Annales de l'institut Fourier

Paul Krée

Interpolation d'espaces vectoriels qui ne sont ni normés ni complets. Applications

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 2 (1967), p. 137-174

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_137_0>

Ann. Int. Fourier, Grenoble
17, 2 (1967), 137-174.

INTERPOLATION D'ESPACES VECTORIELS QUI NE SONT NI NORMÉS, NI COMPLETS. APPLICATIONS

par Paul KRÉE

Introduction.

Ce travail contient deux parties :

I. On s'intéresse d'abord à l'interpolation d'applications quasilinéaires entre couples d'espaces quasinormés pas forcément complets. On étudie plus particulièrement la méthode d'interpolation par les espaces de moyenne et l'on obtient la transposition de certains résultats que Lions et Peetre (voir [12] et [13]) ont obtenus dans le cas des espaces de Banach.

II. En ce qui concerne les applications on donne d'abord l'expression explicite de $K(t, f)$ pour $f \in L^\alpha + L^\infty (\alpha > 0)$ où L^α et L^∞ sont deux espaces de Lebesgue :

$$K(t, f) \sim \left(\int_0^{t^\alpha} f^{\star\alpha}(\theta)\, d\theta\right)^{1/\alpha}$$

où $f^\star$ est la fonction sur $\mathbf{R}^+$ qui est équimesurable à f.

Le cas $\alpha = 1$ est dû à Peetre : voir [16].

Ceci permettrait d'expliciter les espaces obtenus en appliquant la méthode des quasi-normes fonctionnelles (voir Peetre à paraître) à un couple d'interpolation du type (L^α, L^∞).

On démontre ensuite l'identité :

$$(L^{p_0 q_0}\ L^{p_1 q_1})_{\theta r} = L^{p\theta r}$$

avec $p_0 \neq p_1$ dans $]0, +\infty[$

$$0 < \theta < 1, \qquad q_j \qquad \text{et} \qquad r \in]0, +\infty]$$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

les espaces L^{pq} étant des espaces de Lorentz.

Cette relation a été démontrée pour $p_j > 1$ et $r \geqslant 1$ de deux façons différentes par Calderon ([2]) et Lions et Peetre ([12] et [16]). Nous l'étendons au cas très important dans les applications où p_0 ou $p_1 = 1$ et en même temps au cas moins intéressant :

$$p_j \quad \text{ou} \quad r < 1.$$

Ceci entraîne le théorème annoncé par Hunt dans [6], donc l'extension du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz « à tout le quart de plan ».

En ce qui concerne les espaces L^p avec poids ϖ_j avec changement d'espaces de valeurs A_j (voir notations complètes au § 7) on démontre en suivant les méthodes de Lions et Peetre

$$(L^\infty_{\varpi_0}(A_0), L^\infty_{\varpi_1}(A_1))_{\theta, p} \to L^\infty_{\varpi_0^{1-\theta}\varpi_1^{\theta}}((A_0 A_1)_{\theta, p}).$$

— Cette relation a pour corollaires directs des extensions du théorème de Marcinkiewicz concernant des espaces définis par une condition du genre : « un sup de quasinormes est borné ». C'est le cas par exemple :

— des espaces type MORREY (on obtient une forme un peu plus générale du théorème 1.2 du travail [21] de Stampacchia).

— des espaces type H^p (on obtient un énoncé différent de celui énoncé dans [8] par Igari).

— des espaces de fonctions $R \xrightarrow{f} C$ définies par une condition du type :

$$\sup_{T>0} \left(\frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} |f(\theta)|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Nous employons les conventions suivantes :

— Tous les espaces vectoriels que nous considérons sont supposés complexes (mais rien ne change s'ils étaient réels, complexes ou sur le corps des quaternions ; et certaines parties s'adaptent à des corps p-adiques !).

— L'emploi de la lettre C est réservé pour désigner des constantes.

Je remercie vivement Monsieur Lions qui a activement dirigé ce travail et Pierre Grisvard qui m'a initié à la théorie des espaces de moyennes.

TABLE DES MATIÈRES

I. INTERPOLATION D'ESPACES QUASINORMÉS

Nous commençons par rappeler la définition des espaces quasinormés (voir [10]) et le langage « catégorique » habituel concernant la théorie de l'interpolation. On énonce ensuite (§ 2) quelques définitions équivalentes des espaces obtenus en appliquant le procédé des quasi-normes fonctionnelles de J. Peetre (à paraître).

On donne au § 3 quelques propriétés des espaces de moyenne à deux paramètres. La définition des espaces $(F_0, F_1)_{\theta,p}$ est rappelée au § 4. Notons que tous ces résultats se transposent si, au lieu d'interpoler des applications quasilinéaires entre couples d'espaces quasinormés, on interpole ces applications entre ensembles de n espaces. De même (et ceci sera d'ailleurs utilisé au § 8A) on peut supprimer toutes les hypothèses de séparation (par exemple l'hypothèse (1)). On peut donc interpoler des espaces semi-quasinormés. En ce qui concerne les autres méthodes d'interpolation :

a) la méthode complexe (voir [1] et [2]) peut être définie pour interpoler des applications *linéaires* entre couples d'espaces quasinormés; mais l'identification des espaces obtenus est difficile car on ne dispose plus des noyaux de Poisson.

b) On peut transposer la méthode de Gagliardo (voir [3]).

Notons qu'il est très probable (voir [18]) que les espaces définis à l'aide des fonctionnelles d'interpolation usuelles sont en fait des espaces de moyenne.

1. Généralités.

1.A. *Définitions des espaces quasinormés.*

DÉFINITION 1. *(*Quasi-norme. Espaces quasinormés.*)*

a) *Une quasi-norme sur* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* F *est une application* $|\,.\,|_F$:

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow \mathbf{R}^+ \\ f &\longmapsto |f|_F. \end{aligned}$$

(1) *L'application* $|.|_F$ *ne s'annule qu'à l'origine de* F.

(2) $|.|_F$ *est positivement homogène:*

$$\forall \lambda \textit{ complexe}, \quad \forall f \textit{ dans } \mathrm{F}, \qquad |\lambda f|_F = |\lambda||f|_F.$$

(3) *L'application* $|.|_F$ *est quasi-sous-additive:*

$$\exists \mathrm{C}(\mathrm{F}) > 0, \ \forall f \textit{ et } g \textit{ dans } \mathrm{F} |f + g|_F \leqq \mathrm{C}(\mathrm{F})(|f|_F + |\mathrm{Q}|_F).$$

b) *L'espace quasinormé* F *est l'espace* F *muni de la topologie où le filtre des voisinages de tout point* f_0 *de* F *admet pour base les « quasiboules »*

$$(4) \qquad \left\{ f \in \mathrm{F}; \quad |f_0 - f|_F \leqslant \frac{1}{n} \right\} \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2 \ldots$$

C'est une topologie d'espace vectoriel topologique métrisable (car le filtre des voisinages de l'origine admet une base dénombrable).

Notons la propriété (voir [10]) : pour que la topologie d'un *evt* séparé soit définissable par une quasinorme, il faut et il suffit qu'il admette un voisinage de l'origine borné : on prend comme quasinorme la jauge de ce voisinage.

F et G étant deux espaces quasi normés et si T est une application linéaire : F $\rightarrow$ G on voit que T est continue si, et seulement si, elle est bornée sur une quasiboule de F :

$$(5) \qquad \exists \mathrm{C}(\mathrm{T}) \qquad \forall f \in \mathrm{F} \qquad |\mathrm{T}f|_G \leqslant \mathrm{C}(\mathrm{T})|f|_F.$$

On dira que F et G sont deux espaces quasinormés isomorphes s'ils sont isomorphes comme espaces vectoriels et s'il existe des constantes C′ et C″ telles que

$$(6) \qquad \forall f \in \mathrm{F} \qquad \mathrm{C}'|f|_F \leqslant |f|_G \leqslant \mathrm{C}''|f|_F.$$

On dit alors que les quasi-normes $|.|_F$ et $|.|_G$ sont équivalentes. D'où il résulte (naturellement) la notion d'espaces quasinormables : chaque espace quasinormable correspondant à une classe d'équivalence d'espaces quasinormés isomorphes.

Des exemples seront étudiés dans la 2e partie : espaces de classes de Hardy H^p, espaces de Lorentz L^{pq}... Pour p et $q > 1$, les espaces L^{pq} sont isomorphes à des espaces normés. Mais ceci n'est plus vrai pour p et $q \leqslant 1$: on ne sait pas si c'est vrai pour l'espace $\mathrm{L}^{1\infty}$ très important dans les applications;

en tout cas, c'est faux pour $p = q = \frac{1}{2}$ et dans le cas où l'espace mesuré est $\mathbf{R}$; car on sait que le dual de $L^{1/2}(\mathbf{R})$ est nul.

1.B. *Le langage « catégorique » de la théorie de l'interpolation.* (j désigne l'un quelconque des nombres 0 et 1.)

DÉFINITION 2. (Les couples d'interpolation.)
Un couple d'interpolation $(F_j)_j$ *d'espaces quasinormés correspond à la donnée de deux espaces quasinormés* F_0 *et* F_1 *continuement plongés dans un espace vectoriel topologique* F.

A ce couple, on associe :

(7) $F_0 \cap F_1$ qui est l'espace vectoriel $F_0 \cap F_1$ muni de la quasi-norme $|f| = \max_j |f|_j$.

(8) $F_0 + F_1$ qui est l'ensemble des vecteurs de F qui peuvent s'écrire $f_0 + f_1$ (avec $f_i \in F_i$). On peut d'ailleurs mettre une quasinorme sur cet espace (voir [13])
(9) mais c'est inutile ici. On peut remplacer dans tout ce travail F par tout autre espace vectoriel contenant F_0 et F_1; donc en particulier par $F_0 + F_1$. Il a été aussi remarqué qu'il serait plus logique de parler
(10) de triplets d'espaces vectoriels plutôt que de couples, car pour construire les 4 espaces F_0, F_1, $F_0 + F_1$ et $F_0 \cap F_1$, il faut en connaître trois !

DÉFINITION 3. *(Applications quasilinéaires:* voir [3]. *La catégorie des couples d'interpolation.)*

1. F *et* G *étant deux espaces quasinormables, une application* T :
F $\to$ G *est dite quasilinéaire s'il existe une constante* C(T) *telle que*

(11) $\forall\lambda \quad \forall f \quad |T(\lambda f)| \leqslant C(T)|\lambda||f|$

(12) $\forall f$ *et* f' *dans* $F\,|T(f+f')| \leqslant C(T)(|f| + |f'|)$.

2. $(F_j)_j$ *et* $(G_j)_j$ *étant deux couples d'espaces quasinormables, une application* $T : F_0 + F_1 \to G_0 + G_1$ *est dite quasilinéaire s'il existe une constante* C(T) *telle que pour tout* f *de* $F_0 + F_1$ *et toute relation* $f = f_0 + f_1 (f_j \in F_j)$ *il existe une décomposition*

$Tf = g_0 + g_1 (g_j \in G_j)$ *telle que*

$$(13) \qquad |g_j|_j \leqslant C(T)|f_j|_j.$$

3. *La catégorie des couples d'interpolation est celle dont on vient de définir les flèches.*

Notons :

La définition donnée au 2° redonne la définition du 1° dans le cas particulier où $F_0 = F_1$ et $G_0 = G_1$.

Si une application T a la propriété énoncée par (13), alors

$$(14) \qquad \forall f \in F_0 + F_1, \qquad |Tf|_{G_0+G_1} \leqslant C(T)|f|_{F_0+F_1}$$

$$(15) \quad \forall \lambda, \qquad \forall f \in F + F_1, \qquad |T(\lambda f)|_{G_1+G_0} \leqslant C(T)|\lambda||f|_{F_0+F_1}.$$

Définition 5. (Méthode ou procédé d'interpolation).

Une méthode (ou un procédé) d'interpolation est un procédé qui attache de façon canonique à tout couple d'interpolation $(F_j)_j (G_j)_j \ldots$ *un espace quasinormable* F, G ... *contenu dans* $F_0 + F_1$, $G_0 + G_1 \ldots$ *tel que toute flèche* T : $(F_j)_j \to (G_j)_j$ *définisse par restriction à* F *une application quasilinéaire à valeurs dans* G (nous ne supposons pas la continuité de l'injection de F dans $F_0 + F_1$, ni le fait que F contienne $F_0 \cap F_1$).

2. Méthode des quasi-normes fonctionnelles (J. Peetre).

Cette méthode introduite par J. Peetre généralise la méthode des espaces de moyenne. Elle fait intervenir la fonction $K(t, f)$ (voir [16]) et un certain réseau X de fonctions.

Définition 6. — $(F_j)_j$ *étant un couple d'interpolation d'espaces quasinormables et* f *un vecteur quelconque de* $f_0 + f_1$ *on pose pour tout* $t > 0$

$$(16) \qquad K(t, f) = \inf_{\substack{f=f_0+f_1 \\ f_j \in F_j}} |f_0|_0 + t|f_1|_1.$$

On devrait dire en toute rigueur qu'à un choix d'un couple de quasinormes sur les F_j, il correspond une fonction $t \longmapsto K(t, f)$; et que si l'on fait un autre choix d'un couple quelconque de quasinormes, on obtient une nouvelle fonction $\tilde{K}(t, f)$ qui est « équivalente » à la fonction $K(t, f)$ au sens suivant :

$$\exists C' \quad \text{et} \quad C'' \quad \forall t \quad C'K(t, f) \leqslant \tilde{K}(t, f) \leqslant C''K(t, f).$$

En fait, on associe au couple $(F_j)_j$ et à $f \in F_0 + F_1$ une classe « d'équivalence » de fonctions $K(t, f)$. La fonction $K(t, f)$ est concave et continue. Il est donné dans [19] une interprétation géométrique de $K(t, f)$. On vérifie facilement que

$$K(t, \lambda f) = |\lambda| . K(t, f) \tag{17}$$

$$K(t, f + f') \leqslant C(F)(K(t, f) + K(t, f')) \tag{18}$$

où l'on a posé $C(F) = \max_j C(F_j)$.

Définition 7. (Réseaux X). — *On se donne une application* $K \to |K|_X$ *de l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions positives* $\mathbf{R}^+ \xrightarrow{K} \mathbf{R}^+$, *définies à un ensemble négligeable près, à valeurs dans* $\mathbf{R}^+$ *qui est croissante, positivement homogène, nulle seulement si* $K = 0$ *et qui est quasi-sous-additive :*

$$\exists C, \quad \forall K_1 \quad \text{et} \quad K_2, \quad |K_1 + K_2|_X \leqslant C(|K_1|_X + |K_2|_X). \tag{19}$$

Le réseau X *est par définition l'espace vectoriel (naturellement quasinormé) des classes d'applications*

$$K : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+ \textit{ telles que } |f|_X < \infty. \tag{20}$$

Proposition 1. — (Définissant le procédé des quasinormes fonctionnelles). — *Tout réseau* X *de fonctions numériques sur* $\mathbf{R}^+$ *définit une méthode d'interpolation de la façon suivante : à tout couple d'interpolation* $(F_j)_j$ *d'espaces quasinormables, on associe l'espace* $(F_0, F_1)_X$ *(naturellement quasinormable) des vecteurs* $f \in F_0 + F_1$ *tels que*

$$|f|_X = |K(., f)|_X < \infty. \tag{21}$$

Car si l'on a une flèche

$$\begin{aligned} T : (F_j)_j &\longrightarrow (G_j)_j \\ f &\longmapsto g = Tf. \end{aligned} \tag{22}$$

on a avec (13)

$$\begin{aligned} K(t, g) &= \inf_{\substack{g = g_0 + g_1 \\ g_j \in G_j}} |g_0| + t|g_1| \\ &\leqslant C(T) \inf_{\substack{f = f_0 + f_1 \\ f_j \in F_j}} |f_0| + t|f_1| = C(T)K(t, f) \end{aligned}$$

d'où

$$|g|_X = |K(t, g)|_X \leqslant C(T)|K(t, f)|_X \leqslant C(T)|f|_X.$$

Voici deux nouvelles définitions équivalentes de $(F_0F_1)_X$.

Proposition 2. — (Nouvelles définitions de $(F_0, F_1)_X$). — *Avec les notations de la proposition précédente,* F_X *peut encore être décrit de l'une des deux manières qui suivent :*

1. $(F_0, F_1)_X$ *est l'ensemble des* f *de* $F_0 + F_1$ *telles qu'il existe des applications* u_j: $\mathbf{R}^+ \to F_j$ *telles que pour presque tout* $t > 0$ *on ait :*

$$f \equiv u_0(t) + u_1(t) \tag{23}$$

les fonctions numériques $t \longmapsto |u_0(t)|_0$ *et* $t \longmapsto t|u_1(t)|_1$ *étant dans* X (la quasinorme naturellement associée étant équivalente à la quasinorme (21)).

2. *Même chose mais on peut supposer en plus les fonctions* u_j *continues et affines par morceaux.*

Preuve :

a) les conditions du 2° entraînent les conditions du 1°.

b) Si $f \in F_0 + F_1$ satisfait aux conditions du 1°, (23) et (16) entraînent

$$K(t, f) \leqslant |u_0(t)|_0 + t|u_1(t)|_1, \tag{24}$$

donc $K(., f)$ est dans X.

c) Supposons f tel que $K(., f)$ soit dans X et montrons que l'on peut réaliser les conditions du 2°. $\forall \varepsilon$, et pour toute valeur de t de la forme $e^n = t'(n \in \mathbf{Z})$ on peut trouver des vecteurs $u_j(t')$ dans F_j tels que

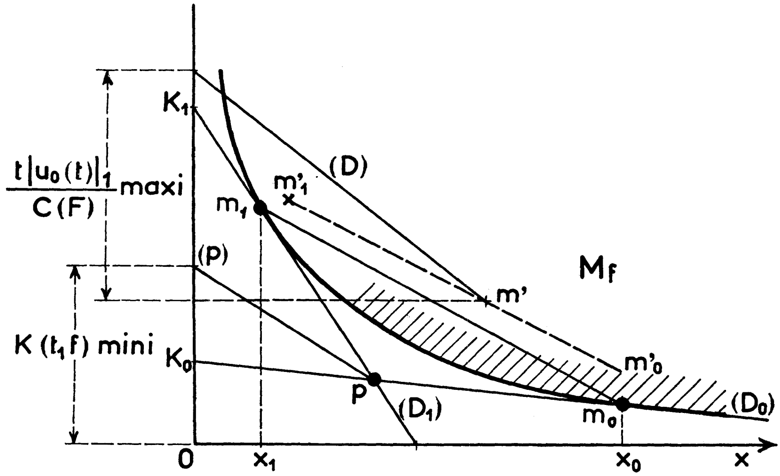
$$|u_0(t')|_0 \quad \text{et} \quad t'|u_1(t')|_0 \leqslant (1 + \varepsilon)K(t', f). \tag{25}$$
$$f = u_0(t') + u_1(t').$$

On prolonge alors les fonctions u_j ainsi définies pour t' appartenant à la suite $(e^n)_n$ en des fonctions définies pour tout $t > 0$ en interpolant à l'aide de fonctions affines dans chaque segment limité par deux points consécutifs de la suite.

Vu les propriétés (19) du réseau X, il suffit de démontrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall t, \qquad |u_0(t)|_0 \leqslant CK(t, f) \tag{26}$$
$$\forall t, \qquad t|u_1(t)|_1 \leqslant CK(t, f). \tag{27}$$

La majoration (26) résulte du fait que d'après (25), elle est vraie pour $t' = e^n$ et qu'entre $t' = e^n$ et $t' = e^{n+1}$ le 1^er^ membre de (26) est majoré par une fonction affine (de t) alors que le 2^e^ membre est une fonction concave.



La majoration (27) nous semble moins évidente.

Suivant [3], introduisons la partie suivante M_f du quart de plan xOy limité par deux demi-droites perpendiculaires Ox et Oy.

(28)

$$M_f = \{(xy),\ \exists f_j \in F_j;\ f = f_0 + f_1 \quad \text{avec} \quad |f_0| \leqslant x;\ |f_1| \leqslant y\}.$$

C'est un ensemble stable par toute translation de vecteur (x, y) avec x et $y \geqslant 0$; et de plus M_f est « quasi-convexe » :

S'il contient deux points m_0 et m_1, il contient le transformé du segment $m_0 m_1$ par toute homothétie de centre O et de rapport $> \max\limits_j C(F_j)$.

Suivant J. Peetre (voir [19]) on remarque que $K(t, f)$ représente l'ordonnée à l'origine de la droite d'appui de M_f de pente $(-t)$.

(29) Posons $t_j = e^{n+j}$ et montrons (27) pour $t = e^{n+\theta}$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

(30) Posons $K_j = K(e^{n+j}, f)$ et $\Delta K = K_1 - K_0$.

Soient m'_j les points de M_f correspondant à (25) pour $t' = e^{n+j}$.

On peut prendre chacun d'eux arbitrairement voisins des points m_j où les tangentes à M_f de pentes $-t_j$ touchent M_f.

Une borne supérieure du premier membre de (27) peut s'interprêter géométriquement :

— en introduisant les points

$$(31) \quad m \text{ tel que } \vec{m} = (1-\lambda)\vec{m}_0 + \lambda\vec{m}_1 \quad \text{avec } \lambda = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}$$

m' arbitrairement proche tel que

$$\vec{m}' = (1-\lambda)\vec{m}'_0 + \lambda\vec{m}'_1$$

en appelant x_j et x les abscisses de m_j et de m.

En traçant la droite (D) de pente t passant par m' on a

$$|u_1(t)|_1 \leqslant C(F)(x + o(1))$$

d'où l'interprétation géométrique donnée sur la figure (à une quantité arbitrairement petite près) de la valeur maximum de $\dfrac{t|u_1(t)|}{C(F)}$.

De même, vues les différentes formes possibles pour M_f, traçant la parallèle (P) à (D) passant par p. On peut estimer (voir figure) la valeur maximum de $K(t, f)$ si (D), $(D_1)m$, m_1 sont donnés.

Pour vérifier (27) il faut donc voir si

$$t|u_1(t)| \max \leqslant C(K(t, f) \text{ mini}).$$

Soit en explicitant

$$t(x_0(1-\lambda) + \lambda x_1 + o(1)) \leqslant \frac{CK_0(t_1-t) + K_1(t-t_0)}{t_1-t_0}.$$

D'où encore en remplaçant λ et K_1 par leurs expressions déduites respectivement de (30) et (31)

$$t[x_0(t_1-t) + (t-t_0)x_1 + o(1)] \leqslant C[K_0(t_1-t_0) + \Delta K(t-t_0)].$$

C'est-à-dire en prenant les plus grandes valeurs possibles pour les x_j,

$$x_0 = \frac{K_0}{t_0} \quad \text{et} \quad x_1 = \text{abscisse de } p = \frac{K_1-K_0}{t_1-t_0} = \frac{\Delta K}{t_1-t_0}$$

et en remplaçant t et t_j par leurs expressions (30)

$$e^{n+\theta}\left(\frac{e^{n+1}-e^{n+\theta}}{e^n}\mathrm{K}_0+\frac{e^{n+\theta}-e^n}{e^{n+1}-e^n}\Delta\mathrm{K}+o(1)\right)$$
$$\leqslant \mathrm{C}[\mathrm{K}_0(e^{n+1}-e^n)+\Delta\mathrm{K}(e^{n+\theta}-e^n)]$$

soit

$$e^\theta(e-e^\theta)\mathrm{K}_0+e^\theta\frac{e^\theta-1}{e-1}\Delta\mathrm{K}+o(1)$$
$$\leqslant \mathrm{C}[\mathrm{K}_0(e-1)+\Delta\mathrm{K}(e^\theta-1)]$$

ce qui est vérifié pour tout $\mathrm{K}_0>0$ et tout $\Delta\mathrm{K}\geqslant 0$ en prenant $\mathrm{C}=e$ et $o(1)$ « suffisamment petit » c'est-à-dire les points m'_j suffisamment proches des points m_j.

Remarques. — 1. On peut définir le procédé des quasinormes fonctionnelles en supposant que l'application $\mathrm{K}\to|\mathrm{K}|_{\mathrm{X}}$ de la définition 7 est seulement définie pour les K concaves continues croissantes; mais pour énoncer la proposition 2, il faut que l'application $\mathrm{K}\to|\mathrm{K}|_{\mathrm{X}}$ soit définie pour toute classe d'équivalences de fonctions numériques $\mathrm{K}: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$.

2. L'intérêt du 2° de la proposition 2 résulte du fait que si une application $u_j: \mathbf{R}^+\to\mathrm{F}_j$ est continue cela n'entraîne pas la fonction numérique $t\longmapsto|u_j(t)|$ soit continue ou seulement mesurable. Mais ceci a lieu si la fonction u_j est non seulement continue mais affine par morceaux.

3. On peut préciser l'énoncé de la proposition 2 de la façon suivante :

on peut supposer que la fonction $t\to|u_0(t)|_0$ est croissante, et que la fonction $t\to|u_1(t)|_0$ est décroissante.

3. Méthode des espaces de moyenne à 2 paramètres.

3.A. *Définition et généralités.*

Cette méthode est un cas particulier de la méthode des quasinormes fonctionnelles (voir § 2) lorsque l'on considère le réseau suivant.

Définition 8. — (Réseau $\mathrm{L}^p_{x\theta}$; espaces $(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1)_{\theta p}$).

1. *Pour tout* θ *réel et tout* $p\in]0_1+\infty]$; $\mathrm{L}^p_{x\theta}$ *désigne le réseau des classes de fonctions* f: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ *telles que l'intégrale supé-*

rieure de $(t^{-\theta}f(t))^p$ *relativement à la mesure* $\frac{dt}{t}$, *soit finie. Et l'on pose*

$$(32) \qquad |f|^p_{\theta_p} = (|f|_{\theta_p})^p = \left(\int_{t\in\mathbf{R}^+} (t^{-\theta}f(t))^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(*pour* $\theta = 0$, *on notera cet espace* L^p_x).

(33) 2. *Pour tout* $\theta \in]0,1[$ *et tout* $p \in]0, +\infty]$ *le procédé des espaces de moyenne* (*d'ordre* (θ, p)) *associe à tout couple d'interpolation d'espaces quasinormables* $(\mathrm{F}_j)_j$ *l'espace naturellement quasinormable et noté* $(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1)_{\theta_p}$, *des vecteurs* f *de* $\mathrm{F}_0 + \mathrm{F}_1$ *tels que*

$$(34) \quad t^{-\theta}\mathrm{K}(t, f) = t^{-\theta} \inf_{\substack{f=f_0+f_1\\ f_j\in \mathrm{F}_j}} |f_0| + t|f_0| \text{ soit dans } \mathrm{L}^p_x.$$

La proposition 2 prouve l'équivalence de cette définition avec celle supposant l'existence d'une décomposition

$$\forall t, f = u_0(t) + u_1(t)$$

avec u_j: $\mathbf{R}^+ \to \mathrm{F}_j$ les fonctions numériques $t^{j-\theta}|u_j(t)|_j$ étant dans L^p_x.

On pouvait supposer les u_j « régulières » (2° de prop. 2).

La proposition (3) prouve que l'on peut « discrétiser » et que l'on peut « faire une homothétie sur les paramètres — θ' et $1 - \theta''$ » : voir respectivement chapitre II et théorème 5-2 de [13].

De même les § 3B et 3C donnent quelques propriétés correspondant à des énoncés de [13] mais à des démonstrations différentes de celles de [13]. Bien sûr, la propriété décrite dans [9] comme étant relative à des espaces de Banach F_j et à $(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1)_{\theta_p}$ avec $p \geqslant 1$ est encore vraie avec seulement :

$p > 0$ et les espaces F_j quasinormés.

PROPOSITION 3. — (Définition discrète des espaces de moyenne et possibilité de faire une même homothétie sur $-\theta$ et $1 - \theta$).

Quels que soient θ *et* p *tels que* (33) *et le couple* (F_j) *d'espaces quasinormables, l'espace de moyenne* $(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1)_{\theta_p}$ *peut être décrit des quatre façons équivalentes suivantes et ceci pour tout* λ *réel* $\neq 0$.

1λ) *C'est l'espace, quasinormable naturellement, des vecteurs* $f \in F_0 + F_1$ *tels que l'on ait pour presque tout* $t > 0$:

(35) $$f = u_0(t) + u_1(t) \text{ avec } u_j : \mathbf{R}^+ \to F_j$$

les fonctions $|t^{\lambda(j-\theta)}u_j(t)|$ *étant dans* L^p_x.

2λ) *C'est l'espace des* $f \in F_0 + F_1$ *tels que l'on ait la même chose avec en plus :*

(36) *les fonctions* $u_j : \mathbf{R}^+ \to F_j$ *sont continues et affines par morceaux.*

3λ) *C'est l'espace des* $f \in F_0 + F_1$ *tels que la fonction concave continue*

(37) $$t \to \inf_{\substack{f = f_0 + f_1 \\ f_j \in F_j}} t^{-\lambda\theta}|f_\cdot| + t^{(1-\theta)\lambda}|f_1|_1 \text{ soit dans } L^p_x.$$

4λ) *Et c'est encore l'espace (toujours naturellement quasinormable) des vecteurs* $f \in F_0 + F_1$ *qui s'écrivent*

(38) $$\forall n \in \mathbf{Z} \qquad f = u_{0n} + u_{1n}$$

avec u_{jn} *dans* F_j *et* $e^{\lambda(j-\theta)n}|u_{jn}|_j$ *dans* l^p.

Preuve. — Pour prouver que $1_\lambda \Leftrightarrow 1_1$ pour $l = 1$, 2 ou 3. Il suffit de faire le changement de variable $t \to t^\lambda$.

Vus la proposition 3 et le fait que $4_\lambda \Leftrightarrow 4_{-\lambda}$ il suffit de prouver 2 choses (si $\lambda > 0$),

— $4\lambda \Rightarrow 1\lambda$: l'idée est d'interpoler les suites discrètes par des fonctions affines par morceaux.

— $3\lambda \Rightarrow 4\lambda$: on utilise le fait que $t \longmapsto K(t, f)$ est une fonction croissante.

Plus précisément, supposons d'abord que f vérifie 4λ soit (38).

Posons $u_{jn} = u_j(e^{\lambda n})$ et si

$$e^{\lambda n} \leqslant t \leqslant e^{\lambda(n+1)}, \qquad v = \frac{t - e^{\lambda n}}{e^{\lambda(n+1)} - e^{\lambda n}}$$

on pose

$$u_j(t) = (1 - v)u_{jn} + v u_{jn+1}$$

d'où

$$t^{-\lambda\theta}|u_0(t)|_0 \leqslant Ce^{-\lambda\theta n}(|u_{0n}|_0 + |u_{0,n+1}|_0)$$

et

$$\int_{e^{\lambda n}}^{e^{\lambda(n+1)}} (t^{-\lambda\theta}|u_0(t)|_0)^p \frac{dt}{t} \leqslant C(e^{-\lambda\theta n}|u_{0n}|_0)^p + (e^{-\lambda\theta n}|u_{1n}|_0)^p)$$

d'où

$$\int_0^\infty (t^{-\lambda\theta}|u_0(t)|_0)^p \frac{dt}{t} \leqslant 2C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (e^{-\lambda\theta n}|u_{0n}|_0)^p.$$

On majore de la même façon la quasinorme de

$$t^{\lambda(1-\theta)}|u_1(t)|_1$$

dans L^p_x.

Réciproquement supposons que l'on a 3λ. Alors pour tout $t = e^{\lambda n}$ il existe une décomposition (38) avec

$$|u_{0n}|_0 \quad \text{et} \quad e^{\lambda n}|u_{1n}|_1 \leqslant (1+\varepsilon)K(e^{\lambda n}, f)$$

d'où

$$e^{\lambda(j-\theta)}|u_{jn}|_j \leqslant (1+\varepsilon)e^{-\lambda\theta n}K(e^{\lambda n}, f)$$

et

$$(e^{\lambda(j-\theta)}|u_{jn}|_j)^p \leqslant C(1+\varepsilon) \int_{e^{\lambda(n-j)}}^{e^{\lambda(n+1-j)}} |t^{-\theta}K(t, f)|^p \frac{dt}{t}$$

d'où la majoration voulue par addition de ces relations.

3B. *Autres propriétés.*

PROPOSITION 4. — (Convexité, $(F_0F_1)_{\theta p}$ est une fonction croissante de p).

1° *Voici une quasinorme dans* $(F_0F_1)_{\theta p}$ *équivalente aux quasinormes intervenant dans la proposition* 3

(39) $$|f|_{\theta p} = \inf |t^{-\theta}|u_0|_0|_{L^p_x}^{1-\theta} . |t^{1-\theta}|u_1|_1|_{L^p_x}^{\theta}.$$

Pour tout les u_j : $\mathbf{R}^+ \to F_j$ *telles que* $f = u_0(t) + u_1(t)$.

2° *Soient* (F_j) *et* (G_j) *deux couples d'interpolation d'espaces quasinormés et* T *une flèche* $(F_j)_j \to (G_j)_j$.

Notons $\|T\|_j$ *les quasinormes des applications*

$$T|F_j : \quad F_j \to G_j.$$

(40) *Alors la quasinorme de l'application définie par restriction de* T :

$$(F_0, F_1)_{\theta,p} \to (G_0, G_1)_{\theta,p}$$

est majorée par

$$\|T\|_0^{1-\theta} . \|T\|_1^{\theta}.$$

3° *Quels que soient* θ *et* p *tels que* (33) *et le couple d'interpolation* (F_j) *l'espace de moyenne* $(F_0, F_1)_{\theta p}$ *est une fonction* *croissante de* p *:*

$$(41) \qquad p < q \Longrightarrow (F_0,\ F_1)_{\theta p} \xrightarrow{\mathrm{id}} (F_0,\ F_1)_{\theta q};$$

(ce qui signifie que l'application identique de $F_0 + F_1$ définit par restriction à

$$(42) \qquad (F_0,\ F_1)_{\theta, p}$$

une application quasilinéaire à valeurs dans $(F_0, F_1)_{\theta, q}$.

Preuve. — Pour prouver le 1°, on procède comme dans la démonstration du lemme 3 de [13].

Pour le 2°, si $f \in (F_0, F_1)_{\theta, p}$ alors

$$\begin{aligned}|Tf|_{\theta p} = \inf_{Tf = V_0(t) + V_1(t)} & |t^{-\theta}|V_0(t)|_0|_{L^p_x}^{1-\theta}\ |t^{1-\theta}|V_1(t)|_1|_{L^p_x}^{\theta} \\ & \leqslant \inf_{f = u_0(t) + u_1(t)} |t^{-\theta}|Tu_0(t)|_0|_{L^p_x}^{1-\theta}\ |t^{1-\theta}|Tu_1(t)|_1|_{L^p_x}^{\theta} \\ & \leqslant \|T\|_0^{1-\theta}\|T\|_1^{\theta} \inf_{f = u_0 + u_1} |t^{-\theta}|u_0|_0|_{L^p_x}^{1-\theta} . |t^{1-\theta}|u_1|_1|_{L^p_x}^{\theta} \\ & = \|T\|_0^{1-\theta}\|T\|_1^{\theta}\, |f|_{\theta p}.\end{aligned}$$

Le 3° s'obtient en définissant $(F_0, F_1)_{\theta p}$ à l'aide de $K(t, f)$ et en utilisant l'inégalité suivante :

Voir [15] ou remarques 2 et 3 de [9].

Si $f(t)$ est une fonction positive croissante :

$$\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+ \quad \text{et si} \quad \theta > 0;$$

posons :

$$(43) \quad \left|\begin{array}{ll} & u(t) = t^{-\theta} f(t). \\ \text{Alors si} & \\ & 0 > p \leqslant q \leqslant \infty, \\ \text{on a :} & \\ & |u|_{L^q_x} \leqslant \theta^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} |u|_{L^p_x}. \end{array}\right.$$

3.C. *Stabilité.*

La proposition suivante correspond au théorème 2.2 de [13].

Proposition 5. — $(F_j)_j$ *désigne un couple d'interpolation d'espaces quasinormés. On se donne des nombres réels* θ_j, η_j *et* θ *tels que :*

$$(44) \qquad \begin{gathered} 0 < \theta_0 < \theta_1 < 1 \\ \eta_j = -\theta + \theta_j \qquad \text{et} \qquad \eta_0 . \eta_1 < 0 \\ 0 < \theta < 1. \end{gathered}$$

Posant

(45) $$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} = \frac{\eta_0}{\eta_0 - \eta_1}.$$

Alors (avec la notation (42))

(46) $$((F_0, F_1)_{\theta_0, \infty}, (F_0, F_1)_{\theta_1, \infty})_{\omega, p} \xrightarrow{\text{id}} (F_0, F_1)_{\theta, p}.$$

Preuve. — Posant

$$X_j = (F_0, F_1)_{\theta_j, \infty}$$

on voit que tout vecteur f du 1er membre de (46) est tel que

$$\inf_{f = x^0 + x^1} t^{\eta_0}|x^0|_{X_0} + t^{\eta_1}|x^1|_{X_1} \quad \text{dans} \quad L^p_x,$$

mais l'on a

$$|x^j|_{X_j} = \sup_t t^{-\theta_j}|f^j_0|_0 + t^{1-\theta_j}|f^j_1|_1$$

d'où

$$\inf_{\substack{f = x^0 + x^1 \\ x^j = f^j_0 + f^j_1}} t^{-\theta}(|f_0|_0 + |f^1_0|_0) + t^{1-\theta}(|f^0_1|_1 + |f^1_1|_1) \quad \text{dans} \quad L^p_x$$

donc

$$\inf_{f = f_0 + f_1} (t^{-\theta}|f_0|_0 + t^{1-\theta}|f_1|_1) \quad \text{dans} \quad L^p_x.$$

Donc f est dans $(F_0, F_1)_{\theta p}$.

II. APPLICATIONS

Nous commençons par rappeler quelques généralités sur les notations usuelles et les propriétés des espaces de Lorentz L^{pq} pour

$$p \in]0, +\infty[\qquad \text{et} \qquad q \in]0, +\infty].$$

On notera :

— que l'on suppose d'ordinaire p et $q \geqslant 1$: voir [1] par exemple,

— pour p et $q \geqslant 1$, les espaces L^{pq} que nous considérons sont identiques à ceux de [1].

— mais pour $p > 1$, les définitions de [1] et de ce travail sont différentes.

Au § 5, on donne une expression explicite de $K(t, f)$ pour tout $f \in L^\alpha + L^\infty$ (avec $\alpha > 0$) : voir [16] pour le cas $\alpha = 1$.

Au § 6, sont explicités les espaces de moyenne entre couple d'espaces de Lorentz : les calculs utilisent le procédé inauguré dans [6] et [7] consistant à introduire f^* au lieu de f_*.

En ce qui concerne les espaces L^p avec poids et changement d'espaces de valeurs, on énonce une proposition. Cette proposition est utilisée dans le § 8 pour obtenir certaines extensions du théorème de Marcinkiewicz : travail [21] de Stampacchia sur les espaces $\mathfrak{L}^{p,\lambda}$: travail [8] d'Igari sur l'interpolation des espaces H^p ... ou, plus généralement pour énoncer des théorèmes d'interpolation concernant des espaces définis par une relation du genre : « un sup de normes est majoré ».

On se donne dans cette partie un espace localement compact Ω avec une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$.

Jusqu'au § 6 inclus, par « fonctions définies sur Ω » nous entendrons toujours des classes d'équivalence de fonctions μ-mesurables au sens de Lusin : $\Omega \to B$ où B est un espace de Banach fixé. A partir du § 8, on considérera des « fonctions » à valeurs dans des espaces (pas forcément de Banach) différents et alors les hypothèses de mesurabilité à faire varieront suivant les cas. Ces hypothèses seront précisées plus tard.

Il interviendra constamment dans cette partie les 2 techniques suivantes :

1° *Emploi de l'inégalité de Hardy :* voir [4].

Pour tout β réel et tout $p \in [1, +\infty]$, notons $L^p_{*\beta}$ l'espace de Banach des classes de fonctions : $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{C}$ qui sont mesurables pour la mesure $\frac{dt}{t}$ et telles que $t^\beta|\varphi(t)|$ soit de puissance p^e sommable relativement à cette mesure.

Posons

$$\|\varphi\|_{p,\beta,*} = \left(\int_0^\infty (t^\beta|\varphi(t)|)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{52}$$

(ne pas confondre avec les réseaux $L^p_{x\beta}$ de la définition 8). Alors l'application

$$\varphi(s) \longmapsto \tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\theta)\, d\theta \tag{53}$$

est linéaire continue de $L^q_{*\beta}$ à $L^r_{*\beta}$ si

$$(54) \qquad \beta < 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{q}.$$

De même l'application

$$(55) \qquad \varphi(s) \longmapsto \frac{1}{t} \int_t^\infty \varphi(\theta)\, d\theta$$

est linéaire continue de $L^q_{*\beta}$ à $L^r_{*\beta}$ si

$$(56) \qquad \beta > 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{q}.$$

2° *Opération de troncature.*

Pour tout $k > 0$, l'opération de troncature de la fonction f: $\Omega \to F_j$ (ou d'une classe d'équivalence de fonctions définies presque partout; F_j est un espace quasinormé) consiste à écrire

$$f = f_0 + f_1$$

avec

$$(57) \qquad f_1(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & \text{si} \quad |f(\omega)| \leqslant k. \\ 0 & \text{si} \quad |f(\omega)| > k \end{cases}$$

donc

$$f_0(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |f(\omega)| \leqslant k. \\ f(\omega) & \text{si} \quad |f(\omega)| > k. \end{cases}$$

Remarque. — Tous les raisonnements figurant dans cette partie subsistent si l'on remplace les espaces considérés (L^p, L^{pq} ...) par des sous-espaces munis de la topologie induite et stables par troncature (f dans l'espace $\Longrightarrow f_0$ et f_1 dans l'espace, $\forall k$). D'où une petite généralisation possible des propriétés énoncées.

4. Généralités.

Soit f une « fonction »: $\Omega \to B$.

A la fonction f on associe (voir [1] ou [6]),

— la distribution f_* de f définie par

$$(58) \qquad \begin{aligned} \mathbf{R}^+ &\longrightarrow \overline{\mathbf{R}}^+ \\ \sigma &\longmapsto f_*(\sigma) = \|f| > \sigma| \end{aligned}$$

$f_*(\sigma)$ est la μ-mesure de l'ensemble des points ω de Ω où $|f(\omega)| > \sigma$.

— la fonction f_* équimesurable à f

(59) $$f^*(t) = \inf\{y \in \mathrm{R}^+, \quad f_*(y) \leqslant t\}$$

$f^* : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ est continue à droite et a même distribution que f,

f^* vérifie la propriété suivante :

(60) $$(f + g)^*(2t) \leqslant 2(f^*(t) + g^*(t))$$

— la transformée de Hardy f^{**} de f^* :

(61) $$f^{**}(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma f^*(\theta)\, d\theta.$$

On sait que si f est localement sommable on a

(62) $$\sup_{|\mathrm{E}| \leqslant t} \int_{\mathrm{E}} |f(\omega)|\, d\mu\,(\omega) = \int_0^t f^*(\theta)\, d\theta.$$

Ici, comme on va considérer des fonctions non localement sommables, on va introduire un nombre $\alpha > 0$ tel que $|f(\omega)|^\alpha$ soit localement sommable et comme

(63) $$f^{*\alpha}(\theta) = |f|^{\alpha *}(\theta)$$

on a

(64) $$\sup_{(\mathrm{E}) \leqslant t} \int_{\mathrm{E}} |f(\omega)|^\alpha\, d\mu\,(\omega) = \int_0^t f^{*\alpha}(\theta)\, d\theta.$$

Proposition 6 *et définition des espaces* L^{pq}. — Ω *est un espace localement compact avec une mesure de Radon positive* μ. *Alors quels que soient* p *et* q *tels que*

(65) $$0 < p < \infty \qquad 0 < q \leqslant \infty$$

et quel que soit α *tel que*

(66) $$0 < \alpha < p \qquad et \qquad 0 < \alpha \leqslant q.$$

il existe des constantes C' *et* $\mathrm{C}'' > 0$ *telles que pour toute fonc-*

tion $f\colon \Omega \to \mathrm{B}$ *(*B = *espace de Banach) on ait:*

$$(67)\quad \mathrm{C}'\left(\int_0^\infty (u^{\frac{1}{p}}|f|^{\alpha**}(u))^{\frac{q}{\alpha}}\frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant\left(\int_0^\infty (u^{\frac{1}{p}}f^*(u))^q\frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant \mathrm{C}''\left(\int_0^\infty (u^{\frac{1}{p}}(f)^{\alpha**}(u))^{\frac{q}{\alpha}}\frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

L'espace quasinormable noté L^{pq} (Ω, B) *ou plus simplement* L^{pq} *est alors défini à l'aide de l'une quelconque de ces quasinormes.*

Preuve. — La première inégalité résulte du fait que

$$|f|^{\alpha*}\leqslant |f|^{\alpha**}.$$

La deuxième inégalité résulte de (54).
Voici quelques propriétés des espaces de Lorentz L^{pq}.

Proposition 7.

(68) 1° *Pour tout* $p > 0$ *on a* $\mathrm{L}^{pp} \sim \mathrm{L}^p$.

(69) 2° *Quels que soient* p, q *et* q' *tels que* $q \leqslant q'$ *on a*

$$\mathrm{L}^{pq} \xrightarrow{\text{id}} \mathrm{L}^{pq'} \quad \text{(avec la convention (42))}.$$

Le 1° s'obtient en considérant la 2e quasinorme de (67). Et le 2° résulte de l'inégalité de Hardy :

$$(70)\quad \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{\alpha}{p}}\frac{1}{t}\int_0^t |f|^{\alpha*}(\theta)\,d\theta\right)^{\frac{q'}{\alpha}}\frac{du}{u}\right)^{\frac{\alpha}{q'}}$$
$$\leqslant \mathrm{C}\left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{\alpha}{p}}f^{*\alpha}(t)\right)^{\frac{q}{\alpha}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{\alpha}{q}}.$$

5. Expression de K(t, f) pour $f \in \mathrm{L}^\alpha + \mathrm{L}^\infty$.

Proposition 8. — *Les classes de fonctions mesurables considérées sur formées par des « fonctions »*

$$f\colon \Omega \to \mathrm{B}.$$

Ω = *espace localement compact avec une mesure* $\mu \geqslant 0$

où

B = *espace de Banach.*

Pour tout $\alpha \in]0, +\infty]$, L^α *désigne l'espace de Lebesgue des* $f\colon \Omega \to B$ *telles que* $|f|$ *soit de puissance* α^{e} *sommable. Alors pour toute* $f \in L^\alpha + L^\infty$ *la quantité.*

$$K(t, f) = \inf_{\substack{f=f_0+f_1\\ f_j \in F_j}} (|f_0|_0 + t|f_1|) \quad \text{avec} \quad F_0 = L^\alpha, \quad F_1 = L^\infty$$

est « équivalente » (voir définition 6) *à*

$$\text{(71)} \qquad \left(\int_0^{t^\alpha} f^{*\alpha}(\theta)\, d\theta\right)^{1/\alpha}.$$

Le principe de la démonstration est donné par [13] et [16] où la propriété est donnée dans le cas où $\alpha = 1$.

On est ramené à voir, vu (64) que

$$\text{(72)} \qquad \inf_{f=f_0+f_1} |f_0|_0^\alpha + t^\alpha |f_1|_1^\alpha \sim \sup_{|E| \leqslant t^\alpha} \int_E |f(\omega)|^\alpha\, d\mu\,(\omega).$$

Or quelle que soit la décomposition suivante de f

$$f = f_0 + f_1 \qquad \text{avec} \qquad f_j \in F_j$$

et quel que soit l'ensemble E de Ω de mesure $\leqslant t^\alpha$ on a

$$\begin{aligned}\int_E |f(\omega)|^\alpha\, d\mu\,(\omega) &\leqslant C\Big(\int_E |f_0(\omega)|^\alpha\, d\mu\,(\omega) + \int_E |f_1(\omega)|^\alpha\, d\mu\,(\omega)\\ &\leqslant C(|f_0|_0^\alpha + t^\alpha |f_1|_1^\alpha)\end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{|E|<t^\alpha} \int_E |f(\omega)|^\alpha\, d\mu\,(\omega) \leqslant C \inf_{f=f_0+f_1} |f_0|_0^\alpha + t^\alpha |f_1|_1^\alpha.$$

Pour démontrer l'inégalité en sens inverse, on considère la troncature de f à σ (voir (57)); σ étant tel que la mesure de l'ensemble E où $|f| > \sigma$ soit inférieure ou égale à t^α.

Alors

$$|f_0|_0^\alpha = \int_E |f_0(\omega)|^\alpha\, d\mu(\omega) \leqslant \int_E |f(\omega)|^\alpha\, d\mu\,(\omega)$$

et

$$|E| \,.\, |f_1|_1^\alpha \leqslant \int_E |f(\omega)|^\alpha\, d\mu\,(\omega).$$

D'où par addition

$$|f_0|_0^\alpha + |E|\,|f_1|_1^\alpha \leqslant 2 \int_E |f(\omega)|^\alpha\, d\mu\,(\omega)$$

donc

$$|f_0|_0^\alpha + t^\alpha |f_1|_1^\alpha \leqslant 2 \sup_{|E| \leqslant t^\alpha} \int_E |f(\omega)|^\alpha\, d\mu\,(\omega).$$

Exercices. — 1. A l'aide de la proposition 8 et des inégalités du § 4; prouver

$$(73) \qquad (L^{\alpha}, L^{\infty})_{\theta,r} = L^{\frac{\alpha}{1-\theta}, r}.$$

2. En utilisant la proposition 5 (stabilité) prouver que

$$(L^{q_0 r_0}, L^{q_1 r_1})_{\theta,r} \xrightarrow{\text{id}} L^{q_\theta r} \qquad \text{avec (76).}$$

Commentaires. — Comme nous ne pouvons pas obtenir l'identité des 2 membres de cette relation à l'aide des résultats précédents, nous allons obtenir cette identité par un raisonnement direct (utilisant seulement la définition des espaces de moyenne).

6. Identification de $(L^{q_0 r_0}, L^{q_1 r_1})_{\theta,r}$.

Application au théorème de Marcinkiewicz.

Proposition 9. — *Quels que soient les nombres q_j, r_j, θ et r tels que :*

$$(74) \qquad q_j \in]0, +\infty[r_j \text{ et } r \in]0, +\infty].\theta \in]0,1[, \qquad q_0 \neq q_1$$

on a l'identité (d'espaces quasinormables)

$$(75) \qquad (L^{q_0 r_0}, L^{q_1 r_1})_{\theta r} = L^{q_\theta r}.$$

avec

$$\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Rappelons que l'identité vaut aussi (voir remarque précédente § 4) pour des sous-espaces de $L^{q_j r_j}$ et $L^{q_\theta r}$ munis de la topologie induite et stables par troncature.

L'identité (75) a été démontrée de façons différentes par Calderon (voir [2]) et Peetre (voir [16]) si

$$q_j > 1, \qquad \text{et} \qquad r_j \qquad \text{et} \qquad r \geqslant 1.$$

Preuve. — L'arithmétique montre qu'il existe deux nombres réels θ_j tels que

$$(77) \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1}{q_0} + \theta_0 = \frac{1}{q_1} + \theta_1, \qquad \frac{-\theta}{1-\theta} = \frac{\theta_0}{\theta_1}.$$

On peut supposer $q_0 < q_1$. On introduit $\alpha > 0$ tel que :

(78) $\alpha < q_0$ et r, $\alpha \leqq r_0$ et r_1.

1° Montrons que

(79) $$L^{q_\theta r} \xrightarrow{\text{id}} (L^{q_0 r_0}, L^{q_1 r_1})_{\theta,r}.$$

Vu (69) on peut supposer $\alpha = r_0 = r_1$.

Quelle que soit $f \in L^{q_\theta r}$, tronquons-là à t (voir (57)). D'où

$$\forall t, \qquad f = f_{0t} + f_{1t}.$$

On aura prouvé (79) lorsqu'on aura prouvé les deux majorations

(80) $$\left(\int_0^\infty (t^{\theta_j}|f_{jt}|_{L^{q_j\alpha}})^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r} \leqslant C|f|_{q_\theta r}.$$

Examinant d'abord le cas $j = 0$, on voit que

$$\left(\int_0^\infty (t^{\theta_0}|f_{0t}|_{L^{q_0\alpha}})^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$\leqslant \left(\int_0^\infty t^{\theta_0 r} \frac{dt}{t}\left(\int^t f^{*\alpha}(y) y^{\frac{\alpha}{q_0}} \frac{dy}{y}\right)^{\frac{r}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{r}\cdot\frac{1}{\alpha}}$$

d'où avec Hardy :

$$\leqslant C\left(\int_0^\infty t^{\theta_0 r}\left(f^{*\alpha}(t) t^{\frac{\alpha}{q}}\right)^{\frac{r}{\alpha}} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{\alpha}{r}\cdot\frac{1}{\alpha}}$$

d'où avec (77) :

$$\leqslant C\left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q_\theta}} f^*(t)\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} = C|f|_{q_\theta, r}.$$

La deuxième majoration ($j = 1$ dans (80)) est un peu plus compliquée car

$$f_{1t}^*(u) = \begin{cases} f^*(t) & \text{si} \quad u \leqslant t \\ f^*(u) & \text{si} \quad u > t. \end{cases}$$

D'où

$$\left(\int_0^\infty (t^{\theta_1}|f_{1t}|_{L^{q_1\alpha}})^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C(\mathrm{I} + \mathrm{II})$$

avec

$$\mathrm{I} = \left(\int_0^\infty t^{\theta_1 r} \frac{dt}{t} \left(\int_0^t f^{*\alpha}(t) y^{\frac{\alpha}{q_1}} \frac{dy}{y}\right)^{\frac{r}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leqslant \mathrm{C}\left(\int_0^\infty \left(t^{\theta_1 + \frac{1}{q_1}} f^*(t)\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} = \mathrm{C}|f|_{q_\theta r}$$

avec (77) tandis que

$$\mathrm{II} = \left(\int_0^\infty t^{\theta_1 r} \frac{dt}{t} \left(\int_t^\infty f^{*\alpha}(y) y^{\frac{\alpha}{q_1}} \frac{dy}{y}\right)^{\frac{r}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{1}{\alpha}}$$

d'où avec Hardy

$$\leqslant \mathrm{C}\left(\int_0^\infty \left(t^{\theta_1 + \frac{1}{q_1}} f^*(t)\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} = \mathrm{C}|f|_{q_\theta r}$$

avec (77).

2° Montrons

(80) $$(\mathrm{L}^{q_0 r_0},\ \mathrm{L}^{q_1 r_1})_{\theta, r} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{L}^{q_\theta r}.$$

Vu (69) on peut supposer $r_0 = r_1 = \infty$.
Soit

(81) $$f = f_{0t} + f_{1t}$$

avec

$$f_{jt} \in \mathrm{L}^{q_j r_j}, \qquad t^{j-\theta}|f_{jt}|_{\mathrm{L}^{q_j r_j}}$$

dans $\mathrm{L}^r_{*\theta}$ une décomposition quelconque d'un vecteur quelconque f du 1er membre de (80).

On cherche à majorer $|f|_{q_\theta, r}$ en fonction de $\mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1$ avec

(82) $$\mathrm{M}_j = \left(\int_0^\infty (t^{\theta_j}|f_{jt}|_{\mathrm{L}^{q_j \infty}})^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Or (81) et (60) entraînent

$$f^*(2t) \leqslant 2(f^*_{0t}(t) + f^*_{1t}(t)).$$

On est donc amené à majorer en fonction des M_j les quantités

$$\mathrm{Q}_j = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q_\theta}} f^*_{jt}(t)\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Or

$$t^{\frac{1}{q_j}} f^*_{jt}(t) \leqslant |f_{jt}|_{L^{q_j\infty}} \quad \text{(par définition du 2}^{\text{e}} \text{ membre)}$$

d'où

$$Q_j \leqslant \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q_\theta} - \frac{1}{q_j}} (|f_{jt}|_{L^{q_j\infty}})^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}};$$

d'où avec (77)

$$Q_j \leqslant \left(\int_0^\infty (t^{\theta_j} |f_{jt}|_{L^{q_j\infty}})^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} = M_j.$$

Donc

$$|f|_{q_\theta r} \leqslant C(Q_0 + Q_1) \leqslant C(M_0 + M_1).$$

D'où la continuité de l'application (80) en prenant l'inf. du dernier membre pour toutes les décompositions (81) vérifiant (82).

Voyons quelques conséquences de la proposition 9.

a) Si l'on a deux couples d'interpolation d'espaces quasinormés du type $(L^{p_j q_j})$ et $L^{p'_j q'_j}$ avec $p_0 \neq p_1$, $p'_0 \neq p''_1$. Si l'on a une flèche T :

(83) $$(L^{p_j q_j}) \rightarrow (L^{p'_j q'_j}).$$

Alors T définit par restriction une application quasilinéaire

$$(L^{p_0 q_0}, L^{p_1 q_1})_{\theta,q} \rightarrow (L^{p'_0 q'_0}, L^{p'_1 q'_1})_{\theta,q}$$

soit avec (75) :

$$L^{p_\theta q} \rightarrow L^{p'_\theta q}$$

et à fortiori

$$L^{p_\theta q} \rightarrow L^{p'_\theta s} \qquad \text{si} \qquad s \geqslant q.$$

C'est le théorème de Hunt (voir [6|).

Faisant $q = p_\theta$ on voit que

$$L^{p_\theta} \xrightarrow{T} L^{p'_\theta, p_\theta} \xrightarrow{\text{id}} L^{p'_\theta} \qquad \text{si} \qquad \frac{p_\theta}{1} \geqslant \frac{1}{p'_\theta}.$$

Donc dans le cas particulier où $q_j = p_j$ et $q'_j = \infty$, on voit avec la terminologie de [23] que si une application T est de type faible (p_j, p'_j) alors elle est de type fort (p_θ, p'_θ) à condition que $\frac{1}{p_\theta} \geqslant \frac{1}{p'_\theta}$: c'est l'extension du théorème de Marcinkiewicz ([14] et [23]) correspondant au cas où les points m_j de coordonnées $\left(\frac{1}{p_j}, \frac{1}{p_j}\right)$ dans un quart de plan xOy sont quelconques dans ce quart de plan.

b) Mais bien sûr, ce qui fait l'intérêt de la proposition 9 par rapport au théorème de Hunt, c'est que si l'on considère un couple quelconque $(\mathrm{F}_j)_j$ d'espaces quasinormés et une flèche quelconque T

$$(\mathrm{L}^{p_j q_j})_j \xrightarrow{\mathrm{T}} (\mathrm{F}_j)_j$$

cette flèche définit par restriction à $\mathrm{L}^{p_\theta q}$ une application quasilinéaire

$$\mathrm{L}^{p_\theta q} \xrightarrow{\mathrm{T}} (\mathrm{F}_0 \mathrm{F}_1)_{\theta q}$$

(avec en plus un énoncé analogue en renversant le sens de la flèche).

7. Espaces de moyennes entre espaces L^p avec poids et changement d'espaces de valeurs.

Proposition 10. — *X étant un espace quelconque, considérons deux poids ϖ_j sur X qui ne s'annulent pas, c'est-à-dire deux applications ϖ_j : $\mathrm{X} \to \mathbf{R}^+$ telles que*

$$\forall x, \qquad \varpi_j(x) \neq 0.$$

A étant un espace quasinormé, notons $\mathrm{L}^\infty_{\varpi_j}(\mathrm{A})$ l'espace naturellement normé des applications f : $\mathrm{X} \to \mathrm{A}$ telles que $\varpi_j|f|$ soit borné.

Soit $(\mathrm{A}_j)_j$ un couple d'interpolation d'espaces quasinormés. Alors quels que soient θ et p tels que (33), *on a une application continue*

$$(94) \qquad (\mathrm{L}^\infty_{\varpi_0}(\mathrm{A}_0), \quad \mathrm{L}^\infty_{\varpi_1}(\mathrm{A}_1))_{\theta p} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{L}^\infty_{\varpi_0^{1-\theta}\varpi_1^\theta}((\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1)_{\theta,p}).$$

Preuve. — Soit f : $\mathrm{X} \to \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1$ dans le premier membre de (94).

On a pour tout $t' > 0$

$$(95) \qquad f(x) = f_{0t'}(x) + f_{1t'}(x)$$

avec

$$\mathrm{M}_j = \left(\int_{t\in\mathbf{R}^+}^{*} t^{(j-\theta)p}|f_{jt'}(\,.\,)|^p_{\mathrm{L}^\infty_{\varpi_j}(\mathrm{A}_j)}\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

C'est-à-dire en explicitant :

$$\mathrm{M}_j = \left(\int_{t\in\mathbf{R}^+}^{*} t^{(j-\theta)p}\sup_x\,(\varpi_j(x)|f_{jt}(x)|_{\mathrm{A}_j})^p\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Or il est clair que

$$\forall x, \qquad t^{(j-\theta)p}(\varpi_j(x)|f_{jt'}(x)|_j)^p \leqslant t^{(j-\theta)p}\sup_x\,(\varpi_j(x)|f_{jt'}(x)_{\mathrm{A}_j}|)^p.$$

Donc, comme l'intégrale supérieure définit une application croissante :

$$\forall x, \qquad \left(\int^{*} t^{(j-\theta)p}(\varpi_j(x)|f_{jt'}(x)|_j)^p\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \mathrm{M}_j.$$

Comme l'intégrale supérieure est une application positivement homogène, on peut sortir $(\varpi_j(x))^p$ du signe $\int^*$; puis on peut prendre le sup par rapport à x du 1er membre.

$$\text{(96)} \qquad \sup_x\,\varpi_j(x)\left(\int_{t\in\mathbf{R}^+}^{*} t^{(j-\theta)p}|f_{jt'}(x)|^p_j\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \mathrm{M}_j.$$

Prenons alors

$$\text{(97)} \qquad t' = t\varpi_0^{-1}(x)\varpi_1(x)$$

et utilisons la propriété suivante des intégrales supérieures.

Quelle que soit la fonction $\Phi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, quelle que soit la constante k non nulle.

Alors :

$$\text{(98)} \qquad \int_{t\in\mathbf{R}^+}^{*}\Phi(kt)\,\frac{dt}{t} = \int_{t\in\mathbf{R}^+}^{*}\Phi(t')\,\frac{dt'}{t'}.$$

Cette propriété s'énonce encore ainsi :

On peut faire dans le premier membre de (98) le changement de variable $t' = kt$.

Ceci est clair : on a (98) si Φ est semi continue inférieurement; donc dans tous les cas d'après la définition de l'intégrale supérieure.

On peut donc faire le changement (97) dans (96) et il vient :

$$\sup_x \varpi_0^{1-\theta}(x)\varpi_1^{\theta}(x)\left(\int^* t'^{(j-\theta)p}|f_{jt'}(x)|^p \frac{dt'}{t'}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant M_j.$$

Ceci entraîne :

$$\sup_x \varpi_0^{1-\theta}(x)\varpi_1^{\theta}(x), \qquad |f(x)|_{\theta p} \leqslant M_0 + M_1.$$

D'où la conclusion en prenant l'inf. du membre de droite pour toutes les décompositions (95) de f.

Remarques. — 1. On peut donner la version « mesurable » suivante de la proposition II, Proposition II *bis* :

Ω est un espace localement compact muni d'une mesure de Radon μ et de deux poids μ-mesurables $\varpi_j : X \to \mathbf{R}^+$ ne s'annulant pas (essentiellement).

A étant un espace quasi-normé, notons $L^\infty_\varpi(A)$ l'espace naturellement normé des applications $f : X \to A$ telles que $\varpi(f)$ soit μ-mesurable et bornée. Alors si (A_j) est un couple d'interpolation d'espaces quasi-normés et si θ et p sont tels que (33) on a toujours (94).

Il suffit de reprendre la démonstration précédente en utilisant la définition discrète des espaces de moyenne (technique utilisée plusieurs fois dans [13]).

2. Notons que dans ce dernier cas, si on suppose de plus que les espaces A_j sont des espaces Banach, la méthode d'interpolation complexe donne ([1])

$$(99) \qquad [L^\infty_{\varpi_0}(A_0), \qquad L^\infty_{\varpi_1}(A_1)]_\theta \xrightarrow{\text{id}} L^\infty_{\varpi_0^{1-\theta}\varpi_1^\theta}([A_0 A_1]_\theta)$$

J. L. Lions nous signale que si l'on suppose les espaces A_j de Banach

$$p \in [1, +\infty]$$

X localement compact, les poids ϖ_j localement sommables et non nuls presque partout; alors, on peut utiliser la représentation intégrale d'un vecteur d'un espace de moyenne, et montrer par la même méthode, la continuité de l'application duale de (94) soit :

$$L^1_{\varpi_0^{1-\theta}\varpi_1^\theta}((A_0, A_1)_{\theta,p}) \to (L^1_{\varpi_0}(A_0), L^1_{\varpi_1}(A_1))_{\theta,p}.$$

En effet :

Considérons une fonction étagée :

$$X \to (A_0, A_1)_{\theta,p}$$
$$f(.) = \sum_k \vec{a}_k \chi_k(.)$$

χ_k étant la fonction caractéristique d'une partie mesurable de X, les vecteurs $a_k \in (A_0, A_1)_{\theta,p}$ s'écrivant $\int_0^\infty \vec{a}_k(t)\,\frac{dt}{t}$, les fonctions

$$a_k : \mathbf{R}^+ \to A_0 \cap A_1$$

étant telles que

$$M_{jk} = \left(\int_0^{-\infty} |t^{j-\theta} a_k(t)|_j^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} < \infty.$$

On a donc pour presque tout $x \in X$

$$f(x) = \sum_k \int_0^\infty a_k(t)\chi_k(x)\,\frac{dt}{t}.$$

Pour démontrer la relation, nous utilisons la représentation intégrale de f déduite de la précédente en faisant des homothéties de rapports

$$\alpha_k(x) = \varpi_0^{-1}(x)\varpi_1(x)$$

sur la variable t :

$$f(x) = \sum_k \int_0^\infty a_k(\alpha_k t)\chi_k(x)\,\frac{dt}{t}.$$

On a donc :

$$\left(\int_0^\infty t^{(j-\theta)p} \Big| \sum_k a_k(\alpha_k t)\chi_k(.)\Big|^p_{L^1\varpi_j(A_j)} \frac{dt}{t}\right)^{1/p}$$
$$= \left(\int_0^\infty t^{(j-\theta)p} \frac{dt}{t}\left(\int_{x\in X} \sum_k |a_k(\alpha_k t)|\chi_k(x)\varpi_j(x)\,dx\right)^p\right)^{1/p}$$

d'où en appliquant l'inégalité de Minkowsky :

$$\leqq \int_{x\in X} \sum_k \chi_k(x)\varpi_j(x)\,dx \left(\int_0^\infty (t^{(j-\theta)}|a_k(\alpha_k(x)t)|_j)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}$$

d'où en faisant apparaître les M_{jk} :

$$\leqq \int_{x\in X} \sum_k \chi_k(x)\varpi_j(x)(\varpi_0(x)\varpi_1^{-1}(x))^{j-\theta} M_{jk}\,dx$$

soit

$$\leqq \int_{x \in X} \sum_k \chi_k(x) \omega_0^{1-\theta}(x) \varpi_1^{\theta}(x) (M_{0_k} + M_{1_k})\, dx.$$

D'où la relation voulue en prenant l'inf. de $M_{0_k} + M_{1_k}$ pour toutes les expressions intégrales des a_k, et ceci pour tous les k.

8. Quelques variantes du théorème de Marcinkiewicz.

Nous allons voir que la proposition II entraîne de nombreux théorèmes d'interpolation concernant des espaces du type : « un sup de normes est majoré ».

8.A. *Espaces du type* $\mathfrak{L}^{p\lambda}$ (voir [21]).

Nous allons d'abord généraliser un peu la définition de ces espaces de façon à pouvoir définir agréablement les applications de type faible qui interviennent dans [21].

Définition 9. — $\mathbf{E}_n$ *désigne un espace euclidien à n dimensions et* C_0 *un ouvert non vide de* $\mathbf{E}_n$. *Pour tout* $x \in C_0$ *et tout* $\rho > 0$ *suffisamment petit, le cube* $C(x, \rho)$ *de centre* x *et d'arêtes* ρ *(parallèles aux axes) est contenu dans* C_0. *Pour tout système* $(pq\lambda)$ *de nombres tels que :*

$$p \in]0, \quad +\infty[\quad q \in]0, \quad +\infty], \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

$\mathfrak{L}^{pq,\lambda}$ *désigne l'espace des classes de fonctions* u *:* $C_0 \rightarrow \mathbf{C}$ *telles que*

(100)

$$|u|_{pq,\lambda} = \sup_{C(x,\rho) \subseteq C_0} \left\{ \frac{1}{\rho^{\frac{n-\lambda}{p}}} \left(\int_0^\infty \left(y^{\frac{1}{p}} (u_c - \overline{u}_c)^*(y) \right)^q \frac{dy}{y} \right)^{1/q} \right\} < \infty$$

avec

$u_c =$ restriction de u à $C(x, \rho)$
$u_c =$ « valeur moyenne » de u sur $C(x, \rho)$:

c'est une fonction valant $\overline{u}_c$ sur $C(x, \rho)$ et nulle au dehors, le nombre $\overline{u}_c$ étant tel que (voir remarque 2.2 de [20]) que quelles que soient u et v : $C_0 \to \mathbf{C}$ on a

$$\overline{(u+v)}_c = \overline{u}_c + \overline{v}_c.$$

C'est un espace semi-quasinormé.

Il interviendra surtout par la suite les cas particuliers :

$$\mathcal{L}^{p,\lambda} = \mathcal{L}^{pp,\lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{p\infty,\lambda}.$$

Pour appliquer la proposition 10, X sera ici l'ensemble des $C(x, \rho)$: on peut d'ailleurs l'identifier à l'ouvert de $\mathbf{E}^{n+1}$ décrit par le point $(x_1 \ldots x_n \rho)$ où les x_i sont les coordonnées du centre du cube $C(x, \rho)$.

On considère l'application :

$$(101) \qquad \begin{aligned} X &\longrightarrow L^{pq} \\ \mathcal{C}(x, \rho) &\longmapsto u_c - \overline{u}_c \end{aligned}$$

d'où une application identique isométrique :

$$\mathcal{L}^{pq,\lambda} \xrightarrow{\text{id}} L_\rho^{\infty}{}^{\frac{n-\lambda}{p}}(L^{pq}).$$

On a donc avec les propositions 9 et 10 :

$$(\mathcal{L}^{p_0q_0,\lambda_0}, \mathcal{L}^{p_1q_1,\lambda_1})_{\theta,\beta} \to (L_\rho^{\infty}{}^{\frac{n-\lambda_0}{p_0}}(L^{p_0q_0}), L_\rho^{\infty}{}^{\frac{n-\lambda_1}{p_1}}(L^{p_1q_1}))_{\theta,\beta}$$
$$\to L_\rho^{\infty}{}^{\frac{n-\lambda_\theta}{p_\theta}}((L^{p_0q_0}, L^{p_1q_1})_{\theta,\beta}) = L_\rho^{\infty}{}^{\frac{n-\lambda_\theta}{p_\theta}}(L_\theta^{p,\beta})$$

avec

$$(102) \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$
$$\frac{n-\lambda_\theta}{p_\theta} = \left(\frac{n-\lambda_0}{p_0}\right)(1-\theta) + \left(\frac{n-\lambda_1}{p_1}\right)\theta.$$

D'autre part il est clair qu'en interpolant entre $\mathcal{L}^{p_jq_j,\lambda_j}$ $(j = 0, 1)$, on obtient un sous-espace de $L_\rho^{\infty}{}^{\frac{n-\lambda_\theta}{p_\theta}}(L^{p_\theta,\beta})$ composé par des fonctions qui proviennent d'une fonction u : $C_0 \to \mathbf{C}$ (utiliser la partie 1λ de la proposition 3). On obtient donc la

Proposition 11. — *Quel que soit le couple d'interpolation* $(A_j)_j$ *d'espaces quasinormés, quel que soit le couple* $(\mathcal{L}^{p_jq_j,\lambda_j})$ *d'espaces de Morrey relatifs à un même ouvert* $\mathcal{C}_0$ *de* $\mathbf{E}_n$, *quels que soient* $\theta \in]0, 1]$ *et* $p \in \overline{\mathbf{R}}^+$, *toute flèche*

$$(103) \qquad (A_j)_j \to (\mathcal{L}^{p_jq_j,r_j})_j$$

définit par restriction à $(A_0A_1)_{\theta\beta}$ *une application quasilinéaire*

$$(104) \qquad (A_0A_1)_{\theta\beta} \to \mathfrak{L}^{p_\theta,\,\beta,\,\lambda_\theta^p} \quad \text{(avec (102))}.$$

Pour trouver une petite extension du théorème 2,1 de [21], il suffit de prendre

$$A_j = L^{\alpha_j}, \qquad q_j = +\infty, \qquad \beta = \alpha_\theta \leqslant p_\theta$$

avec

$$\alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1.$$

D'où en utilisant les propositions 9 et 12 l'énoncé :

Étant donné un couple $(L^{\alpha_j})_j$, *d'espaces de Lebesgue relatifs à un même espace localement compact; étant donné, d'autre part, un couple d'espaces* $(L^{p_j\infty,\lambda_j})_j$ *d'espaces semblables à ceux de la définition* 9 *avec* $p_0 \neq p_1$*; alors toute flèche*

$$(L^{\alpha_j})_j \to (\mathfrak{L}^{p_j\infty,\lambda_j})_j$$

définit pour tout $\theta \in]0,\ 1[$ *et par restriction une application continue :*

$$L^{\alpha_\theta} \to \mathfrak{L}^{p_\theta\alpha_\theta,\lambda_\theta}$$

avec

$$\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1; \qquad \lambda_\theta = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1;$$
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

De plus, si θ est tel que $\alpha_\theta \leqslant p_\theta$ on a en fait une application :

$$L^{\alpha_\theta} \to \mathfrak{L}^{p_\theta,\lambda_\theta}$$

(contrairement à [21], il est inutile de faire l'hypothèse

$$\alpha_j \leqslant p_j :$$

pourvu que l'on se limite aux θ tels que $\alpha_\theta \leqslant p_\theta$; de plus, on voit que l'image par T de L^{α_θ} est dans un espace un peu plus petit que $\mathfrak{L}^{p_\theta,\lambda_\theta}$).

8.B. *Applications aux espaces du type* $H^p(p > 0)$. Les espaces H^p de classes de Hardy de fonctions holomorphes dans le disque unité sont définis (et généralisés) dans [5], [22], [23]. Commençons par examiner le cas le plus simple; et comme dans le § 8 A, on va généraliser un peu la définition usuelle de façon à pouvoir définir simplement les applications « de type faible » qui interviendront par la suite.

DÉFINITION 10. — D *désigne le disque unité du plan complexe* $\mathbf{C}$. *Pour tout* $r \in X =]0, 1[$, *et toute fonction holomorphe* f: $D \to \mathbf{C}$, f_r *désigne la fonction suivante définie sur le tore*

$$\mathbf{T} = [0,2\,\pi[$$
$$\forall \theta \in \mathbf{T}, \qquad f_r(\theta) = f(re^{i\theta}).$$

Pour tout couple $p \in]0, +\infty[$, $q \in]0, +\infty]$, H^{pq} *désigne l'espace des fonctions holomorphes* f: $D \to \mathbf{C}$ *telles que*

$$(105) \qquad |f|_{H^{pq}} = \sup_{r \in X} \left(\int_0^\infty (u^{1/p} f_r^*(u))^q \frac{du}{u} \right)^{1/q} < \infty.$$

Procédant comme au § 8 A, on considère l'application

$$X \longrightarrow L^{pq}(\mathbf{T}, \mathbf{C}) = L^{pq}$$
$$r \longmapsto f_r$$

H^{pq} s'identifie à un sous-espace de $L^\infty(X, L^{pq})$ et un raisonnement analogue à celui du § 8 A montre que si $p_0 \neq p_1$

$$(H^{p_0q_0}, H^{p_1q_1})_{\theta,r} \to H^{p_\theta,r}$$

avec

$$(106) \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

D'où :

PROPOSITION 12. — *Considérons un couple d'interpolation quelconque* $(A_j)_j$ *et un couple* $(H^{p_j\infty})$ *avec* $p_0 \neq p_1$.

Si l'on a une flèche T :

$$(A_j)_j \to (H^{p_j\infty})_j$$

alors $\forall \theta \in]0,1[$ *et* $r \in \overline{\mathbf{R}}^+$, T *définit par restriction une application quasilinéaire*

$$(A_0A_1)_{\theta,r} \to H^{p_\theta r} \quad \text{avec (106).}$$

La définition 10 et la proposition 12 peuvent être généralisées dans l'esprit suivant :

DÉFINITION. — *Soit* Ω *un ouvert non vide de* $\mathbf{E}_n$.

Soit V *une variété riemannienne réelle dénombrable à l'infini,* *et* $(V_i)_{i \in I}$ *une famille de variétés riemanniennes plongées dans* Ω *toutes isomorphes à* V.

Soit $\mathcal{F}$ *un certain espace sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues:* $\Omega \xrightarrow{f} B$ (avec B = espace de Banach).

Pour tout $f \in \mathcal{F}$ *et tout* $i \in I$ *on pose:*

$f_i =$ *la fonction sur* V *transportée par l'isomorphisme* $V \to V_i$ *de la restriction de* f *à* V_i.

Pour tout $p \in]0, +\infty[$ *et tout* $q \in]0, +\infty]$ *on pose:*

$$H^{pq} = \{ f \in \mathcal{F};\ |f|_{pq} = \sup_{i \in I} |f_i|_{L^{pq}(V,B)} < \infty \}.$$

Les espaces H^p de Stein et Weiss entrent dans ce cadre. (On peut encore mettre un poids sur l'ensemble I).

La proposition 13 s'énonce alors ainsi :

Proposition. — *Étant donnés un couple d'interpolation d'espaces quasinormés* $(A_j)_j$ *et un couple* $(H^{p_j q_j})_j$ *d'espaces définis ci-dessus (pour le même* Ω, *le même* V^j *et le même* I : $p_0 \neq p_1$, q_0 *et* q_1 *quelconques).*

Alors toute flèche

$$(A_j)_j \to (H^{p_j q_j})_j$$

définit par restriction et pour tout $\theta \in]0,1$ *et tout* $p \in]0 + \infty]$ *une application continue*

$$(A_0, A_1)_{\theta,p} \to H^{p_\theta p} \qquad \textit{avec} \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Dans le cas particulier des espaces H^p de Stein et Weiss le résultat est différent du résultat [8] d'Igari car il suppose que le couple $(A_j)_j$ est un autre couple d'espaces H^p (et il se limite à $p \geqslant 1$).

8.C. *Espaces* $\mathfrak{M}_p$.

Pour tout $p > 0$. $\mathfrak{M}_p$ désigne l'espace des classes de fonctions mesurables f: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ telles que

$$\sup_{T>0} \left(\frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Pour $p = 2$, cet espace s'introduit naturellement comme le dual d'une algèbre de Beurling.

Procédant toujours d'une façon analogue on considère ici l'espace $X = \mathbf{R}^+$ et l'application (p et $q > 0$)

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow L^{pq}(R, \mathbf{C}) = L^{pq} \\ T &\longmapsto f_T = \text{restriction de } f \text{ à } [-T, +T]. \end{aligned}$$

Et l'on dira que $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est dans $\mathfrak{M}^{pq}$ si l'application précédente qui correspond à f est dans $L^{\infty}_{T^{1/p}}(X, L^{pq})$. $\mathfrak{M}^{pq}$ s'identifie donc à un sous-espace de $L^{\infty}_{T^{1/2}}(X, L^{pq})$: celui des applications $T \to f_T$ qui satisfont à la condition suivante de « raccordement » :

$$T < T' \Longrightarrow f_{T'} \text{ prolonge } f_T.$$

On a alors :

$$(\mathfrak{M}^{p_0\infty}, \mathfrak{M}^{p_1\infty})_{\theta p_\theta} \xrightarrow{\text{id}} \mathfrak{M}^{p_\theta p_\theta} = \mathfrak{M}^{p_\theta}.$$

De sorte que l'on a la

Proposition 13. — *Quel que soit le couple d'interpolation* $(A_j)_j$ *d'espaces quasinormés et quel que soit le couple* $(\mathfrak{M}^{p_j\infty})$ *avec* $p_0 \neq p_1$, *toute flèche* $(A_j)_j \xrightarrow{T} (\mathfrak{M}^{p_j\infty})_j$ *définit par restriction une application quasilinéaire :*

$$(A_0 A_1)_{\theta r} \xrightarrow{T} M^{p_\theta r}$$

$$\forall \theta \in]0, 1[, \qquad \forall r \in]0, +\infty[\qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. Calderon, Intermediate spaces and interpolation, The complex method, *Studia Math.* vol. 24 fasc. 2 (1964), 113, 190.

[2] A. P. Calderon, Intermediate spaces and interpolation, *Studia Math.* série spéciale (1963), 31 à 34.

[3] Gagliardo, Interpolazione di spazi di Banach et applicazione Rie di Math. t. IX (1960), 58-81.

[4] Hardy Littlewood Polya, Inequalities, Cambridge (1934).

[5] Hoffman, Banach spaces of analytic functions, *Prentice Hall*, (1962).

[6] Hunt, An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces, *Bull. AMS.* vol. 70, n° 6, nov. 1964, 803-807.

[7] Hunt et Weiss, The Marcinkiewicz interpolation theorem, *Bull. AMS*, 996-998.

[8] Igari, An extension of the Interpolation theorem of Marcinkiewicz, *Tohoku Math. J.* vol. 65, 343-358.

[9] P. KREE, Une propriété simple des espaces de moyenne, *Comptes Rendus*, T. 260 (1965), 2679-2682.
[10] KOTHE, Topologische lineare Raume. *Springer Verlag Berlin* (1961).
[11] J. L. LIONS, T. 251 (1961), 1853-1855.
[12] J. L. LIONS et PEETRE, Propriétés d'espaces d'interpolation, C.R.t. 253 (1961) 1747-1749.
[13] J. L. LIONS et J. PEETRE. Sur une classe d'espaces d'interpolation *Publications bleues de l'IHES*, Paris nº 19 (1964).
[14] MARCINKIEWICZ, Sur l'interpolation d'opérateurs. C.R. t. 208 (1939), 1272, 1273.
[15] R. O. NEIL, Convolution operators and L (p, q) spaces. *Duke Math. J.* 30 (1963), 129-142.
[16] J. PEETRE, Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation C.R. fév. (1963), 1424-1426.
[17] J. PEETRE, Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation. *Ric di Math.* vol. 12 (1963), fasc. 2.
[18] J. PEETRE, Relation entre deux méthodes d'interpolation à paraître dans les publications bleues de l'IHES.
[19] J. PEETRE, Espaces d'interpolation généralisations, applications *Rend del Sem. Mat et Fisico. di Milano* vol. 3.
[20] M. RIESZ, Sur les maximas des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Act. Math.* t. 49 (1927), 465-497.
[21] G. STAMPACCHIA, $\mathfrak{L}^{p,\lambda}$ spaces and interpolation, *Comm. Pure Appl. Math.* vol. XVII 293-306 (1964).
[22] STEIN et WEISS, On the theory of harmonic functions of several variables, *I Act. Math.* 103 (1960), 25-62.
[23] ZYGMUND, Trigonometrical series Tome 2 Cambridge (1960).

Manuscrit reçu en juillet 1965.

Paul KRÉE,
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Parc Valrose - 06 - Nice.