ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Daniel CARO

Holonomie sans structure de Frobenius et critères d'holonomie

Tome 61, nº 4 (2011), p. 1437-1454.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2011__61_4_1437_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
61, 4 (2011) 1437-1454

HOLONOMIE SANS STRUCTURE DE FROBENIUS ET CRITÈRES D'HOLONOMIE

par Daniel CARO (*)

RÉSUMÉ. — Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de Berthelot. Nous définissons la notion de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques holonomes. Lorsque les modules sont munis d'une structure de Frobenius, nous retrouvons la définition d'holonomie de Berthelot. Nous vérifions que l'inégalité de Bernstein et le critère homologique d'holonomie de Virrion restent valables sans l'hypothèse d'une structure de Frobenius. Nous établissons qu'un $\mathcal{D}$-module surcohérent (sans structure de Frobenius) devient $\mathcal{O}$-cohérent sur un ouvert dense de son support. Il en résulte qu'un $\mathcal{D}$-module cohérent est holonome si son dual est un complexe surcohérent. En particulier un $\mathcal{D}$-module surholonome est holonome.

ABSTRACT. — This work fits into Berthelot's theory of arithmetic $\mathcal{D}$-modules. We define the notion of holonomic arithmetic $\mathcal{D}$-modules. When the modules are endowed with a Frobenius structure we recover Berthelot's definition of holonomicity. We show that Bernstein's inequality and Virrion's criterion hold without the hypothesis of a Frobenius structure. We prove that an overcoherent $\mathcal{D}$-module (without Frobenius structure) is $\mathcal{O}$-coherent over a dense open set of its support. This implies that a coherent $\mathcal{D}$-module whose dual is an overcoherent complex is holonomic. In particular, an overholonomic $\mathcal{D}$-module is holonomic.

Introduction

Soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, de corps résiduel parfait k, de corps des fractions K. Soient $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse de fibre spéciale X supposée intègre et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ le faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini construit par Berthelot (voir [4]). Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent *muni d'une structure de Frobenius.* Berthelot associe alors canoniquement (la structure de Frobenius

Mots-clés : holonomie,$\mathcal{D}$-modules arithmétiques.
Classification math. : 14F10, 14F30.
(*) L'auteur a bénéficié du soutien du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE MRTN-CT-2003-504917).

implique l'indépendance par rapport au choix du niveau auquel on descend $\mathcal{F}$) à $\mathcal{F}$ une sous-variété réduite notée $\mathrm{Car}(\mathcal{F})$ de l'espace cotangent T^*X, de manière analogue à la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent lorsque X est une variété lisse sur $\mathbb{C}$ (voir [4, 5.2]). Il valide l'inégalité de Bernstein : lorsque $\mathcal{F}$ est non nul, $\dim \mathrm{Car}(\mathcal{F}) \geqslant \dim X$. Le module $\mathcal{F}$ est par définition holonome lorsque $\dim \mathrm{Car}(\mathcal{F}) \leqslant \dim X$. On dispose de la caractérisation homologique de Virrion de l'holonomie : le module $\mathcal{F}$ est holonome si et seulement si, pour tout $l \neq 0$, $\mathcal{H}^l\mathbb{D}(\mathcal{F}) = 0$, où $\mathbb{D}$ est le foncteur dual (voir [15]). On bénéficie de plus du critère surcohérent d'holonomie : si le complexe $\mathbb{D}(\mathcal{F})$ est surcohérent alors le module $\mathcal{F}$ est holonome (pour la définition de la surcohérence et sa caractérisation, voir [7] et [13]). Mise à part la définition de la variété caractéristique qui pose *a priori* problème (*e.g.* voir la remarque 1.6), nous étendons dans ce papier la notion d'holonomie et ses critères en nous affranchissant de Frobenius.

Précisons à présent les différentes sections de ce travail.

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent (sans structure de Frobenius). Après une première partie consacrée à quelques préliminaires sur les variétés caractéristiques de niveau m, nous vérifions dans une deuxième partie que la dimension de $\mathcal{E}$ a bien un sens : pour m assez grand, la dimension de la variété caractéristique de niveau m de $\mathcal{E}$ est indépendante du choix de m (par contre, comme on ne dispose pas de structure de Frobenius, la variété caractéristique dépend *a priori* du choix du niveau m choisi). L'inégalité de Bernstein reste valable, ce qui nous conduit à étendre de manière naturelle la notion d'holonomie. On vérifie au passage le critère homologique de Virrion et la stabilité de l'holonomie par dualité.

Dans la troisième partie, on démontre que lorsque $\mathcal{E}$ est surcohérent (en fait, « $\mathcal{E}$ à fibres extraordinaires finies » suffit), il existe un ouvert dense du support de $\mathcal{E}$ au-dessus duquel $\mathcal{E}$ devienne $\mathcal{O}$-cohérent (voir 3.7). Ce théorème de $\mathcal{O}$-cohérence générique, que l'on peut appeler surconvergence générique en référence aux isocristaux surconvergents, correspond à une version sans structure de Frobenius du théorème [10, 2.2.17]. De manière analogue au cas déjà traité avec structure de Frobenius (voir [9, 11]), ce résultat est la première étape pour établir que les complexes surcohérents (sans structure de Frobenius) se dévissent en isocristaux surconvergents. Nous nous intéresserons à cette extension dans un prochain travail.

Le théorème de surconvergence générique de cette troisième partie est l'ingrédient fondamental qui permet d'établir dans une quatrième partie le critère surcohérent d'holonomie (voir 4.2). Il découle de ce second critère qu'un module surholonome (pour cette notion, voir [12]) est holonome.

Terminons par une précision technique. Soit T un diviseur de X. Berthelot a défini le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{X}$ de niveau fini à singularités surconvergents le long de T. Pour être plus exact, nous définissons dans ce papier la notion de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-holonomie et vérifions que les deux critères d'holonomie restent valables (lorsque le diviseur est vide et avec une structure de Frobenius, nous retrouvons la définition de Berthelot).

Remerciements. — Je remercie Pierre Berthelot et Tomoyuki Abe pour m'avoir communiquer leur contre-exemple sur les inclusions de variétés caractéristiques lorsque l'on fait varier le niveau (plus précisément, voir la remarque 1.6).

Notations et rappels

• On désigne par $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$ de corps résiduel parfait k, de corps des fractions K. Soit π une uniformisante de $\mathcal{V}$. On fixe $s \geqslant 1$ un entier naturel et F désigne la puissance s-ième de l'endomorphisme de Frobenius.

• On note $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, X sa fibre spéciale et T un diviseur de X.

• Les modules sont par défaut à gauche.

• Nous reprenons les notations usuelles concernant les opérations cohomologiques de la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques (voir [4] et [12, 1]). Par exemple, le foncteur $\mathbb{D}_T$ désigne le foncteur dual $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-linéaire au sens de Virrion (voir [15]). Rappelons que le foncteur $\mathbb{D}_T$ préserve la $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-cohérence (et la perfection) car le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ est cohérent et de dimension cohomologique finie (voir [14]).

• En général, lorsque T est vide, on omet alors de l'indiquer dans les notations.

1. Préliminaires sur les variétés caractéristiques de niveau m

On suppose $\mathfrak{X}$ intègre.

Notation 1.1. — Soit $\mathcal{E}^{(m)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent.

• D'après [4, 5.2.5], on lui associe de manière canonique une variété caractéristique notée $\mathrm{Car}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)})$. Notons F^m la puissance m-ième de l'endomorphisme de Frobenius $X \to X$. Posons $\mathcal{E}^{(0,m)} := (F^m)^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}$

$\mathcal{E}^{(m)}$. D'après [4, 2.1.4.1], $\mathcal{E}^{(0,m)}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent induisant l'isomorphisme canonique $F^{m*}(\mathcal{E}^{(0,m)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(m)}$, où et F^{m*} le foncteur image inverse par F^m. Via [4, 5.2.2.1], on identifiera $\mathrm{Car}^{(0)}(\mathcal{E}^{(0,m)})$ avec $\mathrm{Car}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)})$ (en effet, si on choisit un modèle sans π-torsion de $\mathcal{E}^{(0,m)}$ alors son image par F^{m*} donne un modèle sans π-torsion de $\mathcal{E}^{(m)}$).

• La « dimension de niveau m de $\mathcal{E}^{(m)}$ » est définie en posant $\dim^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)}) := \dim \mathrm{Car}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)})$. La « codimension de niveau m de $\mathcal{E}^{(m)}$ » est définie en posant $\mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)}) := 2\dim X - \dim^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)})$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le niveau (*e.g.* il se peut *a priori* qu'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent soit aussi un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent), nous noterons plus simplement $\dim(\mathcal{E}^{(m)})$ et $\mathrm{codim}(\mathcal{E}^{(m)})$. De plus, on dispose des encadrements $0 \leqslant \dim(\mathcal{E}^{(m)}) \leqslant 2\dim X$ et $0 \leqslant \mathrm{codim}(\mathcal{E}^{(m)}) \leqslant 2\dim X$.

• Avec l'équivalence de catégories canonique entre $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules à gauche cohérents et $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules à droite cohérents induit par le foncteur $-\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}$ (on rappelle que $\omega_{\mathfrak{X}} := \wedge^{d_X}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{V}}$), on obtient des constructions et définitions analogues pour les modules à droite.

1.2. — D'après [4, 3.1.3.(ii)], si $\mathfrak{X}$ est affine alors la dimension homologique de $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est comprise entre $\dim X$ et $2\dim X$.

Proposition 1.3. — *Soit $\mathcal{E}^{(m)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Alors :*

(1) $\mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})) \geqslant i$, *pour tout* $i \geqslant 0$.

(2) $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = 0$, *pour tout* $i < \mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)})$.

Démonstration. — On procède de manière analogue à [15, III.2.4] : soit $\mathcal{E}^{(0,m)} := (F^m)^\flat \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m)}$. D'après Virrion (voir [15, II.3]), on dispose de l'isomorphisme canonique

$$(1.3.1)\quad (F^m)^\flat \mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(0,m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(F^{m*}\mathcal{E}^{(0,m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}).$$

Modulo l'identification [4, 5.2.2.1], il en résulte que

$$\mathrm{Car}^{(0)}(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(0,m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})) \quad \text{et} \quad \mathrm{Car}^{(m)}(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}))$$

sont isomorphes. Grâce à [15, III.2.3.(i)], il en résulte (1).

De plus, comme $\mathrm{Car}^{(0)}(\mathcal{E}^{(0,m)}) = \mathrm{Car}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)})$, alors $\mathrm{codim}(\mathcal{E}^{(0,m)}) = \mathrm{codim}(\mathcal{E}^{(m)})$. D'après [15, III.2.3.(ii)], on en déduit que $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = 0$ pour tout $i < \mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E})$. □

Proposition 1.4. — *Soit $\mathcal{E}^{(m)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent non nul. Alors :*

$$\operatorname{codim}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)}) = \min\Big\{ i \mid \mathcal{E}xt^{i}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \neq 0 \Big\}. \tag{1.4.1}$$

Démonstration. — Il s'agit de reprendre [15, III.3.4–5] en remplaçant $\mathcal{D}^{\dagger}$ par $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$ et (grâce à 1.2) $\dim X$ par $2\dim X$. Pour la commodité du lecteur, voici les grandes lignes de la preuve : posons $k := \operatorname{codim}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)})$. Grâce à l'isomorphisme de bidualité, on dispose de la suite spectrale

$$E_2^{i,j} = \mathcal{E}xt^{i}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}xt^{-j}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}), \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \Rightarrow E^N = \mathcal{H}^{i+j}(\mathcal{E}^{(m)}).$$

D'après 1.3.(2), $E_2^{i,-i} = 0$ pour $i < k$. Par l'absurde, supposons $E_2^{k,-k} = 0$. En outre, via 1.3.(1), $\operatorname{codim}(E_2^{i,-i}) \geqslant k+1$ pour $i \geqslant k+1$. Comme la filtration de $\mathcal{E}^{(m)}$ induite par la suite spectrale est finie, on obtient alors : $\operatorname{codim}(\mathcal{E}^{(m)}) \geqslant k+1$, ce qui est absurde. □

Corollaire 1.5. — *Soit $\mathcal{E}^{(m)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Pour $m' \geqslant m$, posons $\mathcal{E}^{(m')} := \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m)}$. On dispose de l'inégalité*

$$\operatorname{codim}^{(m')}(\mathcal{E}^{(m')}) \geqslant \operatorname{codim}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)}).$$

Démonstration. — Si $\mathcal{E}^{(m')} = 0$ alors l'assertion est immédiate. Supposons donc $\mathcal{E}^{(m')} \neq 0$. Comme l'extension $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est plate, pour tout $i < \operatorname{codim}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)})$, on obtient :

$$0 = \mathcal{E}xt^{i}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^{i}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m')}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}).$$

D'où le résultat via 1.4. □

Remarque 1.6. — Avec les notations de 1.5, d'après des contre-exemples de Berthelot et de Abe, il n'existe pas d'inclusion entre les variétés caractéristiques de respectivement $\mathcal{E}^{(m)}$ et $\mathcal{E}^{(m')}$.

2. Inégalité de Bernstein, holonomie et son critère homologique

Pour simplifier l'exposé, supposons X intègre (voir aussi la remarque 2.9).

Notation 2.1.

• Sauf mention explicite du contraire, on désigne par $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Soit m_0 le plus petit entier $m \geqslant 0$ tel qu'il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}^{(m)}$ et un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire de la forme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. D'après [2, 3.6.2], cet entier est bien défini. Choisissons $\mathcal{E}^{(m_0)}$ un tel $\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Pour tout entier $m \geqslant m_0$, on note alors $\mathcal{E}^{(m)} := \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m_0)}$.

• Il résulte de 1.5 que, pour tous $m' \geqslant m \geqslant m_0$, on a $\dim^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)}) \geqslant \dim^{(m')}(\mathcal{E}^{(m')})$.

• On note $\dim(\mathcal{E})$ le minimum des $\dim^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)})$, *i.e.*, la limite de la suite stationnaire $(\dim^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)}))_{m\geqslant m_0}$. On pose aussi $\operatorname{codim}(\mathcal{E}) := 2\dim X - \dim(\mathcal{E})$. Remarquons que d'après [2, 3.6.2.(ii)] les entiers $\dim(\mathcal{E})$ et $\operatorname{codim}(\mathcal{E})$ ne dépendent pas du choix de $\mathcal{E}^{(m_0)}$.

Remarque 2.2. — Avec les notations de 2.1, si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent muni d'une structure de Frobenius, pour tout niveau m (assez grand si $p = 2$), les variétés caractéristiques $\mathrm{Car}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)})$ ne dépendent pas du niveau m et sont égales à la variété caractéristique définie par Berthelot (voir [4, 5.2.7]).

Étendons d'abord via les deux propositions suivantes les résultats de la section précédente :

Proposition 2.3. — *Avec les notations de 2.1 :*

(1) $\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})) \geqslant i$, *pour tout* $i \geqslant 0$.

(2) $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = 0$, *pour tout* $i < \operatorname{codim}(\mathcal{E})$.

Démonstration. — Pour tout $m \geqslant m_0$, comme l'extension $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est plate (voir [2]), comme le foncteur dual commute aux extensions (voir [15, I.4]), on obtient le second isomorphisme :

$$\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m)}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^{i}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}. \tag{2.3.1}$$

Pour m assez grand, $\operatorname{codim}^{(m)}(\mathcal{E}^{(m)}) = \operatorname{codim}(\mathcal{E})$. D'après 1.3, il en résulte que $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = 0$ pour tout $i < \operatorname{codim}(\mathcal{E})$. Par définition de la codimension de $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, l'isomorphisme (2.3.1) se traduit pour m assez grand par

$$\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})) = \operatorname{codim}^{(m)}(\mathcal{E}xt^{i}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})).$$

D'après 1.3, il en résulte alors (1). □

PROPOSITION 2.4. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent non nul. Alors :*

$$\mathrm{codim}(\mathcal{E}) = \min\left\{ i \mid \mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \neq 0 \right\}. \tag{2.4.1}$$

Démonstration. — Il suffit d'utiliser 1.4 et les isomorphismes (2.3.1). □

THÉORÈME 2.5 (Inégalité de Bernstein). — *Pour tout $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ non nul, on a*

$$\dim(\mathcal{E}) \geqslant \dim X. \tag{2.5.1}$$

Démonstration. — La preuve est identique à celle de [4, 5.3.4]. Pour la commodité du lecteur, nous donnons néanmoins ici ses grandes lignes : comme X est somme de ses composantes irréductibles, on peut supposer X intègre. On procède alors à une récurrence sur la dimension de X. Supposons que le support de $\mathcal{E}$ soit X. Soit $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent sans π-torsion tel que $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} \mathring{\mathcal{E}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(m)}$. Alors le support de $\mathrm{gr}(\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}/\pi\mathring{\mathcal{E}}^{(m)})$ contient X et l'inégalité est vérifiée. Sinon, le support Z de $\mathcal{E}$ est un fermé de dimension strictement plus petite à celle de X. Quitte à changer X par un ouvert affine U tel que $Z \cap U$ soit lisse et dense dans une composante irréductible de Z de dimension maximale, on peut supposer Z lisse et que $Z \subset X$ se relève en une immersion fermée $u : \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses. Comme $\mathcal{E}^{(m)}$ est à support dans Z, d'après [4, 5.3.2], quitte à augmenter m, il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Z},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{F}^{(m)}$ tel que $u^{(m)}_{+}(\mathcal{F}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(m)}$. On pose $\mathcal{E}^{(0,m)} := (F^{m})^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m)}$ et $\mathcal{F}^{(0,m)} := (F^{m})^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{F}^{(m)}$ Soit $\mathring{\mathcal{F}}^{(0,m)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent sans π-torsion tel que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}} \mathring{\mathcal{F}}^{(0,m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{(0,m)}$. On pose $\overline{\mathcal{F}}^{(0,m)} := \mathcal{D}^{(0)}_{X} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}} \mathring{\mathcal{F}}^{(0,m)}$. Comme dans le cas classique (voir ce qui suit [4, 5.3.3]), on vérifie la formule $\mathrm{Car}^{(0)}(u^{(0)}_{+}(\overline{\mathcal{F}}^{(0,m)})) = v(q^{-1}\,\mathrm{Car}^{(0)}(\overline{\mathcal{F}}^{(0,m)}))$, où $T^{*}Z \xleftarrow{q} Z \times_{X} T^{*}X \xrightarrow{v} T^{*}X$ sont les applications canoniques. Comme $u^{(0)}_{+}(\mathcal{F}^{(0,m)})$ donne un modèle sans π-torsion de $\mathcal{E}^{(0,m)}$, on conclut alors par hypothèse de récurrence en remarquant que q est plat et v est une immersion fermée. □

THÉORÈME 2.6. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Alors, pour tout $i > \dim X$,*

$$\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = 0.$$

Démonstration. — Par l'absurde, supposons qu'il existe $i > \dim X$ tel que $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \neq 0$. L'inégalité de Bernstein se traduit par $\mathrm{codim}(\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})) \leqslant \dim X$, ce qui contredit 2.3.(1). □

Définition 2.7. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. On dit que $\mathcal{E}$ est holonome si* $\operatorname{codim}(\mathcal{E}) \geqslant \dim X$.

Proposition 2.8. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Alors $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si, pour tout $i \neq 0$, $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}[\dim X]) = 0$.*

Démonstration. — Cela se vérifie comme [15, III.4.2] en utilisant la proposition 2.4 et le théorème 2.6. □

Remarque 2.9. — Lorsque $\mathfrak{X}$ n'est plus intègre, la définition 2.7 et le critère 2.8 sont encore vrais de la manière suivante. Comme $\mathfrak{X}$ est lisse, $\mathfrak{X}$ est somme de ses composantes connexes notées $(\mathfrak{X}_r)_r$. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. On désigne alors par $\dim(\mathcal{E})$ (resp. $\operatorname{codim}(\mathcal{E})$, resp. $\dim X$) le faisceau sur X localement constant égal à $\dim(\mathcal{E}|\mathfrak{X}_r)$ (resp. $\operatorname{codim}(\mathcal{E}|\mathfrak{X}_r)$, resp. $\dim X_r$) sur X_r.

La proposition 2.8 nous permet d'étendre de manière naturelle la notion d'holonomie de la manière suivante :

Définition 2.10. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent. On dit que $\mathcal{E}$ est « $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-holonome » ou « holonome en tant que $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module » si, pour tout $i \neq 0$, $\mathcal{H}^i\mathbb{D}_T(\mathcal{E}) = 0$.*

Exemple 2.11. — Les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-cohérents sont $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-holonomes. En effet, cela découle de l'isomorphisme $\mathbb{D}_T(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\vee} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ (voir [8]).

Remarque 2.12.

– Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent qui soit $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-holonome. Alors $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-holonome. En effet, cela résulte de l'isomorphisme $({}^{\dagger}T) \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_T \circ ({}^{\dagger}T)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_T(\mathcal{E})$ (le premier isomorphisme provient de la commutation du foncteur dual aux extensions des scalaires, le second du fait que $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module) et du fait que le foncteur extension $({}^{\dagger}T)$ est exact sur la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents (car l'homomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ est plat d'après [2, 4.3.11]).
– La réciproque est fausse : la $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-holonomie n'implique pas la $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-holonomie. En effet, d'après l'exemple tout à la fin de [2], il existe des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-cohérents qui ne sont pas $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent (ni a fortiori $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-holonome).

  Par contre, lorsque les modules sont munis de structures de Frobenius, Berthelot conjecture dans [4, 5.3.6] que c'est le cas :

Conjecture 2.13 (Berthelot). — *Soit $\mathcal{E}$ un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent. Si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-holonome alors $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-holonome.*

Proposition 2.14. — *Soit* $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$*-modules cohérents. Alors* $\mathcal{E}$ *est* $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$*-holonome si et seulement si* $\mathcal{E}'$ *et* $\mathcal{E}''$ *sont* $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$*-holonomes.*

Démonstration. — Si $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ sont $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-holonomes, il est immédiat que $\mathcal{E}$ l'est aussi. Traitons la réciproque. On suppose ainsi que $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-holonome. Par [2, 4.3.12], on se ramène au cas où le diviseur T est vide. Pour m assez grand, via [2, 5.3.2] (et [2, 3.4] pour l'existence d'un modèle de $\mathcal{E}''$), on se ramène à supposer que la suite exacte $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ provient par extension d'une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents sans π-torsion. En considérant la suite exacte déduite par réduction modulo π, la proposition résulte alors de [4, 5.2.4] (et de la proposition 2.8). □

Proposition 2.15. — *Le foncteur* $\mathbb{D}_T$ *induit une auto-équivalence de la catégories des* $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$*-modules holonomes.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt de l'isomorphisme de bidualité et de notre définition 2.10. □

3. Surconvergence générique d'un $\mathcal{D}$-module cohérent à fibres finies

Nous vérifions dans ce chapitre qu'un module arithmétique cohérent dont les fibres extraordinaires sont finies (*e.g.* un module arithmétique surcohérent) devient $\mathcal{O}$-cohérent sur un ouvert dense de son support (plus précisément, voir le théorème 3.7). Cela correspond à une propriété bien connue de l'holonomie en caractéristique nulle.

Les ingrédients qui nous avaient permis d'obtenir [10, 2.2.17] seront abondamment réutilisés. Comme nous nous contenterons de les citer, le lecteur pourra commencer par la section [10, 2.2] avant de lire cette section.

Notation 3.1. — Pour tout point fermé x de X, on notera par $i_x : \operatorname{Spf} \mathcal{V}(x) \hookrightarrow \mathfrak{X}$, un relèvement de l'immersion fermée canonique induite par x. On notera i_x^* le foncteur image inverse (isomorphe à $\mathcal{H}^{d_X} \circ i_x^!$). On remarque que $\mathcal{V}(x)$ est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$. Son corps des fractions sera désigné par $K(x)$.

Lemme 3.2. — *Soit* $\mathcal{E}$ *un* $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$*-module cohérent,* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$*-cohérent. Il existe alors un ouvert dense* $\mathfrak{Y}$ *de* $\mathfrak{X}$ *tel que* $\mathcal{E}|\mathfrak{Y}$ *soit un* $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}$*-module libre de type fini.*

Démonstration. — On peut supposer $\mathfrak{X}$ affine et muni de coordonnées locales. Soit m_0 un entier. D'après [1, 3.1], il existe un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}$-module cohérent $\mathring{\mathcal{E}}^{(m_0)}$ sans π-torsion, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-cohérent et un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire : $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m_0)}} \mathring{\mathcal{E}}^{(m_0)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. De manière analogue à [5, VII.9.3], on vérifie qu'il existe alors un ouvert affine et dense $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathring{\mathcal{E}}^{(m_0)}|Y$ soit un $\mathcal{O}_Y$-module libre (forcément de type fini). On termine la preuve via par exemple [10, 2.2.16]. □

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent tel que, pour tout point fermé x de X, le K-espace vectoriel $i_x^*(\mathcal{E})$ est de dimension finie. Un problème supplémentaire technique qui apparaît contrairement à la situation avec structure de Frobenius est que lorsque le niveau m s'élève, l'ouvert au-dessus duquel le $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent associé à $\mathcal{E}$ devient $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent rétrécit *a priori*. Le phénomène de contagiosité du lemme 3.3 ci-dessous nous permettra de résoudre cet obstacle.

Lemme 3.3. — *On suppose $\mathfrak{X}$ affine et muni de coordonnées locales. Soient $m' \geqslant m$ deux entiers, $\mathfrak{U}$ un ouvert affine dense dans $\mathfrak{X}$, $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent tel que $\mathcal{E}$ soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module projectif de type fini.*

On suppose que $\Gamma(\mathfrak{U},\mathcal{E})$ est muni d'une structure de $\Gamma(\mathfrak{U},\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module prolongeant sa structure de $\Gamma(\mathfrak{U},\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module. Alors $\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ est muni d'une et d'une seule structure de $\Gamma(\mathfrak{X},\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module prolongeant sa structure de $\Gamma(\mathfrak{X},\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module.

Démonstration. — L'unicité provient du fait que $\Gamma(\mathfrak{X},\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est dense dans $\Gamma(\mathfrak{X},\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ (*e.g.* voir [10, 2.2.9]). Soient $e \in \Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E})$ et $1 \otimes e$ l'élément induit de $\Gamma(\mathfrak{U},\mathcal{E})$. Comme les éléments $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m')}}$ sont de norme 1 dans $\Gamma(\mathfrak{X},\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ (pour la norme de Gauss), la famille $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m')}} \cdot (1 \otimes e)$ avec $\underline{k}$ parcourant $\mathbb{N}^d$ est bornée pour la topologie de $\Gamma(\mathfrak{U},\mathcal{E})$ induite par sa structure de $\Gamma(\mathfrak{U},\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini. Or, d'après [2, 4.1.2], cette topologie est identique à celle induite par la structure de $\Gamma(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini sur $\Gamma(\mathfrak{U},\mathcal{E})$.

Soient N un entier et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent tel que $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^N_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. On obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})^N \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}) \oplus \Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{F}) \arrow[r, two heads] & \Gamma(\mathfrak{X},\mathcal{E}) \arrow[d, hook] \\
\Gamma(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})^N \arrow[r, "\sim"] & \Gamma(\mathfrak{U},\mathcal{E}) \oplus \Gamma(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[r, two heads] & \Gamma(\mathfrak{U},\mathcal{E})
\end{tikzcd}$$

dont la flèche injective de droite envoie $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m')}} \cdot e$ sur $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m')}} \cdot (1 \otimes e)$ (cela a bien un sens car $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m')}} \in \Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}))$. Comme $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \cap \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ (en effet, comme $\mathfrak{X}$ est lisse et U est dense dans X, le morphisme $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est injectif), on vérifie alors que la famille $\{\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m')}} \cdot e \mid \underline{k} \in \mathbb{N}^d\}$ est un sous-ensemble borné de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ pour la topologie induite par sa structure de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini. Soit $P = \sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m')}}$ un élément de $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. Il en résulte la convergence de la somme $\sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{k}} (\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m')}} \cdot e)$. On pose alors $P \cdot e := \sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{k}} (\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m')}} \cdot e)$.

Il reste à vérifier que cela munit bien $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ d'une structure de $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module. En multipliant par $a_{\underline{k}}$ les égalités $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m')}} \cdot e = \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m')}} \cdot (1 \otimes e)$, puis en les sommant, on obtient $P \cdot e = P \cdot (1 \otimes e)$. Ainsi, $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ est un sous-$\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$. □

Théorème 3.4. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent satisfaisant la propriété suivante : pour tout point fermé x de X, le K-espace vectoriel $i_x^*(\mathcal{E})$ est de dimension finie.*

Il existe alors un ouvert affine dense $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{E}|\mathfrak{Y}$ soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini.

Démonstration.

I) Supposons dans un premier temps que le cardinal de k n'est pas dénombrable.

Le théorème étant local, supposons $\mathfrak{X}$ affine, intègre et muni de coordonnées locales. Soit $m_0 \geqslant 0$ un entier tel qu'il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}^{(m_0)}$ et un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire de la forme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m_0)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ (voir [2, 3.6.2]). Pour tout entier $m \geqslant m_0$, on pose $\mathcal{E}^{(m)} := \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m_0)}$, $E^{(m)} := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}^{(m)})$ et $E := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$. Soit $\mathring{\mathcal{E}}^{(m_0)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent sans π-torsion tel que l'on ait un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire : $\mathring{\mathcal{E}}^{(m_0)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(m_0)}$ (voir [2, 3.4.5]). On note $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}$ le quotient de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X}}} \mathring{\mathcal{E}}^{(m_0)}$ par sa partie de π-torsion. D'après [2, 3.4.4], $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. On pose $\mathring{E}^{(m)} := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathring{\mathcal{E}}^{(m)})$. La preuve du théorème se décompose en six étapes :

1) Pour tout entier $m \geqslant m_0$, il existe un ouvert affine dense $\mathfrak{Y}_{(m)}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $T_m := X \setminus Y_{(m)}$ soit le support d'un diviseur de X et tel que $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}|\mathfrak{Y}_{(m)}$ soit isomorphe au complété p-adique d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}_{(m)}}$-module libre.

Le faisceau $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathring{\mathcal{E}}^{(m)}$ est un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module cohérent. De manière analogue à [5, VII.9.3], il existe alors un ouvert affine et dense $\mathcal{Y}_{(m)}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathring{\mathcal{E}}^{(m)}|Y_{(m)}$ soit un $\mathcal{O}_{Y_{(m)}}$-module libre. Il résulte alors de [10, 2.2.16] que $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \mathring{\mathcal{E}}^{(m)})$ est isomorphe au complété p-adique d'un $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m)}})$-module libre. Or, par passage à la limite projective de [2, 2.3.5.2], on obtient l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m)}} \widehat{\otimes}_{\Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})} \Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \mathring{\mathcal{E}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_{(m)}} \widehat{\otimes}_{\Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})} \Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \mathring{\mathcal{E}}^{(m)}).$$

Comme $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \mathring{\mathcal{E}}^{(m)})$ est un $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$-module de type fini et comme $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_{(m)}}$-module cohérent, via le théorème de type A de Berthelot [2, 3.3.9], on obtient alors les isomorphismes :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_{(m)}} \widehat{\otimes}_{\Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})} \Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \mathring{\mathcal{E}}^{(m)}) \xleftarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}_{(m)}} \otimes_{\Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})} \Gamma(\mathcal{Y}_{(m)}, \mathring{\mathcal{E}}^{(m)}) \\ \xrightarrow{\sim} \mathring{\mathcal{E}}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}$ est isomorphe au complété p-adique d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m)}}$-module libre.

2) Comme k n'est pas de cardinal dénombrable, il existe alors un point fermé x de X n'appartenant pas à $\cup_{m\in\mathbb{N}} T_m$. Quitte à rétrécir $\mathcal{Y}_{(m)}$, on peut supposer $\mathcal{Y}_{(m)} \supset \mathcal{Y}_{(m+1)}$. Notons $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ l'idéal définissant i_x et $I := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{I})$.

3) Il existe $m_1 \geqslant m_0$ tel que, pour tout $m \geqslant m_1$, le faisceau $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}$ soit un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m)}}$-module libre de type fini.

Par l'absurde, supposons que, pour tout entier $m \geqslant m_0$, $E^{(m)}/IE^{(m)}$ soient des $K(x)$-espaces vectoriels de dimension infinie. D'après la proposition [10, 2.2.6.(i)], $\mathring{E}^{(m)}/I\mathring{E}^{(m)} \xrightarrow{\sim} i_x^*(\mathring{\mathcal{E}}^{(m)})$. Notons $i_x^{(m)}$ l'immersion fermée $\mathrm{Spf}\, \mathcal{V}(x) \hookrightarrow \mathcal{Y}_{(m)}$ induite par i_x. Comme $i_x^*(\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} i_x^{(m)*}(\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)})$, $\mathring{E}^{(m)}/I\mathring{E}^{(m)}$ est donc, d'après l'étape 1, isomorphe au complété p-adique d'un $\mathcal{V}(x)$-module libre (voir [10, 2.2.6.(ii)]). On peut alors reprendre la preuve de [10, 2.2.10] à partir de « Par l'absurde, supposons que... » pour aboutir à une contradiction. On a ainsi vérifié qu'il existe un entier $m_1 \geqslant m_0$ tel que $E^{(m_1)}/IE^{(m_1)}$ soit un $K(x)$-espace vectoriel de dimension finie. Avec [10, 2.2.8], il en résulte alors qu'il en ait de même de $E^{(m)}/IE^{(m)}$ pour tout $m \geqslant m_1$. D'où le résultat.

4) Soit m un entier tel que $m \geqslant m_1$. Le morphisme canonique de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m+1)},\mathbb{Q}}$-modules libres de type fini : $\mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m+1)} \to \mathcal{E}^{(m+1)}|\mathcal{Y}_{(m+1)}$ est surjectif.

En effet, comme l'assertion est locale, il suffit de l'établir pour un ouvert affine $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{Y}_{(m+1)}$. D'après [6, 3.7.3.1], en munissant $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(m)})$ et $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(m+1)})$ de la topologie induite par leur structure de $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini, l'image de $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(m)})$ dans $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(m+1)})$ est fermée. Or, d'après [10, 2.2.9], l'image de $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(m)})$ dans $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(m+1)})$ est dense, lorsque $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(m+1)})$ est muni de la topologie induite par sa structure de $\Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini. Mais, grâce à [2, 4.1.2], ces deux topologies sur $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(m+1)})$ coïncident. On en déduit que le morphisme canonique $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(m)}) \to \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(m+1)})$ est surjectif.

5) Si E/IE est un $K(x)$-espace vectoriel de dimension finie égale à r, alors il existe un entier $m_2 \geqslant m_1$ tel que pour tout $m \geqslant m_2$, le morphisme canonique $\mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m+1)} \to \mathcal{E}^{(m+1)}|\mathcal{Y}_{(m+1)}$ soit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m+1)},\mathbb{Q}}$-modules libres de rang r.

Il résulte alors de l'étape 4) que le morphisme canonique $E^{(m)}/IE^{(m)} \to E^{(m+1)}/IE^{(m+1)}$ est surjectif. Comme $E/IE \xrightarrow{\sim} \varinjlim_m E^{(m)}/IE^{(m)}$ (e.g. voir la fin de la preuve de [10, 2.2.10]), il existe un entier $m_2 \geqslant m_1$ tel que pour tout $m \geqslant m_2$, la dimension du $K(x)$-espace vectoriel $E^{(m)}/IE^{(m)}$ est r. Or, on remarque que le rang de $\mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}$ est la dimension du $K(x)$-espace vectoriel $E^{(m)}/IE^{(m)}$. Pour tout $m \geqslant m_2$, le rang de $\mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}$ vaut donc r. Pour $m \geqslant m_2$, le morphisme canonique $\mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m+1)} \to \mathcal{E}^{(m+1)}|\mathcal{Y}_{(m+1)}$ est donc un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m+1)},\mathbb{Q}}$-modules libres de rang r. D'après l'étape 4), ce morphisme est surjectif. Comme pour tout ouvert affine $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{Y}_{(m+1)}$ l'anneau $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est intègre, ce morphisme devient injectif après extension par l'homomorphisme de $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ dans son corps des fractions. On obtient donc son injectivité.

6) Le morphisme canonique $\mathcal{E}^{(m_2)}|\mathcal{Y}_{(m_2)} \to \mathcal{E}|\mathcal{Y}_{(m_2)}$ est un isomorphisme. En particulier, $\mathcal{E}|\mathcal{Y}_{(m_2)}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m_2)},\mathbb{Q}}$-module libre de rang r.

Soit $m \geqslant m_2$ en entier. D'après l'étape 5, le morphisme canonique $\mathcal{E}^{(m_2)}|\mathcal{Y}_{(m)} \to \mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m)},\mathbb{Q}}$-modules libres de rang r. Il en dérive que, pour pour tout ouvert affine non vide $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{Y}_{(m)}$, $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{(m_2)})$ est muni d'une structure de $\Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module. Avec 3.3, il en résulte que $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m_2)})$ est muni d'une (unique) structure de $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module prolongeant sa structure de $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m_2)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. Cela implique que le morphisme $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m_2)}) \to \Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m)})$ admet une rétractation canonique. Celui-ci est donc injectif. Vérifions à présent sa surjectivité : le morphisme canonique $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m_2)}) \to \Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m)})$, où, pour $m' = m$ et $m' = m_2$, $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m')})$ est muni de la topologie induite par sa structure de $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini, est continue. Or, il résulte de [2, 4.1.2] que la topologie de $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m_2)})$ induite par sa structure de $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m_2)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini et celle induite par sa structure de $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini sont identiques. Comme $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m_2)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est dense dans $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, il en résulte que le morphisme canonique $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m_2)}) \to \Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m)})$ est $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-linéaire. Son image est donc fermée. Comme elle est aussi dense, ce morphisme est surjectif.

Le morphisme canonique $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m_2)}) \to \Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m)})$ est donc un isomorphisme. En passant à la limite inductive sur m, il en découle l'isomorphisme canonique $\Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E}^{(m_2)}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{Y}_{(m_2)}, \mathcal{E})$. D'après [10, 2.2.13], on en déduit que $\mathcal{E}|\mathcal{Y}_{(m_2)}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m_2)},\mathbb{Q}}$-cohérent, *i.e.*, est un isocristal convergent sur $\mathcal{Y}_{(m_2)}$. Dans ce cas, on sait alors que le morphisme canonique $\mathcal{E}^{(m_2)}|\mathcal{Y}_{(m_2)} \to \mathcal{E}|\mathcal{Y}_{(m_2)}$ est un isomorphisme (voir la preuve de 3.8 ou [1, 3.1.4.1 et 3.1.4.2]).

II) On se ramène au cas où le cardinal de k est quelconque grâce au lemme 3.6 ci-dessous. □

Changement de base 3.5. — Soient $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ un morphisme d'anneaux de valuation discrète complets d'inégales caractéristiques $(0, p)$, $\mathfrak{X}' := \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spf}(\mathcal{V})} \mathrm{Spf}(\mathcal{V}')$, $f \colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ la projection canonique.

Par passage à la limite projective, on dispose d'après [2, 2.2.2] et [3, 3.2.1] des homomorphismes canoniques d'anneaux

$$f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}/\mathrm{Spf}(\mathcal{V})} \longrightarrow f^{*}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}/\mathrm{Spf}(\mathcal{V})} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'/\mathrm{Spf}(\mathcal{V}')} \tag{3.5.1}$$

dont le dernier est un isomorphisme. Il en résulte que le foncteur image inverse f^* se factorise en un foncteur de la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}/\mathrm{Spf}(\mathcal{V})}$-modules cohérents dans celle des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'/\mathrm{Spf}(\mathcal{V}')}$-modules cohérents. Par tensorisation par $\mathbb{Q}$, on obtient alors un foncteur de la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}/\mathrm{Spf}(\mathcal{V}),\mathbb{Q}}$-modules cohérents dans celle des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'/\mathrm{Spf}(\mathcal{V}'),\mathbb{Q}}$-modules cohérents. Pour préciser le niveau m, on le notera $f^{(m)*}$. Ce foncteur $f^{(m)*}$ est le foncteur changement de base (via $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$) de niveau m.

Comme les homomorphismes (3.5.1) commutent aux changements de niveaux, on obtient par passage à la limite inductive sur le niveau les homomorphismes d'anneaux

$$f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}/\mathrm{Spf}(\mathcal{V}),\mathbb{Q}} \longrightarrow f^{*}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}/\mathrm{Spf}(\mathcal{V}),\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'/\mathrm{Spf}(\mathcal{V}'),\mathbb{Q}}.$$

Le foncteur f^* se factorise donc aussi en un foncteur dit de changement de base (via $\mathcal{V} \to \mathcal{V}'$) de la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}/\operatorname{Spf}(\mathcal{V}),\mathbb{Q}}$-modules cohérents dans celle des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'/\operatorname{Spf}(\mathcal{V}'),\mathbb{Q}}$-modules cohérents. De plus, via cette compatibilité au changement de niveaux, on vérifie que si $\mathcal{E}^{(m)}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}/\operatorname{Spf}(\mathcal{V}),\mathbb{Q}}$-module cohérent, on dispose alors de l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'/\operatorname{Spf}(\mathcal{V}'),\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'/\operatorname{Spf}(\mathcal{V}'),\mathbb{Q}}} f^{(m)*}(\mathcal{E}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}/\operatorname{Spf}(\mathcal{V}),\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}/\operatorname{Spf}(\mathcal{V}),\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m)}). \tag{3.5.2}$$

Lemme 3.6. — *Avec les notations de 3.5, soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}/\operatorname{Spf}(\mathcal{V}),\mathbb{Q}}$-module cohérent et $\mathcal{E}' := f^*(\mathcal{E})$ le $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'/\operatorname{Spf}(\mathcal{V}'),\mathbb{Q}}$-module cohérent déduit par changement de base. Les deux assertions sont alors équivalentes :*

(1) *Il existe un ouvert dense $\mathcal{Y}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{E}|\mathcal{Y}$ soit un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-module libre de type fini.*

(2) *Il existe un ouvert dense $\mathcal{Y}'$ de $\mathfrak{X}'$ tel que $\mathcal{E}'|\mathcal{Y}'$ soit un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}',\mathbb{Q}}$-module libre de type fini.*

Démonstration. — L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est immédiate. Réciproquement, supposons qu'il existe un ouvert dense $\mathcal{Y}'$ de $\mathfrak{X}'$ tel que $\mathcal{E}'|\mathcal{Y}'$ soit un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}',\mathbb{Q}}$-module libre de rang fini r.

D'après l'étape 1 de la preuve de 3.4 et avec ses notations, pour tout $m \geqslant m_0$, il existe un ouvert affine dense $\mathcal{Y}_{(m)}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}$ soit isomorphe au complété p-adique d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m)}}$-module libre. Quitte à rétrécir $\mathcal{Y}_{(m)}$, on peut d'ailleurs supposer $\mathcal{Y}_{(m)} \supset \mathcal{Y}_{(m+1)}$. Le rang (un entier s'il est fini, sinon on le définit égal à $+\infty$) de $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m)}}$-module est alors le même que celui de $\mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m)},\mathbb{Q}}$-module. Notons $g\colon f^{-1}(\mathcal{Y}_{(m)}) \to \mathcal{Y}_{(m)}$ le morphisme induit par f, $g^{(m)*}$ le foncteur de changement de base de niveaux m, $\mathcal{Y}'_{(m)} := \mathcal{Y}' \cap f^{-1}(\mathcal{Y}_{(m)})$ et $h^{(m)*} := |\mathcal{Y}'_{(m)} \circ g^{(m)*}$.

Comme le foncteur $h^{(m)*}$ préserve la cohérence et avec (3.5.2), on obtient l'isomorphisme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}'_{(m)},\mathbb{Q}}$-modules cohérents :

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}'_{(m)},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}'_{(m)},\mathbb{Q}}} (h^{(m)*}(\mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'|\mathcal{Y}'_{(m)}.$$

Par [1, 3.1], comme $\mathcal{E}'|\mathcal{Y}'_{(m)}$ est en outre $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}'_{(m)},\mathbb{Q}}$-cohérent, il en résulte $h^{(m)*}(\mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'|\mathcal{Y}'_{(m)}$. Comme le rang de $h^{(m)*}(\mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)})$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}'_{(m)},\mathbb{Q}}$-module est le même que celui de $\mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m)},\mathbb{Q}}$-module, il en résulte que $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m)}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m)}}$-module de rang r

(*i.e.*, on a établit l'étape 3 de 3.4 pour $m_1 = m_0$). Or, en reprenant la preuve de l'étape 4 de 3.4, on vérifie alors que le morphisme canonique $\mathcal{E}^{(m)}|\mathcal{Y}_{(m+1)} \to \mathcal{E}^{(m+1)}|\mathcal{Y}_{(m+1)}$ est surjectif. Comme c'est un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m+1)},\mathbb{Q}}$-modules libres de rang r, celui-ci est un isomorphisme (*i.e.*, on a établit l'étape 5 de 3.4 pour $m_2 = m_0$). En procédant comme pour l'étape 6 de la preuve de 3.4, on vérifie alors que $\mathcal{E}|\mathcal{Y}_{(m_0)}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_{(m_0)},\mathbb{Q}}$-module libre de rang r. □

THÉORÈME 3.7. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent tel que, pour tout point fermé x de X, $i_x^*(\mathcal{E})$ soit un K-espace vectoriel de dimension finie. Il existe alors un diviseur $T' \supset T$ de X tel que $({}^{\dagger}T')(\mathcal{E})$ soit un isocristal surconvergent le long de T'.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt du théorème 3.4 et du théorème de Berthelot énoncé dans [10, 2.2.12]. □

Dans notre lancée, terminons par la proposition suivante qui donne une version sans Frobenius de [10, 2.2.14].

PROPOSITION 3.8. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Soit $m_0 \geqslant 0$ un entier tel qu'il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}^{(m_0)}$ induisant $\mathcal{E}$ par extension* ([2, 3.6.2])*. Pour tout entier $m \geqslant m_0$, notons $\mathcal{E}^{(m)} := \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m_0)}$.*

Le faisceau $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent si et seulement s'il existe une suite strictement croissante $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathcal{E}^{(m_n)}$ soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent.

Démonstration. — L'assertion est locale et l'on peut supposer que $\mathfrak{X}$ est affine. Si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent alors $\mathcal{E}$ est associé à un isocristal surconvergent ([2, 4.1.4]). D'après [1, 3.1.4.1 et 3.1.4.2], on obtient alors que $\mathcal{E}^{(m_0)}$ est isomorphe à $\mathcal{E}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite strictement croissante $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathcal{E}^{(m_n)}$ soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent. Le morphisme canonique $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}^{(m_n)}) \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}^{(m_{n+1})})$ est alors surjectif (comme pour l'étape 4 de la preuve de 3.4). En passant à la limite sur n, il en résulte la surjectivité de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}^{(m_n)}) \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$. D'après [10, 2.2.13], $\mathcal{E}$ est donc $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent. □

3.9. — Avec les notations du théorème 3.8, le fait que $\mathcal{E}^{(m_0)}$ soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent ne devrait pas *a priori* impliquer que $\mathcal{E}$ soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent.

4. Critère surcohérent d'holonomie

Grâce au théorème 3.7 qui étend la version précédente au cas sans structure de Frobenius, la section [12, 2] se généralise. En particulier :

LEMME 4.1. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent. Alors $\mathcal{H}^0(\mathbb{D}_T(\mathcal{E}))$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-holonome. De plus, $\mathcal{H}^0\mathbb{D}_T \circ \mathcal{H}^0\mathbb{D}_T(\mathcal{E})$ est le plus grand sous-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module de $\mathcal{E}$ qui soit $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-holonome.*

Démonstration. — La preuve est analogue à [12, 2.4] : grâce à [2, 4.3.12], on se ramène au cas où le diviseur T est vide. Avec le théorème de Bernstein (2.5.1), le théorème 2.6 et la proposition 2.3, les arguments de la preuve de [12, 2.4] sont donc encore valable sans structure de Frobenius. □

THÉORÈME 4.2 (Critère surcohérent d'holonomie). — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent. Si les espaces de cohomologie de $\mathbb{D}_T(\mathcal{E})$ sont à fibres extraordinaires finies (e.g. si $\mathbb{D}_T(\mathcal{E})$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent), alors $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-holonome.*

Démonstration. — Grâce à [2, 4.3.12], on se ramène au cas où le diviseur T est vide. Il suffit alors de reprendre la preuve de [12, 2.5] en remplaçant l'utilisation de [10, 2.2.17] par sa version sans structure de Frobenius 3.7. □

COROLLAIRE 4.3.

(1) *Un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module surholonome est holonome.*

(2) *Le foncteur $\mathbb{D}_T$ induit une autoéquivalence de la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules surholonomes qui sont en outre munis d'une structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents. En particulier, le foncteur $\mathbb{D}$ induit une autoéquivalence de la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules surholonomes.*

Démonstration. — Cela résulte du critère surcohérent d'holonomie 4.2. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BERTHELOT, « Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules », in *p-adic analysis (Trento, 1989)*, Lecture Notes in Math., vol. 1454, Springer, Berlin, 1990, p. 80-124.

[2] ———, « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **29** (1996), n° 2, p. 185-272.

[3] ———, « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2000), n° 81, p. vi+136.

[4] ———, « Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules », *Astérisque* (2002), n° 279, p. 1-80, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II.

[5] A. BOREL, P.-P. GRIVEL, B. KAUP, A. HAEFLIGER, B. MALGRANGE & F. EHLERS, *Algebraic D-modules*, Perspectives in Mathematics, vol. 2, Academic Press Inc., Boston, MA, 1987, xii+355 pages.

[6] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert, *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984, A systematic approach to rigid analytic geometry, xii+436 pages.

[7] D. Caro, « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), n° 6, p. 1943-1996.

[8] ———, « Comparaison des foncteurs duaux des isocristaux surconvergents », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **114** (2005), p. 131-211.

[9] ———, « Dévissages des F-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques en F-isocristaux surconvergents », *Invent. Math.* **166** (2006), n° 2, p. 397-456.

[10] ———, « Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes », *Compos. Math.* **142** (2006), n° 1, p. 169-206.

[11] ———, « F-isocristaux surconvergents et surcohérence différentielle », *Invent. Math.* **170** (2007), n° 3, p. 507-539.

[12] ———, « $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **42** (2009), n° 1, p. 141-192.

[13] ———, « Une caractérisation de la surcohérence », *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **16** (2009), n° 1, p. 1-21.

[14] C. Noot-Huyghe, « Finitude de la dimension homologique d'algèbres d'opérateurs différentiels faiblement complètes et à coefficients surconvergents », *J. Algebra* **307** (2007), n° 2, p. 499-540.

[15] A. Virrion, « Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques », *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), n° 1, p. 1-68.

Manuscrit reçu le 21 décembre 2009,
accepté le 21 septembre 2010.

Daniel CARO
Université de Caen
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Campus 2
14032 Caen Cedex (France)
daniel.caro@math.unicaen.fr