Annales de l’institut Fourier

Pierre Samuel

Sur les variétés algébroïdes

Annales de l’institut Fourier, tome 2 (1950), p. 147-160
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__147_0>

SUR LES VARIÉTÉS ALGÉBROÏDES

par Pierre SAMUEL (Clermont-Ferrand).

Une variété algébroïde est, par définition, associée à un idéal premier d'un anneau de séries formelles sur un corps ; pour les définitions détaillées des diverses notions utilisées ici, nous renvoyons au mémoire de C. Chevalley [2]. Les problèmes traités ici sont du type suivant : montrer que, dans certaines conditions, une variété algébroïde est algébrique, c'est-à-dire que son idéal est engendré par des polynomes. Un important problème de ce genre a été récemment résolu par W. L. Chow [3], qui a montré que toute variété analytique compacte de l'espace projectif complexe est une variété algébrique. Nous ne traiterons pas ici de questions globales de ce genre, et nous nous bornerons à des problèmes locaux, ce qui nous permettra d'opérer de façon purement algébrique sur un corps de caractéristique quelconque. Pour des raisons de commodité, nous nous placerons sur un « domaine universel » (cf. [8] algébriquement clos et de degré de transcendance infini *non dénombrable* sur son corps premier.

§ 1. — Variétés algébroïdes à sections algébriques.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit* V *une variété algébroïde de dimension* $d \geqslant 2$ *d'un espace* E^n *de dimension* n *; si, pour tout hyperplan* H *passant par l'origine, l'intersection de* V *et* H *est algébrique, alors* V *elle-même est variété algébrique.*

Nous nous ramènerons d'abord au cas où V est une hypersurface, c'est-à-dire où $d = n - 1$, en remarquant que V est entièrement déterminée par ses projections sur les sous-espaces vectoriels de dimension $d+1$ de E^n, et que, si toute section hyperplane de V est algébrique, il en est de même de toute section hyperplane d'une projection de V. Nous supposerons donc que V est une hypersurface, c'est-à-dire que son idéal est engendré par *une* série formelle $F(X_1, \ldots, X_n)$.

Lemme. — *Soient* V *une hypersurface algébroïde, et* $\mathfrak{F}$ *un faisceau d'hyperplans dont la base n'appartient pas à* V ; *si, pour tout* H *l'intersection de* V *et* H *est algébrique,* V *est une nappe d'une variété algébrique.*

Soit, par exemple, $X_1 - tX_2 = 0$ l'équation générale du faisceau $\mathfrak{F}$. Prenons pour t un élément du domaine universel qui soit transcendant sur un corps de définition K de l'idéal (F) de V ; ceci est possible puisque le domaine universel Ω est de degré de transcendance non dénombrable sur son corps premier ; Alors, par hypothèse, il existe une série formelle inversible $G(X_2, \ldots X_n)$, à coefficients dans Ω, et telle que $F(tX_2, X_2, \ldots, X_n)G(X_2, \ldots X_n)$ soit un polynome en $X_2, \ldots, X_n$, de degré N par exemple. Comme les conditions que doivent remplir les coefficients de G pour que $F(tX_2, X_2, \ldots, X_n)G$ soit un polynome de degré $\leqslant N$ sont *linéaires,* il existe une série formelle inversible G, à coefficients dans $K(t)$ et répondant à la question. Alors, T étant une indéterminée, on a l'identité

$$F(TX_2, X_2 \ldots, X_n)G(X_2, \ldots, X_n) = P(X_2, \ldots, X_n)$$

où les coefficients de la série formelle G et du polynome P sont des fractions rationnelles en T ; par multiplication membre à membre, on peut supposer que les coefficients de P sont des polynomes en T.

Développons alors chacun des coefficients de G en série formelle (à exposants éventuellement négatifs) par rapport à T. Nous allons montrer par l'absurde que les ordres de celles-ci sont *bornés inférieurement.* Pour cela posons $F = f_d + f_{d+1} + \cdots$ (où f_j est une forme de degré j en $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients dans K), et

$$G = g_0 + g_1 + \cdots$$

(où g_i est une forme de degré i en $X_2, \ldots, X_n$ à coefficients dans K(T)). Soit q un entier tel que $q + d > N$, et tel qu'un monôme de degré q ait, dans G, un coefficient d'ordre $-m$ strictement inférieur aux ordres de ceux de tous les monômes d'ordre $\leqslant q$ de G, et inférieur à ceux des monômes de degré q. Nous supposerons, en changeant les axes s'il le faut, que f_d n'est pas multiple de X_1. Du fait que FG est un polynome de degré N, on déduit que l'on a

$$f_d(TX_2, X_2, \ldots, X_n)g_q(X_2, \ldots, X_n) + f_{d+1}g_{q-1} + \cdots + f_{d+q}g_0 = 0.$$

Par multiplication par T^m et réduction des coefficients mod. T on obtient f_d $(0, X_2, \ldots, X_n)\bar{g}_q(X_2, \ldots, X_n) = 0$, où $\bar{g}_q$ est la forme obtenue par réduction mod. T des coefficients de $T^m g_q$. Comme, par hypothèses, on a $f_d(0, X_2, \ldots, X_n) \neq 0$ et $\bar{g}_q \neq 0$, on obtient une contradiction.

Remarque. — Si le faisceau $\mathfrak{F}$ ne contient aucun hyperplan qui fasse partie du « cône des tangentes » $f_d(X_1, \ldots, X_n) = 0$ de V (et si on prend K algébriquement clos) le même raisonnement montre que les coefficients de G ont des ordres bornés inférieurement pour chaque valuation du corps de fractions rationnelles K(T).

Par multiplication de G par une puissance convenable de T, on a alors $F(TX_2, X_2 \ldots, X_n)G_1(X_2, \ldots, X_n, T) = P_1(X_2, \ldots, X_n, T)$ où G_1 (resp. P_1) est une série formelle (resp. un polynome) en $X_2, \ldots, X_n$, T à coefficients dans K. Considérons les développements

$$F(X_1, \ldots, X_n) = u_0(X_2, \ldots, X_n) + X_1 u_1(X_2 \ldots, X_n) + \cdots$$
$$G(X_2, \ldots, X_n) = v_0(X_2 \ldots, X_n) + Tv_1(X_2, \ldots, X_n) + \cdots$$

Soit m le degré de P_1 par rapport à T. On peut supposer, par multiplication de P_1 et de G_1 par une puissance convenable de X_2, que v_i est multiple de X_2^i pour $0 \leqslant i \leqslant m$. Nous allons montrer par récurrence qu'il en est est alors ainsi pour tout i. En écrivant que, pour $i > m$, le coefficient de T^i dans P_1 est nul, on a

$$v_0 u_i X_2^i + v_1 u_{i-1} X_2^{i-1} + \cdots + v_{i-1} u_1 X_2 + v_i u_0 = 0.$$

On déduit de ceci que $v_i u_0$ est multiple de X_2^i, donc que v_i est multiple de X_2^i, si $u_0 = F(0, X_2, \ldots, X_n)$ n'est pas multiple de X_2. Or cette dernière condition signifie que F n'est pas dans l'idéal engendré par X_1 et X_2, c'est-à-dire que V ne contient pas la base du faisceau $\mathfrak{F}$, ce qu'on a supposé. On peut donc écrire

$$G_1 = v_0(X_2, \ldots, X_n) + TX_2 w_1(X_2, \ldots, X_n) + \cdots$$
$$+ T^i X_2^i w_i(X_2, \ldots, X_n) + \cdots,$$

ce qui, en substituant X_1 à TX_2, montre qu'il existe une série formelle $H(X_1, \ldots, X_n)$ à coefficients dans K, et telle que

$$F(X_1, \ldots, X_n)H(X_1 \ldots, X_n) = P_1(X_2, \ldots, X_n, X_1/X_2).$$

D'après l'unique factorisation dans les anneaux de séries formelles, le dénominateur du second membre se simplifie, et le produit FH est un polynome en $X_1, \ldots, X_n$. Ceci démontre le lemme.

Remarques. — 1. La condition que V ne contienne pas la base du faisceau $\mathfrak{F}$ est essentielle, comme le montre l'exemple d'une courbe plane.

2. Il peut arriver que, dans les conditions du lemme, V soit effectivement une *nappe* d'une variété algébrique, et non une variété algébrique entière. Considérons, par exemple, le conoïde de Plücker $C(X_1(X_2^2 + X_3^2) - X_2X_3 = 0)$; prenons pour V la nappe de C en O qui contient $X_1 = X_3 = 0$, et pour $\mathfrak{F}$ le faisceau $X_1 - tX_2 = 0$ qui a pour base la génératrice D de C contenue dans l'autre nappe; pour tout plan $H \in \mathfrak{F}$, $H \cap C$ se compose de D et d'une conique passant par o dont l'élément local en o est $V \cap C$.

3. Par hypothèse $G(X_2, \ldots X_n) = G_1(X_2, \ldots, X_n, T)$, considérée comme série formelle en $X_2, \ldots, X_n$, a un terme constant non nul $r_o(T)$. Nous avons vu d'autre part que, dans $X_2^j G_1(X_2 ; . X_n, T)$ tout terme en T^i a X_2^i en facteurs, et que l'on peut écrire $G_1(X_2, \ldots, X_n, T)X_2^j = H(TX_2, X_2, \ldots, X_n)$; ainsi le degré d'un monôme est le même dans H et dans X_2G_1 considérée comme série formelle en $X_2, \ldots, X_n$. Par conséquent la forme de plus bas degré de H est $X_2^j r(T)$, où r est une polynome de degré $\leqslant j$, c'est-à-dire *une forme de degré j en les seules variables* X_1 *et* X_2.

Nous allons maintenant déduire le th. 1 du lemme et de la remarque 3). Soit (F) l'idéal de l'hypersurface algébroïde V. Puisque V est de dimension $\geqslant 2$, l'espace ambiant est de dimension $n \geqslant 3$, et il existe des faisceaux linéaires dont la base n'est pas sur V. Le lemme montre alors qu'il existe des polynomes non nuls dans l'idéal de séries formelles (F), c'est-à-dire que $(F) \cap K[X_1, \ldots, X_n] \neq (0)$. Or l'idéal $(F) \cap K[X_1, \ldots X_n]$ est premier, et est de dimension supérieure à celle $n - 1$ de (F)([4]). Il est donc de dimension $n - 1$, et c'est un idéal premier minimal, donc un idéal principal (P), de $K[X_1, \ldots, X_n]$. Ainsi toutes les séries formelles H telles que HF soit un polynome sont multiples d'une même série formelle H_0. Avec un choix convenable des axes, la remarque 3) montre qu'il existe des séries formelles H_1, H_2, H_3 telles que H_iF soit un polynome pour $i = 1, 2, 3$, et que les formes de plus bas degrés de H_1 (resp. H_2, H_3) ne dépendent que de X_2 et X_3 (resp. X_3 et X_1, X_1 et X_2). Comme celles-ci sont multiples de la forme initiale de H_0, cette dernière est nécessairement une constante, ce qui veut dire que F est associée à un polynome. CQFD.

Remarques. — Nous n'avons pas utilisé le fait que *toutes* les sections hyperplanes de V sont algébriques, mais seulement celles de trois faisceaux linéaires convenablement choisis. On peut même réduire ce nombre à deux pour $n \geqslant 4$, en prenant les faisceaux $X_1 - tX_2 = 0$ et $X_3 - tX_4 = 0$. En général suffisent des faisceaux linéaires dont les bases n'appartiennent pas à V et engendrent tout l'espace.

Pour terminer ce §, nous allons étudier le problème suivant: *étant donnée une hypersurface algébroïde* $(F(X_1 \ldots, X_n) = 0)$ *comment se répartissent les hyperplans* H *passant par* o *et dont l'intersection avec* V *est algébrique?* Nous pouvons, sans apporter de restriction essentielle, supposer que l'équation de H est de la forme

$$X_1 = a_2X_2 + \cdots + a_nX_n.$$

L'hypothèse signifie que la série formelle

$$\overline{F}(X_2, \ldots, X_n) = F(a_2X_2 + \cdots + a_nX_n, X_2, \ldots, X_n)$$

est associée à un polynome, c'est-à-dire qu'il existe une série formelle inversible $G(X_2, \ldots, X_n)$ telle que $\overline{F}G$ soit un polynome. Soit f_i (resp. g_i) la forme de degré i de F (resp. G); soit

$$\overline{f}_i(X_2, \ldots, X_n) = f_i(a_2X_2 + \cdots + a_nX_n, X_2, \ldots, X_n)$$

celle de $\overline{F}$. Pour que $\overline{F}G$ soit un polynome de degré $\leqslant N$, il faut et il suffit que l'on ait $g_0\overline{f}_n + g_1\overline{f}_{n-1} + \cdots + g_n\overline{f}_0 = 0$ pour tout $n > N$. Pour $N < n \leqslant N'$ les équations obtenues constituent un système fini $S(N, N')$ d'équations linéaires en les coefficients de $g_0, \ldots, g_n$; les coefficients de celles-ci appartiennent à $K[a_2, \ldots, a_n]$, K étant un corps de définition de F. Pour que $S(N, N')$ admette une solution telle que $g_0 = 1$, il faut et il suffit que certains déterminants soient nuls, c'est-à-dire que (a) soit un zéro d'un idéal $\mathfrak{a}(N, N')$ de $K[A_2, \ldots, A_n]$. Posons $\mathfrak{a}(N) = \bigcup_{N' > N} \mathfrak{a}(N, N')$ (pour N fixe, les idéaux $\mathfrak{a}(N, N')$ forment d'ailleurs une suite croissante). Pour qu'il existe une série formelle G telle que $\overline{F}G$ soit un polynome, il *faut* évidemment que (a) soit un zéro de *l'un* des idéaux $\mathfrak{a}(N)$ (ceux-ci forment évidemment une suite décroissante).

Montrons maintenant que cette condition nécessaire est aussi suffisante. Supposons que (a) soit zéro de l'idéal $\mathfrak{a}(N)$. Pour tout $N' > N$ soit $E(N')$ l'ensemble des polynomes $g_0 + g_1 \cdots + g_{N'}$ tels que $g_0 = 1$ et que $g_0\overline{f}_n + g_1\overline{f}_{n-1} + \cdots + g_n\overline{f}_0 = 0$ pour $N < n \leqslant N'$; l'ensemble $E(N')$ est évidemment une variété linéaire affine, non vide par hypothèse. Pour tout n nous noterons p_n le projecteur de $\Omega[X_2, \ldots, X_n]$ sur l'espace vectoriel des polynomes de degré $\leqslant n$: à un polynome, p_n fait correspondre la somme de ses termes de degré $\leqslant n$. Il est clair que, pour $N'' \geqslant N'$, on a $p_N(E(N'')) \subset E(N')$, et que $p_{N'}(E(N''))$ n'est pas vide. Lorsque, N' restant fixe, N'' croît, il est clair que les $p_N(E(N''))$ forment une suite décroissante de variétés linéaires affines non vides contenues dans $E(N')$. Comme $E(N')$ est de dimension finie, les $p_{N'}(E(N''))$ ont une intersection non vide $B(N')$. Comme on a évidemment $B(N') = p_{N'}(B(N''))$ pour $N'' \geqslant N'$ il existe une série formelle G telle que la somme des termes de degré $\leqslant N'$ de G soit élément de $B(N')$, ceci pour tout $N' > N$. On a alors $g_0\bar{f}_n + \cdots + g_n\bar{f}_0 = 0$ pour tout $n > N$, et $\bar{F}G$ est un polynome de degré $\leqslant N$. D'où le résultat suivant :

Proposition. 1. — *Étant donnée une hypersurface algébroïde* V, *l'ensemble* E *des hyperplans* H *tels que* $V \cap H$ *soit algébrique est réunion d'une famille finie ou dénombrable d'ensemble algébriques, tous normalement algébriques sur un corps de définition de* V.

En particulier, si $V \cap H$ est algébrique, il en est de même de $V \cap H'$ pour toute spécialisation H' de H sur un corps de définition de V.

Remarque. — Il peut arriver que l'ensemble E ne soit *pas* un ensemble algébrique. Par exemple si V a pour équation $\operatorname{Arcsin} z = (y/x) \operatorname{Arcsin} x$, les plans de la forme $y = ax$ qui ont avec V une intersection algébrique sont ceux pour lesquels $a = y/x$ est un nombre rationnel.

§ 2. Application au théorème de W. L. Chow.

Nous allons maintenant voir que les résultats précédents permettent de simplifier quelques détails de la démonstration du théorème de W. L. Chow : « toute variété analytique compacte V de l'espace projectif complexe est algébrique » (l'idée générale en restant inchangée) ([3]). Par applications répétées du th. 1 (§ 1), il nous suffira de démontrer ce résultat dans le cas où V est une courbe puisque toute section hyperplane d'une variété analytique compacte est une variété analytique compacte. D'autre part par projections nous sommes ramenés au cas où V est une *courbe plane*.

En appliquant à ce cas le th. III (n° 3) de W. L. Chow ([3]), nous voyons qu'il ne nous reste plus à démontrer que le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Étant donnée une courbe algébroïde plane* V *qui ne soit pas branche d'une courbe algébrique, il existe, pour tout entier* N, *un cycle algébrique* C_n *de degré* n *tel que l'origine soit point d'intersection propre de multiplicité* $\geqslant nN$ *de* V *et de* C_n.

Soit en effet $F(X, Y) = 0$ une équation de V. Les monômes non constants m_j de degré $\leqslant n$ en X et Y sont au nombre de $n(n+3)/2$, et sont, dans $\Omega[[X, Y]]$, linéairement indépendants mod. F, puisque V n'est pas branche d'une courbe algébrique. Considérons l'anneau local $\mathfrak{o} = \Omega[[X, Y]]/(F)$ de O sur V. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal de $\mathfrak{o}$ de longueur $n(n+1)/2$; ceci veut dire que $\mathfrak{o}/\mathfrak{q}$ est de dimension linéaire $n(n+1)/2$ sur Ω, puisque Ω est le corps quotient de $\mathfrak{o}$ par son idéal maximal. Il existe alors une combinaison linéaire P des monômes m_j, à coefficients non tous nuls, et telle que la classe $\overline{P}$ de P. mod. F soit dans $\mathfrak{q}$; celle-ci est non nulle par hypothèse. Alors la longueur s de l'idéal $(\overline{P})$ de $\mathfrak{o}$ est supérieure à celle, $n(n+1)/2$ de $\mathfrak{q}$. Or ([5], chap. II, § 2, th. 8 et 9) cette longueur s est la *multiplicité* de o considéré comme intersection de V et du cycle algébrique de degré $\leqslant n$ qui a pour équation $P(X, Y) = 0$. En prenant n tel que $(n+1)/2 \geqslant N$, le th 2 est démontré.

Remarque. — Notre th. 2 est, sans la restriction que le corps de base soit celui des nombres complexes, un cas particulier du th. IV, n° 4 de W. L. Chow ([3]). Nous allons déduire de là le cas général.

Prenons d'abord pour V une courbe qui ne soit pas branche d'une courbe algébrique, et située dans un espace de dimension quelconque. Il existe alors une projection plane V′ de V qui n'est pas branche d'une courbe algébrique. Pour tout N il existe alors un cycle algébrique plan C′ de degré n tel que $i(o\,;\, V'.C') \geqslant nN$. Soit C l'hypercylindre projetant C′. En vertu de la *formule de projection* ([2], II, th. 5) on a $i(o\,;\, V.C) = i(o\,;\, V'.C').[C' : C]$. Comme C est de degré n, ceci démontre le th. 4 de W. L. Chow dans le cas d'une courbe.

Soit enfin V une variété de dimension d de E^n, qui ne soit pas nappe d'une variété algébrique. Il existe alors, par applications répétées du th. 1 (§ 1) une variété linéaire L de dimension $n-d+1$ telle que $V' = V.L$ soit un cycle de dimension 1 qui ne fait pas partie d'un cycle algébrique ; on peut, par exemple, prendre L générique sur un corps de définition de V. Pour un entier N donné, soit C′ une hypersurface algébrique de degré m telle que $i(O\,;\, C'.V') \geqslant mN$. D'après la *formule d'associativité* des intersections ([2], II. th. 6) on a $C'.V' = C'.(L.V) = (C'.L).V$. On prend alors pour C le cycle algébrique $C'.L$, qui est de dimension n-d et de degré m, et on a $i(O ; C.V) \geqslant m$N. CQFD.

On remarquera que la dernière partie de ce raisonnement correspond au lemme 4, n° 4 de [3].

§ 3. — Un théorème sur les intersections complètes.

Dans la théorie des composantes singulières d'intersection ([5], chap. VI ; [6] ; [7]) nous nous sommes, par nécessité, bornés aux cycles X d'une variété algébrique ambiante A qui, au voisinage d'une sous-variété N de A, sont intersections complètes (ou sous multiples d'intersections complètes) de A et d'un cycle algébrique X_1 de l'espace affine (ceci veut dire que $X - A.X_1$ se compose de variétés ne contenant pas N ; nous écrirons ceci "$X \equiv A.X_1$ en N"). Étant donné ([2]) que la théorie des intersections des variétés algébroïdes est parallèle à celle des variétés algébriques, on pourrait penser à élargir quelque peu les conditions de validité de notre théorie des composantes singulières en supposant seulement que, localement en N, le cycle algébrique X est intersection complète de A et d'un cycle algébroïde X_1 de l'espace. Cependant on a le résultat partiel suivant, qui laisse penser que cette généralisation pourrait n'être qu'illusoire :

THÉORÈME 3. — *Soient* A *une variété algébrique,* N *une sous-variété de* A, *et* X *un diviseur algébrique de* A *dont les composantes passant par* N *sont simples sur* A. *S'il existe un diviseur algébroïde* X_1 *de l'espace tel que* $X \equiv A.X_1$ *en* N, *il existe aussi un diviseur algébrique* X'_1 *tel que* $X \equiv A.X'_1$ *en* N.

Ce résultat n'a d'intérêt que si N est singulière sur A ; sinon il est trivial, tout cycle de A étant intersection complète au voisinage d'une sous-variété simple.

Nous noterons $\mathfrak{o}$ l'anneau local de N sur A, $\bar{\mathfrak{o}}$ son complété, et $x \in \bar{\mathfrak{o}}$ la classe dans $\bar{\mathfrak{o}}$ du premier membre d'une équation du diviseur X_1. Posons $X_1.A \equiv \sum_i n_i V_i$ (en N), où les V_i sont des sous-variétés algébriques de A passant par N ; soit $\mathfrak{p}_i$ l'idéal premier de V_i dans $\mathfrak{o}$;

d'après l'hypothèse sur la simplicité de V_i l'anneau de fractions $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}$ est un anneau de valuation discrète. Soient $\bar{\mathfrak{p}}_{i,j}$ les idéaux premiers de $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}_i$, et $\overline{V}_{i,j}$ les variétés algébroïdes correspondantes ; on a, au sens des cycles algébroïdes, $V_i = \sum_j \overline{V}_{i,j}$ ([2], III, p. 65). Comme $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}$ est un anneau de valuation discrète, il en est de même de $\bar{\mathfrak{o}}_{\bar{\mathfrak{p}}_{i,j}}$ en vertu de la formule de transition ([5], chap. II, § 4) ; donc les seuls idéaux primaires pour $\bar{\mathfrak{p}}_{i,j}$ sont ses puissances symboliques, Ainsi l'hypothèse que X est intersection complète en N signifie que les composantes primaires isolées de $\bar{\mathfrak{o}}x$ sont les $\bar{\mathfrak{p}}_{i,j}^{(n_i)}$. Nous poserons $\mathfrak{a} = \bigcap_{i,j} \bar{\mathfrak{p}}_{i,j}^{(n_i)}$; alors $\bar{\mathfrak{o}}x = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ étant l'intersection des composantes immergées de $\bar{\mathfrak{o}}x$.

Comme l'idéal $\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ de $\mathfrak{o}$ est équidimensionnel, $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ est un anneau à noyau ([5], chap. II, § 4), et $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ n'a pas de composantes immergées ([2], I, lemme 9, p. 9). Or ses composantes isolées sont les $\bar{\mathfrak{p}}_{i,j}^{(n_i)}$ en vertu de la formule de transition ([5], loc. cit.). On a donc $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}_i^{(n_i)} = \bigcap_j \bar{\mathfrak{p}}_{i,j}^{(n_i)}$. En vertu d'un théorème sur les intersections d'idéaux (que nous démontrerons en appendice) on en déduit $\mathfrak{a} = \left(\bigcap_i \mathfrak{p}_i^{(n_i)}\right)\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{r}\bar{\mathfrak{o}}$ (cf. [9], lemme 8), en posant $\mathfrak{r} = \bigcap_i \mathfrak{p}_i^{(n_i)}$. Pour prouver le th. 3, il nous suffira de montrer qu'il existe un idéal *principal* $\mathfrak{o}a$ de $\mathfrak{o}$ dont les $\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ sont les composantes isolées.

Lorsque $\bar{\mathfrak{o}}x$ n'a pas de composantes immergées, la démonstration de ce point est facile. On a $\bar{\mathfrak{o}}x = \mathfrak{r}\bar{\mathfrak{o}}$, et on montre que $\mathfrak{r}$ lui-même est un idéal principal. Soit en effet $(a_1, \ldots, a_s)$ un système de générateurs de $\mathfrak{r}$; on a, par hypothèse $x = \sum_i b_i a_i (b_i \in \bar{\mathfrak{o}})$ et $a_i = c_i x (c_i \in \bar{\mathfrak{o}})$; d'où $(1 - \sum_i c_i b_i)x = 0$; alors $1 - \sum_i c_i b_i$ est élément de l'idéal maximal $\bar{\mathfrak{m}}$ de $\bar{\mathfrak{o}}$; ceci implique que l'un au moins des termes $c_i b_i$ soit en dehors de $\bar{\mathfrak{m}}$, et, a fortiori, que l'un c_i des c_i soit inversible ; on a donc $\bar{\mathfrak{o}}x = \bar{\mathfrak{o}}a_1$, d'où $\mathfrak{r} = \mathfrak{o}a_1$. L'hypothèse que $\bar{\mathfrak{o}}x$ n'a pas de composantes immergées est vérifiée, en particulier, lorsque $\bar{\mathfrak{o}}$ est un anneau d'intégrité intégralement clos ; or ceci a lieu lorsque la variété A est *normale* en N, d'après un résultat que nous a communiqué M. O. Zariski et qui se trouve démontré dans le mémoire suivant.

Pour démontrer l'existence de l'idéal principal $\mathfrak{o}a$ dans le cas général, nous introduirons la notion suivante : étant donné un élément y d'un anneau local $\mathfrak{o}$, nous appellerons *degré* de y, et nous noterons $d(y)$, la *multiplicité* $e(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}y)$ de l'anneau local quotient $\mathfrak{o}/\mathfrak{o}y$ ([5], chap. II, § 2) ; le degré de y ne change pas si on remplace $\mathfrak{o}$ par son complété. Remarquons d'abord que l'on a la formule

$$e(\mathfrak{o}/\mathfrak{r}) = \textstyle\sum_i e(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i)n_i = \sum_i n_i m(\mathrm{N}\,;\mathrm{V}_i) \qquad (1)$$

où $m(\mathrm{N}\,;\mathrm{V}_i)$ désigne la multiplicité de N sur V_i ([5], chap. v, th. 3) ; nous noterons l'entier de la formule (1) $m(\mathrm{N}\,;\mathrm{X})$ (c'est la « multiplicité » de N sur le cycle X). En effet $\mathfrak{r} = \bigcap_i \mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ est un idéal équidimensionnel, et $\mathfrak{o}$ est un anneau local géométrique ; il suffit alors d'appliquer la formule (1) ([2], I, p. 13), en se souvenant que la multiplicité d'un anneau local est égale à celle d'un système de paramètres « suffisamment général » de celui-ci ([5], chap. II, § 2, th. 5)

D'autre part nous démontrerons (lemme 1) que l'on a

$$e(\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{r}) = e(\bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{o}}x) = d(x),$$

et aussi (lemme 2) qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de $\mathfrak{r}$, tendant vers x au sens de la topologie naturelle de l'anneau local $\bar{\mathfrak{o}}$, et telle que $d(a_n) \leqslant d(x)$ pour n assez grand. Soit alors U_n un diviseur algébrique de l'espace dont le premier membre de l'équation admette a_n pour classe dans $\mathfrak{o}$; comme $a_n \in \mathfrak{r} = \bigcap_i \mathfrak{p}_i^{(n_i)}$, le diviseur $\mathrm{A}\,.\,\mathrm{U}_n$ est, en N, de la forme $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$, où Y est un diviseur positif. Si $\mathfrak{s}$ est l'intersection des composantes isolées de $\mathfrak{o}a_n$, on a $d(a_n) = e(\mathfrak{o}/\mathfrak{s})$ d'après le lemme 1, et $e(\mathfrak{o}/\mathfrak{s}) = m(\mathrm{N}\,;\mathrm{X}+\mathrm{Y})$ d'après l'analogue de la formule (1). Mais, comme $d(a_n) \leqslant d(x)$, on en déduit

$$m(\mathrm{N}\,;\mathrm{X}+\mathrm{Y}) \leqslant m(\mathrm{N}\,;\mathrm{X}),$$

ce qui implique $\mathrm{Y} \equiv \mathrm{O}$ en N, et que le diviseur X est découpé par U_n sur A. Il ne nous reste plus donc qu'à démontrer les lemmes annoncés.

Lemme 1. — *Soient $\mathfrak{o}$ un anneau local, $\mathfrak{a}$ un idéal de dimension r de $\mathfrak{o}$, et $\mathfrak{b}$ un idéal de dimension $s > r$ de $\mathfrak{o}$. Alors les anneaux locaux $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{o}/\mathfrak{ab}$, et $\mathfrak{o}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ont même multiplicité.*

Comme $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, il nous suffit de démontrer l'égalité des multiplicités de $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}/\mathfrak{ab}$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$. Prenons un élément x de $\mathfrak{o}$, superficiel par rapport à $\mathfrak{m}$, de classes superficielles par rapport à $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{m}/\mathfrak{ab}$ ([5], chap. II, § 1), et tel que

$\mathfrak{a}+\mathfrak{o}x$ et $\mathfrak{b}+\mathfrak{o}x$ soient de dimensions $r-1$ et $s-1$. On a alors ([5], chap. II, § 2) $e(\mathfrak{o}/\mathfrak{a})=e(\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}+\mathfrak{o}x))$ et $e(\mathfrak{o}/\mathfrak{ab})=e(\mathfrak{o}/(\mathfrak{ab}+\mathfrak{o}x))$. Comme $(\mathfrak{a}+\mathfrak{o}x)(\mathfrak{b}+\mathfrak{o}x)\subset\mathfrak{ab}+\mathfrak{o}x\subset\mathfrak{a}+\mathfrak{o}x$, il nous suffira de démontrer le lemme pour $\mathfrak{a}+\mathfrak{o}x$ et $\mathfrak{b}+\mathfrak{o}x$, c'est-à-dire pour des idéaux de dimensions $r-1$ et $s-1$. Par applications successives de ceci, on est ramené au cas où $\mathfrak{b}$ est de dimension 0, c'est-à-dire est un idéal $\mathfrak{q}$ primaire pour $\mathfrak{m}$, et où $\mathfrak{a}$ est de dimension >0.

Il existe alors un exposant r tel que $\mathfrak{aq}\supset\mathfrak{a}\cap\mathfrak{q}^r$ ([8], chap. III, lemme 3, p. 47), donc un exposant u tel que $\mathfrak{aq}\supset\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^u$. Il suffira donc de montrer que l'on a $e(\mathfrak{o}/\mathfrak{a})=e(\mathfrak{o}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^u))$. Or, pour $n\geqslant u$, on a $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^u)+\mathfrak{m}^n=(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n)\cap\mathfrak{m}^u$; donc $(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^u)/(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n)$ est isomorphe à $\mathfrak{m}^u/((\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n)\cap\mathfrak{m}^u)=\mathfrak{m}^u/((\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^u)+\mathfrak{m}^n)$. Ainsi, à une constante additive k près ($k=$ longueur $(\mathfrak{m}^u/(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^u))$, les longueurs des modules $\mathfrak{o}/(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n)$ et $\mathfrak{o}/((\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^u)+\mathfrak{m}^n)$ sont égales. Donc, pour $n\geqslant u$, on a $P_{\mathfrak{m}/\mathfrak{o}}(n)=P_{\mathfrak{m}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^u)}(n)+k$ ([5], chap. I, § 5). Comme $P_{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}(n)$ est un polynome de degré >1 pour n assez grand par hypothèse, il en résulte que les deux polynomes ci-dessus ont même coefficient dominant. CQFD.

LEMME 2. — *Soient* $\mathfrak{o}$ *un anneau local,* $\bar{\mathfrak{o}}$ *son complété,* x *un élément de* $\bar{\mathfrak{o}}$, *et* $\mathfrak{r}$ *un idéal de* $\mathfrak{o}$ *tel que* $x\in\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{r}$. *Alors pour toute suite* (a_n) *d'éléments de* $\mathfrak{r}$ *tels que* lim. $a_n=x$, *on a* $d(a_n)\leqslant d(x)$ *pour* n *assez grand.*

Soit en effet $F(\bar{\mathfrak{m}})=\sum_{n=0}^{\infty}(\bar{\mathfrak{m}}^n/\bar{\mathfrak{m}}^{n+1})$ l'anneau de formes de l'idéal maximal $\bar{\mathfrak{m}}$ de $\bar{\mathfrak{o}}$ ([5], chap. I, § 5). Alors les anneaux de formes $F(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}x)$ et $F(\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}a_s)$ sont canoniquement isomorphes à des anneaux quotients $F(\bar{\mathfrak{m}})/\mathfrak{v}$ et $F(\bar{\mathfrak{m}})/\mathfrak{v}_s$ de $F(\bar{\mathfrak{m}})$, $\mathfrak{v}$ (resp. $\mathfrak{v}_s$) étant l'idéal de $F(\bar{\mathfrak{m}})$ engendré par les formes initiales des éléments de $\bar{\mathfrak{o}}x$ (resp. $\bar{\mathfrak{o}}a_s$) ([5], chap. II, § 3). Or $\mathfrak{v}$ est engendré par un nombre *fini* d'éléments $(f_1,\ldots,f_j)$, f_i étant la forme initiale de z_ix ; soit n_i le degré de f_i ; prenons pour s un entier supérieur à $1+\max.\ n_i$. Il existe par hypothèse un élément $a_s\in\mathfrak{r}$ tel que $x-a_s\in\bar{\mathfrak{m}}^s$; soient b_i des éléments de $\mathfrak{o}$ tels que $z_i-b_i\in\bar{\mathfrak{m}}^s$ pour tout i. On a alors

$$z_ix-b_ia_s=x(z_i-b_i)+b_i(x-a_s)\in\bar{\mathfrak{m}}^s.$$

Donc, comme $s>n_i$, les éléments z_ix et b_ia_s ont même forme initiale f_i dans $F(\bar{\mathfrak{m}})$. Ceci montre que l'on a $\mathfrak{v}\subset\mathfrak{v}_s$, donc que l'on a l'inégalité $P_{\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}x}(n)\geqslant P_{\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}a_s}(n)$ entre les polynomes caractéristiques des idéaux maximaux $\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}x$ et $\bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{o}}a_s$. En comparant leurs termes de plus haut degré, on en déduit $d(x)\geqslant d(a_s)$. CQFD.

APPENDICE

Intersections d'idéaux dans un anneau local et dans son complété.

Soient $\mathfrak{o}$ un anneau local, et $\bar{\mathfrak{o}}$ son complété. Rappelons les propriétés suivantes :

1) Tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{o}$ est fermé. L'adhérence de $\mathfrak{a}$ dans $\bar{\mathfrak{o}}$ est $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}}$. On a $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ ([1]).

2) Si $\bar{\mathfrak{o}}$ est un anneau local complet d'idéal maximal $\bar{\mathfrak{m}}$, et si $(\bar{\mathfrak{a}}_n)$ est une suite descendante d'idéaux de $\bar{\mathfrak{o}}$ dont l'intersection se réduit à (O), on a $\bar{\mathfrak{a}}_n \subset \bar{\mathfrak{m}}^{s(n)}$ où $s(n)$ augmente indéfiniment avec n ([1], lemma 7, p. 695).

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

Théorème 4. — *Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux d'un anneau local $\mathfrak{o}$, et $\bar{\mathfrak{o}}$ le complété de $\mathfrak{o}$; on a alors $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}} \cap \mathfrak{b}\bar{\mathfrak{o}} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})\bar{\mathfrak{o}}$.*

Nous traiterons d'abord le cas où $\mathfrak{a}$ est un idéal *principal* $\mathfrak{o}a$ (cf. [9], lemma 1) ; alors $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}a$. Remarquons que l'on a

$$\bar{\mathfrak{o}}a \cap \bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b} = (\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b} : \bar{\mathfrak{o}}a)a, \qquad \text{et} \qquad \bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}a \cap \mathfrak{b}) = \bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)a.$$

Nous sommes ainsi ramenés à montrer que l'on a $(\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b} : \bar{\mathfrak{o}}a) = \bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} : \bar{\mathfrak{o}}a)$. Or l'inclusion $\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a) \subset (\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b} : \bar{\mathfrak{o}}a)$ est évidente. Pour démontrer l'inclusion inverse soit $z \in (\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b} : \bar{\mathfrak{o}}a)$; comme $\mathfrak{o}$ est dense dans $\bar{\mathfrak{o}}$, on peut écrire $z = x_n + m_n$ où $x_n \in \mathfrak{o}$ et $m_n \in \bar{\mathfrak{m}}^n$; ainsi $(x_n + m_n)a \in \bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}$, d'où $x_n a \in \bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{o}}\bar{\mathfrak{m}}^n a = \bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n a)$; comme $x_n a \in \mathfrak{o}$, on a, en vertu de 1), $x_n a \in \mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n a$; on peut donc écrire $(x_n + m'_n)a \in \mathfrak{b}$ où $m'_n \in \mathfrak{m}^n$; comme z est aussi limite de la suite $(x_n + m'_n)$, dont chaque terme appartient à $(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)$ x est adhérent à $(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)$, et, en vertu de 1), appartient à $\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)$.

Avant de passer au cas où A est un idéal quelconque, nous démontrerons le lemme suivant :

Lemme. — *Les notations étant celles du th. 4, et si $a \in \mathfrak{o}$, on a $(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n : \mathfrak{o}a) \subset (\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a) + \mathfrak{m}^{s(n)}$ où $s(n)$ augmente indéfiniment avec n.*

Comme $\mathfrak{b}$ est intersection des idéaux $\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n$ (en vertu de 1)), l'intersection des idéaux $(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n : \mathfrak{o}a)$ est $(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)$. De même l'intersection des idéaux $(\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n) : \bar{\mathfrak{o}}a)$ est $(\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b} : \bar{\mathfrak{o}}a)$, qui est égal à $\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b} : \mathfrak{o}a)$

comme on vient de le voir. Comme l'anneau $\bar{\mathfrak{o}}/\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b}:\mathfrak{o}a)$ est complet, on peut lui appliquer 2), ce qui montre que l'on a

$$(\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b}+\mathfrak{m}^n):\bar{\mathfrak{o}}a)\subset(\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}:\bar{\mathfrak{o}}a)+\bar{\mathfrak{m}}^{s(n)}$$

ou $s(n)$ augmente indéfiniment avec n. D'après ce qu'on a vu, ceci s'écrit $\bar{\mathfrak{o}}((\mathfrak{b}+\mathfrak{m}^n):\mathfrak{o}a)\subset\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b}:\mathfrak{o}a)+\bar{\mathfrak{m}}^{s(n)}$. On en conclut que

$$((\mathfrak{b}+\mathfrak{m}^n):\mathfrak{o}a)\subset(\bar{\mathfrak{o}}((\mathfrak{b}:\mathfrak{o}a)+\mathfrak{m}^{s(n)}))\cap\mathfrak{o}=(\mathfrak{b}:\mathfrak{o}a)+\mathfrak{m}^{s(n)}$$

ce qui démontre le lemme.

Revenons enfin au cas général du th. 4. On a évidemment

$$\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{a}\cap\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}=\bigcap_{a\in\bar{\mathfrak{o}}\mathrm{A}}(\bar{\mathfrak{o}}a\cap\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}) \qquad (1)$$

Comme $a\in\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{a}$, on a $a=\lim.\, a_n$ où $a_n\in\mathfrak{a}$, avec $a=a_n+m_n$ où $m_n\in\bar{\mathfrak{m}}^n$. Si $y\in(\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}:\bar{\mathfrak{o}}a)$, on a $ya\in\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}$, donc $ya_n\in\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}+\bar{\mathfrak{m}}^n$,

et $\quad y\in(\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}+\bar{\mathfrak{m}}^n):\bar{\mathfrak{o}}a_n=\bar{\mathfrak{o}}((\mathfrak{b}+\mathfrak{m}^n):\mathfrak{o}a_n)\subset\bar{\mathfrak{o}}((\mathfrak{b}:\mathfrak{o}a_n)+\mathfrak{m}^{s(n)})$

en vertu du lemme. Nous en déduisons $(\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}:\bar{\mathfrak{o}}a)\subset\bar{\mathfrak{o}}((\mathfrak{b}:\mathfrak{o}a_n)+\mathfrak{m}^{s(n)})$, et, comme $a-a_n\in\bar{\mathfrak{m}}^n$ et $\bar{\mathfrak{o}}a\cap\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}=(\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}:\bar{\mathfrak{o}}a)a$,

$$\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}\cap\bar{\mathfrak{o}}a\subset(\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b}:\mathfrak{o}a_n)+\bar{\mathfrak{m}}^{s(n)})(a_n+\bar{\mathfrak{m}}^n)\,;$$

en supposant, ce qui est permis, que l'on a $n\geqslant s(n)$, ce dernier idéal est contenu dans $\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b}:\mathfrak{o}a_n)a_n+\bar{\mathfrak{m}}^{s(n)}=((\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}\cap\mathfrak{o}a_n)+\mathfrak{m}^{s(n)})$. Mais, comme $a_n\in\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{o}a_n\subset\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}$. Par conséquent

$$\bar{\mathfrak{o}}a\cap\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}\subset\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a})+\bar{\mathfrak{m}}^{s(n)}.$$

Comme $s(n)$ augmente indéfiniment avec n, on en déduit

$$\bar{\mathfrak{o}}a\cap\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}\subset\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}).$$

En vertu de (1), on a alors $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{a}\cap\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}\subset\bar{\mathfrak{o}}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$. et le th. 4 est démontré puisque l'inclusion inverse est triviale,

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. CHEVALLEY, « On the theory of local rings », *Ann. of Math.*, vol. 44 (1943), pp. 690-708.

[2] C. CHEVALLEY, « Intersections of algebraic and algebroid varieties », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 57 (1945), pp. 1-85.

[3] W. L. Chow, « On compact complex analytic varieties », *Amer. Journ. of Math.*, vol. 71 (1949), pp. 893-914.

[4] W. Krull, « Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie », *Math. Zeit.*, vol. 42 (1937), pp. 745-766.

[5] P. Samuel « Sur la notion de multiplicité en Algèbre et en géométrie Algébrique » (Thèse, Paris, 1949), en cours de publication au Journ. Math. pures et appl.

[6] P. Samuel « Multiplicités des composantes singulières d'intersection », *Comptes Rendus,* t. 228 (1949), pp. 292-294.

[7] P. Samuel, « Multiplicités des composantes singulières d'intersection », *Colloque de Géom. Alg.*, Liège (Thone), 1949.

[8] A. Weil, « Foundations of Algebraic Geometry », *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, New-York, 1946.

[9] O. Zariski, « Analytical irreducibility of normal varieties » *Ann. of Math.*, vol. 49 (1948), pp. 352-361.

(Parvenu aux Annales en novembre 1950.)