ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUSTAVE CHOQUET

Cardinaux 2-mesurables et cônes faiblement complets

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 2 (1967), p. 383-393
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_383_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967), 383-393.

CARDINAUX 2-MESURABLES ET CÔNES FAIBLEMENT COMPLETS

par Gustave CHOQUET

Rappelons qu'un nombre cardinal C est dit 2-*mesurable* s'il existe, sur un ensemble I dont le cardinal est C, une mesure positive μ, dénombrablement additive, définie sur l'ensemble de toutes les parties de I, qui ne prenne que deux valeurs 0 et 1, et qui soit non-triviale en ce sens que

$$\mu(\mathrm{I}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mu(\{x\}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{E}.$$

Les travaux de Banach, Kuratowski, Ulam, Tarski, Keisler, D. Scott, Vopěnka ont approfondi cette notion. On sait maintenant que les cardinaux 2-mesurables, s'il en existe, sont extrêmement grands; le plus petit d'entre eux dépasse de beaucoup le plus petit cardinal inaccessible ([1]).

Il est clair que tout cardinal plus grand qu'un cardinal 2-mesurable est aussi un cardinal 2-mesurable. Si donc nous appelons *modéré* tout cardinal non 2-mesurable (et tout ensemble l'admettant pour cardinal), nous voyons que les cardinaux modérés constituent une section commençante de la classe de tous les cardinaux; $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$ en sont les exemples les plus connus. Plus généralement on montre simplement (voir Gillman et Jerison [2], 12.5) que si I est modéré et $(\mathrm{X}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'ensembles modérés, le produit des X_i est aussi modéré.

Nous allons établir ici ([2]) un critère inattendu de 2-mesurabilité en termes de cônes convexes faiblement complets :

([1]) Un cardinal C est dit *inaccessible* si pour tout ordinal α tel que card $(\alpha) < \mathrm{C}$ on a $\prod_{\beta\leqslant\alpha} \aleph_\beta < \mathrm{C}$.

([2]) Les résultats exposés ici ont été annoncés dans Choquet [1].

Dire qu'un ensemble I est modéré équivaut à dire que le cône positif de la somme directe $R^{(I)}$ est complet pour la plus fine de toutes les topologies faibles sur $R^{(I)}$.

Dans une seconde partie nous étudions, de façon plus générale, le cône des formes linéaires positives sur l'espace $\mathcal{C}(E)$ des fonctions numériques continues sur un espace E complètement régulier; nous montrons que ce cône est bien coiffé, et que l'ensemble de ses génératrices extrémales est fermé.

1. *Préliminaires* (3) : *Ultrafiltres.*

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre quelconque sur I; on dira que c'est un *δ-ultrafiltre* s'il est stable par intersection dénombrable.

Dire que $\mathfrak{U}$ est un δ-ultrafiltre équivaut à dire que toute intersection dénombrable d'éléments de $\mathfrak{U}$ est non-vide; en effet cette dernière propriété entraîne que l'ensemble de ces intersections dénombrables est lui-même un filtre, évidemment plus fin que $\mathfrak{U}$, donc identique à $\mathfrak{U}$.

Cela équivaut aussi à dire que pour toute application f de I dans $\mathbf{R}_+$ la limite de f suivant $\mathfrak{U}$ (qui existe puisque $\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre), est finie. En effet s'il existe une f telle que $\lim_{\mathfrak{U}} f = +\infty$, les ensembles $X_n = \{x \in I : f(x) > n\}$ sont des éléments de $\mathfrak{U}$ et $\bigcap X_n = \emptyset$; inversement s'il existe une suite (X_n) d'éléments de $\mathfrak{U}$ d'intersection vide, suite qu'on peut alors supposer décroissante, la fonction f qui vaut 0 hors de X_0, et qui pour tout n vaut n sur $(X_n \dot{-} X_{n-1})$ est telle que $\lim_{\mathfrak{U}} f = +\infty$.

Cette propriété caractéristique des δ-ultrafiltres peut être précisée par l'énoncé suivant :

LEMME 2. — Si *f est une application quelconque de* I *dans un espace tolopogique* E, *si* $\mathfrak{U}$ *est un δ-ultrafiltre sur* I *tel que* $\lim_{\mathfrak{U}} f = b$, *et si le point b de* E *est intersection d'une famille dénombrable* (V_n) *de ses voisinages, alors f est $\mathfrak{U}$-constante en ce sens qu'il existe un* $X \in \mathfrak{U}$ *tel que* $f(X) = \{b\}$.

En effet, si $\{b\} = \bigcap_n V_n$, il existe pour tout n un $X_n \in \mathfrak{U}$ tel

(3) Les propriétés rappelées dans les lemmes 2 et 4 sont bien connues, sous des formes plus ou moins voisines : Voir par exemple Gillman et Jerison 2, chapitre 12.

que $f(X_n) \subset V_n$; si l'on pose $X = \bigcap X_n$, on a bien $X \in \mathfrak{U}$ et $f(X) \subset \bigcap X_n = \{b\}$.

Tout ultrafiltre *trivial*, c'est-à-dire le filtre des sur-ensembles d'un point x de I est évidemment un δ-ultrafiltre.

3. *Préliminaires : Mesures à deux valeurs.*

Rappelons maintenant la correspondance canonique entre ultrafiltres et 2-mesures sur un ensemble I :

Soit μ une mesure simplement additive, définie sur l'ensemble $\mathfrak{p}(I)$ tout entier, ne prenant que les valeurs 0, 1 et telle que $\mu(I) = 1$. L'ensemble des $X \subset I$ tels que $\mu(X) = 1$ est évidemment un filtre; d'autre part, pour toute partition de I en deux ensembles, l'un d'eux a pour mesure 1, donc appartient au filtre; donc ce dernier est un ultrafiltre, qu'on notera μ^*.

Inversement, pour tout ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur I, si l'on pose $\mu(X) = 1$ ou 0 suivant que $X \in \mathfrak{U}$ ou $X \notin \mathfrak{U}$, une vérification facile montre que μ est une telle mesure; si on la note $\mathfrak{U}^*$, il est clair d'après les définitions de μ^* et $\mathfrak{U}^*$, que l'on a identiquement :

$$\mu^{**} = \mu \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{U}^{**} = \mathfrak{U}.$$

Dire qu'une 2-mesure μ charge un point a, équivaut à dire que l'ultrafiltre μ^* est l'ultrafiltre trivial des sur-ensembles de $\{a\}$.

Dire qu'une 2-mesure μ est dénombrablement additive équivaut à dire que l'ultrafiltre μ^* est un δ-ultrafiltre.

En résumé :

Lemme 4. — *Soit* I *un ensemble non-vide quelconque; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) I *est modéré.*

2) *Pour tout ultrafiltre non trivial* $\mathfrak{U}$ *sur* I, *il existe une application* f *de* I *dans* $\mathbf{R}_+$ *telle que* $\lim_{\mathfrak{U}} f = +\infty$.

3) *Tout δ-ultrafiltre sur* I *est trivial.*

5. *Préliminaires sur* R^I *et* $R^{(I)}$.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$; on sait (voir Kelley et Namioka [6], Problèmes 14. D et 17. F) que E muni de la topologie localement convexe la plus fine (définie par la famille de toutes les semi-normes sur E) est complet.

Mais la topologie qui va nous intéresser ici est la plus fine des topologies faibles sur E, la topologie $\mathcal{T}$ définie par la famille de toutes les semi-normes de la forme $|l|$ (où $l \in E^*$, dual algébrique de E), c'est-à-dire encore la topologie $\sigma(E, E^*)$.

Si $(a_i)_{i \in I}$ désigne une base de l'espace vectoriel E, l'espace E est canoniquement isomorphe à la somme directe $\mathbf{R}^{(I)}$; par cette isomorphie, le cône convexe C engendré dans E par les a_i devient $\mathbf{R}_+^{(I)}$; le dual (algébrique et topologique) de $\mathbf{R}^{(I)}$ est $\mathbf{R}^I$, et la topologie faible étudiée sur $\mathbf{R}^{(I)}$ n'est autre que $\sigma(\mathbf{R}^{(I)}, \mathbf{R}^I)$ pour la dualité définie par la forme bilinéaire $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$.

Donc dire que le cône C est complet pour la topologie $\mathcal{T}$ équivaut à dire que $\mathbf{R}_+^{(I)}$ est complet pour la topologie $\sigma(\mathbf{R}^{(I)}, \mathbf{R}^I)$, ce qui peut encore s'exprimer en disant que toute limite simple de formes linéaires continues positives sur $\mathbf{R}^I$ est elle-même continue.

Nous n'utiliserons plus désormais que la terminologie des espaces $\mathbf{R}^{(I)}$ et $\mathbf{R}^I$.

Rappelons pour terminer que sur $\mathbf{R}^I$ la topologie produit est identique à $\sigma(\mathbf{R}^I, \mathbf{R}^{(I)})$, et si l'on identifie $\mathbf{R}^I$ à l'espace $\mathcal{F}(I, \mathbf{R})$ des applications de I dans $\mathbf{R}$, cette topologie n'est autre que la topologie de la convergence simple.

Lemme 6. — *Soit* I *un ensemble non-vide quelconque; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

4) *Toute forme linéaire positive sur* $\mathbf{R}^I$ *est continue.*

5) *Toute limite simple de formes linéaires positives continues sur* $\mathbf{R}^I$ *est continue.*

6) *Le cône positif* $\mathbf{R}_+^{(I)}$ *de* $\mathbf{R}^{(I)}$ *est complet pour la topologie* $\sigma(\mathbf{R}^{(I)}, \mathbf{R}^I)$.

Démonstration. — L'équivalence de 5 et 6, observée déjà ci-dessus, ne fait que traduire la définition du mot « complet ».

Comme évidemment $4 \Longrightarrow 5$, il reste seulement à montrer que $5 \Longrightarrow 4$; cela résulte du fait connu que toute forme linéaire positive sur un cône convexe fermé est limite simple de formes linéaires positives continues sur ce cône. Plus généralement rappelons que l'on a deux espaces vectoriels A_1, A_2 avec $A_1 \subset A_2$ en dualité avec un troisième B, pour tout cône convexe

X de B, fermé pour $\sigma(B, A_1)$ et $\sigma(B, A_2)$, le polaire de X dans A_2 est la fermeture du polaire de X dans A_1.

7. *Caractérisation des formes linéaires positives sur* $\mathbf{R}^I$.

DÉFINITION 7. — *Soit* I *un ensemble non vide quelconque. Pour tout* δ*-ultrafiltre* $\mathfrak{U}$ *sur* I, *la forme linéaire positive* $T_{\mathfrak{U}}$ *sur* $\mathbf{R}^I$ (*identifié à* $\mathcal{F}(I, \mathbf{R})$), *définie par* $T_{\mathfrak{U}}(f) = \lim_{\mathfrak{U}} f$, *s'appelle la* forme élémentaire *associée à* $\mathfrak{U}$.

Elle est dite trivale *ou* singulière *suivant que* $\mathfrak{U}$ *est un* δ*-ultrafiltre trivial ou non trivial.*

L'application $\mathfrak{U} \to T_{\mathfrak{U}}$ est injective car si $\mathfrak{U}_1 \neq \mathfrak{U}_2$, il existe $X_1 \in \mathfrak{U}_1$, $X_2 \in \mathfrak{U}_2$ avec X_1, X_2 disjoints, et si [4] $f = 1_{X_1}$, on a évidemment $T_{\mathfrak{U}_1}(f) = 1$ et $T_{\mathfrak{U}_2}(f) = 0$.

Le théorème que nous allons énoncer maintenant est implicitement contenu dans Mackey [6]; notre démonstration est voisine de celle de Mackey; nous en donnerons au n° 18 une autre démonstration.

THÉORÈME 8. — *Toute forme linéaire positive* T *sur* $\mathbf{R}^I$ *s'écrit d'une façon unique comme combinaison linéaire finie à coefficients positifs de formes élémentaires.*

Démonstration. — L'inégalité élémentaire $f \leqslant n^{-1}f^2 + n$, valable pour toute $f \geqslant 0$ et tout entier $n > 0$ montre que si $T(1) = 0$, on a pour tout $n : T(f) \leqslant n^{-1}T(f^2)$, d'où $T(f) = 0$; Donc si $T \neq 0$, ce que nous supposerons désormais, on a $T(1) \neq 0$.

Pour tout $X \subset I$, nous poserons $\alpha(X) = T(1_X)$; la fonction α définie sur $\mathfrak{p}(I)$ est évidemment une mesure simplement additive.

2) Nous allons montrer d'abord que I est *réductible*, c'est-à-dire admet une partition finie (A_p) $(p = 1, 2, \ldots, p_0)$ en sous-ensembles *atomiques* (en appelant atomique tout $A \subset I$ tel que $\alpha(A) \neq 0$ et tel que pour tout $X \subset A$ on ait $\alpha(X) = \alpha(A)$ ou 0).

En effet si I n'est pas réductible, il admet une partition en deux ensembles X_1, Y_1 de α-mesure > 0, dont l'un au moins,

[4] Nous noterons 1_X l'indicatrice de X, c'est-à-dire la fonction qui vaut 1 dans X, et 0 hors de X.

par exemple Y_1, est non réductible; Y_1 admet donc une partition en deux ensembles X_2, Y_2 de α-mesure > 0 dont l'un au moins, par exemple Y_2 est non réductible; et ainsi de suite par récurrence.

On définit ainsi une suite infinie (X_n) d'ensembles disjoints de I, de α-mesure > 0; or ceci est impossible, car soit f un élément de $\mathscr{F}^+(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ tel que $f(x) = n/\alpha(X_n)$ sur X_n.

Pour tout n on a

$$f \geqslant (n/\alpha(X_n))1_{X_n}, \qquad \text{d'où} \qquad T(f) \geqslant (n/\alpha(X_n))\alpha(X_n) = n,$$

ce qui est absurde.

3) Posons $k_p = \alpha(A_p)$; pour tout $p \leqslant p_0$, $k_p^{-1}\alpha$ est une mesure non nulle à deux valeurs 0,1 sur $\mathfrak{p}(A_p)$; soit $\mathfrak{U}_p$ l'ultrafiltre qu'elle définit sur A_p; montrons que $\mathfrak{U}_p$ est un δ-ultrafiltre.

Sinon (voir Préliminaires 3) il existerait sur A_p une fonction $g \geqslant 0$ telle que $\lim\limits_{\mathfrak{U}_p} g = +\infty$. Soit $\hat{g}$ la fonction sur I qui vaut g sur A_p et 0 ailleurs, et posons $X_{n,p} = \{x \in A_p : g(x) > n\}$.

Comme $X_{n,p} \in \mathfrak{U}_p$, on a $T(1_{X_{n,p}}) = k_p$, d'où

$$T(\hat{g}) \geqslant T(1_{X_{n,p}} \cdot \hat{g}) \geqslant nT(1_{X_{n,p}}) = nk_p \quad \text{pour tout } n,$$

ce qui est absurde.

4) Remarquons d'abord que, pour tout $X \subset I$, l'inégalité $1_X \cdot f \leqslant 1_X(n^{-1}f^2 + n)$ montre comme en 1°), que, si $T(1_X) = \alpha(X) = 0$, on a aussi $T(1_X \cdot f) = 0$ pour toute $f \geqslant 0$.

On va montrer que $T = \sum\limits_1^{p_0} k_p T_{\mathfrak{U}_p}$. Pour cela, remarquons que pour toute $f \geqslant 0$ et tout $p \leqslant p_0$ il existe, d'après le lemme 2, un $B_p \in \mathfrak{U}_p$ tel que f soit sur B_p égal à une constante λ_p; et comme les $\mathfrak{U}_p$ sont distincts on peut supposer ces B_p disjoints deux à deux; on peut donc écrire

$$f = \sum_p \lambda_p 1_{B_p} + 1_c \cdot f, \qquad \text{où} \qquad C = \complement(\cup B_p),$$

d'où

$$T(f) = \sum_p \lambda_p T(1_{B_p}) + T(1_c \cdot f).$$

Or, $T(1_c) = \alpha(C) = 0$, d'où d'après une remarque ci-dessus, $T(1_c \cdot f) = 0$. Donc $T(f) = \Sigma\lambda_p k_p = \Sigma k_p \lim\limits_{\mathfrak{U}_p} f$, ce qui est la relation cherchée. L'unicité de la décomposition de T est immédiate.

COROLLAIRE 9. — *Le sous-espace vectoriel* L *de* $(\mathbf{R}^{\mathrm{I}})^*$ *constitué par les formes linéaires relativement bornées admet pour base l'ensemble* B *des formes élémentaires, et le cône convexe engendré par* B *est identique à* L_+.

Cela résulte simplement du théorème 8 et du fait que, $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$ étant réticulé, on a $\mathrm{L} = \mathrm{L}_+ - \mathrm{L}_+$.

THÉORÈME 10. — *Les énoncés* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *des lemmes* 4 et 6 *sont équivalents. En particulier* (I modéré) $\Longleftrightarrow$ ($\mathbf{R}_+^{(\mathrm{I})}$ *est complet pour* $\sigma(\mathbf{R}^{(\mathrm{I})}, \mathbf{R}^{\mathrm{I}})$).

Démonstration. — Il suffit de montrer que $3 \Longrightarrow 4$ et que $4 \Longrightarrow 1$:

$3 \Longrightarrow 4$ puisque d'après le théorème 8, (3) entraîne que toute forme linéaire positive sur $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$ est combinaison linéaire de formes triviales, donc continues.

$4 \Longrightarrow 1$ ou, ce qui revient au même $\overline{1} \Longrightarrow \overline{4}$, car si I est 2-mesurable, il existe sur I un δ-ultrafiltre singulier $\mathfrak{U}$; la forme linéaire élémentaire associée $\mathrm{T}_{\mathfrak{U}}$ n'est pas continue puisque $\mathrm{T}_{\mathfrak{U}}(f) = 0$ pour toute f à support fini.

Remarque 11. — Pour tout I infini, le cône $\mathbf{R}_+^{(\mathrm{I})}$, muni de la topologie faible de $\mathbf{R}^{(\mathrm{I})}$ a des propriétés intéressantes qu'il est bon de souligner : le cône $\mathbf{R}_+^{(\mathrm{I})}$ est complètement réticulé; il est (ainsi que chacun de ses sous-cônes fermés) réunion de ses chapeaux (voir Choquet [1]); ce n'est pas un espace de Baire, même lorsqu'il est complet; et aucun de ses points n'a une base dénombrable de voisinages, même lorsque $\mathrm{I} = \mathbf{N}$ et où alors $\mathbf{R}_+^{(\mathrm{I})}$ est réunion dénombrable de sous-cônes convexes à base compacte métrisable.

Remarque 12. — Soit E_{I} l'ensemble compact classique des ultrafiltres sur un ensemble 2-mesurable I, et soit Δ le sous-espace de E_{I} constitué par les δ-ultrafiltres non triviaux sur I.

Ce sous-espace Δ a des propriétés singulières mais d'ailleurs évidentes : le filtre des voisinages de chacun de ses points est stable par intersection dénombrable; tout sous-ensemble dénombrable de Δ est donc discret, et tout sous-compact de Δ est fini, bien que Δ lui-même n'ait aucun point isolé.

13. *Formes linéaires positives sur l'espace* $\mathcal{C}(\mathrm{E})$ *des fonctions numériques continues sur un espace complètement régulier* E.

Les travaux de base de Hewitt [4] et [5], et le mémoire de Glicksberg [3] ont approfondi la structure de l'algèbre des fonctions continues sur un espace E complètement régulier. Nous donnerons ici un exposé bref et indépendant de plusieurs des résultats essentiels de Hewitt, avant d'étudier le cône des formes positives sur $\mathcal{C}(\mathrm{E})$.

Désignons par $\mathcal{B}(\mathrm{E})$ le sous-espace de $\mathcal{C}(\mathrm{E})$ constitué par les fonctions bornées. Le compactifié $\beta\mathrm{E}$ de Stone-Cěch de E est alors la fermeture dans $\mathbf{R}^{\mathcal{B}(\mathrm{E})}$ de l'image $\varphi(\mathrm{E})$ de E par l'injection bicontinue $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbf{R}^{\mathcal{B}(\mathrm{E})}$ dont la coordonnée d'indice f est l'application $x \to f(x)$.

Toute $f \in \mathcal{C}(\mathrm{E})$ se prolonge sur $\beta\mathrm{E}$ en une application continue $\tilde{f}$ de E dans $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$, et l'application $f \to \tilde{f}$ est une bijection de E sur l'ensemble des applications continues de E dans $\overline{\mathbf{R}}$ qui sont finies sur E.

On désignera par $\upsilon\mathrm{E}$ le *stabilisé de Hewitt* de E, c'est-à-dire l'ensemble des points x de $\beta\mathrm{E}$ tels que $\tilde{f}(x)$ soit fini pour toute $f \in \mathcal{C}(\mathrm{E})$; on a évidemment $\mathrm{E} \subset \upsilon\mathrm{E}$ (on montre, mais nous ne l'utiliserons pas ici, que $\upsilon(\upsilon\mathrm{E}) = \upsilon\mathrm{E}$: voir Hewitt [4], [5] ou Gillman-Jerison [2], ch. 8). On peut avoir $\mathrm{E} \neq \upsilon\mathrm{E}$; c'est par exemple le cas pour l'ensemble E des ordinaux dénombrables muni de la topologie de l'ordre.

THÉORÈME 14. — *Soient* E *un espace complètement régulier,* M *le cône des formes linéaires positives sur* $\mathcal{C}(\mathrm{E})$ (*ordonné par* $\mathcal{C}^+(\mathrm{E})$), $\mathcal{M}_\upsilon^+(\mathrm{E})$ *l'ensemble des mesures de Radon positives sur* $\beta\mathrm{E}$, *à support contenu dans* $\upsilon\mathrm{E}$.

1) *L'application* $\mu \to \mathrm{T}\mu$ *de* $\mathcal{M}_\upsilon^+(\mathrm{E})$ *dans* M *définie par* $\mathrm{T}_\mu(f) = \mu(\tilde{f})$ *pour toute* $f \in \mathcal{C}(\mathrm{E})$, *est bijective.*

2) *L'application inverse* $\mathrm{T} \to \mu_{\mathrm{T}}$ *est continue* (*pour les topologies* $\sigma(\mathrm{M}, \mathcal{C}(\mathrm{E}))$ *et* $\sigma(\mathcal{M}_\upsilon^+(\mathrm{E}), \mathcal{C}(\beta\mathrm{E}))$), *mais bicontinue seulement si* $\beta\mathrm{E} = \upsilon\mathrm{E}$.

Démonstration. — 1) Donnons-nous $\mathrm{T} \in \mathrm{M}$, et soit μ la restriction de T à $\mathcal{B}(\mathrm{E})$; la relation $\mu(\tilde{f}) = \mathrm{T}(f)$ identifie μ à une mesure de Radon sur $\beta\mathrm{E}$.

Pour toute $f \in \mathcal{C}^+(\mathrm{E})$ et tout $n \in \mathbf{N}$, la relation

$$\mu(\inf(n, \tilde{f})) = \mathrm{T}(\inf(n, f) \leqslant \mathrm{T}(f)$$

montre que $\tilde{f}$ est μ-intégrable et que $\mu(\tilde{f}) \leqslant \mathrm{T}(f)$.

L'élément T' de M défini par $T'(f) = T(f) - \mu(\tilde{f})$ est tel que $T'(1) = 0$. Or l'inégalité $f \leqslant n^{-1}f^2 + n$ montre que $T'(f) \leqslant n^{-1}T'(f^2)$ pour tout n, d'où $T' = 0$.

On a donc identiquement $T(f) = \mu(\tilde{f})$.

Étudions le support de μ : Soit $a \in \sup \mu$, et supposons $a \notin \upsilon E$. Il existe alors une $f \in \mathcal{C}^+(E)$ telle que $\tilde{f}(a) = +\infty$.

Posons $\omega_n = \{x \in \beta E : \tilde{f}(x) > n\}$ et $\alpha_n = \mu(\omega_n)$; on a $\alpha_n > 0$ puisque $a \in \operatorname{supp} \mu$. Or il existe une fonction numérique croissante continue $\varphi \geqslant 0$ sur $\mathbf{R}^+$ telle que $\varphi(n) > n/\alpha_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$; l'élément $g = \varphi(f)$ de $\mathcal{C}(E)$ est tel que $\tilde{g} \geqslant n/\alpha_n$ sur ω_n, d'où $\mu(\tilde{g}) \geqslant \alpha_n(n/\alpha_n) = n$ pour tout n, ce qui est impossible.

Autrement dit $\operatorname{supp} \mu \subset \upsilon E$.

2) La relation $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{C}(E)$ montre que la topologie $\sigma(M, \mathcal{C}(E))$ est plus fine que $\sigma(M, \mathcal{B}(E))$, d'où la continuité annoncée, en identifiant M à $\mathcal{M}_\upsilon^+(E)$ et $\mathcal{C}(\beta E)$ à $\mathcal{B}(E)$. Ces topologies sont identiques si $\mathcal{B}(E) = \mathcal{C}(E)$.

Supposons maintenant $\upsilon E \neq \beta E$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}^+(E)$ contient une f non bornée ; il existe alors dans E une suite (x_n) telle que $f(x_n) \geqslant n$; la suite des mesures $n^{-1}\varepsilon_{x_n}$ converge vers 0 pour $\sigma(M, \mathcal{B}(E))$ mais non pour $\sigma(M, \mathcal{C}(E))$.

THÉORÈME 15. — *Le cône convexe* M *des formes positives sur* $\mathcal{C}(E)$ *est complètement réticulé. Pour la topologie* $\sigma(M, \mathcal{C}(E))$ *il est faiblement complet et bien coiffé, et l'ensemble de ses génératrices extrémales* (*dont chacune est engendrée par un* ε_x, *où* $x \in \upsilon E$) *est fermé.*

Démonstration. — *a*) Comme $\mathcal{C}^+(E)$ est réticulé, $M = (\mathcal{C}(E)^*_+$ est complètement réticulé. M est fermé dans $(\mathcal{C}(E))^*$ donc faiblement complet.

b) Le théorème 14 montre évidemment que ses génératrices extrémales sont les demi-droites $\delta_x = \{k\varepsilon_x : k \geqslant 0\}$, où $x \in \upsilon E$. Montrons que leur réunion est fermée, c'est-à-dire que si l'on pose $T_{x_i}(f) = \tilde{f}(x_i)$ avec $x_i \in \upsilon E$, et si T est limite suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ d'une famille $(k_i T_{x_i})$, T de la forme kT_a avec $a \in \upsilon E$:

La relation $T(1) = \lim (k_i)$ montre que $k = \lim (k_i)$ est finie. Si $k = 0$, on a $T(1) = 0$, d'où aussi $T = 0$.

Si $k \neq 0$, posons $a = \lim\limits_{\mathcal{U}} (x_i)$; on a $T(f) = \lim k_i \tilde{f}(x_i) = k\tilde{f}(a)$, ce qui montre, d'une part que $\tilde{f}(a) \neq \infty$ pour tout $f \in \mathcal{C}(E)$, d'où $a \in \upsilon F$, d'autre part que $T = kT_a$.

c) Enfin montrons que M est bien coiffé, c'est-à-dire que tout $T_0 \in M$ appartient à un convexe compact K de complémentaire convexe dans M : Il suffit en effet de prendre

$$K = \{T \in M : \operatorname{supp} \mu_T \subset \operatorname{supp} \mu_{T_0} \quad \text{et} \quad \mu_T(1) \leqslant \mu_{T_0}(1)\}$$

16. *Cas de* E *localement compact.*

E est alors une partie ouverte de βE ; toute μ portée par un compact de υE s'écrit de façon unique $\mu = \mu_1 + \mu_2$, où μ_1 est portée par E, μ_2 portée par un compact de $(\upsilon E \dot{-} E)$.

Il faut noter que μ_1 ne peut pas être n'importe quelle mesure bornée sur E; plus précisément. dans l'ensemble des mesures bornées sur E, les mesures μ_1 sont caractérisées dans E lui-même par la propriété suivante :

Toute $f \in \mathcal{C}(E)$ *est bornée sur le support de* μ_1 *dans* E.

Voici un exemple d'une telle mesure μ_1 à support non compact dans E. Posons $E = [0, 1] \times F \dot{-} \{a\}$, où F est l'ensemble, muni de la topologie de l'ordre, des ordinaux $\leqslant \Omega$ (avec Ω = premier ordinal non dénombrable) et où $a = (1, \Omega)$.

Si l'on prend pour μ_1 la mesure de Lebesgue de $([0, 1]) \times \Omega$, le couple (μ_1, E) répond à la question, compte tenu de ce que toute $f \in \mathcal{C}(E)$ a une limite finie à l'infini.

Théorème 17. — *Lorsque* E *est localement compact, dire que l'ensemble* $\mathcal{M}_K^+(E)$ *des mesures positives à support compact sur* E *est faiblement complet pour la dualité associée à* $\mathcal{C}(E)$, *équivaut à dire que* $E = \upsilon E$.

En effet $\mathcal{M}_K^+(E)$ est partout dense dans $\mathcal{M}_\upsilon^+(E)$ pour la topologie étudiée, donc ne peut être complet qu'en lui étant identique.

Notons que la relation $E = \upsilon E$ peut aussi s'exprimer en disant que pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur E qui converge vers l'infini, il existe une $f \in \mathcal{C}^+(E)$ telle que $\lim_{\mathcal{U}} f = +\infty$. C'est le cas par exemple si E est réunion dénombrable de compacts.

18. *Cas de* E *discret.*

On retrouve ici le cas étudié au début de ce travail, en identifiant $\mathcal{M}_K^+(E)$ à $\mathbf{R}_E^+$, et $\mathcal{C}(E)$ à $\mathbf{R}^E$.

La condition $E = \upsilon E$ exprime que pour tout ultrafiltre non trivial $\mathcal{U}$ sur E, il existe une fonction numérique f sur E qui converge vers $+\infty$ suivant $\mathcal{U}$, autrement dit que E est modéré. Le théorème 10 est dons un cas particulier du théorème 17.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Choquet, Ensembles et cônes convexes faiblement complets, *C.R. Acad. Sc.*, t. 254, Mars 1962, 2123-2125.

[2] L. Gillman et M. Jerison, Rings of continuous functions, Van Nostrand.

[3] I. Glicksberg, The representation of functionals by integrals, *Duke Math. J.*, 19, (1952), 253-261.

[4] E. Hewitt, Rings of real valued continuous functions I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64 (1948), 54-99.

[5] E. Hewitt, Linear functionals on spaces of continuous functions, *Fund. Math.*, 37, (1950), 161-189.

[6] J. L. Kelley et I. Namioka, Linear topological spaces, Princeton, (1963).

[7] G. W. Mackey, Equivalence of a problem in measure theory to a problem in the theory of vector lattices, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50 (1944), 719-722.

[8] D. Scott, Mesurable cardinals and constructible sets, *Bull. Acad. Pol.*, Vol. 9, (1961), pp. 521-524.

Manuscrit reçu le 2 novembre 1967.

Gustave Choquet,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-Curie,
Paris, 5e