  $r$  de l'origine est borné par

$$|C_0| + \sum_{i=1}^n |B_i^r| + |C_i^r| \leq K''r^2 + (K'r + K''r^2) \frac{n(n+1)}{2} \leq Kr^3$$

où  $K$  ne dépend que de  $K'$  et  $K''$ . Ceci prouve le lemme 5.6. □

LEMME 5.7. — *La famille iso des triangles simpliciaux géodésiques inclus dans un plat en triangles isocèles de  $X$  est à croissance polynomiale.*

*Démonstration.* — Le lemme 2.4 (ii) montre que nous pouvons en fait choisir  $p_3$  constant. □

Le théorème 5.1 résulte alors immédiatement des lemmes 5.6, 5.7 et du lemme suivant :

LEMME 5.8. — *La famille iso des triangles simpliciaux géodésiques inclus dans un plat en triangles isocèles est un rétract de la famille de tous les triangles de  $\Gamma$  le long de  $(C_z^r)_{z,r}$ .*

*Démonstration.* — Ce résultat est une conséquence directe du lemme 4.1, compte tenu de la définition de la famille  $(C_r^z)_{z,r}$ .  $\square$

## 6. Saturation au sens des plats en triangles isocèles

Enfin, nous notons que (comme suggéré par les lemmes 2.4 (ii) et 4.1) nous aurions également pu « saturer » l'enveloppe analytique au sens des plats en triangles isocèles. Cette observation permet de réduire tous les triangles sur des points, même dans le cas où les points  $A, B, C$  sont dans un même plat en triangles isocèles. Nous décrivons la réduction correspondante dans le lemme 6.3 ci-dessous.

Notons également que le caractère isolé des plats en triangles isocèles n'est pas essentiel pour établir la propriété de décroissance rapide : même si les plats en triangles isocèles branchent, on peut quand même se servir du lemme 15 de [2] (plutôt que de la proposition 17), pour réduire les produits de convolution à des convolutions partielles le long de triangles isocèles, et appliquer alors les techniques de [2] (adaptées au cas isocèle).

L'enveloppe analytique saturée est définie par :

DÉFINITION 6.1. — *Soit  $\gamma$  un segment géodésique de  $X$ . On appelle enveloppe analytique saturée de  $\gamma$ , et on note  $H'_{\text{sat}}(\gamma)$ , la réunion de l'enveloppe analytique  $H(\gamma)$  de  $\gamma$  et de tous les plats en triangles isocèles qui ont une intersection non vide avec  $H(\gamma)$ .*

Nous tronquons cette enveloppe également :

DÉFINITION 6.2. — *Soit  $\gamma$  un segment géodésique de  $X$ . On appelle enveloppe analytique saturée réduite de  $\gamma$ , et on note  $H'_{\text{sat}}(\gamma)$ , l'ensemble des points de l'enveloppe analytique saturée  $H_{\text{sat}}(\gamma)$  de  $\gamma$  qui sont à distance au plus  $2|\gamma|$  du milieu de  $\gamma$ , où  $|\gamma|$  est la longueur  $\text{CAT}(0)$  de  $\gamma$  dans  $X$ .*

Ceci fournit une approche alternative pour la propriété RD, qui repose sur le critère de I. Chatterji et K. Ruane [4] pour la propriété RD, plutôt que sur la notion de branchement polynomial pour  $G$ . Cette autre approche

n'est cependant pas sensiblement différente à celle présentée pour le théorème 5.1 : les deux articles [4] et [2] présentent leurs critères respectifs comme des modifications immédiates de la proposition 2.3 de V. Lafforgue [7] ; ces deux approches appartiennent à un même cercle d'idées.

Plus précisément, la démonstration du lemme 4.1 s'adapte (immédiatement) au cas saturé et implique que :

LEMME 6.3. — Soient  $A, B, C$  trois sommets de  $X$  et soit  $D$  le disque totalement géodésique de  $X$  de bord le triangle géodésique  $(ABC)$ . Alors l'intersection

$$H'_{\text{sat}}([AB]) \cap H'_{\text{sat}}([BC]) \cap H'_{\text{sat}}([AC])$$

est non vide

Ce lemme, combiné avec les arguments de la Section 5, montre alors que la proposition 1.7 de [4] s'applique, en choisissant pour ensembles  $C(x, y)$  l'ensemble des sommets de l'enveloppe analytique saturée réduite du segment  $[x, y]$  de  $X$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. BARRÉ & M. PICHOT, « An exotic group with the Haagerup property », <http://arxiv.org/abs/1205.1128>.
- [2] ———, « Intermediate rank and property RD », <http://arxiv.org/abs/0710.1514>.
- [3] ———, « Propriété de décroissance rapide pour le groupe de Wise », <http://arxiv.org/abs/1211.2428>, 2007.
- [4] I. CHATTERJI & K. RUANE, « Some geometric groups with rapid decay », *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), n° 2, p. 311-339.
- [5] I. CHATTERJI & L. SALOFF-COSTE, « The property of rapid decay, AIM workshop summary », <http://www.aimath.org/pastworkshops/rapiddecayrep.pdf>.
- [6] ———, « List of open problems from the workshop held at the AIM, Palo Alto, California », <http://www.aimath.org/WWN/rapiddecay>, 2006.
- [7] V. LAFFORGUE, « A proof of property (RD) for cocompact lattices of  $SL(3, \mathbb{R})$  and  $SL(3, \mathbb{C})$  », *J. Lie Theory* **10** (2000), n° 2, p. 255-267.
- [8] ———, «  $K$ -théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes », *Invent. Math.* **149** (2002), n° 1, p. 1-95.
- [9] A. VALETTE, *Introduction to the Baum-Connes conjecture*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002, From notes taken by Indira Chatterji, With an appendix by Guido Mislin, x+104 pages.
- [10] D. T. WISE, « A non-Hopfian automatic group », *J. Algebra* **180** (1996), n° 3, p. 845-847.



Manuscrit reçu le 7 décembre 2012,  
accepté le 5 juillet 2013.

Sylvain BARRÉ  
UMR 6205, LMBA, Université de Bretagne-Sud,  
Université Européenne de Bretagne, BP 573,  
56017 Vannes (France)

Mikaël PICHOT  
Department of Mathematics and Statistics  
McGill University  
805 Sherbrooke Street West  
Montreal, QC H3A 0B9 (Canada)