

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCEL BRELOT

**Recherches sur la topologie fine et ses applications
: théorie du potentiel**

Annales de l'institut Fourier, tome 17, n° 2 (1967), p. 395-423

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_395_0

© Annales de l'institut Fourier, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RECHERCHES SUR LA TOPOLOGIE FINE ET SES APPLICATIONS (*)

(Théorie du potentiel)

par Marcel BRELOT

1. On trouvera ici divers compléments, en théorie axiomatique des fonctions harmoniques avec plus ou moins d'axiomes, sur l'effilement interne ou minimal, c'est-à-dire aussi sur les notions correspondantes de limite et topologie fines : prolongement « à la frontière » de la topologie fine, démonstration de résultats en partie annoncés sur l'interprétation de l'effilement minimal comme effilement « interne » [5], notions d'ensemble W -polaire, de potentiel semi-borné pour interpréter ou perfectionner des résultats antérieurs, en particulier sur les limites des réduites [7, 9, 10]. Comme introduction, voir surtout ma conférence du Colloque de Paris-Orsay [5] ou celle de Loutraki [9].

I. — Notations, rappels et compléments.

2. Rappelons un théorème de topologie générale, extrait de Myskis [15, 12] : Soit un espace topologique Ω , des bases de filtres $\mathcal{B}_i (i \in I)$ formées d'ensembles ouverts. On considère les topologies \mathcal{C} sur $\Omega \cup I$, laissant Ω ouvert ⁽¹⁾, induisant sur Ω la topologie donnée et pour lesquelles les voisinages de $i \in I$ coupent Ω selon les ensembles d'un filtre de base \mathcal{B}_i . Il est immédiat qu'il existe parmi elles une topologie la plus fine \mathcal{C}_M

(*) Work partly supported by the Air Force Office of Scientific Research (Contract on Harmonic Analysis, Princeton 1967).

⁽¹⁾ Condition sous-entendue dans mes publications antérieures et dans [12]. On peut la supprimer sans changer \mathcal{C}_M mais elle est nécessaire plus loin.

qui est d'ailleurs déterminée par sa propriété d'induire sur I la topologie discrète. Il existe aussi une topologie \mathcal{C}_m qui est la moins fine répondant à ces conditions; elle est déterminée par les voisinages de i définis comme suit. On choisit $\alpha \in \mathcal{B}_i$ et on considère les $\beta \in I$ tels que α contienne un ensemble de \mathcal{B}_β . Si J_α est leur ensemble, $\alpha \cup J_\alpha$ décrit une base de filtre (quand α varie dans \mathcal{B}_i). Ce filtre est le filtre des voisinages de i dans $\Omega \cup I$ pour \mathcal{C}_m .

D'après cela \mathcal{C}_M et \mathcal{C}_m coïncident (c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une topologie \mathcal{C}) si et seulement si, quel que soit i , il existe $\alpha \in \mathcal{B}_i$, qui ne contient aucun ensemble de \mathcal{B}_j , $\forall j \neq i$.

3. Dans l'axiomatique des fonctions harmoniques de BreLOT [2, 3, 8], on donne sur l'espace fondamental Ω (connexe, localement connexe, localement compact non compact) un faisceau de fonctions « harmoniques » satisfaisant aux axiomes 1, 2, 3. On supposera de plus l'existence d'un « potentiel » > 0 . On sait alors définir l'effilement (interne) en $x \in \Omega$ et la topologie fine sur Ω . On note Δ_1 l'ensemble des fonctions harmoniques > 0 minimales situées dans une base du cône S^+ des fonctions surharmoniques > 0 (éléments extrémaux harmoniques de cette base). On sait que l'effilement (minimal) de $e \in \Omega$ en $X \in \Delta_1$ se traduit par : R_X^e (réduite de la fonction harmonique X) différente de la fonction X dans Ω , ce qui équivaut à : \hat{R}_X^e est un potentiel. Les complémentaires des effilés en X forment un filtre \mathcal{F}_X admettant une base \mathcal{B}_X formée des ouverts fins de complémentaires effilés en X (car l'adhérence fine de e donne la même réduite). Les limites selon \mathcal{F}_X sont dites fines (minimales).

On notera A_1 l'axiomatique précédente augmentée de l'hypothèse d'une base dénombrable d'ouverts de Ω ; on rappelle que M^{me} Hervé [14] a dans ce cas défini sur l'espace des différences de fonctions surharmoniques ≥ 0 une topologie T rendant compacte métrisable une base B convenable et désormais fixée du cône S^+ . Toute fonction surharmonique $\nu \geq 0$ se représente par $\nu(y) = \int u(y) d\mu(u)$, où μ est une mesure ≥ 0 de Radon sur B , ne changeant que Δ_1 (de type G_δ) et alors unique, notée μ_ν (mesure associée à ν).

On notera A_1^p , A_1 augmentée de l'hypothèse de proportionnalité des potentiels de support ponctuel x (pôle), $\forall x$. On sait

qu'alors, sur B pourvu de T , ces potentiels forment un ensemble homéomorphe à Ω [12] et dont l'adhérence selon T donne un ensemble noté $\hat{\Omega}$ (espace de Martin), dont $\hat{\Omega} - \Omega = \Delta$ (frontière de Martin) contient Δ_1 . Alors μ_ν peut être considéré sur $\hat{\Omega}$.

D'autre part la théorie des fonctions harmoniques adjointes de M^{me} Hervé [14] demande l'introduction d'une base de domaines « complètement déterminants ». On notera A_2 la somme des hypothèses « A_1^p , et cette base »;

4. Avec A_1 , Gowrisankaran [13] étendant le cas classique de Doob, a montré que, pour deux fonctions surharmoniques > 0 u et ν , u/ν admet selon \mathcal{F}_x une limite finie, $d\mu_\nu$ -presque partout sur Δ_1 . Cela montre l'intérêt d'étudier sur Δ_1 , les ensembles de mesure- $d\mu_\nu$ nulle.

D'autre part, il est évident avec A_1 que u/ν admet dans Ω une limite fine en tout point où ν est finie.

Avec A_2 , on montre, par le même raisonnement que Doob dans le cas classique, que en tout y de l'ensemble polaire E où $\nu = +\infty$, u/ν admet ($x \neq y$, $x \rightarrow y$) une limite fine adjointe finie $d\mu_\nu$ -presque partout (d'où l'intérêt des ensembles polaires de $d\mu_\nu$ -mesure nulle). On se ramène à prendre un compact $K \subset E$; les fonctions harmoniques minimales dans $\Omega - K$ sont celles de Ω , plus à un facteur près les potentiels p_y (de pôle y) situés dans B . L'effilement minimal relatif à p_y est identique [14] à l'effilement adjoint en y dans Ω d'où le résultat.

Plus généralement, avec A_1 , si x est polaire, les fonctions harmoniques minimales de $\Omega - \{x\}$ sont, outre celles de Ω , les potentiels (à un facteur près) extrémaux z de Ω situés dans B et de pôle en x ; les complémentaires sur $\Omega - \{x\}$ des ensembles ($\neq x$) effilés relativement à z forment une base de filtre \mathcal{F}_z . Si z varie, de pôle sur E , Mokobodski remarque que u/ν admet selon \mathcal{F}_z , une limite finie pour tout z sauf ceux d'un ensemble de mesure- $d\mu_\nu$ nulle. Même raisonnement et énoncé commun avec celui de Gowrisankaran.

II. — Prolongement de la topologie fine sur $\Omega \cup \Delta_1$.

5. LEMME 1 (Hyp. A_1). — Soit $\varphi(p)$ le pôle sur Ω du potentiel extrémal $p \in B$. On sait que $p \rightarrow \varphi(p)$ est continue. Si ν surhar-

monique > 0 est harmonique dans un ouvert, la mesure associée μ_ν sur B ne charge pas $\varphi^{-1}(\omega)$.

Sinon soit p_0 un point du support fermé de μ , situé dans $\varphi^{-1}(\omega)$ et ω_0 un ouvert de $\omega(\bar{\omega}_0 \subset \omega)$ contenant $\varphi(p_0)$, avec mesure harmonique $d\rho_{\varphi(p_0)}^{\omega_0}$. Alors $\int p(y) d\rho_{\varphi(p_0)}^{\omega_0} \leq p(\varphi(p_0))$, mais inégalité stricte si $\varphi(p) \in \omega_0$ donc pour p assez voisin de p_0 .

D'où

$$\int \left(\int p(y) d\mu(p) \right) d\rho_{\varphi(p_0)}^{\omega_0}(y) < \int p(\varphi(p_0)) d\mu(p)$$

de sorte que $\nu(y)$ égal à $\int (p(y) d\mu(p))$ n'est pas harmonique dans ω .

LEMME 2 (Hyp. A_1). — Soit $E \subset B$, dont les fonctions ν sont harmoniques dans ω ouvert. Alors les fonctions de \bar{E} sont aussi harmoniques dans ω et pour y fixé $\in \omega$, $\nu(y)$ est finie continue de ν sur \bar{E} (d'après M^{me} Hervé [14] prop. 21,2 cor. 2).

LEMME 3 (Hypothèse A_1). — Considérons un voisinage \mathcal{V} de $X \in \Delta_1$ sur la base B et l'ensemble $\mathcal{V}_0 \subset \Omega$ des pôles des potentiels extrémaux de B situés dans \mathcal{V} . Alors $C_\Omega \mathcal{V}_0$ est effilé en X (et par suite \mathcal{V}_0 est non effilé en X).

On peut supposer \mathcal{V} ouvert dans B et alors \mathcal{V}_0 est borélien dans Ω . Comme $R_X^K(y_0)$ est une capacité forte de Choquet, comme fonction du compact $K \subset \Omega$ et que la capacité extérieure est égale à $R_X^\alpha(y_0)$ [2 ou 3], on a

$$R_X^{C_\Omega \mathcal{V}_0}(y_0) = \sup_{K \subset C_\Omega \mathcal{V}_0} R_X^K(y_0)$$

Donc on peut former K_n croissant $\subset C_\Omega \mathcal{V}_0$ tel que

$$R_X^{K_n}(y_0) \geq R_X^{C_\Omega \mathcal{V}_0}(y_0) - 1/n$$

d'où

$$R_X^{U K_n}(y_0) = R_X^{C_\Omega \mathcal{V}_0}(y_0).$$

Si alors $C_\Omega \mathcal{V}_0$ était non effilé en X , on trouverait $\alpha \subset C_\Omega \mathcal{V}_0$, fermé, non effilé en X et nous allons obtenir une contradiction dans cette hypothèse qui s'écrit $R_X^\alpha = X$. On introduit β_n compact croissant dans Ω , tel que $\cup \beta_n = \Omega$. Alors $\hat{R}_X^{\alpha \cap \beta_n}$ est un potentiel $V_n(y) = \int p(y) d\mu_n(p)$ où p décrit B et $\mu_n \geq 0$ ne charge que

l'ensemble \mathcal{E} des éléments extrémaux de B . Mais comme ce potentiel est harmonique dans $C_\Omega\alpha$, μ_n ne charge pas l'ensemble des fonctions harmoniques de B ni $\varphi^{-1}(C\alpha)$ donc ne charge pas \mathcal{V} . Or en y fixé, $V_n(y) \leq X(y)$ et $\inf_{p \in B} p(y) > 0$ d'où $\|\mu_n\|$ borné.

On peut donc extraire μ_{n_q} convergeant vers μ (sur B) supporté par (de support fermé dans) $\overline{\varphi^{-1}(\alpha)}$ (adhérence dans B) et $C_B\mathcal{V}$. Alors $R_X^{\alpha \cap \beta_n}$ tend (pour $q \rightarrow \infty$) vers R_X^α en tout point (propriété de capacité comme plus haut) donc $\hat{R}_X^{\alpha \cap \beta_{n_q}} \rightarrow \hat{R}_X^\alpha$ en tout $y \in C_\Omega\alpha$; d'autre part, si $p \in \varphi^{-1}(\alpha)$, p est harmonique dans $C_\Omega\alpha$ et si $\nu \in \overline{\varphi^{-1}(\alpha)}$, $\nu(y)$ pour $y \in C_\Omega\alpha$ est finie continue de ν . D'où, pour $y \in C_\Omega\alpha$

$$\int p(y) d\mu_{n_q}(p) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \int p(y) d\mu(p) = \hat{R}_X^\alpha(y) = X(y)$$

On peut remplacer α par $\alpha \cap C\Omega_n$ où Ω_n est ouvert relativement compact de Ω , croissant, avec $\cup \Omega_n = \Omega$. Alors

$$X(y) = \int p(y) d\nu_n(p)$$

avec ν_n supporté par $C_B\mathcal{V} \cap \overline{\varphi^{-1}(\alpha \cap C\Omega_n)}$.

D'où par extraction de suite

$$X(y) = \int p(y) d\nu(p) \quad \forall y \in \Omega$$

où ν est supporté par $C_B\mathcal{V}$. Comme le centre de gravité de ν doit être dans B , $\|\nu\| = 1$; comme X est ce centre et extrémal, ν doit être la mesure-unité en X alors que \mathcal{V} est de ν -mesure nulle, contradiction cherchée.

Remarque 1. — Avec A_1^p , le lemme signifie que si δ est un voisinage dans $\hat{\Omega}$ de $X \in \Delta_1$, $C_\Omega\delta$ est effilé et $\delta \cap \Omega$ non effilé.

6. LEMME 4. — *En supposant A_1^p , ou seulement $A'(A_1 + \text{effilement en tout } X \in \Delta_1 \text{ de l'ensemble } \mathcal{E} \text{ des points de non proportionnalité)$, il existe, pour tout $X_0 \in \Delta_1$, un ensemble E effilé en X_0 et non effilé en tout $Y \in \Delta_1$, $Y \neq X_0$.*

Couvrons $B - \{X_0\}$ par une réunion dénombrable d'ouverts α_n auxquels X_0 n'est pas adhérent et soit π_n l'ensemble des pôles des potentiels extrémaux de α_n ; π_n est non effilé en tout point de $\Delta_1 \cap \alpha_n$; de plus si ω est l'ensemble des potentiels

extrémaux d'un voisinage de X_0 ne coupant pas α_n ,

$$\pi_n \cap \varphi(\omega) \subset \mathcal{F}; \quad \pi_n \cap C_\Omega \varphi(\omega)$$

étant effilé en X_0 , de même π_n .

Comme $\hat{R}_{X_0}^{\pi_n}$ est un potentiel, l'intersection π'_n de π_n avec le complémentaire d'un compact convenable K_n de Ω ($K_n \ni y_0$ fixé) donne

$$\hat{R}_{X_0}^{\pi'_n}(y_0) = R_{X_0}^{\pi'_n}(y_0) < \varepsilon \cdot 2^{-n}$$

D'où

$$R_{X_0}^{\cup \pi'_n}(y_0) < \varepsilon$$

L'ensemble $\cup \pi'_n$ répond à la question.

Remarque 2. — Avec A_1^p l'ensemble formé est effilé en X_0 et, pour tout $X \in \Delta (X \neq X_0)$ est l'intersection avec Ω d'un voisinage de X dans $\hat{\Omega}$.

THÉORÈME 1. — *En supposant A_1 , il existe sur $\Omega \cap \Delta_1$ des topologies dites fines, induisant sur Ω la topologie fine et pour chacune desquelles les voisinages de tout $X \in \Delta_1$ coupent Ω selon les ensembles de \mathcal{F}_X . Ces topologies rendent Ω ouvert; il en existe une, la plus fine (qui d'ailleurs induit sur Δ_1 la topologie discrète) et une, la moins fine ⁽²⁾. En supposant A_1^p ou seulement A' elles sont identiques (dite topologie fine prolongée).*

On remarque que tout voisinage ouvert \mathcal{V} de x dans Ω relativement compact est effilé en tout $X \in \Delta_1$, (vu l'existence d'un potentiel majorant la fonction X sur \mathcal{V}) et $C_\Omega \mathcal{V}$ est donc non effilé. De sorte que \mathcal{V} est aussi voisinage de X dans toute topologie fine supposé existente. D'où la propriété que Ω est ouvert pour ces topologies.

Les points X de Δ_1 étant pris pour les i du n° 2 et \mathcal{B}_i étant l'ensemble des ouverts fins de Ω de complémentaires effilés en X ou i , il suffit alors d'appliquer le n° 2 et le lemme 4.

Remarque 3. Ainsi est justifié le nom de limite fine pour limite selon \mathcal{F}_X .

Remarque 4. — Rappelons qu'avec A_1^p , \mathcal{F}_X est plus fin que la trace sur Ω du filtre des voisinages de $X \in \Delta_1$ dans $\hat{\Omega}$ [12]; donc sur $\Omega \cup \Delta_1$, la topologie fine prolongée est plus fine que la topologie induite par $\hat{\Omega}$.

(2) Jusqu'ici il est inutile de supposer une base dénombrable de Ω .

III. — Interprétation de l'effilement minimal comme « interne ».

7. On se placera plus loin dans A_2 et on choisira un domaine complètement déterminant ω_0 et la base compacte B définie par la condition $\int \nu d\rho_{y_0}^{\omega_0} = 1$ ($y_0 \in \omega_0$; $d\rho_{y_0}^{\omega_0}$ mesure harmonique). L'espace de Martin $\hat{\Omega}$ est homéomorphe à l'adhérence dans B de l'ensemble des potentiels p_x extrémaux de B . On note aussi $p_x(y)$ la fonction harmonique minimale qui est l'élément extrémal X de B . Dans A_2 on note $p_y^*(x) = p_x(y)$ ($x, y \in \Omega$). C'est un potentiel adjoint particulier.

LEMME 5 (Hypothèse A_1). — Si $E \subset \Omega$ est effilé en $X \in \Delta_1$, il existe ω ouvert de Ω le contenant et effilé en X .

Car $R_X^e(y_0)$ est, comme on l'a rappelé, une capacité extérieure de Choquet, donc vaut $\inf_{\omega} R_X^{\omega}(y_0)$ (ω ouvert $\supset e$). De sorte que \hat{R}_X^e étant un potentiel, $\int \hat{R}_X^e d\rho_{y_0}^{\omega_1}$ est arbitrairement petit pour ω_1 ouvert convenable contenant y_0 ; donc de même $\hat{R}_X^{E \cap CK}(y_0)$ ou $R_X^{E \cap CK}(y_0)$ pour un compact K convenable; par suite aussi $R_X^{\omega_2}(y_0)$ pour un ouvert ω_2 convenable contenant $E \cap CK$. D'où l'effilement de ω_2 puis de $\omega_2 \cup \omega'$ où ω' est un voisinage ouvert de K , relativement compact, car ω' est effilé.

LEMME 6 (Hypothèse A_1). — Toute inégalité

$$\int \nu d\mu_1(y) \leq \int \nu d\mu_2(y)$$

(μ_1, μ_2 mesures ≥ 0 sur Ω) valable pour les potentiels extrémaux d'une base quelconque s'étend à toutes les fonctions surharmoniques $\nu \geq 0$.

Car si α_n est un compact croissant, tel que $\cup \alpha_n = \Omega$, $\hat{R}_v^{\alpha_n}(y)$ est un potentiel qui s'écrit $\int p(y) d\nu_n(p)$ (ν_n ne chargeant que l'ensemble des potentiels extrémaux) d'où

$$\int \hat{R}_v^{\alpha_n}(y) d\mu_1(y) = \int \left(\int p(y) d\mu_1(y) \right) d\nu_n(p)$$

et de même avec μ_2 .

L'hypothèse entraîne donc :

$$\int \hat{R}_v^{\alpha_n}(y) d\mu_1(y) \leq \int \hat{R}_v^{\alpha_n}(y) d\mu_2(y)$$

et à la limite $\int v d\mu_1(y) \leq \int v d\mu_2(y)$

THÉORÈME 2 ⁽³⁾ (Hypothèse A₂). — *L'effilement (minimal) de $E \subset \Omega$ en $X \subset \Delta_1$ équivaut à l'existence d'une mesure $\mu \geq 0$ sur Ω telle que, en topologie Martin T :*

$$(1) \quad \int p_X(y) d\mu(y) < \liminf_{x \in E, x \rightarrow X} \int p_x(y) d\mu(y)$$

Noter que si X est non T-adhérent, il y a effilement (Lemme 3) et que la condition précédente est satisfaite, car le 2^e membre vaut par définition :

$$\sup_{\delta} \inf_{x \in E \cap \delta} \int (\delta, \text{T-voisinage})$$

et vaut alors $+\infty$, en particulier si $\mu = 0$ (le inf d'une fonction réelle sur un ensemble vide est $+\infty$).

Soit E effilé, on se ramène au cas de E ouvert d'après le lemme 4. Il existe alors $z \subset \Omega$ tel que

$$p_X(z) > \hat{R}_{p_X}^E(z) = \int p_X(y) d\varepsilon'_z(y)$$

où ε'_z est la mesure balayée relativement à E de la mesure de Dirac ε_z [14, th. 10, 1]. Voyons que cette mesure répond à la question.

Étudions

$$V(x) = \int p_x(y) d\varepsilon'_z(y) = \hat{R}_{p_x}^E(z) = \hat{R}_{p_x^*}^{*E}(x)$$

(x, y, z dans Ω) d'après la théorie des fonctions harmoniques adjointes [14], avec $p_x^*(y) = p_y(x)$ et R^* définie en théorie adjointe.

La dernière balayée vaut sur E (ouvert) p_x^* , c'est-à-dire la fonction $x \rightarrow p_x(z)$. Selon le filtre des voisinages de X sur B, p_x tend vers X, donc en z, $p_x(z)$ tend vers $p_X(z)$ lorsque $x \rightarrow X$ dans $\hat{\Omega}$, en restant dans Ω et en particulier sur E (si X est T-adhérent à E). Donc $V(x) \rightarrow p_X(z)$ ($x \in E, x \rightarrow X \in \bar{E}$ en

⁽³⁾ Extension d'un résultat de Naïm [16] donné dans le cas classique.

topologie T), c'est-à-dire en ce sens

$$\int p_x(y) d\varepsilon'_z(y) \rightarrow p_x(z) > \int p_x(y) d\varepsilon'_z(y)$$

ce qui est plus précis que (1).

Réciproquement si X est T -adhérent à E quelconque et (1) satisfaite avec μ , on introduit un nombre γ strictement compris entre les termes de (1) et un voisinage δ de X dans Ω tel que $\int p_x(y) d\mu(y) \geq \gamma$ sur $\delta \cap E$.

Comme $\int p_x(y) d\rho_{y_0}^{\omega_0} = 1$, $p_x(y_0)$ ou $p_{y_0}^*(x)$ vaut 1 pour $x \notin \bar{\omega}_0$. D'où si δ a été choisi hors $\bar{\omega}_0$,

$$\int p_x(y) d\mu(y) \geq \gamma p_{y_0}^*(x) \quad x \in E \cap \delta$$

puis $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \int p_x(y) d\mu(y) &\geq \gamma \hat{R}_{p_{y_0}^*}^{E \cap \delta}(x) \\ &\geq \gamma \hat{R}_{p_x}^{E \cap \delta}(y_0) = \gamma \int p_x d\varepsilon''_{y_0} \quad (\text{balayée pour } E \cap \delta). \end{aligned}$$

L'inégalité

$$\int p_x d\varepsilon''_{y_0} \leq \frac{1}{\gamma} \int p_x(y) d\mu(y)$$

s'étend donc selon

$$\int p_x d\varepsilon''_{y_0} \leq \frac{1}{\gamma} \int p_x(y) d\mu(y)$$

d'où

$$\hat{R}_{p_x}^{E \cap \delta}(y_0) \leq \frac{1}{\gamma} \int p_x(y) d\mu(y) < 1 = p_x(y_0)$$

ce qui montre l'effilement de $E \cap \delta$ donc de E .

COROLLAIRE. — Pour toute mesure $\mu \geq 0$ sur Ω et $X \in \Delta_1$

$$\liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow X} \int p_x(y) d\mu(y) = \int p_x(y) d\mu(y)$$

puisque Ω n'est pas effilé en X .

8. THÉORÈME 3 (Avec A_2). — Toute fonction surharmonique adjointe ≥ 0 admet en $X \in \Delta_1$, sur Ω , une lim. selon \mathcal{F}_X égale à la lim. \inf_T .

Supposons ce dernier nombre Λ fini et montrons que l'ensemble E_ε où $\nu > \Lambda + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) est effilé en X :

$$\nu \geq (\Lambda + \varepsilon) \hat{R}_{p_{y_0}}^{*F_i \cap \delta} \quad (\delta \text{ voisinage de } X \text{ assez petit})$$

$$\nu(x) \geq (\Lambda + \varepsilon) \hat{R}_{p_x}^{E_i \cap \delta}(y_0) = (\Lambda + \varepsilon) \int p_x d\varepsilon'_{y_0}$$

(ε'_{y_0} balayée de ε_{y_0} pour $E_\varepsilon \cap \delta$).

Donc

$$\int p_x d\varepsilon'_{y_0} = \liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow X} \int p_x(y) d\varepsilon'_{y_0} \leq \frac{1}{\Lambda + \varepsilon} \liminf_{x \rightarrow X} \nu < 1$$

c'est-à-dire $\hat{R}_{p_x}^{E_i \cap \delta}(y_0) < 1 = p_x(y_0)$, ce qui montre l'effilement cherché.

THÉORÈME 4 (Hypothèse A_2). — *Considérons sur $\Omega \cup \Delta_1$, pourvu de la topologie T , la famille Φ_1 des fonctions surharmoniques adjointes ≥ 0 prolongées sur Δ_1 par s.c.i selon T (et augmentée de la fonction $+\infty$), la sous-famille Φ_2 obtenue de même à partir des potentiels adjoints et la sous-famille Φ_3 de Φ_2 obtenue à partir des potentiels de type $\int p_x(y) d\mu(y)$. Soient T_1, T_2, T_3 les topologies ⁽⁴⁾ sur $\Omega \cup \Delta_1$ associées à Φ_1, Φ_2 ou Φ_3 (c'est-à-dire parmi celles plus fines que T , les moins fines rendant continues les fonctions de Φ_1, Φ_2, Φ_3 resp.). T_1 et T_2 sont identiques à l'unique topologie, induisant sur Ω (laissé d'ailleurs ouvert) la topologie affine adjointe et donnant pour les voisinages de tout $X \subset \Delta_1$ des ensembles coupant Ω selon les complémentaires des effilés en X . De même pour T_3 en remplaçant la topologie fine adjointe par celle qui est sur Ω , parmi les plus fines que celles de Ω , la moins fine rendant continus les potentiels $\int p_x(y) d\mu(y)$. Ces topologies T_1, T_2, T_3 induisent sur Δ_1 , la topologie discrète. L'effilement interne en X , relatif à $\Omega \cup \Delta_1$, (avec topologie T de $\hat{\Omega}$) et à Φ_1, Φ_2 ou Φ_3 est pour $E \subset \Omega$ exactement l'effilement minimal).*

Cet effilement minimal s'interprète comme effilement interne relatif à Φ_3 grâce au théorème 2 et son corollaire, et comme effilement interne relatif à Φ_1 et Φ_2 , grâce en outre au théorème 3. On voit donc que l'effilement minimal se conserve

⁽⁴⁾ Ces topologies induisent sur Ω les topologies définies de la même manière à partir de Φ_1, Φ_2, Φ_3 sur Ω pourvu de sa topologie initiale.

par fermeture dans Ω selon T_1, T_2 ou T_3 , en particulier en topologie fine adjointe.

Si l'on part de l'existence pour tout $X \in \Delta_1$ d'un ensemble de Ω effilé en X et non effilé ailleurs sur Δ_1 , on peut raisonner comme au théorème 1 pour obtenir les propriétés d'unicité de prolongement des topologies considérées sur Ω .

Remarque 5. — Lorsque la topologie fine adjointe est identique à la topologie fine, celle-ci prolongée comme au théorème 1 s'interprète donc comme la topologie associée à la famille des fonctions surharmoniques ≥ 0 (ou seulement les potentiels) *adjointes* prolongées par s.c.i. selon T .

9. *Effilement fort, ineffilement fort.*

Rappelons [4] que pour un cône convexe Φ de fonction ≥ 0 s.c.i. (contenant $+\infty$) sur un espace Ω , l'effilement de e en $x_0 \notin e$ (lié à la topologie fine associée) se traduit par $\inf_{\sigma} R_1^{e \cap \sigma}(x_0) < 1$ (σ voisinage de x_0 et réduite R bien connue)

et est dit *fort* si le premier membre est nul (il est ≤ 1 s'il existe $u \in \Phi$ fini > 0 en x_0). L'ineffilement fort se définit par $\inf_{\sigma} (\sup_{\delta} R_1^{e \cap \sigma \cap \delta}(x_0) \geq 1$ ⁽⁵⁾) (δ voisinage) et est satisfait si,

$$\forall A \ni x_0, \quad \sup_{\delta} R_1^{A \setminus \delta}(x_0) = R_1^A(x_0)$$

Ces propriétés entraînent [4] d'importants résultats sur les limites fines (c'est-à-dire selon la topologie fine) et il faut donc les examiner dans le cadre de l'axiomatique des fonctions harmoniques.

THÉORÈME 5. — *Avec A_1 , même sans base dénombrable, ou dans les conditions de Bauer [0] on considère sur Ω la topologie fine relative au cône des fonctions hyperharmoniques ≥ 0 . En tout x_0 polaire, l'effilement de $e \ni x_0$ est fort; en x_0 non polaire, il en est de même si les potentiels de pôle x_0 , localement bornés, sont continus en x_0 ⁽⁶⁾ (H. Bauer). Avec A_1 l'ineffilement est toujours fort.*

On utilise pour l'effilement de e en x_0 , selon Bauer, la pro-

⁽⁵⁾ S'il existe dans Φ une fonction finie et > 0 en x_0 , cette condition équivaut à l'égalité avec 1.

⁽⁶⁾ Ce qui a lieu, comme on sait, si D est satisfait. Voir [4], [14, n° 14].

priété de Mme Hervé, [14] (th. 14, 1), sous les conditions indiquées, qu'il existe une fonction surharmonique ≥ 0 finie en x_0 , tendant vers $+\infty$ en x_0 sur e .

Quant à l'ineffilement de e en $x_0 \notin e$, il suffit de rappeler que, dans des conditions d'ailleurs plus générales $R_1^e \setminus \delta_n \rightarrow R_1^e$ (δ_n suite décroissante de voisinages de x_0 , $\cap \delta_n = \{x_0\}$) (voir [1]).

LEMME 7. — *Le théorème 2 avec A_2 se complète par l'existence pour tout $E \subset \Omega$ effilé en $X_0 \in \Delta_1$, d'une mesure $\mu_0 > 0$ sur Ω telle que $\int p_{x_0}(y) d\mu_0(y) < \infty$ et $\int p_x(y) d\mu_0(y) \rightarrow +\infty$ quand $x \in E$, $x \rightarrow X_0$ en topologie T.*

On raisonne comme pour l'effilement classique interne; on part d'une mesure μ satisfaisant à (1) (théorème 2); on rappelle que $\int p_x(y) d\nu$ pour ν à support compact dans Ω tend vers $\int p_{x_0}(y) d\nu$ pour $x \xrightarrow{T} X_0$; on considère des voisinages décroissants σ_n de X_0 dans $\hat{\Omega}$ tels que, si μ_n est la restriction de μ à σ_n , $\sum \int p_{x_0}(y) d\nu_n(y) < \infty$. Alors la mesure $\sum \mu_n$ répond à la question. Car si ε est la différence des termes de (1) pour μ , de même pour les μ_n et, N étant fixé, $\int p_x d \sum_i^N \mu_n$ majore $N \frac{\varepsilon}{2}$ sur E dans un T-voisinage convenable de X . Donc aussi $\int p_x d \sum \mu_n$.

LEMME 8. — *On complète le lemme précédent (avec A_2) en remarquant que pour tout $X_0 \in \Delta_1$, il existe une mesure $\mu \geq 0$ sur Ω telle que :*

$$\int p_{x_0}(y) d\mu(y) < \infty, \quad \int p_X(y) d\mu(y) \xrightarrow{T} +\infty (X \in \Delta_1, X \neq X_0).$$

Il suffit d'utiliser un ensemble $E \subset \Omega$ effilé en X_0 et qui est pour tout $X \in \Delta_1$, $X \neq X_0$ la trace sur Ω d'un T-voisinage de X . La mesure μ_0 du lemme précédent répond à la question car en tout $X \in \Delta_1$

$$\int p_X(y) d\mu(y) = \liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow X} \int p_x(y) d\mu(y)$$

THÉORÈME 6. — *Avec A_2 , l'effilement en $X \in \Delta_1$ associé aux familles Φ_1 , Φ_2 ou Φ_3 du théorème 4 sur $\Omega \cup \Delta_1$, est toujours fort. De même pour l'ineffilement.*

Pour l'effilement, on remarque que $\Delta_1 - \{X_0\}$ est effilé et même fortement effilé relativement à Φ_3 (lemme 8) donc aussi à Φ_1, Φ_2 . Si alors $E \subset \Omega \subset \Omega \cup \Delta_1 (E \neq X_0)$ est effilé en X_0 pour $\Phi_i (i = 1, 2 \text{ ou } 3)$, $E \cap \Delta_1$ est fortement effilé, $E \cap \Omega$ est effilé (au sens minimal) d'après le théorème 4 et fortement effilé pour Φ_3 donc Φ_i d'après le lemme 7.

Pour l'ineffilement, il suffit d'examiner le cas de E non effilé $\subset \Omega$ et de Φ_1 , ce qui entraîne le cas général. On peut supposer $\bar{E} \cap \bar{\omega}_0 = \emptyset$ (voir ω_0 défini n° 7). Toute fonction ν de Φ_1 majorant 1 sur $E \cap \delta$ (δ voisinage-T de X) majore dans Ω $\hat{R}_{p_{y_0}}^{*E \setminus \delta}(x)$ ou $\hat{R}_{p_x}^{E \setminus \delta}(y_0)$ qui vaut, au moins pour x intérieur à $\delta \cap \Omega$ (δ voisinage-T de X): $\int p_x d\varepsilon_{y_0}^{\delta}$ ($\varepsilon_{y_0}^{\delta}$ balayée de ε_{y_0} pour $E \setminus \delta$). Alors $\nu(x)$ majore la $\lim \inf_T (x \in \Omega, x \rightarrow X)$ de cette expression, soit $\int p_x d\varepsilon_{y_0}^{\delta}$ (th. 2, corollaire).

Il suffit donc de voir que $\sup_{\delta} \int p_x d\varepsilon_{y_0}^{\delta} = 1$ c'est-à-dire $\hat{R}_{p_x}^{E \setminus \delta}(y_0) \rightarrow \hat{R}_{p_x}^E(y_0)$ pour une suite décroissante $\delta_n (\cap \delta_n = \{X\})$ ce qui est connu parmi les propriétés des réduites [1].

10. Compléments avec A_1^p . Critères de minimalité (extension du cas classique Naïm).

LEMME 9 (hypothèse A_1^p : usage de T, $\hat{\Omega}$ et $\Delta = \hat{\Omega} - \Omega$). — Pour que u harmonique > 0 soit minimale, il faut et suffit qu'il existe $X_0 \in \Delta$ tel que, $\forall \delta$ (T-voisinage de X_0 dans $\hat{\Omega}$), $R_u^{\delta \cap \Omega} = u$ et alors u est proportionnelle à la fonction X_0 notée aussi p_{x_0} .

On sait que la condition est nécessaire (lemme 3, remarque 1). Supposons-la. Si Ω_n est croissant, relativement compact avec $\cup \Omega_n = \Omega$, $\hat{R}_u^{\delta \cap \Omega} = \lim \hat{R}_u^{\delta \cap \Omega_n}$ [1]. Si μ_n est la mesure associée au potentiel $u_n = \hat{R}_u^{\delta \cap \Omega_n}(y)$, $u_n = \int p_x(y) d\mu_n(x)$ (où $p_x(y)$ désigne le potentiel (dans B) de pôle x ou la fonction harmonique correspondant à $x \in \Delta$). On en déduit que $\|\mu_n\|$ est bornée; on peut extraire une suite μ_{n_q} convergeant vaguement vers μ qui est portée par $\bar{\delta}$ comme μ_n . Comme $x \rightarrow p_x(y)$ pour y fixé $\in C\bar{\delta} \cap \Omega$ est continue de $x \in \bar{\delta}$ (voir [14]), le passage à la limite sur l'expression de u_{n_q} donne

$$u(y) = \int p_x(y) d\mu(x) \quad \forall y \in C\bar{\delta} \cap \Omega.$$

En imaginant δ_n décroissant, $\cap \delta_n = \{X_0\}$, il vient de même :

$u(y)$ proportionnel à $p_{x_0}(y)$ avec coefficient indépendant de y dans $C\delta$ puis même dans Ω .

Puis si $u = u_1 + u_2$ (fonctions harm. > 0), on voit à cause de l'additivité des réduites que $\hat{R}_{u_1}^{\delta \cap \Omega} = u_1$, donc u_1 et de même u_2 sont proportionnels à p_{x_0} ; u et X_0 sont minimaux.

THÉORÈME 7. — Critère 1 (avec l'hypothèse A_1^p du lemme 9).

Pour que $X \in \Delta$ soit minimal il faut et suffit que $\hat{R}_{p_x}^{\delta \cap \Omega} = p_x \forall \delta$, T-voisinage de X dans $\hat{\Omega}$ (conséquence du lemme 9).

Critère 2 (Hyp. A_2). Pour que $X \in \Delta$ soit minimal, il faut et suffit que $\forall \mu$ mesure ≥ 0 sur Ω ,

$$\int p_x d\mu(y) = \liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow X} \int p_x(y) d\mu(y)$$

Si $X \in \Delta_1$, la propriété précédente est le corollaire du th. 2.

Si $X \in \Delta - \Delta_1$ il existe un T-voisinage δ ouvert de X tel que $\hat{R}_{p_x}^{\delta \cap \Omega} \neq p_x$ et la première partie de la démonstration du théorème 2 est valable et montre l'existence d'une mesure ≥ 0 sur Ω telle que

$$\int p_x(y) d\mu(y) \xrightarrow[x \rightarrow X]{x \in \Omega} \text{limite}_T > \int p_x(y) d\mu(y)$$

Remarque 6. — Avec A_1^p , $\forall \mu$, on a toujours :

$$\int p_x d\mu \leq \liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow X} \int p_x d\mu \quad (\text{car } p_x(y) \xrightarrow[x \in \Omega]{x \rightarrow X} p_x(y), y \text{ fixé})$$

et avec A_2 les points non minimaux de Δ sont caractérisés par l'existence d'un μ donnant l'inégalité stricte.

11. Remarques sur les prolongements de topologie sur l'ensemble $\hat{\Omega}$.

Remarque 7 (avec A_1^p). — Toute topologie θ plus fine que T sur $\Omega \cup \Delta_1$ se prolonge sur $\hat{\Omega}$ selon une topologie θ' définie comme suit :

Le filtre des voisinages de tout $X \in \Omega \cup \Delta_1$ admet comme base le filtre des voisinages selon θ sur $\Omega \cup \Delta_1$.

Les voisinages de tout $X \in \Delta - \Delta_1$ sont les T-voisinages dans $\hat{\Omega}$.

Cela s'applique donc au prolongement de topologie fine du théorème 1, et, avec A_2 , aux topologies T_1 et T_3 sur $\Omega \cup \Delta_1$.

On peut vérifier que les axiomes des voisinages sont satisfaits. On peut aussi utiliser les théorèmes du n° 2, ce qui montre que θ' est la moins fine des topologies sur $\hat{\Omega}$, faisant Ω ouvert et γ induisant θ , et dont les traces des voisinages de tout $X \in \Delta - \Delta_1$ admettent comme base $\sigma \cap (\Omega \cup \Delta_1)$ (σ décrivant les T-voisinages ouverts de X dans $\hat{\Omega}$).

Remarque 8. — Avec A_2 , le cône des fonctions $\int p_x(y) d\mu(y)$ ($\mu \geq 0$ sur Ω) définit sur $\hat{\Omega}$ une topologie fine associée \mathcal{C} , induisant T_3 sur $\Omega \cup \Delta_1$ et pour laquelle $\Delta - \Delta_1$ est ouvert et toute partie de Δ_1 fermée.

Si $X \in \Delta - \Delta_1$, et $u(x) (x \in \hat{\Omega})$ tel que $u(X) < \liminf_{\substack{x \in \Omega \\ x \rightarrow X}} u(x)$

on sait que $u(Y) = \liminf_{\substack{x \in \Omega \\ x \rightarrow Y}} u(x)$, $y \in \Delta_1$ (corollaire, théorème 2)

d'où $u(X) < \liminf_{\substack{x \in \Omega \cup \Delta_1 \\ x \rightarrow X}} u(x)$; c'est-à-dire que $\Omega \cup \Delta_1$ est effilé en

X selon \mathcal{C} dans $\hat{\Omega}$. Ainsi $\Delta - \Delta_1$ est \mathcal{C} -voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire \mathcal{C} -ouvert; Δ_1 est donc \mathcal{C} -fermé et toute partie est T_3 -fermée sur Δ_1 (théorème 4), donc \mathcal{C} -fermée sur Δ_1 donc \mathcal{C} -fermée sur $\hat{\Omega}$.

IV. — Ensembles W-polaires et potentiels semi-bornés

12. Nous allons extraire de deux articles [6, 7], quelques notions et propriétés utiles pour les améliorer et les approfondir. On suppose d'abord A_1 .

On a déjà désigné par $\varphi(p)$ le pôle dans Ω du potentiel extrémal $p \in B$ (base compacte) et μ_w la mesure associée sur B (ou avec A_1^p sur $\hat{\Omega}$) à la fonction surharmonique $W \geq 0$ sur Ω . On rappelle que la partition de M^{me} Hervé [14] relative à un ouvert $\omega \subset \Omega$ donne la décomposition $W = W_\omega + W'$ en deux fonctions surharmoniques ≥ 0 où W' est harmonique dans ω et la plus grande au sens spécifique (et aussi naturel) sous ces hypothèses. De plus $W_\omega(y) = \int_{\varphi^{-1}(\omega)} p(y) d\mu_w(p)$.

Car toute décomposition $W = W'_1 + W''_1$ où W'_1 est harmonique dans ω exige que ${}^uW''_1(\varphi^{-1}(\omega)) = 0$ et la plus grande spécifiquement possible W'_1 correspond à la restriction de μ_w à $C_B \varphi^{-1}(\omega)$ (voir aussi [14, lemme 22, 1]).

On rappelle que la mesure $\nu_{\mathbb{W}, x_0}^{\omega_0}$ de M^{me} Hervé sur Ω (associée à $\mathbb{W}, x_0 \in \omega_0, \omega_0$ ouvert relativement compact $\subset \Omega$) donne comme charge de $\omega, \int \mathbb{W}_\omega d\rho_{x_0}^{\omega_0}$.

LEMME 10 (avec A_1) (7). — Si un potentiel ν est harmonique dans CK (K compact) et fini continu aux points de $\partial K, R_\nu^K = \nu$ dans CK.

Car si u est surharmonique ≥ 0 majorant ν sur K, $u - \nu$ considéré dans CK admet une $\lim.\inf \geq 0$ aux points frontière de CK dans Ω ; comme $u - \nu \geq -\nu$ avec ν potentiel, $u - \nu \geq 0$ dans CK [3, part IV, chap. IV, prop. 9] donc $R_\nu^K = \nu$ sur CK.

COROLLAIRE. — Si le potentiel ν est harmonique hors d'un point x et ω un voisinage ouvert quelconque de $x, R_\nu^\omega = \nu$ partout.

Car si K est un voisinage compact de x dans $\omega, R_\nu^K = \nu$ sur CK, $R_\nu^\omega \geq R_\nu^K$ donc $R_\nu^\omega = \nu$ sur $C\omega$ donc partout.

LEMME 11 (avec A, γ) (7). — On rappelle les propriétés équivalentes suivantes [6] exprimant la propriété dite de ψ -évanescence d'une famille d'ensembles $e_i \subset \Omega$, pour ψ réelle ≥ 0 dans Ω .

α) $\widehat{\inf}_i \hat{R}_\psi^{e_i} = 0$ (en un point ou partout parce que le 1^{er} membre est hyperharmonique).

α') $\widehat{\inf}_i R_\psi^{e_i} = 0$ (en un point ou partout, de même).

β) $\int \widehat{\inf}_i \hat{R}_\psi^{e_i} d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$ ($d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ mesure harmonique).

β') $\int \widehat{\inf}_i R_\psi^{e_i} d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$.

γ) $\inf \int \hat{R}_\psi^{e_i} d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$

γ') $\inf \int R_\psi^{e_i} d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$.

Les implications $\alpha' \Rightarrow \alpha, \beta' \Rightarrow \beta, \gamma' \Rightarrow \gamma, \gamma \Rightarrow \beta, \gamma' \Rightarrow \beta'$ sont évidentes.

Supposons α . Dans tout ouvert δ , il y a x_1 tel que

$$\inf_i \hat{R}_\psi^{e_i}(x_1) < \varepsilon$$

(7) Valable en fait dans des hypothèses plus générales. Signalons qu'avec D, on obtient dans le lemme 11 des conditions équivalentes à $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$ en y remplaçant $d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ par toute mesure $m \geq 0$, à support compact, $\neq 0$ et ne chargeant pas les ensembles polaires.

et il existe j tel que $\widehat{R}_\psi^{e_j}(x_1) < 2\varepsilon$ puis $x_2 \in \delta$ tel que $R_\psi^{e_j}(x_2) < 3\varepsilon$ d'où $\widehat{\inf}_i R_\psi^{e_i} < 3\varepsilon$ d'où (α') . Puis $R_\psi^{e_i}(x) \geq \int R_\psi^{e_i} d\rho_x^{\omega_0} (\forall x \in \omega_0)$ d'après la définition de $R_\psi^{e_i}$ comme enveloppe inférieure des fonctions hyperharmoniques. Comme l'intégrale est dans chaque domaine composant de ω_0 , $+\infty$ ou harmonique, on déduit aisément $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$.

Il n'y a plus qu'à voir que $\beta \implies \alpha$. Or β implique

$$\int \widehat{\inf}_i R_\psi^{e_i} d\rho_x^{\omega_0} = 0.$$

donc la nullité de la fonction hyperharmonique qui est sous \int , c.à.d. α .

THÉORÈME 8 (avec A_1). — *Les propriétés suivantes de $e \subset \Omega$ sont équivalentes et seront traduites par la dénomination que e est W-polaire (W surharmonique > 0).*

a) e est polaire et $\varphi^{-1}(e)$ de μ_W -mesure (ext.) nulle.

b) e est polaire et de $\nu_W^{\omega_0, \omega_0}$ -mesure (ext.) nulle.

c) La famille des voisinages de e dans Ω (ou seulement des voisinages ouverts) est W-évanescence.

d) Il existe u surharmonique > 0 telle que $u|_W$ (pris $+\infty$ lorsque indéterminé, convention permanente) tende vers $+\infty$ aux points de e (topologie de Ω).

L'implication $a \implies b$ vient des remarques suivantes :

i) Si φ' est le prolongement de φ aux fonctions harmoniques de B en donnant comme image commune le point d'Alexandroff de Ω (ainsi compactifié selon $\overline{\Omega}$), φ' est continue [14] et si pour toute mesure $\alpha \geq 0$ sur B ne chargeant que $\varphi^{-1}(\overline{\Omega})$, la mesure $\beta \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$ (projection) est définie par

$$\int F d\beta = \int F(\varphi'(x)) d\alpha(x)$$

(F finie continue sur $\overline{\Omega}$) et donne donc pour ω ouvert $\subset \Omega$ $\beta(\omega) = \alpha(\varphi^{-1}(\omega))$, on a la propriété :

Si $e \subset \Omega$, « $\varphi^{-1}(e)$ de α -mesure (ext.) nulle » \implies « e de β -mesure nulle ». Car si θ est s.c.i. ≥ 0 sur $\overline{\Omega}$, ≥ 1 sur e ,

$$\int \theta d\beta = \int \theta(\varphi'(x)) d\alpha(x)$$

Prenons pour $\theta(y)$ la fonction $\inf_{x \in \varphi^{-1}(y)} \Theta(x)$ où $\Theta \geq 0$ est s.c.i. sur B qui est s.c.i. Alors $\int \theta d\beta \leq \int \Theta(x) d\alpha(x)$ qui est arbitrairement petit pour Θ convenable majorant 1 sur $\varphi^{-1}(e)$.

ii) Si l'on prend pour α la mesure μ_w , e satisfaisant à (a) sera de mesure (ext) nulle pour la mesure β correspondante, c.à.d. que pour un voisinage ouvert convenable ω de $e \subset \Omega$, $\beta(\omega)$ ou $\alpha(\varphi^{-1}(\omega))$ seront arbitrairement petits. Ainsi

$$\nu_{\mathbb{W}}^{\omega_0, \omega}(\omega) = \int_{\varphi^{-1}(\omega)} \left[\int p(y) d\rho_{x_0}^{\omega_0} \right] d\mu_w(p) \quad (p \text{ potentiel extrémal } \in B)$$

où le crochet est borné ([14] conséquence du lemme 21, 3), sera arbitrairement petit pour ω convenable.

La réciproque $b \Rightarrow a$ vient de l'expression précédente de $\nu_{\mathbb{W}}^{\omega_0, \omega}(\omega)$ où le crochet est borné inférieurement par un nombre > 0 ; ce dernier point résulte de ce que, sinon, on trouverait p_n , T-convergeant vers $u \in S^+$ sur B , avec $\int p_n(y) d\rho_{x_0}^{\omega_0} \rightarrow 0$, ce qui entraînerait par s.c.i. de $\int u d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ [14, prop. 23, I] comme fonction de ν , que $\int u d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$ donc $u = 0$.

Voyons que $b \Rightarrow c$. On choisit ω_1 ouvert de Ω contenant e tel que $\int W_{\omega_1} d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \varepsilon$. On utilise la partition $W = W_{\omega_1} + W'$ d'où pour tout ouvert $\supset e$, $R_W^\omega = R_{W_{\omega_1}}^\omega + R_{W'}^\omega$, puis

$$\int R_W^\omega d\rho_{x_0}^{\omega_0} = \int W_{\omega_1} d\rho_{x_0}^{\omega_0} + \int R_{W'}^\omega d\rho_{x_0}^{\omega_0}.$$

On sait que si $V_0 \in S^+$ est fini continu et si ω décrit les ouverts contenant e polaire, $\inf_{\omega} \int R_{V_0}^\omega d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$ [14, n° 26].

Considérons ω_1 comme réunion dénombrable d'ouverts $\omega^p (\bar{\omega}^p \subset \omega_1)$ où $W' \leq \lambda_p V_0$, et dans ω^p un ouvert ω'^p contenant $\omega^p \cap e$ et tel que $\lambda_p \int R_{V_0}^{\omega^p} d\rho_{x_0}^{\omega_0} < 2^{-p} \cdot \varepsilon$.

Alors

$$\int R_{W'}^{\omega'^p} d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \varepsilon.$$

Donc en prenant $\omega = \cup \omega'^p \supset e$, $\int R_W^\omega d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leq 2\varepsilon$ d'où la nullité du inf du 1^{er} membre c.à.d. (a) d'après la forme (γ') du lemme 11.

Enfin voyons que $c \Rightarrow b$. Comme $\hat{R}_W^e \leq R_W^\omega$ pour tout voisinage ω de e , on conclut $\hat{R}_W^e = 0$ donc e est polaire

[3 part IV n° 33]. Puis on a pour un ouvert ω convenable $\supset e$, $\int R_W^\omega d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \varepsilon$ donc $\int R_{W_\omega}^\omega d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \varepsilon$ et il suffit de voir que $R_{W_\omega}^\omega = W_\omega$ car cela entraîne (b).

Or

$$R_{W_\omega}^\omega(x) = \int_{\varphi^{-1}(\omega)} R_p^\omega(x) d\mu_W(p) \quad [14, \text{théor. 22, 3}]$$

et l'on sait par le corollaire du lemme 10 que $R_p^\omega = p$, $\forall p \in \varphi^{-1}(\omega)$.

Voyons enfin $c \iff d$. Partant de c (γ ou γ' du lemme 11), on forme ω_n ouvert décroissant contenant e , tel que $\int R_W^{\omega_n} d\rho_{x_0}^{\omega_0} < 2^{-n}$. Alors $\Sigma R_W^{\omega_n}$ est surharmonique (parce que $\int R_W^{\omega_n} d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \infty$) et majore NW sur ω_N . On peut donc la prendre comme fonction u de l'énoncé (d).

Inversement partons de (d) et fixons $\lambda > 0$. A chaque point i de e attachons un voisinage ouvert ω_i tel que $u \geq \lambda W$ sur ω_i . Alors

$$R_W^{u_i} \leq \frac{1}{\lambda} \cdot u \quad \text{d'où} \quad \int R_W^{u_i} d\rho_{x_0}^{\omega_0} \leq \frac{1}{\lambda} \int u d\rho_{x_0}^{\omega_0}$$

arbitrairement petit pour λ assez grand, ce qui donne (c).

Remarque 9. — Les propriétés ont le caractère local.

Remarque 10. — e polaire $\iff e$ W-polaire pour un ou pour tout $W > 0$ surharmonique localement borné (d'après d).

Remarque 11. — Si $W = \text{pot } V + h$ harm. ≥ 0 et $e \subset \Omega$, alors : e W-polaire $\iff e$ V-polaire.

Remarque 12. — Noter que $\int R_W^e d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ et $\int \hat{R}_W^e d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ sont des poids fins, dénombrablement sous-additifs [11]. Les poids extérieurs correspondants (inf. des poids des ouverts contenant e) sont identiques.

i) La nullité de ces poids (pour un $W > 0$) équivaut à ce que e soit polaire.

ii) La nullité des poids extérieurs équivaut à ce que e soit W-polaire, car si e est polaire et u surharmonique > 0 , $+\infty$ sur e , $\lambda u \geq R_W^e$, $\forall \lambda > 0$, donc $\int R_W^e d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ et $\int \hat{R}_W^e d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ majorés par $\lambda \int u d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ sont nuls.

Réciproquement la nullité d'un de ces termes entraîne $\hat{R}_W^e = 0$ d'où e polaire. Quant à *ii* c'est l'une des formes de c .

12. THÉORÈME 9 (avec A_1). — *La condition que $e \subset \Omega$ est W -polaire ($W > 0$) équivaut à chacune des conditions suivantes :*

c') Les ensembles ω contenant e et pour chaque $z \in B$, $z \in \varphi^{-1}(e)$, un ensemble de \mathcal{F}_z forment une famille W -évanescence.

d') e est polaire et il existe u surharmonique > 0 telle que u/W (pris $+\infty$ lorsqu'indéterminé) tende vers $+\infty$ selon tout \mathcal{F}_z , $z \in B$, $z \in \varphi^{-1}(e)$.

Comme tout ouvert contenant e contient un ensemble de tout \mathcal{F}_z , ces conditions c' , d' , sont plus faibles que c et d .

D'après le résultat de Doob-Mokobodski (fin n° 4), (d') entraîne que $\varphi^{-1}(e)$ est de mesure- μ_W nulle et signifie donc que e est W -polaire.

Enfin $c' \Rightarrow d'$. D'abord $\hat{R}_W^e = 0$ donc e est polaire. Comme d' est « additive » en e , on se ramène à supposer que e ne coupe pas un voisinage δ de x_1 ; on introduit δ_1 , ouvert d'adhérence $\subset \delta$, $\delta_1 \ni x_1$ et $\omega' = \omega \cap C\bar{\delta}$; on remarque que $\widehat{\inf R_W^\omega} = \widehat{\inf R_W^{\omega'}}$. On part alors de $\widehat{\inf R_W^\omega} = 0$; on note que R_W^ω est harmonique dans δ_1 et de même $\widehat{\inf R_W^{\omega'}}$ qui y vaut $\widehat{\inf R_W^\omega}$. On choisit parmi ces ω' , ω'_n tel que $R_W^{\omega'_n}(x_1) < 2^{-n}$ d'où l'existence de u_n surharmonique > 0 majorant W sur ω'_n et majoré en x_1 par $2 \cdot 2^{-n}$. Alors Σu_n est surharmonique et $\Sigma u_n/W$ majore N sur ω'_n dès que $n \geq N$, d'où (d').

COROLLAIRE. — *Avec A_2 , les critères c' , d' , se traduisent au moyen de la topologie fine adjointe; les ω seront les voisinages de e dans cette topologie; d' s'écrit en exprimant que u/W (pris ∞ quand indéterminé) tend vers $+\infty$ en tout point de e (ce point exclu) selon la topologie fine adjointe.*

Car en un point polaire x_1 , l'effilement adjoint d'un ensemble $e \ni x_1$ se traduit par $R_{p_x}^e$, ou sa régularisée, $\neq p_{x_1}$ [14 th. 32, 5].

13. *Les ensembles W -polaires et W -négligeables sur Δ_1 .*

THÉORÈME 10. — (Avec A_1). *Les conditions suivantes sont équivalentes et se traduisent en disant que $e \subset \Delta_1$ est W -négligeable (W surharmonique > 0).*

a) $\inf_v \nu = 0$ pour les fonctions surharmoniques $\nu > 0$ dans Ω , telles que la *lim. inf. fine* de ν/W en tout point de e est ≥ 1 .

b) Il existe u surharmonique > 0 telle que u/W tende finement vers $+\infty$ aux points de e .

c) Les ensembles de Ω appartenant chacun à tous les \bar{F}_X ($\forall X \in e$) forment une famille *W-évanescence*.

Il est immédiat que $b \implies a$; de plus, partant de a , on forme ν_n tel que $\nu_n(x_0) < 2^{-n}$ et $\nu_n/W > 1 - \varepsilon$ sur un ensemble qui fait partie de tout \bar{F}_X ($X \in e$). Alors $\Sigma \nu_n/W$ tend finement vers $+\infty$ aux points de e . On a donc (b).

Puis on voit que $b \implies c$, comme, dans le th. 8, d impliquait c , et $c \implies b$ par la fin du raisonnement qui montrait $c' \implies d'$ dans le théor. 9.

Remarque 12. — Si W est un potentiel, tout $e \subset \Delta_1$ est *W-négligeable*.

Si $W = \text{pot } V + \text{fet harm. } h > 0$,

$$\text{W-négligeable} \iff h \text{ négligeable.}$$

Cela résulte de la forme (c), de ce que

$$\inf_{\omega} \hat{R}_W^{\omega} \leq \inf_{\omega} \hat{R}_V^{\omega \cap K} \leq \hat{R}_V^{CK}$$

dont l'intégrale en $d\varphi_{x_0}^{\omega}$ est arbitrairement petite pour K compact convenable, et de la (sous) additivité des réduites par rapport à la fonction.

Remarque 14. — Dans l'hypothèse A_1^p les ensembles ω considérés sont les traces sur Ω des voisinages fins de e dans $\Omega \subset \Delta_1$ (théor. 1).

DÉFINITION. — Un ensemble $e \subset \Delta_1$ sera dit *W-polaire* si sa mesure (ext.) μ_W ou μ_h est nulle.

D'après Gowrisankaran [13, lemme 4], cette propriété dans A_1 , équivaut à une condition plus faible que celle que e soit *h-négligeable*.

Donc (avec A_1) *W-négligeable* \implies *W-polaire*.

Sur $\Omega \cap \Delta_1$, e sera dit *W-polaire* si $e \cap \Omega$ et $e \cap \Delta_1$ sont *W-polaires* selon les définitions qui précèdent.

THÉORÈME 11 (avec A_1^p). — Soit W surharmonique > 0 et $e \in \Delta_1$.

Les 5 propriétés suivantes sont équivalentes :

α) e est W -négligeable

β) e est W -polaire.

a) $\inf v = 0$ pour les v surharmoniques > 0 satisfaisant à $\liminf_T v/W \geq 1$ en tout $X \in e$ (T , topologie Martin de $\hat{\Omega}$).

b) Il existe u surharmonique > 0 telle que $u/W \rightarrow \infty$ aux points de e selon T .

c) Les T -voisinages de e dans $\hat{\Omega}$ coupent Ω selon une famille W -évanescence.

Si W est un potentiel toutes les conditions sont satisfaites.

Si $W = \text{pot } V + h$ harm. ($h > 0$), il y a équivalence avec les mêmes propriétés pour h .

Les équivalences de a , b , c se voient comme au théorème précédent dont les conditions sont moins fortes.

La condition (c) est encore évidente pour un potentiel et la même pour h .

On voit donc déjà que toutes les conditions sont satisfaites pour un potentiel, et équivalentes aux mêmes conditions avec $h > 0$. On est donc ramené au cas d'une fonction harmonique $h > 0$. On sait que $\alpha \implies \beta$ et que les conditions a , b ou c entraînent α d'après le théorème précédent. On achève donc grâce à la propriété de Gowrisankaran ([12] th. IV, 5 corollaire) ⁽⁸⁾ que $\beta \iff a$ pour h .

COROLLAIRE. — Avec A_1^p les ensembles W -polaires sont caractérisés par :

α_0) polaires dans Ω et de μ_W -mesure nulle dans $\hat{\Omega}$

ou β_0) les T -voisinages ou encore les voisinages fins, coupent Ω selon une famille W -évanescence,

ou γ_0) Il existe u surharmonique > 0 infinie sur $e \cap \Omega$ telle que $u(y)/W(y) \rightarrow \infty$ ($y \rightarrow x$, $y \in \Omega \cap Ce$) $\forall x \in e$, soit en topologie T , soit de façon équivalente, en topologie fine.

⁽⁸⁾ L'axiome D est inutile dans le chapitre IV de [12], basé sur un lemme (II, 1) concernant un ensemble E pour lequel il suffit du cas où il est ouvert, cas établi sans D dans [13] (lemme 1). Cela a été signalé par Gowrisankaran (Sem. théorie du potentiel, 1967).

14. Fonctions surharmoniques semi-bornées.

On remarque que, avec A_1 , si $e \subset \Omega$ est effilé en $X \in \Delta_1$, les ensembles $e \cap \bigcap K$ (K décrivant les compacts de Ω) forment une famille p_X -évanescence.

Car $\hat{R}_{p_x}^{e \cap \bigcap K}$ est un potentiel, donc comme le \inf_K est harmonique, cet \inf_K est nul.

D'où avec A_1^p le même résultat en considérant au lieu de CK les T-voisinages de X dans $\hat{\Omega}$ et la famille des $e \cap \omega$.

Il semble utile d'introduire, avec A_1 , une propriété analogue dans Ω à savoir l'hypothèse H_E : $\forall p$ potentiel extrémal et e effilé au pôle de p (et ne le contenant pas), la famille des $e \cap \omega$ (ω voisinage de ce pôle) est p -évanescence.

Remarquer que si le pôle de p est polaire, la p -évanescence des $e \cap \omega$ (e quelconque $\ni x$, ω voisinage de x) signifie que e est effilé au sens minimal relativement à la fonction harmonique minimale p dans $\Omega - \{x\}$.

THÉORÈME 12. — H_E est satisfaite sous les conditions suivantes: A_2 , effilement \implies effilement adjoint, et l'hypothèse qu'en tout x non polaire, le potentiel de pôle x (défini à un facteur près fixé) est continu (ces conditions sont satisfaites dans un domaine greenien de R^n par les solutions d'équations elliptiques du 2^e ordre à coefficients assez réguliers; de même que l'axiome D).

En effet, soit e effilé en $x \notin e$; on utilise le p_y d'une base du cône S^+ et $\hat{R}_{p_x}^{e \cap \omega}(y) = \hat{R}_{p_y}^{*e \cap \omega}(x)$, $y \neq x$ [14, th. 31, 1]. Comme p_y^* est bornée au voisinage de x , la dernière réduite régularisée, qui vaut d'ailleurs $R_{p_y}^{*e \cap \omega}(x)$ ([1] p. 57) admet un \inf nul parce que l'effilement est fort (th. 5). Donc $\inf_{\omega} \hat{R}_{p_x}^{e \cap \omega}(y) = 0$ ce qui implique la proposition cherchée.

DÉFINITION. — Une fonction surharmonique $W \geq 0$ sera dite semi-bornée si, en posant $e_{\lambda}^W = \{x, W > \lambda\}$, la famille $\{e_{\lambda}^W\}$ d'indice $\lambda > 0$ est W -évanescence; et localement semi-bornée si pour un voisinage ω de chaque point, $e_{\lambda} \cap \omega$ est W -évanescence.

Remarques. — 1) W (loc.) semi-bornée $\implies W_1$ (loc.) semi-bornée $\forall W_1 \leq W$.

2) $(W_1 + W_2)$ (loc.) semi-bornée $\iff W_1$ et W_2 (loc.) semi-bornés. Car $e_{2\lambda}^{W_1+W_2} \subset e_{\lambda}^{W_1} \cup e_{\lambda}^{W_2}$ d'où $R_{W_1+W_2}^{e_{2\lambda}^{W_1+W_2}} \leq 3(R_{W_1}^{e_{\lambda}^{W_1}} + R_{W_2}^{e_{\lambda}^{W_2}})$

en remarquant que

$$R_{W_1}^{e_{\lambda}^{W_1+W_2}} \leq R_{W_1}^{e_{\lambda}^{W_1}} + R_{W_1}^{e_{\lambda}^{W_2}}$$

et

$$R_{W_1}^{e_{\lambda}^{W_2}} \leq R_{W_1}^{e_{\lambda}^{W_2} \cap e_{\lambda}^{W_1}} + R_{W_1}^{e_{\lambda}^{W_2} \setminus e_{\lambda}^{W_1}}$$

où les termes du 2^e membre sont majorés par $R_{W_1}^{e_{\lambda}^{W_1}}$ et $R_{W_2}^{e_{\lambda}^{W_2}}$.

THÉORÈME 13. — Avec A_1 , soit $W = \text{pot } V + h \text{ harm. } \geq 0$.

a) Si W est localement semi-bornée, $\{x, W = \infty\}$ est W -polaire.

b) Si W est semi-bornée, l'ensemble de Δ_1 ou W tend finement vers $+\infty$ est W -négligeable.

c) Réciproquement, supposons $A_1 + H_F + D$ ⁽⁹⁾.

Pour un potentiel V , si $E_0 = \{x, V = \infty\}$ est V -polaire, V est semi-bornée.

Pour W , si $\{x, W = \infty\}$ est W -polaire et $\{X \in \Delta_1, \lim. \text{ fine en } X \text{ de } W \text{ est } \infty\}$ est de μ_W -mesure nulle, si de plus (ce qui a lieu ⁽¹⁰⁾ quand les constantes sont harmoniques et $d\mu_h$ absolument continue par rapport à $d\mu_1$) h admet une limite fine aux points de Δ_1 , p.p $d\mu_h$, alors W est semi-bornée.

a) résulte du théorème 8 et (b) du théorème 10 (partie c) car e_{λ}^W appartient à \mathcal{F}_X pour tout $X \in \Delta_1$ où $W \xrightarrow{\mathcal{F}_X} \infty$.

La réciproque pour V s'inspire de [6]; elle repose sur $V(x) = \int p(x) d\mu(p)$ (p potentiel extrémal d'une base de S^+) et sur $\hat{R}_{\varphi}^{e_{\lambda}}(y) = \int \hat{R}_{\varphi}^{e_{\lambda}}(y) d\mu(p)$ [14 th 22,3] (e_{λ} brièvt. pour e_{λ}^V) d'où $\int \hat{R}_{\varphi}^{e_{\lambda}} d\rho_{x_0}^{\omega_0} = \int [\int \hat{R}_{\varphi}^{e_{\lambda}} d\rho_{x_0}^{\omega_0}] d\mu(p)$.

L'intégrale de droite étendue à $\varphi^{-1}(E_0)$ étant nulle, il suffit de voir que pour tout $p \notin \varphi^{-1}(E_0)$, le crochet qui est majoré par $\int p(x) d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ d'intégrale- $d\mu$ égale à $\int V d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ finie, tend vers 0; pour $\lambda \infty$. Or, pour λ assez grand, e_{λ} est effilé en $\varphi(p) \notin e_{\lambda}$ et d'après H_F , $\int \hat{R}_{\varphi}^{e_{\lambda} \cap \omega} d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ est arbitrairement petit pour un voisinage convenable de $\varphi(p)$. Reste à voir que $\int \hat{R}_{\varphi}^{e_{\lambda} \setminus \omega} d\rho_{x_0}^{\omega_0} \xrightarrow{\lambda \infty} 0$; si $U(x)$ est un potentiel > 0 fini continu égal à $p(x)$ hors ω ,

(9) D équivaut avec A_1 à la propriété de Choquet pour le poids $\int \hat{R}_U d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ considéré plus loin — propriété qui paraît indispensable pour le passage à la limite, fin de la démonstration (cas de V) (voir [11]).

(10) D'après [13].

$\int \hat{R}_V^{e_\lambda} d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ majore la quantité précédente mais tend vers 0 pour $\lambda \infty$. En effet d'après [7 théor. 9], $\int \hat{R}_V^{e_\lambda} d\rho_{x_0}^{\omega_0} \xrightarrow{\lambda \infty} \int \hat{R}_V^{\tilde{e}_\lambda} d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ où \tilde{e}_λ est l'adhérence fine de e_λ . Comme $\cap \tilde{e}_\lambda = E_0$ polaire, cette limite est 0.

Dans le cas général de W, il restera à montrer que h est semi-bornée. On voit comme plus haut :

$$\int \hat{R}_h^{e_\lambda} d\rho_{x_0}^{\omega_0} = \int \left[\int \hat{R}_X^{e_\lambda} d\rho_{x_0}^{\omega_0} \right] d\mu_h(X)$$

et il reste à voir que le crochet tend vers $0(\lambda \infty)$ pour tout $X \in \Delta_1$, où h a une limite fine $\neq 0$. Or en un tel X, e_λ^h est effilé pour λ assez grand et il suffit d'utiliser la remarque initiale du n° 14, puis la propriété évidente que $e_\lambda^h \cap K$ (K compact fixé) est vide pour λ assez grand.

V. — Limites de réduites

15. — On a déjà établi avec $(A_1 + D)$ que, pour un ordonné filtrant décroissant φ_i de fonctions finement semi-continues supérieurement sur Ω , majorées par un potentiel V fini continu, $\widehat{\inf \hat{R}_{\varphi_i}} = \hat{R}_{\inf \varphi_i}$ (voir [7]).

Si on suppose le potentiel V seulement semi-borné, on a indiqué [10] que le résultat s'étendait. La démonstration s'adapte à partir du lemme suivant :

LEMME 12. — (hyp. $A_1 + D$). Si $\{e_i\}$ est un ordonné filtrant d'ensembles finement fermés et V un potentiel semi-borné, infini sur $\cap e_i$; alors $\{e_i\}$ est V-évanescence.

Soit un compact $K \subset E$ tel que $\int \hat{R}_V^{e_i \cap K} d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \varepsilon$. Il suffira de voir que $\{e_i \cap K\}$ est V-évanescence. Soit $\alpha_\lambda = \{x; V(x) > \lambda\}$ et V_0 un potentiel fini continu majorant λ sur K. Alors

$$\hat{R}_V^{e_i \cap K} \leq \hat{R}_V^{\alpha_\lambda} + \hat{R}_{V_0}^{e_i \cap C\alpha_\lambda \cap K}.$$

Le 1^{er} terme à droite admet une intégrale en $d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ arbitrairement petite pour λ convenable puisque V est semi-borné. Quant au second, comme les $e_i \cap C\alpha_\lambda \cap K$ sont finement fermés et d'intersection vide, ils forment une famille V_0 -évanescence [7] d'où la conclusion.

THÉOREME 14. — (Hyp. $A_1 + D$). Si $\{\varphi_i\}$ est un ordonné filtrant décroissant de fonctions finement s.c.s. sur Ω , majorées par un potentiel semi-borné $V > 0$,

$$(2) \quad \widehat{\inf R_{\varphi_i}} = \widehat{\inf \hat{R}_{\varphi_i}} = \hat{R}_{\inf \varphi_i}$$

Car si ψ est surharmonique ≥ 0 et majore $\inf \varphi_i$, soit $e_i = \{x, \varphi_i \geq \psi + \varepsilon V\}$ ($\varepsilon > 0$) finement fermé. En tout point $x \in \cap e_i$, $\inf \varphi_i \geq \psi + \varepsilon V$ ce qui implique $\inf \varphi_i(x) = \infty$ donc $V(x) = +\infty$.

Alors

$$\varphi_i \leq \psi + \varepsilon V + R_{\psi}^{\varepsilon} \quad \text{d'où} \quad R_{\varphi_i} \leq \psi + \varepsilon V + R_{\psi}^{\varepsilon}$$

donc $\widehat{\inf R_{\varphi_i}} \leq \psi + \varepsilon V + \widehat{\inf R_{\psi}^{\varepsilon}}$ où le dernier terme à droite est nul d'après le lemme. On conclut :

$$\begin{aligned} \widehat{\inf R_{\varphi_i}} &\leq \psi \\ &\leq \hat{R}_{\inf \varphi_i} \end{aligned}$$

Le premier membre étant hyperharmonique, est majoré par $\hat{R}_{\inf \varphi_i}$, et d'autre part le majore évidemment, d'où l'égalité des termes extrêmes de l'énoncé. Le terme du milieu est a priori au plus égal mais comme $\hat{R}_{\varphi_i} \geq \hat{R}_{\inf \varphi_i}$, on trouve $\inf \hat{R}_{\varphi_i} \geq \hat{R}_{\inf \varphi_i}$ puis $\widehat{\inf \hat{R}_{\varphi_i}} \geq \hat{R}_{\inf \varphi_i}$, ce qui achève la démonstration.

16. — Si l'on remplace V par une fonction surharmonique, on fait intervenir la frontière minimale et, avec A_1^p (voir th. 1) la topologie fine prolongée alors discrète sur Δ_1 . Cela empêche le passage des suites aux filtres, utilisé implicitement plus haut dans Ω (voir [7] (d'ailleurs selon une indication générale de Doob, basée sur un lemme topologique de Choquet en espace à base dénombrable).

Aussi pour l'extension en vue, faut-il se limiter à des suites (des contre-exemples en montreraient de façon précise la nécessité).

LEMME 13. — (Hyp. $A_1 + D$) Soit H harmonique > 0 dans Ω , e_n une suite décroissante d'ensembles finement fermés sur $\Omega \cup \Delta_1$ (dans une topologie fine définie au th. 1) avec $\cap e_n \cap \Omega$

polaire et $\cap e_n \cap \Delta_1$ de mesure- μ_H nulle. Alors $e_n \cap \Omega$ est H-évanescence.

Cela résulte aussitôt de [7] théor. 10 (extension axiomatique du th. 7). Car l'ensemble de Δ_1 , où $e_n \cap \Omega$ est non effilé est dans $e_n \cap \Delta_1$, la μ_H -mesure de $\cap e_n \cap \Delta_1$ est nulle et comme $\cap e_n \cap \Omega$ est polaire, $\widehat{R}_{\Omega^{e_n \cap \Omega}} = 0$.

THÉORÈME 15. — On suppose $A_1 + D$, les constantes harmoniques et $\Omega \cap \Delta_1$ pourvu d'une topologie fine (V. théor. 1).

Si φ est une fonction réelle sur Ω , on notera $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ ses prolongements par semi-continuité supérieure ou inférieure fine sur Δ_1 ; si $\theta \geq 0$ sur $\Omega \cap \Delta_1$, on notera R_θ^* l'enveloppe inférieure des fonctions hyperharmoniques $\nu \geq 0$ sur Ω dont le prolongement ν majore θ , sauf sur un ensemble 1-polaire de Δ_1 (c.-à.-d. de μ_1 -mesure nulle).

Soit φ_n une suite décroissante de fonctions ≥ 0 sur Ω , finement semi-continues supérieurement, majorées quasi-partout par une fonction surharmonique W du type: V (potentiel semi-borné) + H (harmonique ≥ 0), μ_H associée étant absolument continue par rapport à μ_1 .

Alors

$$(3) \quad \widehat{\inf R_{\varphi_n}} = \widehat{\inf \hat{R}_{\varphi_n}} = \hat{R}_{\inf \overline{\varphi_n}}.$$

Reprenons l'idée de la démonstration du th. 14.

Soit ψ surharmonique ≥ 0 , dont le prolongement $\underline{\psi}$ majore $\inf \overline{\varphi_n}$ sur $\Omega \cap \Delta_1$ sauf sur un ensemble 1-polaire de Δ_1 . Soit $e_n = \{x \in \Omega \cap \Delta_1, \overline{\varphi_n} \geq \underline{\psi} + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, e_n est finement fermé; sur $\cap e_n$, $\inf \overline{\varphi_n} \geq \underline{\psi} + \varepsilon$ tandis que, dans $\Omega \cup \Delta_1$, $\underline{\psi} \geq \inf \overline{\varphi_n}$ sauf sur un ensemble α , 1-polaire. Cela implique que la partie de $\cap e_n$ où $\underline{\psi}$ est finie soit dans α ; comme $\{x; \underline{\psi}(x) = +\infty\}$ est 1-polaire (car il est polaire dans Ω et 1-négligeable sur Δ_1), on conclut que $\cap e_n$ est 1-polaire, donc de μ_H -mesure nulle sur Δ_1 .

Alors de $\varphi_n < \underline{\psi} + \varepsilon$ sur $Ce_n \cap \Omega$, on déduit :

$$R_{\varphi_n} \leq \underline{\psi} + \varepsilon + R_{\varphi_n}^{e_n} \text{ sur } \Omega.$$

Noter que $\hat{R}_{\varphi_n} \leq \hat{R}_W$. Comme $\Omega \cap e_n$ est V-évanescence et H-évanescence (lemmes 12 et 13), elle est W-évanescence, donc φ_1 -évanescence.

D'où

$$\begin{aligned} \widehat{\inf R_{\varphi_n}} &\leq \psi + \varepsilon \\ &\leq \psi \\ &\leq R_{\inf \bar{\varphi}_n}^* \quad \text{puis} \quad \widehat{\inf R_{\varphi_n}} \leq \hat{R}_{\inf \bar{\varphi}}^* \end{aligned}$$

D'autre part $R_{\varphi_n} \geq R_{\inf \bar{\varphi}_n}^*$; car si ν surharmonique ≥ 0 majore φ_n , elle admet [13] une limite fine $p.p.-d\mu_1$ sur Δ_1 ; et celle-ci majore $\bar{\varphi}_n$, $p.p.-d\mu_1$ sur Δ_1 , donc majore de même $\inf \bar{\varphi}_n$.

D'où

$$\nu \geq R_{\inf \bar{\varphi}_n}^* \quad \text{puis} \quad \inf R_{\varphi_n} \geq \inf \hat{R}_{\varphi_n} \geq \hat{R}_{\inf \bar{\varphi}_n}^*$$

ce qui permet d'achever la démonstration.

Remarque. — On peut donner bien des variantes, dissocier l'égalité (3) en inégalités n'exigeant pas les mêmes hypothèses, étudier $R_{\varphi_n}^*$ pour φ_n finement s.c.s. sur $\Omega \cap \Delta_1$. Signalons seulement que, plus haut, on obtient le même résultat en supposant, séparément ou non, pour R_φ et R_θ^* , qu'il s'agit d'enveloppes de fonctions ne majorant φ et θ dans Ω que quasi-partout (dans le second cas, $\underline{\nu}$ majore θ sur $\Omega \cap \Delta_1$, sauf sur un ensemble 1-polaire).

BIBLIOGRAPHIE

- [0] H. BAUER, Propriétés fines des fonctions hyperharmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 15, fasc., 1 (1965), 137-154.
- [1] N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU and A. CORNEA, Axiomatic theory of harmonic functions, Balayage, *Ann. Inst. Fourier*, 15, fasc., 2, (1965), 37-70.
- [2] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, *Sém. Théorie du potentiel, Paris*, t. 2, (1958).
- [3] M. BRELOT, Lectures on potential theory, Tata Institute, Bombay, (1960), (2^e édition à l'impression).
- [4] M. BRELOT, Introduction axiomatique de l'effilement, *Annali di Matematica* 57, (1962), p. 77.
- [5] M. BRELOT, Étude comparée des deux types d'effilement, *Ann. Inst. Fourier*, 15, 1, (1965), 155-168 ou volume spécial du Colloque de théorie du potentiel Paris-Orsay (1964), CNRS n° 146.
- [6] M. BRELOT, Aspect statistique et comparé des deux types d'effilement, *Anais de Ac. Bras. de Ciencias* 27, (1965).

- [7] M. BRELOT, Capacity and balayage for decreasing sets, *Symposium on probability and statistics*, Berkeley, (1965 paru en 1967).
- [8] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques, *Sém. de math. Sup, Montréal*, (été 1965, paru en 1966).
- [9] M. BRELOT, La topologie fine en théorie du potentiel, *Colloque de Loutraki*, mai-juin 1966. Lecture notes, Springer 1967.
- [10] M. BRELOT, Einige neuere Fortschritte in der axiomatischen Theorie der harmonischen Funktionen, *Colloque de Karl Marx Stadt*, (juin 66).
- [11] M. BRELOT, Recherches axiomatiques sur un théorème de Choquet. concernant l'effilement, *Nagoya Journal*, 30 (1967) 39-46.
- [12] K. GOWRISANKARAN, Extreme harmonic functions and boundary value problems, *Ann. Inst. Fourier*, 13, 2, (1963), 307-356.
- [13] K. GOWRISANKARAN, Fatou-Naïm-Doob limit theorems in the axiomatic system of Brelot, *Ann. Inst. Fourier*, 16, 2 (1966), 55-467.
- [14] Mme R. M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 12, (1962), 445-571.
- [15] MYSKIS, On the concept of a boundary, *Mat. Sbornik* NS 25 (67), 387-414 (1949) et *Ann. math. Soc.*, translations series 1 vol. 8, p. 11.
- [16] Mlle L. NAÏM, Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 7, (1957), 183-285.

Manuscrit reçu le 3 Novembre 1967.

Marcel BRELOT,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-Curie,
Paris, 5^e.
