ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN FRESNEL

Nombres de Bernoulli et fonctions Lp-adiques

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 2 (1967), p. 281-333
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_281_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 2 (1967), 281-333.

NOMBRES DE BERNOULLI ET FONCTIONS L p-ADIQUES

par Jean FRESNEL

Introduction.

Jacques Bernoulli dans son œuvre posthume (Ars conjectandi Bâle 1713) introduisit la suite infinie de nombres rationnels devenus plus tard célèbres dans l'Analyse sous le nom de Nombres de Bernoulli. Dès lors, on ne cessa de rechercher les propriétés arithmétiques de ces nombres. En 1840 Clausen Staudt explicita parfaitement le dénominateur des nombres de Bernoulli. En 1851 E. F. Kummer [7] découvrit ce qu'on appelle maintenant les congruences de Kummer. En 1923, N. Nielsens [10] fit le point des connaissances arithmétiques de l'époque sur les nombres de Bernoulli dans son « traité élémentaire des nombres de Bernoulli ». H. W. Leopolt, [9] en 1958, définit les nombres de Bernoulli généralisés (définition déjà amorcée par Ankeny-Artin-Chowla [2] pour le caractère d'un corps quadratique). Ils sont obtenus par exemple à partir des valeurs prises sur les entiers négatifs par la fonction $L(., \chi)$ de Dirichlet de la façon suivante :

$$B^n(\chi) = -nL(1-n, \chi).$$

Pour le caractère trivial ε (défini par $\varepsilon(n) = 1\ \forall n$) nous avons

$$B^n(\varepsilon) = -n\zeta(1-n)$$

où ζ est la fonction Zéta de Riemann. Les nombres $B^n(\varepsilon)$ ne sont autres que les nombres de Bernoulli ordinaires. H. W. Leopolt établit alors pour ces nombres un analogue du théorème de Clausen-Staudt. L'année suivante c'est-à-dire en

1959, L. Carlitz [4] publia un article où il étendait les congruences de Kummer à ces nombres généralisés.

Tout comme les nombres de Bernoulli ordinaires interviennent dans l'arithmétique du corps cyclotomique des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité (p nombre premier), leurs analogues généralisés ont été introduits pour éclairer la structure des corps de nombres abéliens. A l'aide d'un équivalent p-adique $R_p(K)$ du régulateur (en prenant le logarithme p-adique des unités au lieu du logarithme ordinaire) et d'un équivalent p-adique $L_p(\chi)$ de la valeur $L(1, \chi)$ (en interprétant p-adiquement de façon convenable l'expression explicite de $L(1, \chi)$), H. W. Leopolt [9] établit une formule analytique p-adique du nombre de classes des corps réels

$$\frac{2^{n-1}h_K R_p(K)}{\sqrt{d_K}} = \prod_{\chi \neq \varepsilon} L_p(\chi) \tag{1}$$

(n est le degré du corps, h_K le nombre de classes d'idéaux, d_K est le discriminant, ε le caractère trivial).

Mais l'analogie n'était pas tout à fait complète, puisque le membre de droite de (1) ne s'interprétait pas comme le résidu d'une fonction Zéta au point 1 ainsi que nous l'avons dans le cas complexe

$$\frac{2^{n-1}h_K R_\infty(K)}{\sqrt{d_K}} = \lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_K(s).$$

Alors en 1964, dans un premier article, H. W. Leopolt et T. Kubota [6] définirent une fonction Zéta p-adique des corps de nombres réels qui devait permettre d'interpréter le second membre de (1) comme le résidu de la fonction Zéta au point 1. Cette fonction n'est autre (à un facteur multiplicatif élémentaire près) qu'une interpolation p-adique sur les entiers négatifs d'une classe mod $p-1$ des valeurs prises par la fonction Zéta complexe. Comme cette dernière est le produit de fonction $L(\,.\,, \chi)$, la construction précédente se ramène donc à l'interpolation p-adique de la fonction

$$n \mapsto \frac{B^n(\chi)}{n}.$$

L'objet de la première partie de ce travail est l'étude des congruences (c'est-à-dire d'approximations p-adiques) sur les nombres de Bernoulli. Nous cherchons des congruences du type de Kummer, ce qui revient à dire que nous évaluons les coefficients d'interpolation de la fonction

$$n \mapsto \frac{B^n(\chi)}{n}$$

ou encore

$$n \mapsto B^n(\chi)$$

sur certaines suites d'entiers très bien réparties [1] de $\mathbf{Z}_p$ ou d'un disque contenu dans $\mathbf{Z}_p$.

Les congruences précédentes [4], [7] sur les nombres de Bernoulli présentaient l'inconvénient de n'être valables qu'avec certaines restrictions sur les exposants ou les caractères, si bien qu'elles devenaient inutilisables pour l'interpolation p-adique. Nous avons pu lever ces restrictions.

Les méthodes employées pour obtenir ces résultats sont nouvelles. Tout d'abord, les nombres de Bernoulli utilisés sont relatifs, à un caractère quelconque, primitif ou non. Nous utilisons essentiellement un équivalent p-adique de la quantité $\frac{B^n(\chi)}{n}$, à savoir

$$\frac{1}{m.n} \sum_{a=1}^{m} \chi(a) a^n.$$

Nous obtenons ainsi des résultats qui améliorent les congruences de Kummer ainsi que celles de Carlitz. Nous pourrons aussi résoudre un problème posé par N. Nielsens dans son « Traité élémentaire des nombres de Bernoulli ».

Dans une seconde partie, nous appliquerons ces résultats pour étudier les fonctions L p-adiques de H. W. Leopolt et T. Kubota [6]. Les majorations obtenues dans la première partie permettent de montrer l'analycité stricte de ces fonctions. D'autre part, les évaluations exactes obtenues pour certains caractères donnent le rayon de convergence (et non seulement une minoration) des fonctions L correspondantes. Elles nous permettront aussi de savoir si ces fonctions sont majorées ou non sur leur disque de convergence. Enfin le module de continuité des fonctions L_p (important pour l'approximation algébrique de $h_K R_p(K)$ par des nombres de Bernoulli) s'obtiendra facilement avec des améliorations très nettes sur les résultats de Leopolt [6].

TABLE DES MATIÈRES

1. Les Caractères.

Soient $\mathbf{N}$ l'ensemble des *entiers naturels positifs, ou nuls*, $\mathbf{N}^*$ *l'ensemble des entiers naturels positifs*, $\mathbf{Z}$ *l'anneau des entiers naturels*, $\mathbf{Q}$ *le corps des rationnels*, $\overline{\mathbf{Q}}$ *une clôture algébrique de* $\mathbf{Q}$. Soit U *le groupe* (multiplicatif) *des racines de l'unité.*

Soient $(a, b) =$ p.g.c.d. de a et b et $[a, b] =$ p.p.c.m. de a et b.

a) Les caractères de $\mathbf{Z}$. — Soit $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Soit

$$\tilde{\mathrm{X}}(m) = \mathrm{Hom}\,((\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*,\ \mathrm{U})$$

le groupe des caractères de $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$.

Nous allons plonger $\tilde{\mathrm{X}}(m)$ dans l'ensemble A des applications de $\mathbf{Z}$ dans $\overline{\mathbf{Q}}$ par l'injection f_m ainsi définie : si $\tilde{\chi} \in \tilde{\mathrm{X}}(m)$; posons :

$$f_m(\tilde{\chi}) = \chi,$$

où $\chi(a) = 0$ si $(a, m) \neq 1$ et $\chi(a) = \tilde{\chi} \circ g_m(a)$ si $(a, m) = 1$ (g_m étant la projection canonique de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$). Notons par $\mathrm{X}(m)$ l'image de $\tilde{\mathrm{X}}(m)$ par f_m.

$\mathrm{X}(m)$ n'est autre que le sous-ensemble de $\mathbf{A}$ des applications χ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \chi(a) &= 0 \iff (a,\ m) \neq 1; \\ \chi(ab) &= \chi(a)\chi(b), \qquad \forall a,\ b \in \mathbf{Z}; \\ \chi(a) &= \chi(b) \quad \text{si} \quad a \equiv b \bmod m. \end{aligned}$$

Soit
$$\mathrm{X} = \bigcup_{m \in \mathbf{N}^*} \mathrm{X}(m)$$

Les éléments de X sont les *caractères* (multiplicatifs) de $\mathbf{Z}$, plus précisément un élément de $\mathrm{X}(m)$ s'appelle *caractère* (multiplicatif) *modulo* m. Nous noterons ε l'élément neutre de $\mathbf{A}$ (pour la multiplication). Cet élément appartient à $\mathrm{X}(1)$.

L'application f_m respecte la structure multiplicative (mais n'envoie pas l'élément neutre de $\tilde{X}(m)$ sur celui de **A**, excepté dans le cas $m = 1$); et par suite $X(m)$ a une structure de groupe pour l'opération induite par celle de **A** (l'élément neutre de $X(m)$, que nous notons χ_0, n'est pas celui de A excepté dans le cas $m = 1$).

Nous avons $X(m_1) \times X(m_2) = X([m_1, m_2])$, alors

$X(m_1 . m_2) \simeq X(m_1) \times X(m_2)$ (produit direct), si $(m_1, m_2) = 1$.

Nous utiliserons souvent la décomposition suivante : soient $m \in \mathbf{N}^*$, p un nombre premier, $m = m_0 p^r$ avec $(m_0, p) = 1$, alors

$$X(m) = X(m_0) \times X(p^r).$$

Si $p \neq 2$, $X(p^r)$ est *cyclique d'ordre* $\varphi(p^r)$ (φ étant l'indicateur d'Euler), si $p = 2$, $X(p^r)$ est *produit direct d'un groupe cyclique* X_1' *d'ordre* 2, et *d'un groupe cyclique* X_1 *d'ordre* 2^{r-2}.

Soit $\chi \in X$, et posons :

$$M(\chi) = \{m \in \mathbf{N} \text{ tels que } \chi \in X(m)\} ;$$

alors $M(\chi)$ est l'ensemble des multiples $m' . m_0$ d'un entier positif m_0 tels que tous les diviseurs premiers de m' soient des diviseurs premiers de m_0.

χ étant fixé, les groupes $X(m)$, $\forall m \in M(\chi)$, ont même élément neutre, et *l'ordre de* χ ne dépend pas du groupe $X(m)$. Cet *ordre* nous le noterons $0(\chi)$.

b) *Caractères primitifs. Conducteurs.* — Soit

$$G(m) = \{a \in \mathbf{Z} \text{ tels que } (a, m) = 1\} ;$$

nous avons

$$G(m_1) \cap G(m_2) = G([m_1, m_2])$$

si $\chi \in X$, si $m_1, m_2 \in M(\chi)$ alors $G(m_1) = G(m_2)$.

Soit R la relation d'équivalence définie sur X par :

$$\chi_1 R \chi_2 \iff \left\{ \begin{array}{r} \exists m_1 \in M(\chi_1) \quad \text{et} \quad \exists m_2 \in M(\chi_2) \\ \text{tels que} \qquad\qquad \\ \forall a \in G([m_1, m_2]) \\ \chi_1(a) = \chi_2(a). \end{array} \right\}$$

Soit

$$P(\chi) = \{m \in \mathbf{N} \quad \text{tels que} \quad \exists \chi_1 \in X(m) \quad \text{avec} \quad \chi_1 R \chi\}.$$

Alors $P(\chi)$ est l'intersection de $\mathbf{N}^*$ avec un idéal de $\mathbf{Z}$. On appelle *conducteur* de χ, l'entier positif $f(\chi)$, tel que $P(\chi) = f(\chi).\mathbf{N}^*$. Un caractère χ est *dit primitif* si $\chi \in X(f(\chi))$.

c) *Le caractère* θ. — Soient $\mathbf{Q}_p$ *le corps p-adique élémentaire,* Ω_p *une clôture algébrique* de $\mathbf{Q}_p$ contenant $\overline{\mathbf{Q}}$, munie de la *valuation* ω normalisée par $\omega(p) = 1$, et de la *valeur absolue* normalisée par $|p| = p^{-1}$.

Si $p \neq 2$, θ est l'élément de $X(p)$ défini par :

$$\theta(a) = \lim_{n \to \infty} a^{p^n} \quad (\text{limite } p\text{-adique}).$$

Si $p = 2$, θ est l'élément de $X(4)$, défini par $\theta(a) = 0$ si $(a, 4) \neq 1$, et par $\theta(a) = 1$ (resp. -1) si $a \equiv 1 \bmod 4$ (resp. $-1 \bmod 4$).

Si n est un entier quelconque, θ^n est l'élément de $X(p)$ si $p \neq 2$ (resp. $X(4)$ si $p = 2$), défini par $\theta^n(a) = 0$ si $(a, p) \neq 1$ et par $\theta^n(a) = (\theta(a))^n$ si $(a, p) = 1$ (en particulier, θ^0 est l'élément neutre de $X(p)$ si $p \neq 2$ et de $X(4)$ si $p = 2$, et $\theta^n.\theta^{n'} = \theta^{n+n'}$).

A chaque nombre premier nous associons un caractère que nous notons invariablement θ, afin de ne pas alourdir les notations. *Il sera implicite que lorsqu'un nombre premier* p *figurera dans une relation, le caractère* θ *utilisé sera celui qui est associé à* p.

De la définition du caractère θ, nous déduisons immédiatement que si $a \in \mathbf{Z}$ et $(a, p) = 1$:

$$\begin{aligned} a\theta^{-1}(a) &\equiv 1 \bmod p \qquad \text{si} \qquad p \neq 2, \\ a\theta^{-1}(a) &\equiv 1 \bmod 4 \qquad \text{si} \qquad p = 2. \end{aligned}$$

Nous posons alors :

$$\begin{aligned} \psi(a) &= \frac{1}{p}(a\theta^{-1}(a) - 1) \qquad \text{si} \qquad p \neq 2 \\ \psi(a) &= \frac{1}{4}(a\theta^{-1}(a) - 1) \qquad \text{si} \qquad p = 2. \end{aligned}$$

Nous avons, bien entendu, $\psi(a) \in \mathbf{Z}_p$ si $(a, p) = 1$.

Conventions. — Si $\chi \in X(m)$ avec $\omega(m) > 0$, et si $a \equiv 0$ mod p, nous poserons $\chi(a)\psi(a) = 0$.

Si $r \in \mathbf{Q}$, $a \equiv b$ mod p^r signifie $\omega(a - b) \geqslant r$.

2. Les nombres de Bernouilli généralisés.

a) Définition. — *Soit* $\chi \in X$, *si* m *et* m' *appartiennent à* $M(\chi)$ *nous en déduisons l'égalité des séries formelles suivantes :*

$$\sum_{a=1}^{m} \chi(a)T \frac{e^{aT}}{e^{mT} - 1} = \sum_{a=1}^{m'} \chi(a)T \frac{e^{aT}}{e^{mT} - 1}$$

par suite le développement en série formelle de

$$\sum_{a=1}^{m} \chi(a)T \frac{e^{aT}}{e^{mT} - 1}$$

ne dépend que du caractère χ *(et non de l'entier* $m \in M(\chi)$*).* Nous écrirons ce développement sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \sum_{1=a}^{m} \chi(a)T \frac{e^{aT}}{e^{mT} - 1} = \sum_{a=1}^{\infty} B^n(\chi) \frac{T^n}{n!}.$$

Ceci permet de définir une application B de $\mathbf{N} \times X$ dans $\overline{\mathbf{Q}}$ dont la valeur en (n, χ) notée $B^n(\chi)$ s'appelle *le* n[ième] *nombre de Bernoulli relatif au caractère* χ. Ce nombre algébrique appartient au corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\chi(1), \ldots, \chi(f))$ noté plus brièvement $\mathbf{Q}(\chi)$. *Les nombres de Bernoulli ordinaires* sont ceux relatifs au caractère de ε et sont notés B^n.

b) *Parité.*

Soient $\chi \in X, \chi \neq \varepsilon$ et $m \in M(\chi)$

$$\sum_{a=1}^{m} \frac{-\chi(a)Te^{-aT}}{e^{-mT} - 1} = \sum_{a'=1}^{m-1} \frac{\chi(m - a')Te^{a'T}}{e^{mT} - 1} = \sum_{a'=1}^{m} \frac{\chi(-a')Te^{a'T}}{e^{mT} - 1}.$$

Si χ est pair (c'est-à-dire si $\chi(-1) = 1$) et si $\chi \neq \varepsilon$, $B^n(\chi) = 0$ si n est impair.

Si χ est impair (c'est-à-dire si $\chi(-1) = -1$), $B^n(\chi) = 0$ si n est pair.

Si $\chi = \varepsilon$, $B^n(\chi) = B^n = 0$ si n est impair et $n > 1$.

c) Relations.

Les nombres de Bernoulli satisfont la *relation de récurrence* suivante :

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B^i(\chi)(\nu m)^{n+1-i} = (n+1) \sum_{a=1}^{\nu m} \chi(a)a^n$$
$$\forall \chi \in X, \qquad \forall m \in M(\chi), \qquad \forall \nu \in \mathbf{N}^*, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Cette relation peut s'écrire symboliquement sous la forme suivante

$$(B(\chi) + \nu m)^{n+1} - B^{n+1}(\chi) = (n+1) \sum_{a=1}^{\nu m} \chi(a)a^n.$$

Cette notation se comprend ainsi : nous développons suivant la formule du binôme et nous remplaçons $(B(\chi))^i$ par $B^i(\chi)$.

En particulier nous avons

$$B^0(\chi) = \frac{1}{m} \sum_{a=1}^{m} \chi(a)$$

c'est-à-dire

$$B^0(\chi) = 0 \qquad \text{si} \qquad \chi \neq \chi_0$$
$$(2') \qquad B^0(\chi) = \frac{\varphi(m)}{m} \qquad \text{si} \qquad \chi = \chi_0.$$

La relation de récurrence se démontre en remarquant que

$$\sum_{a=1}^{\nu m} \chi(a) \frac{Te^{aT}}{e^{\nu m T} - 1} = \sum_{a=1}^{m} \chi(a) \frac{Te^{aT}}{e^{mT} - 1}$$

et que

$$\sum_{a=1}^{\nu m} \chi(a) Te^{aT} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n(\chi) \frac{T^n}{n!} \right) (e^{\nu m T} - 1).$$

PROPOSITION 1. — *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *nous avons*

$$B^n(\chi\theta^0) = B^n(\chi)(1 - \chi(p)p^{n-1}).$$

Preuve. — Soit $m \in M(\chi)$.

Si p divise m, $\chi\theta^0 = \chi$ et $\chi(p) = 0$ la proposition est triviale.

Si p ne divise pas m, $pm \in M(\chi\theta^0)$ et

$$\sum_{a=1}^{pm} \chi\theta^0(a) \frac{Te^{aT}}{e^{pmT} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n(\chi\theta^0) \frac{T^n}{n!}$$

or

$$\sum_{a=1}^{pm} \chi\theta^0(a) \frac{\mathrm{T}e^{a\mathrm{T}}}{e^{pm\mathrm{T}}-1} = \sum_{a=1}^{pm} \chi(a) \frac{\mathrm{T}e^{a\mathrm{T}}}{e^{pm\mathrm{T}}-1} - \frac{\chi(p)}{p} \sum_{a=1}^{m} \chi(a) \frac{(p\mathrm{T})e^{ap\mathrm{T}}}{e^{mp\mathrm{T}}-1}$$

soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}^n(\chi\theta^0) \frac{\mathrm{T}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}^n(\chi) \frac{\mathrm{T}^n}{n!} - \frac{\chi(p)}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}^n(\chi) \frac{p^n\mathrm{T}^n}{n!}.$$

Proposition 2. — *Soient* $\chi \in \mathrm{X}$, $m \in \mathrm{M}(\chi)$, *si* p *divise* m

$$w(m\mathrm{B}^n(\chi)) \geqslant 0.$$

Preuve. — La relation (2) se développe sous la forme

$$m\mathrm{B}^n(\chi) + \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n}{j-1} \frac{m^{j-1}}{j} (m\mathrm{B}^{n-j+1}(\chi)) = \sum_{a=1}^{m} \chi(a)a^n.$$

La démonstration par récurrence est immédiate, puisque $w\left(\frac{m^{j-1}}{j}\right) \geqslant 0$.

Notation. — Soient $\chi \in \mathrm{X}(m)$, $\nu \in \mathbf{N}^*$, posons

$$\mathrm{S}^n_\chi(\nu m) = \sum_{a=1}^{\nu m} \chi(a)a^n.$$

Proposition 3. — *Soient* $\chi \in \mathrm{X}$, $m \in \mathrm{M}(\chi)$, $p > 3$, *si* $w(m) = r > 0$, $k \geqslant 0$

$$\frac{\mathrm{B}^n(\chi)}{n} \equiv \frac{1}{n\,.\,mp^k} \mathrm{S}^n_\chi(mp^k) \bmod p^{r+k}.$$

La relation reste vraie pour $p = 2$ *et* $p = 3$ *si* $k \geqslant 1$.

Preuve. — La relation (2) se développe sous la forme

$$\frac{\mathrm{B}^n(\chi)}{n} + \sum_{j=3}^{n+1} \binom{n-1}{j-2} \frac{m^{j-3}p^{(j-2)k}}{(j-1)j} (m\mathrm{B}^{n-j+1}(\chi))\, mp^k = \frac{\mathrm{S}^n_\chi(mp^k)}{n\,.\,mp^k}.$$

Il suffit de remarquer que $w\left(\frac{m^{j-3}p^{(j-2)k}}{(j-1)j}\right) \geqslant 0$ pour $3 \leqslant j \leqslant n+1$ et d'utiliser la proposition 2.

Proposition 4. — *Soient* $m \in \mathbf{N}$ *tel que* $w(m) \geqslant 1$, *si* $p \neq 2$ (resp. $w(m) \geqslant 2$ *si* $p = 2$).

Les congruences suivantes sont satisfaites:

Si $p \neq 2$

$$\frac{S_\varepsilon^n(m)}{n.m} \equiv 0 \bmod p^0 \qquad si \qquad n \not\equiv 0 \bmod p-1$$

$$\frac{S_\varepsilon^n(m)}{n.m} \equiv \frac{p-1}{p} \bmod p^0 \qquad si \qquad n \equiv 0 \bmod p-1.$$

Si $p = 2$

$$\frac{S_\varepsilon^n(m)}{n.m} \equiv 0 \bmod p^0 \qquad si \qquad n \not\equiv 0 \bmod p \qquad et \qquad n > 1,$$

$$\frac{S_\varepsilon^n(m)}{m} \equiv \frac{p-1}{p} \bmod p^0 \qquad si \qquad n \equiv 0 \bmod p \qquad ou \qquad n = 1.$$

Preuve.

Si $m = m_0 p^k$ avec $(m_0, p) = 1$, montrons d'abord que

$$\frac{S_\varepsilon^n(m)}{n.m} \equiv \frac{S_\varepsilon^n(p^k)}{n.p^k} \bmod p^0 \quad \text{si} \quad p \neq 2 \quad (\text{resp. mod } p \ \text{ si } \ p = 2).$$

En effet

$$\frac{S_\varepsilon^n(m)}{n.m} = \frac{1}{n.m} \sum_{a=1}^{m_0 p^k} a^n = \frac{1}{n.m} \sum_{a=1}^{p^k} \sum_{\lambda=0}^{m_0-1} (a + \lambda p^k)^n$$

$$\frac{(a+\lambda p^k)^n}{n.m} = \frac{a^n}{n.m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{n.m} a^{n-i} \lambda^i p^{ki}$$

$$\frac{\binom{n}{i}}{n.m} p^{ki} = \binom{n-1}{i-1} \frac{p^{k(i-1)}}{m_0 \cdot i} \equiv 0 \bmod p^0 \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

$$(\text{resp. mod } p \ \text{ si } \ p = 2) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Par suite,

$$\frac{(a+\lambda p^k)^n}{n.m} \equiv \frac{a^n}{n.m} \bmod p^0 \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

$$(\text{resp. mod } p \ \text{ si } \ p = 2)$$

$$\frac{S_\varepsilon^n(m)}{n.m} \equiv \frac{S_\varepsilon^n(p^k)}{n.p^k} \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

$$(\text{resp. mod } \ p \ \text{ si } \ p \neq 2)$$

Montrons maintenant que

$$\frac{S_\varepsilon^n(p^k)}{n.p^k} \equiv \frac{S_\varepsilon^n(p^{k+1})}{n.p^{k+1}} \bmod p^0 \text{ si } p \neq 2 \quad \text{et} \quad \text{si } k \geqslant 1$$

$$\frac{S_\varepsilon^n(p^{k+1})}{n.p^{k+1}} = \frac{1}{np^{k+1}} \sum_{a=1}^{p^{k+1}} a^n = \frac{1}{n.p^{k+1}} \sum_{a=1}^{p^k} \sum_{\lambda=0}^{p-1} (a + \lambda p^k)^n$$

$$\frac{1}{np^{k+1}} (a + \lambda p^k)^n = \frac{a^n}{np^{k+1}} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} a^{n-i} \lambda^i \frac{p^{k(i-1)-1}}{i}.$$

Soit

$$\frac{1}{np^{k+1}} (a + \lambda p^k)^n \equiv \frac{a^n}{np^{k+1}} + a^{n-1} \frac{\lambda}{p} \bmod p^0$$

Si $p \neq 2$,

$$\frac{1}{np^{k+1}} \sum_{\lambda=0}^{p-1} (a + \lambda p^k)^n \equiv \frac{a^n}{np^k} + a^{n-1} \frac{p(p-1)}{2p} \bmod p^0.$$

Soit

$$\frac{1}{np^{k+1}} \sum_{\lambda=\theta}^{p-1} (a + \lambda p^k)^n \equiv \frac{a^n}{np^k} \bmod p^0.$$

Nous avons alors

$$\frac{S_\varepsilon^n(p^k)}{np^k} \equiv \frac{S_\varepsilon^n(p^{k+1})}{np^{k+1}} \bmod p^0 \qquad \text{si} \qquad p \neq 2 \quad \text{et si } k \geqslant 1$$

Si $p = 2$,

$$\frac{1}{np^{k+1}} \sum_{\lambda=0}^{p-1} (a + \lambda p^k)^n \equiv \frac{a^n}{np^k} + \frac{a^{n-1}}{p} \bmod p^0$$

$$\frac{1}{np^{k+1}} \sum_{a=1}^{p^k} \sum_{\lambda=0}^{p-1} (a + \lambda p^k)^n \equiv \sum_{a=1}^{p^k} \frac{a^n}{np^k} + \sum_{a=1}^{p^k} \frac{a^{n-1}}{p} \bmod p^0$$

or

$$\sum_{a=1}^{p^k} a^{n-1} \equiv 0 \bmod p$$

si bien que

$$\frac{S_\varepsilon^n(p^{k+1})}{np^{k+1}} = \frac{S_\varepsilon^n(p^k)}{np^k} \bmod p^0 \qquad \text{si} \qquad p = 2. \quad \text{et si } k \geqslant 2$$

Nous sommes donc ramenés au calcul de $\frac{1}{np} S_\varepsilon^n(p)$ si $p \neq 2$ $\left(\text{resp. } \frac{1}{np^2} S_\varepsilon^n(p^2) \text{ si } p = 2\right)$.

Si $p \neq 2$

$$\frac{a^n}{np} \equiv \frac{1}{np} \theta^n(a) \left(\frac{a}{\theta(a)}\right)^n \bmod p^0$$

$$\frac{1}{np} S_\varepsilon^n(p) \equiv \frac{1}{np} \sum_{a=1}^{p} \theta^n(a)(1 + p\psi(a))^n \bmod p^0$$

soit

$$\frac{1}{np} S_\varepsilon^n(p) \equiv \frac{1}{np} \sum_{a=1}^{p} \theta^n(a) \bmod p^0$$

$$\frac{S_\varepsilon^n(p)}{np} \equiv 0 \bmod p^0 \qquad \text{si} \qquad n \not\equiv 0 \bmod p-1$$

$$\frac{1}{p} S_\varepsilon^n(p) \equiv \frac{p-1}{p} \bmod p^0 \qquad \text{si} \qquad n \not\equiv 0 \bmod p-1.$$

Si $p = 2$

$$\frac{1}{4n} S_\varepsilon^n(4) = \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n}{4n}$$

si $n = 1$ $$\frac{1}{4} S_\varepsilon^1(4) = \frac{3}{2}$$

si $n = 2$ $$\frac{1}{4} S_\varepsilon^2(4) = \frac{7}{2}$$

Si $n > 2$ $$\frac{a^n}{4^n} \equiv \frac{1}{4^n} \theta^n(a) \left(\frac{a}{\theta(a)}\right)^n \bmod p^0$$

ainsi

$$\frac{1}{4^n} S_\varepsilon^n(4) \equiv \frac{1}{4^n} \sum_{a=1}^{4} \theta^n(a)(1 + 4\psi(a))^n \bmod p^0$$

Soit

$$\frac{1}{4^n} S_\varepsilon^n(4) \equiv \frac{1}{4^n} \sum_{a=1}^{4} \theta^n(a) \bmod p^0$$

$$\frac{1}{4^n} S_\varepsilon^n(4) \equiv 0 \bmod p^0 \qquad \text{si} \qquad n \not\equiv 0 \bmod p$$

$$\frac{1}{4} S_\varepsilon^n(4) \equiv \frac{1}{2} \bmod p^0 \qquad \text{si} \qquad n \equiv 0 \bmod p.$$

Remarque. — Le comportement curieux du nombre premier 2 dans les congruences de cette proposition explique le choix particulier du caractère θ.

3. Évaluation de T.

Nous n'allons pas étudier la fonction

$$n \longmapsto \frac{B^n(\chi)}{n}$$

pour la simple raison qu'elle n'est pas continue p-adiquement (ce qui apparaîtra de façon évidente dans la suite), mais plutôt la fonction $\varphi(.,\chi)$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Q}(\chi)$:

$$n \longmapsto \frac{B^{n+1}(\chi\theta^{-(n+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{n+1}.$$

Nous plongerons $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}_p$ et $\mathbf{Q}(\chi)$ dans $\mathbf{Q}_p(\chi)$ c'est-à-dire $\mathbf{Q}_p(\chi(1), \ldots, \chi(m))$ si $m \in \mathrm{M}(\chi)$).

Nous étudierons alors les possibilités de prolongement de $\varphi(.,\chi)$ en une application $\varphi_p(\cdot,\chi)$ de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Q}_p(\chi)$. *La méthode de l'interpolation p-adique* semble bien adaptée à l'étude de ce problème. Nous serons donc amenés à évaluer le coefficient d'interpolation

$$(1) \qquad a_s = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{r}{s} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1}$$

En utilisant l'équivalent explicite des nombres de Bernoulli (prop. 3, par. II), nous verrons aisément (th. 3, par. IV) que l'expression

$$\mathrm{T}(\chi, m, s) = \frac{1}{s.m} \sum_{a=1}^{m} \chi\theta^0(a)\psi^s(a)$$

où $s \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathrm{M}(\chi\theta^0)$, ($\psi$ a été défini au par. I) est fondamentale pour évaluer le coefficient d'interpolation (a_s). La connaissance complète de $\mathrm{T}(\chi, m, s)$ permettrait de résoudre des problèmes sur les nombres de Bernoulli et les fonctions $\mathrm{L}_p(.,\chi)$.

L'évaluation de $\mathrm{T}(\chi, m, s)$ est assez longue, parce qu'elle dépend de la nature du caractère. Elle se décompose en plusieurs lemmes.

a) *Lemmes préliminaires.*

LEMME 1. — *Pour tout* $s \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N}$ *tel que* $\omega(m) = r \geqslant 2$, *si* $p \neq 2$ (resp. 3 *si* $p = 2$), $\forall a, b \in \mathbf{Z}$ *tels que* $a \equiv b \bmod p^r$ *et* $(a, p) = 1$ *nous avons*

$$\frac{1}{m.s} \psi^s(a) \equiv \frac{1}{m.s} \psi^s(b) \bmod p^{-1} \qquad si \qquad p \neq 2.$$

Preuve.

Posons $b = a + b'p^r$, si $p \neq 2$, si $(a, p) = 1$

$$\psi(a + b'p^r) = \psi(a) + \frac{b'p^{r-1}}{\theta(a)},$$

ce qui peut s'écrire

$$\psi(a + b'p^r) = \psi(a) + p^{r-1}c \qquad \text{où} \qquad c \in \mathbf{Z}_p$$

et par suite

$$\frac{1}{s} \psi^s(a + b'p^r) = \frac{1}{s} \psi^s(a) + \sum_{k=1}^{s} \frac{\binom{s}{k}}{s} \psi^{s-k}(a)(cp^{r-1})^k$$

or

$$\frac{\binom{k}{s}}{s} \psi^{s-k}(a)(cp^{r-1})^k = \binom{s-1}{k-1}\frac{1}{k} \psi^{s-k}(a)(cp^{r-1})^{k-1}(cp^{r-1})$$
$$\equiv 0 \bmod p^{r-1}.$$

Ce premier lemme nous incite déjà à décomposer le caractère $\chi \in \mathrm{X}(m)$ (avec $m = m_0p^r$ et $(m_0, p) = 1$) sous la forme

$$\chi = \chi_1\chi_2 \qquad \text{où} \qquad \chi_1 \in \mathrm{X}(p^r) \qquad \text{et} \qquad \chi_2 \in \mathrm{X}(m_0) \qquad \text{si} \qquad p \neq 2.$$

Nous serons alors conduits à évaluer $\mathrm{T}(\chi_1, p^r, s)$, ou encore

$$\mathrm{U}(\chi_1, p^r, s) = \frac{1}{sp^r} \sum_{u=1}^{\varphi(p^r)} \chi_1(h^r)\psi^s(h^u) \tag{2}$$

où $g_{p^r}(h)$ est un générateur de $(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^*$ si $p \neq 2$ (resp. $h = 5$ si $p = 2$) (l'application g_m a été définie au par. I).

LEMME 2. — *Pour tout* $s \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N}^*$ *avec* $m = m_0p^r$ *et* $\omega(m) = r \geqslant 2$. *Si* $p \neq 2$ (resp. $\omega(m) = r \geqslant 4$ si $p = 2$), $\forall \chi \in \mathrm{X}(m)$.

Nous avons

$$T(\chi, m, s) \equiv U(\chi_1, p^r, s)\left(\frac{1}{m_0}\sum_{a=1}^{m_0}\chi_2(a)\right) \bmod p^{-1} \quad si \quad p \neq 2$$

$$T(\chi, m, s) \equiv U(\chi_1, p^{r-1}, s)\left(\frac{1}{m_0}\sum_{a=1}^{m_0}\chi_2(a)\right)\left(\frac{\chi(1) + \chi(-1)}{2}\right)$$

$$- (s-1)p^{r-3}U(\chi_1, p^{r-1}, s-1)\,\chi(-1)\left(\frac{1}{m}\sum_{a=1}^{m_0}\chi_2(a)\right) \bmod p^{-1} \quad si \quad p = 2.$$

Preuve. — Si $p \neq 2$

$$\frac{1}{s\,.\,m_0p^r}\sum_{a=1}^{m_0p^r}\chi(a)\psi^s(a) = \frac{1}{s\,.\,m_0p^r}\sum_{a=1}^{p^r}\sum_{t=0}^{m_0-1}\chi(a+tp^r)\psi^s(a+tp^r).$$

En utilisant le lemme 1, on obtient :

$$\frac{1}{s\,.\,m_0p^r}\sum_{a=1}^{m_0p^r}\chi(a)\psi^s(a) \equiv \left(\frac{1}{sp^r}\sum_{a=1}^{p^r}\chi_1(a)\psi^s(a)\right)\left(\frac{1}{m_0}\sum_{b=1}^{m_0}\chi_2(b)\right) \bmod p^{-1}.$$

Si $p = 2$

$$\frac{1}{sm_0p^r}\sum_{a=1}^{m_0p^r}\chi(a)\psi^s(a) = \frac{1}{sm_0p^r}\sum_{a_1=0}^{m_0p^{r-2}-1}\chi(1+4a_1)a_1^s + \frac{1}{sm_0p^r}\sum_{a_2=1}^{m_0p^{r-2}}\chi(-1+4a_2)(-a_2)^s.$$

Soit

$$\frac{1}{sm_0p^r}\sum_{a=1}^{m_0p^r}\chi(a)\psi^s(a) = \frac{1}{sm_0p^r}\sum_{b=1}^{m_0p^{r-2}-1}\chi(1+4b)(\chi(1)b^s + \chi(-1)(b - m_0p^{r-2})^s)$$

$$\frac{1}{sm_0p^r}\sum_{a=1}^{m_0p^r}\chi(a)\psi^s(a) \equiv \frac{1}{sm_0p^r}\sum_{a=0}^{m_0p^{r-2}-1}\chi(1+4a)(\chi(1)+\chi(-1))a^s - \frac{1}{p^2}\sum_{a=0}^{m_0p^{r-2}-1}\chi(1+4a)\chi(-1)a^{s-1} \bmod p^{-1}.$$

Évaluons maintenant $\dfrac{1}{sm_0p^{r-1}}\displaystyle\sum_{a=0}^{m_0p^{r-2}-1}\chi(1+4a)a^s$

$$\frac{1}{sm_0p^{r-1}}\sum_{a=0}^{p^{r-2}-1}\sum_{t=0}^{m_0-1}\chi(1+4(a+tp^{r-2}))\,(a+tp^{r-2})^s$$

Comme $\frac{1}{sp^{r-1}}(a+tp^{r-2})^s \equiv \frac{a^s}{sp^{r-1}} \bmod p^{-1}$

$$\frac{1}{sm_0p^{r-1}} \sum_{a=0}^{m_0p^{r-2}-1} \chi(1+4a)a^s \equiv \left(\frac{1}{sp^{r-1}} \sum_{a=0}^{p^{r-2}} \chi_1(1+4a)a^s\right)\left(\frac{1}{m_0}\sum_{a=1}^{m_0} \chi_2(a)\right) \bmod p^{-1}$$

or,

$1+4a \equiv 5^u \bmod p^r$ par suite $\frac{a^s}{sp^{r-1}} \equiv \frac{1}{sp^{r-1}} \psi^s(h^u) \bmod p^{-1}$

et alors,

$$\frac{1}{sm_0p^{r-1}} \sum_{a=0}^{m_0p^{r-2}-1} \chi(1+4a)a^s \equiv \mathrm{U}(\chi_1, p^{r-1}, s)\left(\frac{1}{m_0}\sum_{a=1}^{m_0} \chi_2(a)\right) \bmod p^{-1}.$$

Le lemme en découle immédiatement si l'on remarque que :

$$\frac{\chi(1)+\chi(-1)}{2} \equiv 0 \bmod p^0.$$

Ce lemme implique immédiatement la proposition suivante :

Proposition 5. — *Les hypothèses étant les mêmes que celles du lemme* 2,

Si $p \neq 2$, *nous avons :*

$\mathrm{T}(\chi, m, s) \equiv 0 \bmod p^{-1}$ *si* $\chi_2 \neq \chi_0$

$\mathrm{T}(\chi, m, s) \equiv \mathrm{U}(\chi_1, p^r, s)\frac{\varphi(m_0)}{m_0} \bmod p^{-1}$ si $\chi_2 = \chi_0$;

Si $p = 2$, *nous avons :*

$\mathrm{T}(\chi, m, s) \equiv 0 \bmod p^{-1}$ *si* $\chi_2 \neq \chi_0$

$$\mathrm{T}(\chi, m, s) = \left[\mathrm{U}(\chi_1, p^{r-1}, s)\left(\frac{\chi(1)+\chi(-1)}{2}\right) - (s-1)\chi(-1)\mathrm{U}(\chi_1, p^{r-1}, s-1)\right]\frac{\varphi(m_0)}{m_0} \bmod p^{-1}$$

si $\chi_2 = \chi_0$.

La démonstration est évidente si l'on sait que :

$$\sum_{a=1}^{m_0} \chi_2(a) = 0 \quad \text{si} \quad \chi_2 \neq \chi_0,$$

$$\sum_{a=1}^{m_0} \chi_2(a) = \varphi(m_0) \quad \text{si} \quad \chi_2 = \chi_0.$$

Cette proposition nous montre déjà que si χ ne se réduit pas, pour ainsi dire à χ_1 (que l'on pourrait appeler la p-composante de χ), la valuation de $T(\chi, m, s)$ se laisse aisément minorer.

Nous allons maintenant évaluer $U(\chi_1, p^r, s)$.

Lemme 3. — *Étant donné $h \in \mathbf{Z}$, $(h, p) = 1$, $s \in \mathbf{N}$ et p un nombre premier, il existe $Q(X) \in \mathbf{Z}_p[[X]]$, analytique stricte sur $\mathbf{Z}_p$, telle que*

$$\frac{1}{s}\,\psi^s(h^u) = \psi^s(h)\,\frac{u^s}{s} + pQ(u) \quad \forall u \in \mathbf{N}$$

$\mathbf{Z}_p[[X]]$ *est l'anneau des séries formelles à coefficients dans* $\mathbf{Z}_p$.

Preuve. — Si $p \neq 2$,

$$\psi(h^u) = \frac{1}{p}\,((1 + p\psi(h))^u - 1)$$

$$\psi(h^u) = \psi(h)u + p\sum_{i=2}^{\infty}\binom{u}{i}p^{i-2}\psi^{i-1}(h)$$

Posons $P(X) = \sum_{i=2}^{\infty}\binom{X}{i}p^{i-1}\psi^{i-2}(h)$, alors $P(X) \in \mathbf{Z}_p[[X]]$, est analytique stricte sur $\mathbf{Z}_p$ et

$$\psi(h^u) = \psi(h)u + pP(u) \quad \forall u \in \mathbf{N}$$

alors

$$\frac{1}{s}\,\psi^s(h^u) = \psi^s(h)\,\frac{u^s}{s} + \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{s}\binom{s}{i}\psi^{s-i}(h)u^{s-i}p^iP^i(u).$$

Posons

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{s}\binom{s}{i}\psi^{s-i}(h)x^{s-i}p^{i-1}P^i(X)$$

or,

$$\frac{1}{s}\binom{s}{i}p^{i-1} = \binom{s-1}{i-1}\frac{1}{i}\,p^{i-1} \equiv 0 \bmod p^0 \qquad \text{si} \qquad 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Ainsi $Q(X) \in \mathbf{Z}_p[[X]]$, est analytique stricte sur $\mathbf{Z}_p$ et satisfait l'égalité du lemme 3.

Pour $p = 2$, la démonstration est analogue.

Ce lemme nous permettra par la suite de remplacer l'étude de $U(\chi_1, p^r, s)$ par celle de

$$V(\chi_1, q, s) = \frac{1}{sq} \sum_{a=1}^{q} \chi_1(h^u)u^s.$$

En, effet, si l'on pose

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n X^n.$$

Nous obtenons

$$(3) \quad U(\chi_1, p^r, s) = \frac{p-1}{p} \psi^s(h) V(\chi_1, \varphi(p^r), s) + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (p-1) V(\chi_1, \varphi(p^r), n).$$

Lemme 4. — *Soit* $h_1 \in \overline{\mathbf{Q}}$ *tel que* $h_1^m = 1$, $\forall c \in \mathbf{N}$ *tel que* $\omega(cm) > 0$, $\forall s \in \mathbf{N}$

$$(h_1 - 1)^s \frac{1}{cms} \left(\sum_{u=0}^{cm-1} h_1^u u^s \right) \equiv 0 \bmod p^0.$$

Preuve. — Soit

$$f(x) = \sum_{u=0}^{cm-1} e^{ux} = \frac{e^{cmx} - 1}{e^x - 1}.$$

Or

$$\frac{d^s}{dx^s} f(x) = \frac{d^s}{dx^s} \left(\sum_{u=0}^{cm-1} e^{ux} \right) = \sum_{u=0}^{cm-1} u^s e^{ux}$$

$$\frac{d^s}{dx^s} f(x) = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \frac{d^k}{dx^k} (e^{cmx} - 1) \frac{d^{s-k}}{dx^{s-k}} \left(\frac{1}{e^x - 1} \right).$$

Or

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{f_n(e^x - 1)}{(e^x - 1)^{n+1}}$$

où

$$f_n(X) \in \mathbf{Z}[X] \qquad \text{et} \qquad d^0 f_n = n.$$

Ainsi

$$\frac{1}{s} (e^x - 1)^s \frac{d^s}{dx^s} f(x) = \sum_{k=2}^{s} \binom{s-1}{k-1} \frac{(cm)^k}{k} e^{cmx} (e^x - 1)^{k-1} f_{s-k}(e^x - 1) + cme^{cmx} f_{s-1}(e^x - 1) + \frac{(e^{cmx} - 1)}{s} \cdot \frac{f_s(e^x - 1)}{e^x - 1}.$$

Remplaçons e^x par h_1, il vient

$$\frac{1}{s} (h_1 - 1)^s \frac{1}{cm} \frac{d^s}{dx^s} f(h_1) \equiv 0 \bmod p^0$$

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier l'expression

$U(\chi_1, p^r, s)$ lorsque l'ordre de caractère χ_1 n'est pas une puissance de p.

LEMME 5. — *Si* $p \neq 2$, *soit* $\chi_1 \in X(p^r)$, *si l'ordre de* $\chi_1 \neq p^e$, $\forall e \in \mathbf{N}$ *alors*

$$U(\chi_1, p^r, s) \equiv 0 \bmod p^{-1}.$$

Preuve. — Posons $h_1 = \chi_1(h)$ alors $\omega(h_1 - 1) = 0$ et le lemme 4 montre alors que

$$V(\chi_1, \varphi(p^r), s) \equiv 0 \bmod p^0.$$

L'utilisation de la relation (3) montre immédiatement le lemme 5.

LEMME 6. — *Si* $\chi_1 \in X(p^r)$ *si* $p \neq 2$ (resp. $\chi_1 \in X_1$ si $p = 2$) *et si l'ordre de* $\chi_1 = p^e \neq 1$, *nous avons*

$$V(\chi_1, \varphi(p^r), s) \equiv V(\chi_1, p^e, s) \bmod p^0 \qquad \text{si} \qquad p \neq 2$$

ou si $p = 2$ *et* $e \geqslant 2$

$$V(\chi_1, \varphi(p^r), s) \equiv V(\chi_1, p^e, s) + (s-2)V(\chi_1, p^e, s-2)\frac{(s-1)p^{2e}}{2\varphi(p^{r-e})}\sum_{t=0}^{\varphi(p^{r-e})-1} t^2 \bmod p^0$$

si $p = 2$ *et* $e = 1$.

Preuve :

$$V(\chi_1, \varphi(p^r), s) = \frac{1}{s\varphi(p^r)}\sum_{u=1}^{p^e}\sum_{t=0}^{\varphi(p^{r-e})-1}\chi_1(h^{u+tp^e})(u+tp^e)^s.$$

Soit

$$V(\chi_1, \varphi(p^r), s) = \sum_{k=0}^{s}\left[\frac{1}{p^e}\sum_{u=1}^{p^e}\chi_1(h^u)u^{s-k}\right]\frac{1}{s}\binom{s}{k}\frac{p^{ke}}{\varphi(p^{r-e})}\sum_{t=0}^{\varphi(p^{r-e})-1} t^k.$$

Si $p \neq 2$ ou si $e \geqslant 2$

$$\frac{1}{s}\binom{s}{k}\frac{p^{(k-1)e}}{\varphi(p^{r-e})}\sum_{t=0}^{\varphi(p^{r-e})-1} t^k = \binom{s-1}{k-1}\frac{p^{(k-1)e}}{k.\varphi(p^{r-e})}\sum_{t=0}^{\varphi(p^{r-e})-1} t^k \equiv 0 \bmod p^0$$

si $1 \leqslant k \leqslant \varphi(p^{r-e})$ d'après la proposition 4.

Ceci nous donne alors la congruence

$$V(\chi_1, \varphi(p^r), s) \equiv V(\chi_1, p^e, s) \bmod p^0.$$

Si $p = 2$ et $s = 1$ alors la proposition 4 nous donne aussi

$$\begin{aligned} V(\chi_1, \varphi(p^r), s) &\equiv V(\chi_1, p^e, s) \\ &\quad + (s-2)V(\chi_1, p^e, s-2)\frac{(s-1)p^{2e}}{2\varphi(p^{r-e})} \sum_{t=0}^{\varphi(p^{r-e})-1} t^2 \bmod p^0 \end{aligned}$$

si $p = 2$ et $e = 1$.

Dans l'étude que nous allons faire maintenant, il apparaîtra naturellement trois cas :

$$O(\chi) = p^e \quad \text{avec} \quad e \geqslant 2, \ e = 1 \quad \text{et} \quad e = 0.$$

Lemme 7. — *Soit* $\chi_1 \in X(p^r)$, *si* $p \neq 2$ (resp. $\chi_1 \in X_1$ *si* $p = 2$). *Si ordre de* $\chi_1 = p^e$ *où* $e \geqslant 2$, *alors*

$$\omega(U(\chi_1, p^r, s)) = -1 - \frac{s_0}{\varphi(p^e)} \qquad si \qquad s \neq 1$$

et $s \equiv s_0 \bmod p - 1$ *avec* $2 \leqslant s_0 \leqslant p$

$$\omega(U(\chi_1, p^r, s)) = -1 - \frac{1}{\varphi(p^e)} \qquad si \qquad s = 1.$$

Preuve.

$$V(\chi_1, p^e, s) = \frac{1}{sp^e} \sum_{u=0}^{p-1} \sum_{t=0}^{p^{e-1}-1} \chi_1(h^{u+tp})(u+tp)^s$$

$$\begin{aligned} V(\chi_1, p^e, s) = \frac{1}{sp^e} &\sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(h^u)u^s \sum_{t=0}^{p^{e-1}-1} \chi_1^p(h^t) \\ &+ \sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(h^u)u^{s-1} \frac{1}{p^{e-1}} \sum_{t=0}^{p^{e-1}-1} \chi_1^p(h^t)t \\ &+ \sum_{k=2}^{s} \sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(h^u)u^{s-k} \binom{s-1}{k-1} \frac{p^{k-1}}{kp^{e-1}} \sum_{t=0}^{p^{e-1}-1} \chi_1^p(h^t)t^k \equiv 0. \end{aligned}$$

Puisque $\chi_1^p \neq \chi_0$,

$$\sum_{t=0}^{p^{e-1}-1} \chi_1^p(h^t) = 0.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} &\frac{p^{k-1}}{kp^{e-1}} \sum_{t=0}^{p^{e-1}-1} \chi_1^p(h^t)t^k \\ &\qquad = \frac{p^{k-1}}{(\chi_1^p(h)-1)^k} \times \frac{(\chi_1^p(h)-1)}{kp^{e-1}} \sum_{t=0}^{kp^{e-1}-1} \chi_1^p(h^t)t^k \bmod p^0 \end{aligned}$$

d'après le lemme 4.

Par suite

$$V(\chi_1,\ p^e,\ s) \equiv \left(\sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(h^u)u^{s-1}\right) \frac{1}{p^{e-1}} \sum_{t=0}^{p^{e-1}-1} \chi_1^p(h^t)t \bmod p^0.$$

Nous avons

$$\frac{1}{p^{e-1}} \sum_{t=0}^{p^{e-1}-1} t\chi_1^p(h^t) = \frac{1}{\chi_1^p(h) - 1}.$$

Évaluons maintenant

$$\sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(h^u)u^{s-1}.$$

Si $s = 1$

$$\sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(h^u) = \frac{1 - \chi_1^p(h)}{1 - \chi_1(h)}$$

Si $s \neq 1$ et $p \neq 2$

$$\sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(h^u)u^{s-1} \equiv \sum_{u=1}^{p-1} \chi_1(h^u)u^{s_0-1} \bmod p$$

où $s \equiv s_0 \bmod p - 1$ et $2 \leqslant s_0 \leqslant p$

$$\chi_1(h) = 1 + \pi \qquad \text{avec} \qquad \omega(\pi) = \frac{1}{\varphi(p^e)}$$

$$\sum_{u=0}^{p-1} (1 + \pi)^u u^{s_0-1} = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{u=1}^{p-1} \binom{u}{k} u^{s_0-1}\right) \pi^k.$$

Posons $$P_k(X) = \binom{X}{k} X^{s_0-1}$$

$$P_k(X) \in \mathbf{Z}_p[X] \qquad \text{et} \qquad d^0P_k = k + s_0 - 1.$$

En utilisant la proposition 4, nous avons

$$\omega\left(\sum_{u=1}^{p-1} P_k(u)\right) = 0 \qquad \text{si} \qquad k = p - s_0$$

$$\omega\left(\sum_{u=1}^{p-1} P_k(u)\right) \geqslant 0 \qquad \text{si} \qquad k > p - s_0$$

$$\omega\left(\sum_{u=1}^{p-1} P_k(u)\right) \geqslant 1 \qquad \text{si} \qquad k < p - s_0.$$

Soit $$\omega\left(\sum_{u=1}^{p-1} \chi_1(h^u)u^{s_0-1}\right) = \frac{p - s_0}{\varphi(p^e)} < 1.$$

Ainsi

$$\omega\left(\sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(h^u)u^{s-1}\right) = \omega\left(\sum_{u=1}^{p-1} \chi_1(h^u)u^{s_0-1}\right) = \frac{p - s_0}{\varphi(p^e)}$$

si $s \neq 1$ et $p = 2$, il est évident que

$$\omega\left(\sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(h^u)u^{s-1}\right) = 0.$$

Comme

$$\omega(V(\chi_1, p^e, s) = \omega\left(\sum_{u=0}^{p-1} \chi_1(h^u)u^{s-1}\right) + \omega\left(\frac{1}{p^{e-1}} \sum_{t=0}^{p^{e-1}-1} \chi_1^p(h^t)t\right)$$

si $s = 1$

$$\omega(V(\chi_1, p^e, s)) = \frac{-1}{\varphi(p^e)}$$

si $s \neq 1$

$$\omega(V(\chi_1, p^e, s)) = -\frac{s_0}{\varphi(p^e)}$$

Le lemme 6 nous donne alors :

$$\omega(V(\chi_1, \varphi(p^r), s) = \omega(V(\chi, p^e, s)$$

Remarquant que :

$$-\frac{p}{\varphi(p^e)} \leqslant \omega(V(\chi_1, p^e, s)) \leqslant -\frac{1}{\varphi(p^e)}$$

et appliquant la relation (3).

Nous obtenons

$$\omega(U(\chi_1, p^r, s)) = -1 - \frac{s_0}{\varphi(p^e)} \qquad \text{si} \qquad s \neq 1$$

$$\omega(U(\chi_1, p^r, s)) = -1 - \frac{1}{\varphi(p^e)} \qquad \text{si} \qquad s = 1$$

LEMME 8. — *Soit* $\chi_1 \in X(p^r)$, *si* $p \neq 2$ (resp. $\chi_1 \in X_1$ *si* $p = 2$).

Si ordre de $\chi_1 = p$ *alors*

$$\omega(U(\chi_1, p^r, s)) = -1 - \frac{s_0}{p-1} - \omega(s)$$

avec $\quad s \equiv s_0 \bmod p - 1 \quad$ *et* $\quad 1 \leqslant s_0 \leqslant p - 1.$

Preuve.

$$V(\chi_1, p, s) = \frac{1}{sp} \sum_{u=1}^{p} \chi_1(h^u)u^s$$

Soit

$$V(\chi_1, p, s) = \frac{1}{sp} \sum_{u=1}^{p-1} \chi_1(h^u)u^s \bmod p^0$$

Posons $\chi_1(h) = 1 + \pi$ où $\omega(\pi) = \dfrac{1}{p-1}$

$$V(\chi_1, p, s) = \frac{1}{sp}\sum_{u=1}^{p-1}(1+\pi)^u u^s = \frac{1}{sp}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{u=1}^{p-1}\left(\binom{u}{k}u^s\right)\pi^k$$

Posons

$$P_k(X) = \binom{X}{k}X^s,$$

alors $P_k(X) \in \mathbf{Z}_p[X]$ si $0 \leqslant k \leqslant p-1$

Soit $s_0 \equiv s \bmod p-1$ et $1 \leqslant s_0 \leqslant p-1$

$$\omega\left(\frac{1}{p}\sum_{u=1}^{p-1}P_k(u)\right) \geqslant \frac{k}{p-1} \qquad \text{si} \quad k < p-1-s_0$$
$$\omega\left(\frac{1}{p}\sum_{u=1}^{p-1}P_k(u)\right) = -\frac{s_0}{p-1} \qquad \text{si} \quad k = p-1-s_0$$
$$\omega\left(\frac{1}{p}\sum_{u=1}^{p-1}P_k(u)\right) \geqslant -1 + \frac{k}{p-1} \qquad \text{si} \quad k > p-1-s_0$$

Par suite

$$\omega(V(\chi_1, p, s)) = -\frac{s_0}{p-1} - \omega(s).$$

En appliquant le lemme 6 et en considérant s pair ou impair lorsque $p = 2$, nous obtenons :

$$\omega(V(\chi_1, \varphi(p^r), s)) = -\frac{s_0}{p-1} - \omega(s).$$

Il nous reste à utiliser la relation (3) pour obtenir le résultat cherché.

Lemme 9. — *Soit* $\chi_1 = \chi_0 \in X(p^r)$ *si* $p \neq 2$ (resp. $\chi_1 = \chi_0 \in X_1$, *si* $p = 2$).

Nous avons :

Si $p \neq 2$

$$U(\chi_1, p^r, s) \equiv 0 \mod p^{-1} \qquad \textit{si} \quad s \not\equiv 0 \mod p-1$$
$$\omega(U(\chi_1, p^r, s)) = -2 - \omega(s) \qquad \textit{si} \quad s \equiv 0 \mod p-1$$

Si $p = 2$

$$U(\chi_1, p^r, s) \equiv 0 \mod p^{-1}$$

si $s \not\equiv 0 \mod p$ *et si* $s > 1$

$$\omega(U(\chi_1, p^r, s)) = -2 - \omega(s)$$

si $s \equiv 0 \mod p$ *ou si* $s = 1$.

Preuve. — $V(\chi_1, \varphi(p^r), s) = \dfrac{1}{s\varphi(p^r)} \sum_{u=1}^{\varphi(p^r)} u^s$.

Il suffit d'appliquer la proposition 4 et la relation 3.

b) *Évaluation de* « T ».

Résumons tout d'abord les résultats des lemmes précédents

$o(\chi_1) \neq p^e$

$$U(\chi_1,\ p^r,\ 1) \equiv 0 \quad \text{mod}\ p^{-1}$$

$o(\chi_1) = p^e$

si $s \neq 1$, $\qquad \omega(U(\chi_1, p^r, s)) = -\dfrac{s_0}{\varphi(p^e)}$

avec $\quad s \equiv s_0 \quad \text{mod}\ p-1 \quad$ et $\quad 2 \leqslant s_0 \leqslant p$

si $s = 1$, $\qquad \omega(U(\chi_1, p^r, s)) = -1 - \dfrac{1}{\varphi(p^e)}$

$o(\chi_1) = p$

$$\omega(U(\chi_1, p^r, s)) = -1 - \frac{s_0}{p-1} - \omega(s)$$

avec $\quad s \equiv s_0 \quad \text{mod}\ p-1 \quad$ et $\quad 1 \leqslant s_0 \leqslant p-1$

$o(\chi_1) = 1$

si $p \neq 2$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } s \not\equiv 0 \ \text{mod}\ p-1\\ \text{si } s \equiv 0 \ \text{mod}\ p-1\end{array}\right\}\begin{array}{l}U(\chi_1,\ p^r,\ s) \equiv 0 \ \text{mod}\ p^{-1}\\ \omega(U(\chi_1,\ p^r,\ s)) = -2 - \omega(s)\end{array}$$

si $p = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } s \not\equiv 0 \ \text{mod}\ p \ \text{ et si } s > 1\\ \text{si } s \equiv 0 \ \text{mod}\ p \ \text{ ou si } s = 1\end{array}\right\}\begin{array}{l}U(\chi_1,\ p^r,\ s) \equiv 0 \ \text{mod}\ p^{-1}\\ \omega(U(\chi_1,\ p^r,\ s)) = -2 - \omega(s).\end{array}$$

Nous remarquons que toutes ces évaluations sont de la forme $-1-\delta$ où δ est lié à la nature du caractère. C'est pourquoi nous allons introduire quelques notations afin de pouvoir condenser en une proposition les lemmes précédents et simplifier l'énoncé des théorèmes qui suivront.

Notation δ.

Soit $\chi \in X$, soit $m \in M(\chi\theta^0)$ avec $m = m_0 p^r$ où $(m_0, p) = 1$. Alors si $p \neq 2$, nous avons la décomposition :

$$\chi\theta^0 = \chi_1\chi_2 \qquad \text{où} \qquad \chi_1 \in X(p^r) \qquad \text{et} \qquad \chi_2 \in X(m_0).$$

Il est bien immédiat que χ_1 et χ_2 ne dépendent pas du choix de m dans $M(\chi\theta^0)$. Il en est de même si $p = 2$ de la décomposition

$$\chi\theta^0 = \chi_1\chi_1'\chi_2$$

où $\chi_1 \in X_1$, $\chi_1' \in X_1'$ avec $X_1 . X_1' = X(p^r)$ et $\chi_2 \in X(m_0)$.

Le nombre premier p étant fixé, δ est une application de $X \times \mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{Q}$ (il sera implicite que lorsque dans une relation figurera un nombre premier p, l'application δ utilisée sera celle attachée à p) ainsi définie :

α) *si* $\chi_2 \neq \chi_0$ ou si χ est impair

$$\delta(\chi, s) = 0$$

β) *si* $\chi_2 = \chi_0$ et si χ *est pair*

(i) *si* $o(\chi_1) \neq p^e \quad \forall e \in \mathbf{N}$

$$\delta(\chi, s) = 0$$

(ii) *si* $o(\chi_1) = p^e \quad e \geqslant 2$

si $s \neq 1$ $\delta(\chi, s) = \dfrac{s_0}{\varphi(p^e)}$

$$s \equiv s_0 \bmod p - 1 \quad 2 \leqslant s_0 \leqslant p$$

si $s = 1$ $\delta(\chi, s) = \dfrac{1}{\varphi(p^e)}$

(iii) *si* $o(\chi_1) = p$

$$\delta(\chi, s) = \frac{s_0}{p-1} + \omega(s)$$
$$s \equiv s_0 \bmod p - 1 \quad 1 \leqslant s_0 \leqslant p - 1$$

(iv) *si* $o(\chi_1) = 1$

si $p \neq 2$

$$\begin{array}{ll} \text{si} & s \not\equiv 0 \bmod p - 1 \\ \text{si} & s \equiv 0 \bmod p - 1 \end{array} \qquad \delta(\chi, s) = \begin{cases} 0 \\ 1 + \omega(s) \end{cases}$$

si $p = 2$

$$\begin{array}{llll} \text{si} & s \not\equiv 0 \bmod p & \text{et} & \text{si } s > 1 \\ \text{si} & s \equiv 0 \bmod p & \text{ou} & \text{si } s = 1 \end{array} \qquad \delta(\chi, s) = \begin{cases} 0 \\ 1 + \omega(s) \end{cases}$$

THÉORÈME 1. — *Pour tout* $\chi \in X$, $\forall m \in M(\chi\theta^0)$ *tel que* $\omega(m) \geqslant 2$ *si* $p \neq 2$ (resp. $\omega(m) \geqslant 4$ *si* $p = 2$), $\forall s \in \mathbf{N}^*$ *nous avons :*

$$T(\chi, m, s) \equiv 0 \bmod p^{-(1+\delta(\chi, s))}.$$

Preuve. — Il suffit d'utiliser la proposition 5 et l'évaluation de $U(\chi_1, p^r, s)$.

THÉORÈME 2. — *Si* χ *est un caractère pair non trivial tel que* $f(\chi)$ *et* $o(\chi)$ *soient des puissances de* p, *nous avons :*

$$\omega(T(\chi, m, s)) = -1 - \delta(\chi, s)$$

si $\chi = \varepsilon$

$$\omega(T(\chi, m, s)) = -1 - \delta(\chi, s)$$

si $s \equiv 0 \bmod p-1$ *et* $p \neq 2$

$$\omega(T(\chi, m, s) = -1 - \delta(\chi, s)$$

si $s \equiv 0 \bmod p$ *et* $p = 2$ ou *si* $s = 1$.

COROLLAIRE. — *Pour tout* $\chi \in X$, $\forall m \in M(\chi\theta^0)$ *tel que* $\omega(m) \geqslant 2$ *si* $p \neq 2$ (resp. $\omega(m) \geqslant 4$ *si* $p = 2$), $\forall s \in \mathbf{N}^*$, *nous avons*

$$sT(\chi, m, s) \equiv 0 \bmod p^{\omega(s)-(1+\delta(\chi, s))}.$$

c) *Applications à certaines formes linéaires.*

Soient $\hat{\Omega}_p$ le complété de Ω_p, $\hat{\Lambda}_p$ et Λ_p les anneaux de valuations respectifs, $\hat{\mathfrak{M}}_p$ et $\mathfrak{M}_p$ les idéaux respectifs. Soit $A(\hat{\Lambda}_p)$ le $\hat{\Omega}_p$ — espace de Banach des fonctions analytiques strictes sur $\hat{\Lambda}_p$. La norme sur $A(\hat{\Lambda}_p)$ est définie par

$$\|g\| = \sup_{x \in \hat{\Lambda}_p} |g(x)|.$$

PROPOSITION 6. — *Soient* $g \in A(\hat{\Lambda}_p)$, $\chi \in X$ et $f \in M(\chi)$ *alors*

$$\frac{1}{fp^n} \sum_{a=1}^{fp^n} \chi(a) g(a)$$

a une limite lorsque $n \to \infty$ *que nous noterons* $I_\chi(g)$.

Nous avons la relation :

$$I_\chi(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n(0)}{n!} B^n(\chi).$$

Il s'ensuit que I_χ *est une forme linéaire continue et que:*

$$\|\mathrm{I}_\chi\| \leqslant |p^{-1}|.$$

La preuve en est immédiate, il suffit d'appliquer la proposition 3 § 2.

Soit $\chi \in \mathrm{X}$, $f \in \mathrm{M}(\chi)$, alors la *suite*

$$(\mathrm{T}(\chi,\ fp^n,\ s))_{n\in\mathbf{N}}$$

est de *Cauchy*.

En effet $\mathrm{T}(\chi, fp^{n+1}, s) \equiv \mathrm{T}(\chi, fp^n, s) \bmod p^{n-3}$

$$\mathrm{T}(\chi,\ fp^{n+1},\ s) = \frac{1}{s\,.\,fp^{n+1}} \sum_{a=1}^{fp^{n+1}} \chi\theta^0(a)\psi^s(a)$$

soit

$$\mathrm{T}(\chi,\ fp^{n+1},\ s) = \frac{1}{s\,.\,fp^{n+1}} \sum_{a=1}^{fp^n} \sum_{t=0}^{p-1} \chi\theta^0(a)\psi^s(a + tfp^n)$$

or,

$$\psi(a + tfp^n) = \psi(a) + \frac{tfp^{n-1}}{\theta(a)}.$$

Nous obtenons la congruence cherchée.

Posons alors

$$\mathrm{T}(\chi,\ s) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{T}(\chi,\ fp^n,\ s).$$

Proposition 7. — *Soit* $f \in \mathrm{A}(\hat{\Lambda}_p)$ *alors*

$$\frac{1}{fp^n} \sum_{a=1}^{fp^n} \chi\theta^0(a) f\left(\frac{a}{\theta(a)}\right)$$

a une limite lorsque $n \to \infty$ *que nous noterons* $\mathfrak{M}_\chi(f)$.

Et nous avons la relation

$$\mathfrak{M}_\chi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(1)}{n!}\, \mathrm{T}(\chi,\ s).$$

Il s'ensuit que $\mathfrak{M}_\chi$ est une *forme linéaire continue* sur $\mathrm{A}(\hat{\Lambda}_p)$ dont on peut évaluer la norme de la façon suivante :

si $\chi_2 \neq \chi_0$ ou si $o(\chi_1) \neq p^e$. $\forall e \in \mathbf{N}$

$$\|\mathfrak{M}_\chi\| \geqslant 1$$

si $o(\chi_1) = p^e$, $e \geqslant 2$

$$\|\mathfrak{M}_\chi\| = |p|^{-1/\varphi(p^e)}$$

si $o(\chi_1) = p^e$ avec $e = 1$ ou 0

$$\|\mathfrak{M}_\chi\| = |p|^{-1}.$$

4. Congruences entre les nombres de Bernoulli.

a) *Coefficients d'interpolation.*

Nous allons évaluer l'expression

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^s \binom{s}{k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1}$$

c'est-à-dire au signe près les coefficients d'interpolation de la fonction

$$k \to \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1}$$

Il est évident que nous ne considérons que des caractères pairs.

Théorème 3. — *Pour tout* $\chi \in X$, $\forall s \in \mathbf{N}$, *pour tout nombre premier* p, *nous avons*

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1} \equiv 0 \mod p^{s-\delta(\chi,\, s+1)}$$

Si $p \neq 2$ (resp. mod $p^{2s+1-\delta(\chi,\, s+1)}$ *si* $p = 2$).

Preuve.

$$\sum_{k=0}^{s} (-1)^s \binom{s}{k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1}$$
$$= \frac{1}{s+1} \sum_{k=0}^{s+1} (-1)^k \binom{s+1}{k} B^k(\chi\theta^{-k})$$

Soit

$$m \in M(\chi\theta^0) = M(\chi\theta^{-k}) \quad (\forall k \in \mathbf{N})$$

tel que

$\omega(m) \geqslant 2s + 1$ si $p \neq 2$ (resp. $\omega(m) \geqslant 3s + 1$ si $p = 2$).

D'après la proposition 3,

$$\frac{1}{s+1}\,B^k(\chi\theta^{-k}) \equiv \frac{1}{s+1}\,S^k_{\chi\theta^{-k}}(m) \bmod p^s \qquad \text{si} \qquad p \neq 2$$

$$(\text{resp. mod } p^{2s+1} \text{ si } p = 2)$$

Comme

$$-\frac{1}{s+1}\sum_{k=0}^{s+1}(-1)^k\binom{s+1}{k}\frac{S^k_{\chi\theta^{-k}}(m)}{m} = \frac{-1}{(s+1)m}\sum_{a=1}^{m}\chi\theta^0(a)\left(1-\frac{a}{\theta(a)}\right)^{s+1}$$

si $p \neq 2$

$$-\frac{1}{s+1}\sum_{k=0}^{s+1}(-1)^k\binom{s+1}{k}\frac{S^k_{\chi\theta^{-k}}(m)}{m} = (-1)^s T(\chi,\ m,\ s+1)p^{s+1}$$

Alors

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{s}(-1)\binom{s}{k}\frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1} \equiv (-1)^s T(\chi,\ m,\ s+1)p^{s+1} \bmod p^s$$

si $p = 2$

$$-\frac{1}{s+1}\sum_{k=0}^{s+1}(-1)^k\binom{s+1}{k}\frac{S^k_{\chi\theta^{-k}}(m)}{m} = (-1)^s T(\chi,\ m,\ s+1)p^{2s+2}.$$

Alors

$$(5) \quad \sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1} \equiv (-1)^s T(\chi,\ m,\ s+1)p^{2s+2} \bmod p^{2s+1}.$$

Le théorème est alors une conséquence du théorème 1.

THÉORÈME 4. — *Les hypothèses étant les mêmes que celles du théorème* 2, *nous avons*

si $p \neq 2$

$$\omega\left(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1}\right) = s - \delta(\chi,\ s+1)$$

si $p = 2$

$$\omega\left(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1}\right) = 2s + 1 - \delta(\chi,\ s+1).$$

Preuve. — En effet les congruences (4) et (5) nous donnent si $p \neq 2$

$$\omega\left(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)})-(B^0(\chi\theta^0))}{k+1}\right) = \omega(T(\chi,\ m,\ s+1))+s+1$$

si $p = 2$

$$\omega\left(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)})-(B^0(\chi\theta^0))}{k+1}\right) = \omega(T(\chi,\ m,\ s+1))+2s+2.$$

Il suffit d'utiliser le théorème 2.

Nous pouvons de la même façon évaluer les coefficients d'interpolation de la fonction

$$k \to B^k(\chi\theta^{-k})$$

qui sont au signe près

$$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}B^k(\chi\theta^{-k})$$

THÉORÈME 5. — *Pour tout* $\chi \in X$, $\forall s \in \mathbf{N}$, *pour tout nombre premier* p, *nous avons*

$$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}B^k(\chi\theta^{-k}) \equiv 0 \mod p^{s-1-\delta(\chi,s)+\omega(s)}$$

si $p \neq 2$ (resp. mod $p^{2s-1-\delta(\chi,s)+\omega(s)}$ *si* $p = 2$).

Preuve. — Soit $m \in M(\chi\theta^0) = M(\chi\theta^{-k})$ tel que $\omega(m) \geqslant 2s$ si $p \neq 2$ (resp. $\omega(m) \geqslant 3s$ si $p = 2$).

La proposition 3 nous donne

$$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}B^k(\chi\theta^{-k}) \equiv \sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}S^k_{\chi\theta^{-k}}(m) \mod p^{2s}$$

si $p \neq 2$ (resp. mod p^{3s} si $p = 2$).

Soit

$$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}B^k(\chi\theta^{-k}) \equiv \sum_{a=1}^{m}\chi\theta^0(a)\left(1-\frac{a}{\theta(a)}\right)^s \mod p^{2s}$$

si $p \neq 2$ (resp. mod p^{3s} si $p = 2$).

Si $p \neq 2$

$$(6)\quad \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \mathrm{B}^k(\chi\theta^{-k}) \equiv (-1)^s s\mathrm{T}(\chi,\ m,\ s)p^s \bmod p^{2s}$$

si $p = 2$

$$(7)\quad \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \mathrm{B}^k(\chi\theta^{-k}) \equiv (-1)^s s\mathrm{T}(\chi,\ m,\ s)p^{2s} \bmod p^{2s}.$$

Le théorème est alors une conséquence du théorème 3.

Théorème 6. — *Les hypothèses étant les mêmes que celles du théorème* 2, *nous avons :*

si $p \neq 2$

$$\omega\left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \mathrm{B}^k(\chi\theta^{-k})\right) = s - 1 - \delta(\chi,\ s) + \omega(s)$$

si $p = 2$

$$\omega\left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \mathrm{B}^k(\chi\theta^{-k})\right) = 2s - 1 - \delta(\chi,\ s) + \omega(s).$$

En effet les congruences (6) et (7) nous donnent

si $p \neq 2$

$$\omega\left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \mathrm{B}^k(\chi\theta^{-k})\right) = s - 1 + \omega(s) + (\mathrm{T}(\chi,\ m,\ s))$$

si $p = 2$

$$\omega\left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \mathrm{B}^k(\chi\theta^{-k})\right) = 2s - 1 + \omega(s) + \omega(\mathrm{T}(\chi,\ m,\ s)).$$

b) *Congruences du type « Kummer ».*

Les congruences de Kummer sont des évaluations de l'expression

$$\mathrm{A}(\chi,\ n,\ \nu,\ r) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{\mathrm{B}^{n+k\nu}(\chi\theta^{-(n+k\nu)}) - \mathrm{B}^0(\chi\theta^0)}{n + k\nu}$$

où $\chi \in \mathrm{X}$, $r \in \mathbf{N}$ et $n,\ \nu \in \mathbf{N}^*$.

Ici encore seuls les caractères pairs nous intéressent.

$A(\chi, n, \nu, r)$ n'est autre, au signe près, que le coefficient d'interpolation de la fonction

$$k \to \frac{B^{n+k\nu}(\chi\theta^{-(n+k\nu)}) - (B^0(\chi\theta^0))}{n + k\nu}.$$

Nous allons les évaluer par l'intermédiaire de la fonction $\Phi(.,\chi)$ définie par :

$$\Phi(x, \chi) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s Q_s(x)$$

avec

$$a_s = -\sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \binom{s}{k} \frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1}$$

et

$$Q_s(x) = (-1)^s \frac{x(x+1) \ldots (x+s-1)}{s!}.$$

La série $\Sigma a_s Q_s(x)$ est convergente pour la topologie discrète quel que soit x entier négatif et de plus

$$\Phi(1-m, \chi) = -\frac{B^m(\chi\theta^{-m}) - B^0(\chi\theta^0)}{m} \qquad \forall m \in \mathbf{N}^*.$$

La quantité A s'exprime sous la forme

$$A(\chi, n, \nu, r) = -\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \Phi(1 - n - k\nu, \chi)$$

Nous sommes conduits à évaluer

$$A_s(\chi, n, \nu, r) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} Q_s(1 - n - k\nu) a_s$$
$$= \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{r}{k} \binom{n-1+k\nu}{s} a_s$$

Considérons le développement suivant :

$$(1 + dX)^{n-1}(1 - (1 + dX)^\nu)^r$$
$$= (-1)^r (d\nu X)^r (1 + dX)^{n-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{r=1} \frac{\binom{\nu-1}{i}}{i+1} (dX)^i \right)^r$$

où

$$d \in \Omega_p \qquad \text{et} \qquad \omega(d) = \frac{1}{p-1}$$

Comme

$$\sum_{i=0}^{v-1} \frac{\binom{\varphi-1}{i}}{i+1} (dX)^i \in \mathbf{Z}_p[X]$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{r} (1)^k \binom{r}{k} \binom{n-1+k\varphi}{s} = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant s < r$$

$$(8) \qquad \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \binom{n-1+k\varphi}{r} = \varphi^r$$

$$\omega\left(d^s \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \binom{n-1+k\varphi}{s}\right) \geqslant \omega(d^r \varphi^r)$$

Une minoration de $\omega(a_s)$ nous est donnée par le théorème 3 et nous obtenons alors

$$\omega(a_s) - \frac{p-1}{s-r} \geqslant r + \frac{p-2}{p-1}(s-r) - \delta(\chi, s+1) \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

$$\omega(a_s) - (s-r) \geqslant 2r + 1 + (s-r) - \delta(\chi, s+1) \quad \text{si} \quad p = 2.$$

Afin de simplifier les énoncés des théorèmes qui suivront nous allons introduire une notation.

Notation. — *δ'' est une application* $X \times \mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{Q}$ *définie par :*

$$\delta''(\chi, r) = \min_{s \geqslant r} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)(s-r) - \delta(\chi, s+1) \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

$$\delta''(\chi, r) = \min_{s \geqslant r} (s - r - \delta(\chi, s+1)) \quad \text{si} \quad p = 2.$$

Or

$$A(\chi, n, \varphi, r) = \sum_{s \geqslant 0} A_s(\chi, n, \varphi, r) = \sum_{s \geqslant r} A_s(\chi, n, \varphi, r)$$

Ainsi

$$\omega(A(\chi, n, \varphi, r)) \geqslant \min_{s \geqslant r} \omega(A_s(\chi, n, \varphi, r)).$$

Ceci nous permet alors d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 7. — *Pour tout* $\chi \in X$, $\forall \varphi$, $r \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ *pour tout nombre premier* p, *nous avons*

$$A(\chi, n, \varphi, r) \equiv 0 \mod p^{r(\omega(v)+1)+\delta''(\chi, r)} \quad \textit{si} \quad p \neq 2$$

$$(\text{resp.} \mod p^{r(\omega(v)+2)+1+\delta''(\chi, r)} \quad \textit{si} \quad p = 2).$$

Nous pouvons expliciter $\delta''(\chi, r)$ *pour certains caractères*

si $\chi_2 \neq \chi_0$

$$\delta''(\chi, r) = 0$$

si $\chi = \chi_0$ et si $o(\chi_1) \neq p^e$

$$\delta''(\chi, r) = 0$$

si $o(\chi_1) = p^e$, $e \geqslant 2$

$$\delta''(\chi, r) = -\frac{r_0}{\varphi(p^e)} \quad \text{où} \quad \begin{cases} r_0 \equiv r + 1 \mod p - 1 \\ \qquad \text{et} \quad 2 \leqslant r_0 \leqslant p \text{ si } r \neq 0 \\ r_0 = 1 \quad \text{si} \quad r = 0. \end{cases}$$

Nous avons une évaluation exacte dans certains cas.

Corollaire 1. — *Si* χ *est primitif, si* $f(\chi)$ *est une puissance de* p, *si* $o(\chi) = p^e$ *ou* $e \geqslant 2$.

$$\omega(\mathrm{A}(\chi, n, \nu, r)) = r(\omega(\nu) + 1) - \frac{r_0}{\varphi(p^e)} \qquad si \qquad p = 2$$

$$\omega(\mathrm{A}(\chi, n, \nu, r)) = r(\omega(\nu) + 2) - \frac{r_0}{\varphi(p^e)} + 1 \qquad si \qquad p = 2$$

où $r_0 \equiv r + 1 \mod p - 1$ et $2 \leqslant r_0 \leqslant p$ *si* $r \neq 0$ *et* $r_0 = 1$ *si* $r = 0$.

La preuve résulte immédiatement de la relation (8) et du théorème 4.

Corollaire 2. — *Pour tout* $\chi \in \mathrm{X}$, *pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$

$$\frac{\mathrm{B}^n(\chi\theta^{-n}) - \mathrm{B}^0(\chi\theta^0)}{n} \equiv 0 \mod p^{-\delta(\chi, 1)}$$

si $p \neq 2$ (resp. mod $p^{1-\delta(\chi, 1)}$ *si* $p = 2$).

En effet

$$\mathrm{B}^n(\chi\theta^{-n}) - \mathrm{B}^0(\chi\theta^0) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \binom{n-1}{s}.$$

On utilise alors le théorème 3.

Corollaire 3. — *Si* χ *est un caractère primitif, si* $f(\chi)$ *est une puissance de* p, *si* $o(\chi) = p^e$ *avec* $e \geqslant 1$

$$\omega\left(\frac{\mathrm{B}^n(\chi\theta^{-n})}{n}\right) = -\frac{1}{\varphi(p^e)}.$$

On applique le théorème 4 en remarquant que

$$B^0(\chi\theta^0) = 0.$$

Corollaire 4. — *Pour tout* $\chi \in X$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall \nu \in \mathbf{N}$ *pour tout nombre premier* p *nous avons*

$$A(\chi, n, \nu, 1) \equiv 0 \bmod p^{\omega(\nu)+1-\delta(\chi, 2)}$$

si $p \neq 2$ (resp. mod $p^{\omega(\nu)+3-\delta(\chi, 2)}$ *si* $p = 2$).

Dans ce cas

$$\delta''(\chi, 1) = -\delta(\chi, 2)$$

Supposons que χ soit primitif, que $p^{e-1}(p-1)|m$ et que $\chi\theta \neq \chi_0$. Appliquons le corollaire 4 au caractère $\chi\theta^{m+1} = \chi\theta$ (si $p \neq 2$) nous avons

$$\frac{B^{m+1}(\chi\theta^0)}{m+1} \equiv \frac{B^1(\chi\theta^0)}{1} \bmod p^{e-\delta(\chi, 2)}$$

Utilisons la proposition 1

$$(1 - \chi(p)p^m)\frac{B^{m+1}(\chi)}{m+1} \equiv (1 - \chi(p))\frac{B^1(\chi)}{1} \bmod p^{e-\delta(\chi, 2)}$$

En prenant en considération le corollaire 3, nous obtenons

$$\frac{B^{m+1}(\chi)}{m+1} \equiv (1 - \chi(p))\frac{1}{f}\sum_{a=1}^{f} a\chi(a) \bmod p^{e-\delta(\chi, r)}$$

où f est le conducteur de χ.

Cette congruence approfondit les théorèmes 6 et 7 de [2].

Corollaire 5. — *Pour tout nombre premier* $p \neq 2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall \nu \in \mathbf{N}$ *tel que* $p - 1|\nu$, $\forall \chi \in X$, *nous avons :*

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\frac{B^{n+k\nu}(\chi)(1-\chi(p)p^{n-1+k\nu}) - B^0(\chi\theta^n)}{n+k\nu} \equiv 0 \bmod p^{r(\omega(\nu)+1)+\delta''(\chi, r)}.$$

Preuve. — Il suffit d'utiliser le théorème 7 (en remplaçant χ par $\chi\theta^n$) et la proposition 1 et de remarquer que θ est d'ordre $p-1$ si $p \neq 2$ (resp. d'ordre 2 si $p = 2$).

Ce corollaire contient le théorème 5 de Carlitz [2]. Les conditions imposées à χ impliquent que $\delta''(\chi\theta^n, r) = 0$. Dans ces mêmes conditions d'après le corollaire 3

$$\omega\left(\frac{B^{n+kv}(\chi)}{n+k\varphi}\right) \geqslant 0$$

et d'autre part

$$B^0(\chi\theta^n) = 0$$

et alors,

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}(\chi)}{n+k\varphi} \equiv 0 \bmod (p^{r((v)+1)}, p^{n-1})$$

si $p \neq 2$ et si $p-1 | \varphi$

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^n \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}(\chi)}{n+k\varphi} \equiv 0 \bmod (p^{r((v)+2)}, p^{n-1})$$

si $p = 2$ et si $2 | \varphi$.

Si nous posons

$$(B'(\chi))^i = \frac{B^i(\chi)}{i}$$

Ces congruences prennent la forme symbolique très simple

$$(B'(\chi))^n (1 - (B'(\chi))^v)^r = 0 \bmod (p^{r(\omega(v)+1)}, p^{n-1})$$

si $p \neq 2$ et si $p-1 | \varphi$

$$(B'(\chi))^n (1 - B'(\chi)^v)^r \equiv 0 \bmod (p^{r(\omega(v)+2)}, p^{n-1})$$

si $p = 2$ et si $2 | \varphi$.

Corollaire 6. — *Pour tout nombre premier* $p \neq 2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, *tel que* $n \not\equiv 0 \bmod p-1$, $\forall \varphi \in \mathbf{N}$ *tel que* $p-1 | \varphi$, $\forall r \in \mathbf{N}$, *nous avons*

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{nk+v}}{n+k\varphi} (1 - p^{n-1+kv}) \equiv 0 \bmod p^{r(\omega(v)+1)}.$$

Si les conditions sont les mêmes que précédemment excepté que $n = 0 \bmod p-1$

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+kv}}{n+k\varphi} (1 - p^{n-1+kv})$$
$$\equiv \frac{p-1}{p} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{n+k\varphi} \bmod p^{r(\omega(v)+1)-\delta''(\theta^0, r)}.$$

Si $p = 2$, si $2|\nu$, si $2|n$, la première relation est vraie mod $p^{r(\omega(v)+2)}$, si $2|\nu$, si $2|n$ la seconde relation est vraie mod $p^{r(\omega(v)+2)+1+\delta''(\theta^0, r)}$.

Ce corollaire contient évidemment la congruence de Kummer [4] :

Pour tout $r \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ tel que $n > r$ et $n \not\equiv 0 \bmod p - 1$

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{B^{n+k\nu}}{n+k\nu} \equiv 0 \bmod p^r.$$

c) *Congruence du type « Nielsen ».*

Nous allons chercher à évaluer l'expression

$$B(\chi, n, \nu, r) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+k\nu}(\chi\theta^{-(n+k\nu)}).$$

Si nous posons

$$(B(\chi\theta^{-}))^i = B^i(\chi\theta^{-i}).$$

L'expression $B(\chi, n, \nu, r)$ peut prendre la forme symbolique

$$B(\chi, n, \nu, r) = (B(\chi\theta^{-}))^n(1 - (B(\chi\theta^{-})^{\nu})^r.$$

Théorème 8. — *Pour tout nombre premier* p, $\forall n, \nu, r \in \mathbf{N}$, $\forall \chi \in X$, *nous avons*

$$B(\chi, n, \nu, r) \equiv 0 \bmod p^{r(\omega(v)+1)-1-\delta'(\chi, r)}$$

si $p \neq 2$ (resp. mod $p^{r(\omega(v)+2)-2-\delta'(\chi, r)}$ *si* $p = 2$).

δ' *est ainsi défini :*

Si $o(\chi_1) = p$ *ou si* $\chi_1 = \chi_0$ et

$s \equiv 0 \bmod p - 1$ si $p \neq 2$
(resp. $s \equiv 0 \bmod p$ *ou* $s = 1$ si $p = 2$)

$$\delta'(\chi, s) = \delta(\chi, s) - \omega(s)$$

autrement

$$\delta'(\chi, s) = \delta(\chi, s).$$

La preuve de ce théorème est analogue à celle du théorème 7 en appliquant le théorème 5.

Appliquons ce théorème aux nombres de Bernoulli ordinaires.

COROLLAIRE. — (i) *Si* $p \neq 2$, *si* $p - 1 | v$

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+kv}(1 - p^{n-1+kv}) \equiv 0 \mod p^{r(\omega(v)+1)-1}.$$

Si $n \not\equiv 0 \mod p - 1$ *ou si* $r \not\equiv 0 \mod p - 1$ (resp. mod $p^{r(\omega(p)+1)-2}$ *si* $n \equiv 0 \mod p - 1$ *et* $r \equiv 0 \mod p - 1$).

(ii) *Si* $p = 2$, *si* $2 | v$

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+kv}(1 - p^{n-1+kv}) \equiv 0 \mod p^{r(\omega(v)+2)-2}.$$

Ce corollaire répond à un problème posé par Nielsen ([6] p. 278) : l'expression

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} B^{n+kv}$$

est-elle divisible par une puissance de p supérieure à 1?

5. Fonctions p-adiques L_p.

a) *Définition.*

Dans ce paragraphe les caractères χ seront supposés primitifs. Nous noterons par $f(\chi)$ le conducteur du caractère χ.

La fonction $L_p(., \chi)$ est le prolongement à $\mathbf{Z}_p$ en une application continue de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Q}_p(\chi)$ de la fonction de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{Q}(\chi)$:

$$-m \longmapsto -\frac{B^{m-1}(\chi\theta^{-(m-1)})}{m-1}.$$

Nous avons donc

$$L_p(1 - m, \chi) = -\frac{B^m(\chi\theta^{-m})}{m} \quad \text{si} \quad m \in \mathbf{N}^*$$

Soit $m \equiv 0 \mod p - 1$ si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \mod p$ si $p = 2$)

$$L_p(1 - m, \chi) = -\frac{B^m(\chi\theta^0)}{m}$$

En vertu de la proposition 1 nous avons

$$L_p(1 - m, \chi) = -\frac{B^m(\chi)}{m}(1 - \chi(p)p^{m-1})$$

Si $L(., \chi)$ est la fonction de Dirichlet complexe nous obtenons

$$L_p(1-m, \chi) = L(1-m, \chi)\,(1-\chi(p)p^{m-1})$$

La présence du facteur $(1-\chi(p)\,p^{m-1})$ s'explique très bien par le fait que la fonction $L_p(., \chi)$ ne correspondant pas au caractère χ mais au caractère $\chi\theta^0$, et

$$L_p(s, \chi\theta^0) = \prod_q \frac{1}{1-\chi(q)q^{-s}} = \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}\,L(s, \chi)$$

et par suite

$$L_p(1-m, \chi) = L(1-m, \chi\theta^0).$$

D'autre part ce facteur est indispensable pour que la fonction $L_p(., \chi)$ soit continue puisque l'application

$$s \longmapsto 1-\chi(p)p^{-s}$$

n'est pas continue si $\chi(p) \neq 0$. Si $\chi(p) = 0$ nous avons justement

$$\chi = \chi\theta^0$$

De façon générale, sur les entiers d'une classe de $m_0 \bmod p-1$ si $p \neq 2$ (resp. $\bmod p$ si $p = 2$), $L_p(., \chi)$ coïncide avec la fonction complexe $L(., \chi\,\theta^{-m})$.

Les fonctions $L_p(., \chi)$ étant définies, par interpolation, les méthodes générales de l'interpolation p-adique nous fourniront tous les éléments pour en étudier la continuité et l'analycité et nous en donneront une expression explicite sous forme d'une série de fonctions. D'autre part, les congruences sur les nombres de Bernoulli seront pleinement appropriées à l'application des théorèmes de l'interpolation p-adique.

b) *Analycité.*

Soit u la suite définie par $u_k = -k$. Soit $\Phi_p(., \chi)$ la fonction définie sur la suite u par

$$\Phi_p(u_k, \chi) = -\frac{B^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - B^0(\chi\theta^0)}{k+1}$$

Suivant les notations de [1], posons :

$$P_n(X) = (X-u_0)\ldots(X-u_{n-1}) = X(X+1)\ldots(X+n-1)$$
$$Q_n(X) = \frac{P_n(X)}{P_n(u_n)} = (-1)^n\,\frac{X(X+1)\ \ldots\ (X+n-1)}{n!}$$

et $$a_s = \mathrm{P}_s(u_s) \sum_{k=0}^{s} \frac{\Phi_p(u_k, \chi)}{\mathrm{P}'_{s+1}(u_k)}$$

soit $$a_s = - \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} \binom{s}{k} \frac{\mathrm{B}^{k+1}(\chi\theta^{-(k+1)}) - \mathrm{B}^0(\chi\theta^0)}{k+1}.$$

Nous sommes alors conduits à évaluer l'expression

$$\frac{1}{s}(\omega(a_s) - \omega(s\,!))$$

Le théorème 3 montre que

$$\begin{aligned} &\omega(a_s) \geqslant s - \delta(\chi, s+1) && \text{si} \quad p \neq 2 \\ &\omega(a_s) \geqslant 2s + 1 - \delta(\chi, s+1) && \text{si} \quad p = 2 \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \delta(\chi, s+1) = 0$$

et que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \omega(s\,!) = \frac{1}{p-1}$$

$$\underline{\lim} \frac{1}{s}(\omega(a_s) - \omega(s\,!)) \geqslant \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \qquad \text{si} \quad p \neq 2$$

$$\underline{\lim} \frac{1}{s}(\omega(a_s) - \omega(s\,!)) \geqslant 1 \qquad \text{si} \quad p = 2$$

Le théorème 3 du chapitre III de [1] permet d'affirmer que la fonction $\Phi_p(\,.\,, \chi)$ se développe en série d'interpolation sous la forme

$$\Phi_p(x, \chi) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \mathrm{Q}_s(x) \quad \forall x \in \mathbf{Z}_p$$

et que $\Phi_p(\,.\,, \chi)$ est analytique stricte sur $\mathbf{Z}_p$ et que son développement en série à l'origine a un rayon de convergence R_p satisfaisant les inégalités

$$\begin{aligned} &\mathrm{R}_p \geqslant p^{\left(1-\frac{1}{p-1}\right)} && \text{si} \quad p \neq 2 \\ &\mathrm{R}_p \geqslant 2 && \text{si} \quad p = 2 \end{aligned}$$

Nous avons même le résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 9. — *Soit χ un caractère primitif tel que $f(\chi)$ et $o(\chi)$ soient des puissances de p (éventuellement nulles).*

Alors le rayon de convergence de $\Phi_p(.,\chi)$ *est exactement:*

$$(9) \qquad p^{\left(1-\frac{1}{p-1}\right)} \quad si \quad p \neq 2$$
$$(10) \qquad 2 \quad si \quad p = 2$$

Preuve. — Il suffit d'utiliser le théorème 4
Si $o(\chi) \neq 1$

$$\begin{aligned} \omega(a_s) &= s - \delta(\chi, s+1) && \text{si} \quad p \neq 2 \\ \omega(a_s) &= 2s + 1 - \delta(\chi, s+1) && \text{si} \quad p = 2 \end{aligned}$$

Si $o(\chi) = 1$

$$\omega(a_s) = s - \delta(\chi, s+1) \quad \text{si} \quad s+1 \equiv 0 \bmod p-1 \quad \text{et} \quad p \neq 2$$
$$\omega(a_s) = 2s + 1 - \delta(\chi, s+1) \quad \text{si} \quad s+1 \equiv 0 \bmod p \quad \text{et} \quad p = 2$$

Il en résulte alors que :

$$\underline{\lim}\, \frac{1}{s}\, \omega(a_s) = 1 \qquad \text{si} \qquad p \neq 2$$
$$\underline{\lim}\, \frac{1}{s}\, \omega(a_s) = 2 \qquad \text{si} \qquad p = 2$$

Soit $D(p, \chi)$ *le disque non circonférencié de centre* O *et de rayon* $p^{1-\frac{1}{p-1}}$ si $p \neq 2$ (resp. 2 si $p = 2$).

Théorème 10. — *Si* $o(\chi) \neq p^e$, $\forall e \in \mathbf{N}$ *ou si* $o(\chi) = p^e$ *avec* $e \geqslant 2$, *la fonction* $\Phi_p(.,\chi)$ *est bornée sur le disque* $D(p, \chi)$
Si $o(\chi) = p^e$, *avec* $e = 0$ *ou* $e = 1$ *la fonction* $\Phi_p(.,\chi)$ *n'est pas bornée sur le disque* $D(p, \chi)$.

La preuve résulte immédiatement du théorème 4.

Les relations entre les fonctions $\Phi_p(.,\chi)$ et $L_p(.,\chi)$ sont immédiates.

Si $\chi\theta^0 \neq \chi_0$, la relation (2′) montre que $B^0(\chi\theta^0) = 0$ et ainsi

$$\Phi_p(1-m, \chi) = -\frac{B^m(\chi\theta^{-m})}{m} = L_p(1-m, \chi)$$

quel que soit $m \in \mathbf{N}^*$ par suite de la densité des entiers négatifs dans Z_p et de la continuité de $\Phi_p(.,\chi)$ et $L_p(.,\chi)$ nous avons

$$\Phi_p(.,\chi) = L_p(.,\chi)$$

Si $\chi\theta^0 = \chi_0$, puisque χ est primitif $\chi\theta^0 = \theta^0$ et

$$B^0(\theta^0) = \frac{p-1}{p}$$

et

$$\Phi_p(1-m, \chi) = -\frac{B^m(\theta^{-m})}{m} + \frac{\frac{p-1}{p}}{m}$$

soit

$$\Phi_p(1-m, \chi) = L_p(1-m, \chi) - \frac{\frac{p-1}{p}}{(1-m)-1}$$

Puisque $\chi = \varepsilon$ est caractère principal de conducteur 1, notons

$$L_p(., \chi_0) = \zeta_p(., \mathbf{Q})$$

Nous avons ainsi

$$\zeta_p(x, \mathbf{Q}) = \Phi_p(x, \chi_0) + \frac{\frac{p-1}{p}}{x-1} \quad \forall x \in \mathbf{Z}_p$$

En résumé si $\chi \neq \varepsilon$ la fonction $L_p(., \chi)$ est *analytique stricte* sur $\mathbf{Z}_p$, *le rayon de convergence* de son développement de Taylor à l'origine est donné par (9) ou par (10) si χ satisfait les conditions du théorème 9.

D'autre part la fonction $\zeta_p(., \mathbf{Q})$ est *méromorphe, son rayon de méromorphie* est $p^{1-\frac{1}{p-1}}$ si $p \neq 2$ (resp. 2 si $p = 2$), $x = 1$ est le *seul pôle, il est simple et de résidu* $\frac{p-1}{p}$. Le résidu de la fonction $\zeta_p(., \mathbf{Q})$ n'est pas 1 parce qu'en fait cette fonction est associée au caractère θ^0 et non au caractère ε.

Si χ est un caractère impair, $\chi\theta^{-m}$ est pair ou impair suivant que m est impair ou ne l'est pas. Par suite le nombre de Bernoulli $B^m(\chi\theta^{-m})$ est toujours nul. Les fonctions $L_p(., \chi)$ *correspondant aux caractères impairs sont par conséquent nulles.*

Soit K une extension abélienne finie de $\mathbf{Q}$. C'est une sous-extension d'un corps cyclotomique. Le groupe de Galois est donc le groupe quotient d'un $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$. Et le groupe des caractères de ce groupe de Galois est identifié à un sous-groupe du groupe des caractères de $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$, c'est-à-dire $\tilde{\mathrm{X}}(m)$. Plus précisément, nous considérons l'image par f_m de ce groupe et nous appellerons $\mathfrak{X}$ l'ensemble des caractères primitifs associés aux éléments de cette image. Nous savons que si ζ_{K} est la fonction Zéta du corps de nombre abélien K

$$\zeta_{\mathrm{K}}(s) = \prod_{\chi\in\mathfrak{X}} \mathrm{L}(s,\ \chi).$$

Si K est un corps de nombres réel abélien nous appellerons fonction Zéta p-adique du corps K la fonction définie par

$$\zeta_p(s,\ \mathrm{K}) = \prod_{\chi\in\mathfrak{X}} \mathrm{L}_p(s,\ \chi).$$

Nous savons que tous les éléments de χ sont pairs si et seulement si K est réel. Ceci explique pourquoi les fonctions Zéta p-adiques ne sont définies que sur les corps réels.

c) *Théorème des résidus.*

Soient $\mathbf{R}$ *le corps des réels*, $\mathbf{C}$ *le corps des nombres complexes*, $\overline{\mathbf{Q}}$ une *clôture algébrique de* $\mathbf{Q}$, K une *extension abélienne, réelle, finie* de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, Ω_p une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ et $\hat{\Omega}_p$ un complété de Ω_p, avec les inclusions suivantes

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{R} \arrow[r] & \mathbf{C} & \\
\mathbf{Q} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{K} \arrow[u] \arrow[r] & \overline{\mathbf{Q}} \arrow[u] \arrow[d] & \\
 & \mathbf{Q}_p \arrow[r] & \Omega_p \arrow[r] & \hat{\Omega}_p
\end{tikzcd}$$

Soient $\hat{\Lambda}_p$ (resp $\hat{\mathfrak{M}}_p$) l'anneau de valuation, (resp idéal de valuation) de $\hat{\Omega}_p$.

Notons par $\log_\infty$ *la fonction logarithme* de $\mathbf{R}$ et par Log_p *le prolongement fonctionnel à* $\hat{\Lambda}_p - \hat{\mathfrak{M}}_p$ *du logarithme p-adique* défini sur $1 + \hat{\mathfrak{M}}_p$ [11].

Soient $\mathbf{A}$ la *clôture intégrale* de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{K}$ et $\mathbf{U}$ *le groupe des unités de* $\mathbf{A}$.

Si $n = [\mathbf{K};\ \mathbf{Q}]$ (degré de $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{Q}$) nous savons que $\mathbf{U}$

est le produit direct du *sous-groupe cyclique* $\mathbf{U}_0 = \{1, -1\}$ *d'ordre* 2 par *un sous-groupe libre* $\mathbf{U}_1$ de rang $r = n - 1$.

Soient $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{Q})$ le *groupe de Galois de l'extension* $\mathbf{K}$ de $\mathbf{Q}$ et $G^* = G - \{e\}$ (*e* est l'élément neutre de G). D'autre part, soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ *une base de* $\mathbf{U}_1$, nous savons que l'expression

$$(*) \qquad \det(\log |e_i^\sigma|)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ \sigma \in G^*}}$$

est indépendante au signe près du choix de la base.

Le régulateur p-adique $R_p(\mathbf{K})$; de $\mathbf{K}$ est défini par :

$$R_p(\mathbf{K}) = \det(\log_p e_i^\sigma)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ \sigma \in G^*}}$$

On choisit la base (e_i) et l'ordre des (σ) de façon que l'expression $(*)$ soit positive.

A. Brumer vient récemment de montrer le résultat suivant [3] :

THÉORÈME. — *Le régulateur p-adique de toute extension abélienne, réelle est non nul.*

Ce problème avait été soulevé par H. W. Leopolt [9] dans un contexte que nous allons brièvement rappeler.

A tout caractère primitif χ, on associe la quantité $L_p(\chi)$ définie de la façon suivante.

Si $f(\chi) \neq p^e$, $\forall e \in \mathbf{N}$

$$L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \times \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a) \operatorname{Log}_p \{1 - Z_{f(\chi)}^a\}$$

Si $f(\chi) = p$

$$L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \times \frac{1}{p-1} \times \sum_{a=1}^{p} \bar{\chi}(a) \operatorname{Log}_p \left\{\frac{(1 - Z_p^a)^{p-1}}{-p}\right\}$$

Si $f(\chi) = p^e$ avec $e \geqslant 2$

$$L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \times \frac{1}{p} \times \sum_{a=1}^{p^e} \bar{\chi}(a) \operatorname{Log}_p \left\{\frac{(1 - Z_{p^e}^a)^p}{(1 - Z_{p^{e-1}}^a)}\right\}$$

On désigne par $Z_{f(\chi)}$ *une racine primitive* $f(\chi)^{\text{ième}}$ de l'unité et $\tau(\chi)$ désigne *la somme de Gauss* définie par

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{f(\chi)} \chi(a) Z_{f(\chi)}^{a}.$$

H. W. Leopolt [9] a montré que si $\mathbf{K}$ est un corps abélien réel, le nombre de classes, le régulateur p-adique et les quantités $L_p(\chi)$ sont reliés par la formule :

$$\frac{2^{n-1} h_{\mathbf{K}} R_p(\mathbf{K})}{\sqrt{d_{\mathbf{K}}}} = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} L_p(\chi). \tag{1}$$

Le discriminant du corps $\mathbf{K}$ est $d_{\mathbf{K}}$ et $\sqrt{d_{\mathbf{K}}}$ est parfaitement déterminé par les inclusions $\mathbf{Q} \subset \mathrm{R}$ et $\overline{\mathbf{Q}} \subset \Omega_p$. D'autre part $h_{\mathbf{K}}$ est le *nombre de classes* de K (c'est-à-dire l'indice du sous-groupe des idéaux principaux de $\mathbf{A}$ dans le groupe des idéaux de $\mathbf{A}$).

Le problème posé par H. W. Leopolt [9] était le suivant : *existe-t-il des couples* (χ, p) *pour lesquels*

$$L_p(\chi) = 0\,?$$

Le théorème de A. Brumer permet immédiatement de dire que

$$L_p(\chi) \neq 0 \quad \forall \chi \neq \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall p \text{ premier.}$$

On voit d'autre part que si $L(., \chi)$ est la fonction de Dirichlet complexe, $L_p(\chi)$ n'est autre que le pendant p-adique de $L(1, \chi)$. Nous avons une relation analogue avec les fonctions $L_p(., \chi)$.

Théorème. — *Quel que soit le caractère* $\chi \neq \varepsilon$ *et le nombre premier* p *nous avons*

$$L_p(1, \chi) = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) L_p(\chi).$$

Quoique légèrement modifié ce théorème fut annoncé par H. W. Leopolt [6] (mais n'a pas été publié).

Nous allons indiquer brièvement l'idée de la preuve.

Soient χ un caractère primitif $m \in \mathbf{N}$ et $g(m, \chi, \mathrm{T})$ la série formelle ainsi définie :

$$g(m, \chi, \mathrm{T}) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi\theta^0(n) n^m \frac{\mathrm{T}^n}{n}$$

On remarque immédiatement que

$$(2)\qquad T\frac{d}{dT}g(m,\ \chi,\ T) = g(m+1,\ \chi,\ T)$$

D'autre part

$$(3)\quad g(1,\ \chi,\ T) = \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\left\{\sum_{a=1}^{f(\chi)}\overline{\chi}(a)\left(\frac{1}{1-Z^a_{f(\chi)}T} - \frac{\chi(p)}{1-Z^a_{f(\chi)}T^p}\right)\right\}$$

et

$$g(0,\chi,T) = -\frac{f(\chi)}{\tau(\chi)}\left\{\sum_{a=1}^{f(\chi)}\overline{\chi}(a)\left[\mathrm{Log}\,(1-Z^a_{f(\chi)}T) - \frac{\chi(p)}{p}\,\mathrm{Log}(1-Z^a_{f(\chi)}T^p)\right]\right\}$$

En utilisant (2) et (3) on conclut que les $g(m,\ \chi,\ T)$ ne sont autres que des fractions rationnelles si $m \geqslant 1$.

On montre aisément par récurrence que

$$g(m,\ \chi,\ 1) = -\frac{B^m(\chi\theta^0)}{m} \qquad \text{si} \qquad m \geqslant 1$$

On interprète aisément $g(0, \chi, T)$ comme élément analytique sur un quasi-connexe de $\hat{\Omega}_p$ contenant 1.

On démontre que la suite des fractions rationnelles

$$(g(p^k(p-1),\ \chi,\ T))_{k\in\mathbf{N}}$$

converge uniformément sur un quasi-connexe de $\hat{\Omega}_p$ contenant 0 et 1.

Ainsi de la convergence de cette suite au voisinage de 0 vers $g(0, \chi, T)$ on conclut la même convergence au voisinage de 1.

Ainsi

$$g(0,\ \chi,\ 1) = \lim_{k\to\infty} -\frac{B^{p^k(p-1)}(\chi\theta^0)}{p^k(p-1)}.$$

D'autre part

$$g(0,\ \chi,\ 1) = \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)L_p(\chi)$$

ce qui prouve le théorème.

Ce résultat permet d'écrire la formule (1) sous la forme

$$(4)\qquad \frac{2^{n-1}h_K R_p(\mathbf{K})}{\sqrt{d_K}} = \prod_{\chi\neq\varepsilon}\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1}L_p(\chi).$$

D'autre part

$$\lim_{s \to 1} (s - 1)\zeta_p(s, \mathbf{Q}) = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{\varepsilon(p)}{p}.$$

Nous obtenons ainsi la *formule des résidus* analogue au cas complexe

$$(5) \quad \frac{2^{n-1}h_{\mathrm{K}}\mathrm{R}_p(\mathbf{K})}{\sqrt{d_{\mathrm{K}}}} = \Big(\prod_{\chi \in \mathfrak{X}} \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big)^{-1}\Big)\Big(\lim_{s \to 1} (s - 1)\zeta_p(s, \mathbf{K})\Big).$$

En appliquant le théorème de Brumer nous voyons alors que

$$\lim_{s \to 1} (s - 1)\zeta_p(s, \mathbf{K}) \neq 0.$$

Ceci prouve que la *fonction* $\zeta_p(s, \mathbf{K})$ *admet un pôle pour* $s = 1$.

En résumé l'étude faite sur les fonctions L_p montre que la *fonction Zéta p-adique est méromorphe sur* $\mathbf{Z}_p$, *son rayon de méromorphie* est supérieur ou égal à $p^{1-\frac{1}{p-1}}$ si $p = 2$ (resp. 2 si $p = 2$). Elle admet *un seul pôle* dans ce disque. Il est obtenu pour $s = 1$, il est *simple et son résidu est donné par la formule* (5).

d) *Module de continuité.*

Soit $\mu(p, \chi)$ le *module de continuité* de la fonction $\mathrm{L}_p(., \chi)$ défini sur l'anneau de valuation sur $\mathbf{Z}_p$ par

$$\mu(p, \chi) = \min_{\substack{x, x' \in \mathbf{Z}_p \\ x \neq x'}} w\left(\frac{\mathrm{L}_p(x, \chi) - \mathrm{L}_p(x', \chi)}{x - x'}\right).$$

Théorème 11. — *Si* $p \neq 2$.

Si $f(\chi)$ *n'est pas une puissance de* p *ou si* $o(\chi_1)$ *n'est pas une puissance de* p

$$\mu(p, \chi) \geqslant 1.$$

Si $o(\chi_1) = p^e$, $e \geqslant 1$

$$\mu(p, \chi) = 1 - \frac{2}{\Phi(p^e)}.$$

Si $p = 2$.

Si $f(\chi)$ *n'est pas une puissance de* p *ou si* $o(\chi_1)$ *n'est pas* *une puissance de* p

$$\mu(p, \chi) \geqslant 3.$$

Si $o(\chi_1) = p^e$, $e \geqslant 2$

$$\mu(p, \chi) = 3 - \frac{2}{(p^e)}$$

Si $o(\chi_1) = p$

$$\mu(p, \chi) = 2.$$

Preuve. — Il suffit d'appliquer le corollaire 4 du théorème 7 en remarquant que si $f(\chi)$ n'est pas une puissance de p, $\chi_2 \neq \chi_0$ puisque χ est primitif.

On a de suite la proposition suivante :

Proposition 8. — *Si* $o(\chi_1) = p^e$, *ou encore si* $\mathbf{Q}(\chi)$ *est le corps des racines* p^e ième *de l'unité* $(e \neq 0)$, *on a*

$$\omega(L_p(1, \chi)) = \frac{1}{\varphi(p^e)}.$$

On applique le corollaire 3 du théorème 7.

Cette proposition nous permet d'évaluer

$$\omega(L_p(1 - s, \chi) - L_p(1, \chi))$$

c'est-à-dire *d'approcher* $L_p(1, \chi)$ par des nombres de Bernoulli.

$$\omega\left(-\frac{B^n(\chi\theta^{-n})}{n} - L_p(1, \chi)\right) \geqslant \mu(p, \chi) + \omega(n).$$

Si $p - 1|n$ lorsque $p \neq 2$ (resp. si $p|n$ lorsque $p = 2$)

$$\frac{B^n(\chi\theta^{-n})}{n} = \frac{B^n(\chi\theta^0)}{n} = (1 - \chi(p)p^{n-1})\frac{B^n(\chi)}{n}.$$

Si $f(\chi)$ n'est *pas une puissance de* p ou si $o(\chi_1)$ n'est pas *une puissance de* p nous avons les congruences

$$L_p(1, \chi) \equiv B^{p-1}(\chi) \bmod p \qquad \text{si} \quad p \neq 2$$
$$L_p(1, \chi) \equiv -\frac{B^2(\chi)}{2}(1 - \chi(p)p) \bmod p \qquad \text{si} \quad p = 2.$$

De même :

$$L_p(1, \chi) \equiv B^1(\chi\theta^{-1}) \bmod p \qquad \text{si} \quad p \neq 2$$
$$L_p(1, \chi) \equiv B^1(\chi\theta^{-1}) \bmod p^3 \qquad \text{si} \quad p = 2$$

Si $m \in M(\chi\theta^{-1})$, ceci peut prendre l'énoncé très simple suivant

$$L_p(1, \chi) \equiv \frac{1}{m} \sum_{a=1}^{m} \chi\theta^{-1}(a)a \mod p \qquad \text{si} \qquad p \neq 2,$$
$$L_p(1, \chi) \equiv \frac{1}{m} \sum_{a=1}^{m} \chi\theta^{-1}(a)a \mod p^2 \qquad \text{si} \qquad p = 2.$$

Proposition 9. — *Soit σ un $\mathbf{Q}_p$-automorphisme de Ω_p alors,*

$$\sigma(L_p(s, \chi)) = L_p(s, \sigma \circ \chi).$$

Preuve. — Soit $f \in M(\chi\theta^0)$

$$\sigma\left(\frac{1}{p^k f} \sum_{a=1}^{p^k f} \chi\theta^0(a)\left(\frac{a^n}{\theta(a)}\right)\right) = \frac{1}{p^k f} \sum_{a=1}^{p^k f} (\sigma \circ \chi)\theta^0\left(\frac{a}{\theta(a)}\right)^n.$$

Comme σ est continu en passant à la limite quand $k \to \infty$ nous obtenons

$$\sigma(L_p(1-n, \chi)) = L_p(1-n, \sigma \circ \chi).$$

En utilisant la densité des entiers négatifs, l'analycité stricte de $L_p(., \chi)$ et de $\sigma_0 L_p(., \chi)$ nous obtenons la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Yvette Amice, Interpolation p-adique, *Bull. Soc. Math. France*, t. 92 (1964), p. 117-160. (Thèse Sc. Math. Paris, 1963).

[2] Ankeny-Artin-Chowla, On the class number of a quadratic number fields, *Ann of Math.*, 56 (1952), 479-493.

[3] A. Brumer, On the units of algebraic number fields, *Mathematika* vol. 14, part. 2, déc. 1967, nº 28 pp. 121-124.

[4] L. Carlitz, Arithmetic properties of generalized, Bernoulli numbers, *Journal für die reine und ang. Math.*, 1959, Band 202, Heft 314.

[5] J. Fresnel, Nombres de Bernoulli généralisés et fonctions L p-adiques, *C.R. Acad. Sc.* Paris, t. 263, 337-340.

[6] T. Kubota und H. W. Leopoldt, Eine p-adishe theorie der Zetawerte; I Einführung der p-adisher Dirichletschen, L. Funktionen, *Journal für die reine und ang. Math.*, t. 214/215, (1964), 328-339.

[7] E. F. Kummer, Uber eine allgemeine Eigenschaft de rationalen Entwickelungskoëfficienten einer bestimmten gattung analytischer Funktionen, *J. Für reine und angew. Math.*, t. 41, (1851), 368-372.

[8] H. W. LEOPOLDT, Eine verallgemeinerung der Bernoullishen Zahlen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, t. 22, (1958), 131-140.

[9] H. W. LEOPOLDT, Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern, *Journal für die reine und ang. Math.*, Band 209, Heft 1/2 (1962).

[10] N. NIELSEN, Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris, Gauthier-Villars, 1923.

[11] M. KRASNER, Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, n° 143, *Colloques internationaux du C.N.R.S.*

(*Thèse, Fac. Sciences, Bordeaux*, 1967).

Jean FRESNEL,
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
351, cours de la Libération
33-Talence.