ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Pierre BERGER

Persistance des sous-variétés à bord et à coins normalement dilatées

Tome 61, nº 1 (2011), p. 79-104.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2011__61_1_79_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
61, 1 (2011) 79-104

PERSISTANCE DES SOUS-VARIÉTÉS À BORD ET À COINS NORMALEMENT DILATÉES

par Pierre BERGER

Résumé. — On se propose de montrer que les variétés à bord et plus généralement à coins, normalement dilatées par un endomorphisme sont persistantes en tant que stratifications a-régulières. Ce résultat sera démontré en classe C^s, pour $s \geqslant 1$. On donne aussi un exemple simple d'une sous-variété à bord normalement dilatée mais qui n'est pas persistante en tant que sous-variété différentiable.

Abstract. — We show that invariant submanifolds with boundary, and more generally with corners which are normally expanded by an endomorphism are persistent as a-regular stratifications. This result will be shown in class C^s, for $s \geqslant 1$. We present also a simple example of a submanifold with boundary which is normally expanded but non-persistent as a differentiable submanifold.

Introduction

Soit M une variété C^∞. Pour $s \geqslant 1$, une sous-variété à bord de M de classe C^s et de dimension d est un sous-ensemble N de M tel que, pour tout point $x \in N$, il existe une carte (U, ϕ) d'un voisinage de $x \in M$ dans le C^s-atlas de M engendré par sa structure lisse vérifiant :

$$\phi(U \cap N) = V \times \{0\}, \tag{0.1}$$

où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$.

De façon similaire, une sous-variété à coins de M de classe C^s est un sous-ensemble N de M, tel que pour tout $x \in N$, il existe une C^s-carte (U, ϕ) d'un voisinage de $x \in M$ vérifiant l'équation (0.1) en autorisant V à être un ouvert de $(\mathbb{R}^+)^d$.

Mots-clés : variété invariante, variété à bord, variété à coins, persitance, hyperbolicité normales, stratification.
Classification math. : 37D10, 57R55.

Une *stratification de classe* C^s d'un ensemble localement compact N de M est une partition finie Σ de N en sous-variétés de classe C^s appelées *strates*, vérifiant la condition de frontière :

$$\forall (X,Y)\in\Sigma^2,\quad adh(X)\cap Y\neq\emptyset\Rightarrow adh(X)\supset Y \text{ et } \dim X>\dim Y.$$

Une telle stratification est (a)-*régulière* si pour toutes strates X et Y, pour toute suite $(x_n)_n\in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x\in Y$, telle que $(T_{x_n}X)_n$ converge vers un certain sous-espace P de T_xM, l'espace T_xY est contenu dans P.

Une sous-variété à bord de classe C^s définit canoniquement une stratification $\Sigma=(\partial N,\mathring{N})$ de classe C^s sur N dont les strates sont le bord ∂N et l'intérieur $\mathring{N}$ de N. Une telle stratification est a-régulière.

De façon similaire, une sous-variété à coins de classe C^s définit canoniquement une stratification (a-régulière) $\Sigma=(X_i)_{i=1}^d$ de classe C^s sur N dont chaque strate X_k est la C^s-variété formée des points $x\in N$ qui ont exactement k coordonnées non nulles dans les cartes vérifiant l'équation (0.1).

Soit f un *endomorphisme* de classe C^s de M. Autrement dit, f est une application de classe C^s de M dans elle-même pouvant avoir des singularités et ne pas être bijective. On dira que f *préserve* une stratification Σ d'un sous-espace N de M, si elle envoie chaque strate de Σ dans elle-même. On dira que la stratification Σ est C^s-*persistante* si toute C^s-perturbation f' de f préserve une stratification Σ' de classe C^s d'un sous-espace N', telle que :

- N est homéomorphe à N' via une application h C^0-proche de l'inclusion $N\hookrightarrow M$,
- la restriction de h à chaque strate X de Σ est un difféomorphisme de classe C^s sur une strate de Σ', qui est C^s-proche de l'inclusion canonique $X\hookrightarrow M$ pour la topologie C^s-compact-ouverte.

Si Σ est a-régulière, on dira que *la stratification a-régulière Σ est C^s-persistante* si la stratification Σ' définie ci-dessus est toujours a-régulière.

Pour $s\geqslant 1$, l'endomorphisme f *dilate s fois normalement la stratification* Σ, si f préserve Σ et dilate s fois normalement chacune de ses strates X :

Il existe une métrique riemannienne sur M, un réel $\lambda<1$ ainsi qu'une fonction continue et positive C sur X tels que, pour tout $x\in X$, pour tous vecteurs unitaires $u\in T_xX^\perp$ et $v\in T_xX$, on a :

$$\|p\circ T_xf^n(u)\|\geqslant C(x)\cdot\lambda^n\cdot\max(1,\|T_xf^n(v)\|^s),\ \forall n>0$$

avec p la projection orthogonale de T_xM sur $T_xX^\perp$.

Le résultat principal de cette article est le théorème suivant :

THÉORÈME 0.1. — *Soient M une variété C^∞, N une sous-variété à coins de classe C^s, pour $s > 0$. Soit f un endomorphisme de classe C^s de M, préservant et dilatant s fois normalement la stratification Σ induite par N.*

Soit N' un ouvert relativement compact de N dont l'adhérence $adh(N')$ est envoyée dans N' par f. Alors la stratification a-régulière $\Sigma_{|N'}$ sur N', dont les strates sont les intersections des strates de Σ avec N', est persistante.

Remarque. — En particulier, toute sous-variété à coins compacte, de classe C^s, définit une stratification a-régulière et de classe C^s qui, quand elle est dilatée s fois normalement, est C^s-persistante.

Remarque. — En général, les sous-variétés à coins ne persistent pas en tant que sous-variétés différentiables.

Nous allons d'abord rappeler l'ingrédient principal de la preuve de ce théorème : la structure de treillis de laminations et son théorème de persistance associé. Puis, nous allons énoncer le théorème 0.1 dans le cas particulier et plus clair des variétés à bord compactes de classe C^1. Ensuite, nous exposerons un exemple simple d'une variété à bord qui est normalement dilatée mais pas persistante. Enfin, nous allons montrer ce cas particulier puis le cas général du théorème principal de cet article.

Ce travail n'aurait pas pu être réalisé sans la direction de J-C. Yoccoz durant ma thèse. J'exprime également ma reconnaissance P. Pansu pour de nombreuses discussions. Ce travail s'est déroulé à l'université Paris Sud (Orsay) et à l'université d'état de New York (Suny Stony Brook), je remercie ces deux institutions pour leur hospitalité.

1. Structure de treillis sur les stratifications

Soit Σ une C^s-stratification d'un sous-espace localement compact N d'une variété M. Une *structure de treillis de laminations de classe C^s* sur l'espace stratifié (N, Σ) est la donnée pour chaque strate $X \in \Sigma$, d'une lamination $\mathcal{L}_X$ sur un voisinage ouvert L_X de X dans N (pour la topologie induite) qui vérifie les conditions suivantes :

- **X est une feuille de $\mathcal{L}_X$.**
- **$(L_X, \mathcal{L}_X)$ est une C^s-lamination :** Les feuilles de $\mathcal{L}_X$ sont des variétés imergées de classe C^s ; les plaques de $\mathcal{L}_X$ varient transversalement continûment dans la topologie C^s.

– **Feuilletage de laminations :** étant donnée une strate Y dont l'adhérence contient X, les petites plaques de $\mathcal{L}_Y$ contenues dans L_X sont C^s-feuilletées par des plaques de $\mathcal{L}_X$; ce feuilletage est de classe C^s et varie continûment transversalement aux plaques de $\mathcal{L}_Y$.

Comme $\mathcal{L}_X$ est une lamination, la stratification Σ est alors nécessairement a-régulière.

Nous allons démontrer le théorème 0.1 en utilisant le théorème suivant, qui est une restriction du résultat principal de [2] (où la définition de treillis de laminations est plus détaillée) :

Théorème 1.1. — *Soient $s \geqslant 1$ et Σ une C^s-stratification d'un sous-espace localement compact N d'une variété M. Soit f un endomorphisme de M qui préserve et dilate s fois normalement les strates de Σ. Si (N,Σ) possède une structure de treillis de classe C^s satisfaisant :*

(*i*) *pour chaque strate X de Σ, il existe un voisinage V_X de X dans N tel que f envoie chaque plaque de $\mathcal{L}_X$ contenue dans V_X dans une feuille de $\mathcal{L}_X$,*

(*ii*) *Chaque feuille de $\mathcal{L}_X$ différente de X a son image par un itéré de f qui est disjointe de V_X.*

Soit N' un ouvert relativement compact dans N, dont l'adhérence est envoyée par f dans lui-même. Alors, la stratification a-régulière $\Sigma_{|N'}$ de N' est C^s-persistante.

2. Variétés à bord normalement dilatées

Dans le cadre de la C^1-persistance des variétés à bord et compactes, le théorème 0.1 s'énonce ainsi :

Corollaire 2.1. — *Soit N une sous-variété compacte, connexe, de classe C^1 et à bord d'une variété différentiable lisse M. Soit f un endomorphisme de M de classe C^1, préservant le bord ∂N et l'intérieur $\mathring{N}$ de N. Si f dilate (une fois) normalement ∂N et $\mathring{N}$, alors la stratification a-régulière $(\partial N, \mathring{N})$ sur N est C^1-persistante.*

Autrement dit, pour toute application f' C^1-proche de f, il existe deux sous-variétés disjointes $\partial N'$ et $\mathring{N}'$ telles qu'il existe un homéomorphisme h de N sur l'union $N' := \partial N' \cup \mathring{N}$ vérifiant :

– *l'application h est C^0-proche de l'inclusion canonique de N dans M,*
– *f' envoie $\partial N'$ et $\mathring{N}'$ dans respectivement $\partial N'$ et $\mathring{N}'$,*

– *la restriction de h à ∂N (resp. $\mathring{N}$) est un C^1-difféomorphisme sur $\partial N'$, qui est proche de l'inclusion canonique de ∂N (resp. $\mathring{N}$) dans M pour la topologie C^1-compact-ouverte.*

Remarque. — En général N' n'est pas une sous-variété à bord de classe C^1 car il n'y a pas de direction transverse à ∂N tangente à N'. La variété $\mathring{N}'$ peut s'enrouler sur $\partial N'$ et former une stratification qui n'est pas toujours *b-régulière* : il existe des suites $(x_n)_n \in \mathring{N}'^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_n \in \partial N'^{\mathbb{N}}$ telles que :
– $(x_n)_n$ et (y_n) convergent toutes les deux vers un point $y \in \partial N'$,
– la famille de droites[(1)] $((x_n y_n))_n$ converge vers une droite D,
– la famille de sous-espaces $(T_{y_n}\mathring{N}')_n$ converge vers un certain sous-espace P de T_yM,
– mais D n'est pas contenu dans P.

2.1. Exemple d'une sous-variété à bord normalement dilatée, mais non persistante en tant que sous-variété de classe C^1

Soient M le plan $\mathbb{R}^2$, N le segment $[-1, 1] \times \{0\}$ et

$$f := (x, y) \mapsto (x^3/2 + x/2, 2y)$$

qui est un difféomorphisme du plan. La variété à bord N est bien normalement dilatée et la différentielle de f sur chacune des extrémités est une similitude de rapport 2 .

On perturbe maintenant f au voisinage d'une des extrémités A de N de façon à ce que, sur une boule B centrée en A, la perturbation f' soit égale à la composition d'une petite rotation R centrée en A avec l'homothétie H centrée en A et de rapport 2. Le théorème 2.1 assure l'existence d'une stratification $(N', (\partial N', \mathring{N}'))$ proche de N et préservée par cette perturbation f'.

Cette perturbation étant homotope à f, par une homotopie restant dans un petit voisinage de f dans $C^1(M, M)$ et conservant le point fixe répulsif A, par continuité, A est donc une composante connexe de $\partial N'$. On peut trouver $x \in \mathring{N}' \cap B$ tel que T_xN' soit différent de la droite joignant A à x. Sinon, au voisinage de A, N' est une demi-droite, ce qui est absurde car la composition d'une petite rotation avec une homotopie ne préserve aucune droite. On fixe un tel x et on regarde la préorbite $(x_n)_{n\leqslant 0}$ de $R \circ H$ partant de x. L'application $R \circ H$ étant linéaire et conforme, l'angle entre $T_{x_n}\mathring{N}$ et $\overrightarrow{Ax_n}$ est constant et non nul. Ainsi la stratification $(N', (\partial N', \mathring{N}'))$ n'est pas b-régulière, et n'est donc pas une variété à bord.

(1) Via une carte, on peut identifier un voisinage de y dans M à un espace euclidien.

On remarque que ce contre-exemple peut être réalisé avec des perturbations réelles analytiques de f : on compose simplement f par une rotation du plan centrée en A. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, A reste une composante connexe de $\partial N'$. On utilise alors le théorème de linéarisation de Steinberg quand l'angle de rotation est petit et irrationnel, pour conjuguer différentiablement f' au voisinage de A avec $R \circ H$ et ainsi se ramener au cas précédent pour conclure.

On remarque enfin que cette sous-variété à bord se complexifie en une sous-variété à bord de $\mathbb{C}^2$, dont le bord est formé des deux mêmes points alors que son intérieur est un disque. On peut choisir cette sous-variété N' relativement compacte ayant son adhérence envoyée dans N'. On remarque que cette sous-variété n'est persistante qu'en tant que stratification.

2.2. Preuve du corollaire 2.1

Pour montrer ce corollaire, il suffit de construire une structure de treillis de laminations sur l'espace stratifié $(N, (\partial N, \mathring{N}))$ qui vérifie les hypothèses (i) et (ii) du théorème 1.1.

Comme $\mathring{N}$ est un ouvert de N, on choisit la lamination $(L_{\mathring{N}}, \mathcal{L}_{\mathring{N}})$ formée d'une seule feuille égale à la variété $\mathring{N}$. Les conditions (i) et (ii) associées à cette lamination sont alors évidentes.

La lamination $\mathcal{L}_{\partial N}$ associée à la strate ∂N va être obtenue grâce à la construction d'une fonction réelle et continue r sur un voisinage $L_{\partial N}$ de ∂N dans N vérifiant les propriétés suivantes :

(1) la préimage de 0 par r est égale au bord de N,

(2) r est une submersion de classe C^1 sur $\mathring{N} \cap L_{\partial N}$,

(3) f préserve les hypersurfaces de niveau de r au voisinage de ∂N,

(4) les hypersurfaces de niveau λ de r tendent vers ∂N pour la topologie C^1 quand λ tend vers 0.

D'après 1, 2 et 4, les fibres de r forment bien les feuilles d'une lamination $\mathcal{L}_{\partial N}$ sur $L_{\partial N}$ de classe C^1. D'après 1, cette lamination est bien cohérente avec la stratification $(\partial N, \mathring{N})$. D'après 2, la condition de feuilletage de laminations est bien vérifiée. Ainsi, le couple $((L_{\partial N}, \mathcal{L}_{\partial N}), \mathring{N})$ forme une structure de treillis sur $(\partial N, \mathring{N})$. D'après 3, cette structure de treillis vérifie l'hypothèse (i) du théorème 1.1. Comme $\mathcal{L}_{\partial N}$ est une fibration et que f dilate normalement le bord ∂N, l'hypothèse (ii) du théorème 1.1 est bien vérifiée. Comme f dilate normalement le bord et l'intérieur de N, le théorème 1.1 implique la C^1-persistance de la stratification $(\partial N, \mathring{N})$.

Pour construire la fonction r, on commence par mettre une structure de variété à bord C^∞ sur N, compatible avec sa structure C^1 initiale [(2)]. On choisit alors une métrique riemannienne g de classe C^∞ sur N et adaptée [(3)] à la dilatation normale de ∂N dans N. On note exp l'application exponentielle associée à g. On note $n(x) \in T_xN$ l'unique vecteur unitaire, orthogonal à l'espace tangent du bord de N et qui pointe vers l'intérieur de N. L'application $x \mapsto n(x)$ est de classe C^1.

Par compacité de ∂N, il existe $r_0 > 0$ et un voisinage V de ∂N, tels que

$$Exp : \partial N \times [0, r_0[\to V$$

$$(x,t) \mapsto \exp_x \big(t \cdot n(x)\big)$$

soit un difféomorphisme et tels que l'adhérence de la préimage $f_{|N}^{-1}(V)$ soit incluse dans V. Soient p_1 et p_2 les projections sur la première et la deuxième coordonnée de $N \times [0, r[$. On note alors ρ la fonction sur V égale à $p_2 \circ Exp^{-1}$. C'est une submersion de V. Soit π la projection de V sur ∂N égale à $p_1 \circ Exp^{-1}$. Soient $t > \epsilon > 0$ tels que $f^{-1}(\rho^{-1}([0,t]))$ est un compact inclus dans $\rho^{-1}([0, t-\epsilon[)$. Soit $L_{\partial N}$ l'ouvert $\rho^{-1}([0,t[)$. Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ décroissante, valant 1 sur $]-\infty, t-\epsilon]$ et 0 sur $[t, +\infty[$. Par la suite, on s'autorisera à réduire t et donc d'adapter ϵ, ϕ et $L_{\partial N}$.

Soient $C := \sup_N \|Tf\|$ et r' la fonction de classe C^1 sur $L_{\partial N}$ définie par :

$$r' := (1 - \phi\circ\rho)\cdot\rho + \phi\circ\rho\cdot\frac{\rho\circ f}{C}.$$

Cela implique que le gradient $\nabla r'$ de r' est égal à

$$\nabla r' = (1-\phi\circ\rho)\cdot\nabla\rho + \phi\circ\rho\cdot\nabla\left(\frac{\rho\circ f}{C}\right) + \left(\frac{\rho\circ f}{C} - \rho\right)\nabla(\phi\circ\rho). \tag{2.1}$$

Montrons que r' est une submersion. On a $g(\nabla\rho, \nabla(\phi\circ\rho)) \leqslant 0$ et comme $C \geqslant \|Tf\|$, la fonction $(\rho\circ f/C - \rho)$ est négative. On remarque aussi que $\nabla\rho(x)$ tend uniformément vers $n\circ\pi(x)$ quand la distance entre le bord de N et x diminue. De plus $g(\nabla\rho, \nabla(\rho\circ f))$ est égal au produit scalaire de $\nabla\rho$ avec l'image par l'adjoint de Tf de $\nabla\rho$. Donc par symétrie de g, $g(\nabla\rho, \nabla(\rho\circ f))$ est égal à $g(\nabla\rho, Tf\circ\nabla\rho)$. Par conséquent, pour t assez petit, $g(\nabla\rho, \nabla(\rho\circ f))$ est proche de $g(n\circ\pi, Tf\circ n\circ\pi)$ qui est strictement

(2) On procède comme dans [6] après avoir étendu N en une sous-variété sans bord. Cependant, cette structure C^∞ sera en général incompatible avec la structure C^∞ de M.

(3) Cela signifie que la fonction C, dans la définition de la dilatation normale d'une sous-variété, peut être choisie égale à 1. Une telle métrique existe par la proposition 2.1.11 de [2].

positif, par dilatation normale du bord de N. Ainsi, il existe $m > 0$ tel que, pour t assez petit et tout $x \in L_{\partial N}$, on a :

$$g(\nabla r', \nabla \rho) > m. \tag{2.2}$$

En particulier, r' est une submersion.

On remarque aussi que $r' = \rho$ sur $\rho^{-1}(\{t\})$ et $r' = \rho \circ f/C$ sur un voisinage de $f^{-1}\big(\rho^{-1}(\{t\})\big)$. Donc, pour t assez petit, la fonction r suivante est bien définie et continue :

$$r : L_{\partial N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \partial N \\ \frac{r' \circ f^n}{C^n} & \text{si } x \in f^{-n}(L_{\partial N}) \setminus f^{-n-1}(L_{\partial N}),\ n \geqslant 0 \end{cases}$$

Une telle fonction r vérifie donc les propriétés 1 et 3. Il ne reste donc plus qu'à démontrer les propriétés 2 et 4 pour t assez petit. On peut déjà remarquer que la restriction de r à $L_{\partial N} \setminus \partial N$ est de classe C^1. Le reste de ces propriétés peut se démontrer en utilisant des champs de cônes.

On rappelle qu'un *champ de cônes* χ sur une partie U de N est un ouvert de $TN_{|U}$ tel que, pour $x \in U$, avec l'intersection $\chi(x)$ de χ avec T_xN vérifie :

$$\begin{cases} \chi(x) \neq \emptyset \\ \forall u \in \chi(x),\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ tu \in \chi(x) \end{cases}$$

Comme le bord de N est normalement dilaté, la propriété 2.1.12 de [2] entraîne que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un champ continu de cônes χ sur un voisinage U du bord de ∂N, tel que :

(a) pour tout $x \in \partial N$, l'espace tangent $T_x\partial N$ de ∂N en x est maximal en tant que sous-espace vectoriel inclus dans χ_x ; tout vecteur unitaire de χ est ϵ-distant d'un vecteur de $T\partial N$,

(b) pour tout $x \in U$, $f^{-1}(U)$ est inclus dans U et pour $x \in f_{|N}^{-1}(U)$, la préimage par T_xf de $\chi_{f(x)}$ est incluse dans χ_x,

(c) pour $x \in f_{|N}^{-1}(U)$, l'image par Tf de tout vecteur u du complémentaire de χ_x est un vecteur non nul (du complémentaire de $\chi_{f(x)}$).

Admettons pour l'instant que toutes les lignes de niveau de r' sont C^1-proches du bord de N pour t assez petit. Alors, pour t assez petit, $L_{\partial N}$ est inclus dans U et le noyau de Tr' est inclus dans χ. Par (b) et (c), la restriction de $r' \circ f^n$ à $f_{|N}^{-1}(L_{\partial N})$ est une submersion dont le noyau est inclus dans χ. Ainsi, la restriction de r' à $L_{\partial N} \setminus \partial N$ est une submersion dont le noyau est inclus dans χ. Cela prouve la propriété 2.

Pour démontrer 4, on va procéder par l'absurde. Soit $(x_n)_n$ une suite de points de $L_{\partial N} \setminus \partial N$ convergeant vers un certain $x \in \partial N$, telle que la suite des noyaux de $T_{x_n}r$ ne tendent pas vers $T\partial N$. Soit P une valeur d'adhérence de cette suite. Le d-plan P appartient donc à l'adhérence de χ. Par dilatation normale, l'orbite en avant par Tf d'un vecteur de $P \setminus T_x\partial N$ ne s'annule pas est tend à avoir un angle avec $T\partial N$ bien plus grand que celui autorisé par (a). Cela est contradictoire avec la propriété 3 qui implique que l'orbite de u reste dans l'adhérence du noyau de Tr et donc dans l'adhérence de χ.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que les noyaux de Tr' peuvent être choisis uniformément arbitrairement proche de $T\partial N$, pour t assez petit.

On a remarqué que $g(\nabla\rho, \nabla r') > 0$, en (2.2). Comme $\nabla\rho$ est proche de n pour t assez petit, par le théorème des fonctions implicites, les lignes de niveau de r' sont les images par Exp de sections C^1 du fibré $\partial N \times [0, r_0[\to \partial N$. Ce fibré étant trivial, on peut identifier de telles sections à des fonctions réelles sur ∂N. Dans cette identification, la section σ_μ associée à la ligne de niveau μ de r' vérifie :

$$r' \circ Exp(x, \sigma_\mu(x)) = \mu,\ \forall x \in \partial N$$

$$\Rightarrow \partial_{T\partial N}(r'\circ Exp)(x,\sigma_\mu(x)) + \partial_{\mathbb{R}}(r'\circ Exp)(x,\sigma_\mu(x))\cdot T\sigma_\mu(x) = 0,\ \forall x \in \partial N. \tag{2.3}$$

Or d'après (2.2), on a :

$$\partial_{\mathbb{R}}(r' \circ Exp) = g(\nabla r', \nabla\rho) \geqslant m > 0. \tag{2.4}$$

Par ailleurs, on a d'après (2.1) :

$$T_{\partial N}(r' \circ Exp) = \frac{\phi \circ \rho}{C} \cdot T_{\partial N}(\rho \circ f \circ Exp). \tag{2.5}$$

La forme linéaire $\partial_{T\partial N} r'$ est donc de norme inférieure à celle de $\partial_{T\partial N}(\rho \circ f \circ Exp)$. Comme f préserve le bord de N, la norme de $\partial_{T\partial N}(\rho \circ f \circ Exp)$ est arbitrairement petite quand t tend vers 0. Par (2.3) et (2.4), il en est donc de même pour $T\sigma_\mu$.

3. Variétés à coins normalement dilatées

3.1. Rappels sur les variétés à coins

Pour $s \in [\![1, \infty]\!]$, une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^n_+$ dans $\mathbb{R}^{n'}$ est de classe C^s si on peut l'étendre en une application de classe C^s d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n'}$. La différentielle en un point d'une telle application sera la différentielle de l'une de ses extensions en ce point (qui ne dépend pas de l'extension). Une application d'un ouvert de $\mathbb{R}_+^n$ dans $\mathbb{R}_+^{n'}$ est de classe C^s si sa composition avec l'inclusion canonique de $\mathbb{R}_+^{n'}$ dans $\mathbb{R}^{n'}$ est de classe C^s.

Un C^s-difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}_+^n$ sur un ouvert de $\mathbb{R}_+^n$ est une application qui peut s'étendre en un C^s-difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle qu'une variété à coins N de dimension d est une variété C^∞ modelée sur $\mathbb{R}_+^d$. Cela signifie que les changements de cartes sont des C^∞-difféomorphismes d'ouverts de $\mathbb{R}_+^d$.

Par exemple, tout cube $[0,1]^n$ pour $n \geqslant 0$ est muni canoniquement d'une structure de variété à coins. C'est aussi le cas du compact suivant, que l'on nomme la *goutte* :

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x - \sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x} - x,\ x \geqslant 0\big\}.$$

Le *bord topologique* de N, noté bN, est l'ensemble des points $x \in N$ dont l'image par une carte de N possède au moins coordonnée nulle.

Le *coindice* d'un point $x \in N$ est le nombre de coordonnées non nulles de l'image de x par une carte d'un de ses voisinages. On note par X_k l'ensemble des points de coindice k ; la structure de variété à coins de N induit sur X_k une structure de variété (sans coins) de dimension k.

Soient $x \in N$ et E l'ensemble des couples (u, ϕ), où ϕ est une carte de N d'un voisinage de x et u un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit sur E une relation d'équivalence : deux couples (u, ϕ) et (v, ψ) sont équivalents si la différentielle de $\psi \circ \phi^{-1}$ au point $\phi(x)$ envoie u sur v. L'espace quotient est appelé l'*espace tangent* en x à N. On le note T_xN. Par transport des structures, on obtient sur T_xN une structure d'espace vectoriel de dimension n.

Une application continue h, d'une variété à coins N dans une autre N', est de classe C^s, si vue à travers des cartes ϕ et ϕ' de respectivement N et N', l'application $\phi' \circ h \circ \phi^{-1}$ est de classe C^s sur son ensemble de définition. Dans ce cas, pour $x \in N$, on vérifie que l'application h induit une application linéaire, dite *différentielle de h en x* et notée T_xh, qui à un vecteur $v \in T_xN$ envoie la classe d'équivalence de $\big(T_{\phi(x)}(\phi' \circ h \circ \phi^{-1})(u), \phi'\big)$, où (u, ϕ) est un représentant de v et ϕ' une carte d'un voisinage de $h(x)$. L'application h est une *immersion* (resp. *submersion*) si sa différentielle est injective (resp. surjective) en tout point. Un C^s-difféomorphisme de variétés à coins est une application C^s qui possède un inverse de classe C^s. Un C^s-difféomorphisme local (de variétés à coins) est une application dont la restriction à un voisinage de tout point est un C^s-difféomorphisme sur son image. Un *plongement* de classe C^s est un homéomorphisme sur son image, qui est aussi une immersion de classe C^s.

On va maintenant définir une variété à coins ∂N telle que $\partial N \setminus b\partial N$ s'identifie à X_{d-1}, avec d la dimension de N. Les points de ∂N sont les couples (x, E) où x appartient à bN et E est une valeur d'adhérence de $(T_{x_n} X_{d-1})_n$ dans l'espace des plans de codimension 1 de TN, pour $(x_n)_n \in (X_{d-1})^{\mathbb{N}}$ qui tend vers x.

Cet ensemble ∂N est muni de la structure de variété à coins engendrée par les cartes suivantes : pour $(x, E) \in \partial N$, on choisit une carte ϕ d'un voisinage distingué V de $x \in N$. Le sous-espace vectoriel E est donc de la forme $T_x\phi^{-1}(\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d-k})$, avec x appartenant à $\phi^{-1}(\mathbb{R}_+^{k-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}_+^{d-k})$. On considère la restriction correspondante

$$(x, E) \mapsto \phi(x) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d-k}.$$

De telles applications engendrent une structure de variété à coins sur ∂N de dimension $d - 1$.

La variété à coins ∂N s'envoie continûment dans N, via l'application p qui à (x, E) associe sa première coordonnée. On remarque que $x \in X_j$ à exactement $(d - j)$-préimages par p.

On appelle *face de N* une composante connexe de ∂N.

Propriété 3.1. — *Il existe un C^∞-difféomorphisme local ϕ de la variété à coins $\partial N \times \mathbb{R}^+$ sur un voisinage V de bN dans N, tel que $\phi(\cdot, 0)$ est égal à p. L'application ϕ sera appelée voisinage tubulaire de ∂N.*

Démonstration. — La preuve découle de la thèse de J. Cerf [4]. Pour toute variété à coins N, ce dernier construit un C^∞-plongement de N dans une variété (sans coins) de même dimension. Il construit aussi une métrique riemannienne sur cette extension de N telle que la variété X_k soit géodésique, pour tout $k \geqslant 0$. La construction de l'application p est alors classique. □

3.2. Preuve du résultat principal (théorème 0.1)

Ce théorème se démontre en construisant une structure de treillis de laminations sur (N, Σ) vérifiant les conditions (i) et (ii) du théorème 1.1. Ce dernier théorème implique alors la persistance de $\Sigma_{|N'}$ en tant que stratification a-régulière.

La construction de la structure de treillis est plus délicate que celle effectuée pour les variétés à bord, car la dilatation normale de X_{d-1} ne peut pas être uniforme si N n'est pas une variété à bord, avec d la dimension de N. La méthode est cependant similaire. Dans la partie 3.2.1, on va montrer qu'il suffit de construire une fonction sur $\partial N \times \mathbb{R}^+$ vérifiant des propriétés semblables à celles déjà rencontrées dans le cadre des variétés à bord. Dans la partie 3.2.2, on construira cette fonction. On procède comme pour les variétés à bord, mais par défaut de dilatation normale uniforme, on est obligé de changer la géométrie du domaine fondamental.

Remarquons tout d'abord que l'on peux supposer que N est envoyée par f dans N', puisque notre théorème concerne la persistance de la restriction de Σ à N' et qu'un petit voisinage de $adh(N')$ dans N est envoyé par f dans N'.

On fixe un voisinage tubulaire p de ∂N. On rappelle que p envoie $\partial N \times \{0\}$ dans bN.

Il existe $\hat{V}'$ et $\hat{V}$ deux voisinages de $\partial N \times \{0\}$ dans $\partial N \times \mathbb{R}^+$ et une unique application $\hat{f}$ de classe C^s de $\hat{V}'$ dans $\hat{V}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \hat{V}' & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{V} \\ p\downarrow & & \downarrow p \\ N & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

On note A_k l'intersection de $\partial N \times \{0\}$ avec $p^{-1}(X_k)$, pour $k \geqslant 1$.

Propriété 3.2. — *Il existe pour chaque $k \geqslant 1$ un voisinage $\hat{U}_k$ de A_k dans $\hat{V}$, tel que $p_{|\hat{U}_k}$ soit un revêtement à $d-k$ feuillets de $U_k := p(\hat{U}_k)$ vérifiant :*
- *$\hat{f}^{-1}(\hat{U}_k) \subset \hat{U}_k$ et $f^{-1}(U_k) \subset U_k$,*
  avec $F_x^k := p_{|\hat{U}_k}^{-1}(\{x\})$ pour $x \in U_k$,
- *$\forall x \in f^{-1}(U_k), \quad \hat{f}(F_x^k) = F_{f(x)}^k$,*
- *$\forall k \geqslant j,\ x \in U_k \cap U_j, \quad F_x^k \subset F_x^j$.*

La preuve de cette propriété étant technique et délicate, elle sera démontrée tout à la fin de la preuve du théorème.

3.2.1. Une condition suffisante pour obtenir la persistance de la stratification

Pour construire une C^s-structure de treillis de laminations sur Σ, il suffit de trouver une fonction r continue, positive, bornée, définie sur un voisinage ouvert D_r de $\partial N \times \{0\}$ dans $\hat{V}'$ et vérifiant les propriétés suivantes :

P_1. il existe $C > 1$ tel que :

$$\begin{cases} r \circ \hat{f} = C \cdot r & \text{sur } D_r \cap \hat{f}^{-1}(D_r) \\ r^{-1}(\{0\}) = \partial N \times \{0\} \end{cases},$$

P_2. la restriction de r à $D_r \setminus (\partial N \times \{0\})$ est de classe C^s,

P_3. pour $k \in \{0, \dots, d-1\}$, il existe un voisinage ouvert L_k de X_k dans $U_k \setminus \cup_{j<k} X_j$ tel que, pour $x \in L_k$, la fibre F_x^k est incluse dans D_r et l'application

$$r_k : x \in L_k \mapsto \big(r(y)\big)_{y \in F_x^k}$$

est localement [4] une submersion stratifiée : pour $l \geqslant k$ et $x \in X_l$, la différentielle en x de r_k le long de X_l a un noyau de dimension minimal k ; on note $T_x r_k$ cette différentielle. On demande que cette submersion stratifiée vérifie la condition de régularité (a_f) de Thom : pour $k \leqslant l' \leqslant l$ et $(x_n)_n \in (X_l \cap L_k)^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $x \in X_{l'} \cap L_k$, le noyau de $T_{x_n} r_k$ tend vers celui de $T_x r_k$ dans la grassmanienne des k-plans de TM.

On va montrer que l'existence d'une telle fonction est suffisante pour construire une structure de treillis qui vérifie les propriétés (i) et (ii) du théorème 1.1.

Pour ce faire, on va démontrer par récurrence décroissante sur $k \in \{0, \dots, d-1\}$, que les fibres de r_k forment une lamination $\mathcal{L}_k$ de classe C^s qui est associée à la strate X_k et qui vérifie la condition de feuilletage de laminations avec chaque lamination $(L_j, \mathcal{L}_j)$, pour $j > k$.

Pour $k = d$, on rappelle que $(L_d, \mathcal{L}_d) = X_d$. Les feuilles de la lamination $\mathcal{L}_d$ sont donc les composantes connexes de X_d.

Soit $k < d$. On va montrer tout d'abord que les fibres de r_k restreintes à $L_l \cap L_k$ forment les feuilles d'une C^s-lamination sur $L_l \cap L_k$ qui feuillette celle de $\mathcal{L}_{l|L_l \cap L_k}$, pour $l > k$.

Par (P_1), pour $j \geqslant l$ et $x \in L_k \cap L_l \cap X_j$, les points $r_k(x)$ et $r_l(x)$ ont chacun exactement $d - j$ coordonnées nulles. Donc $(r(y))_{y \in (F_x^k \setminus F_x^l)}$ n'a aucune coordonnée nulle. Comme $L_k \cap L_l$ est inclus dans $\cup_{j \geqslant l} X_j$, par (P_2) et (P_3), l'application suivante est (localement) une submersion de variété à coins de classe C^s :

$$x \in L_k \cap L_l \mapsto (r(y))_{y \in (F_x^k \setminus F_x^l)}$$

On fixe un petit voisinage distingué U de $x \in L_k \cap L_l$ pour la structure de variété à coins N. On identifie U à un ouvert de $\mathbb{R}_+^d$ via une carte de N. Dans cette identification, cette submersion locale restreinte à $U \cap L_k \cap L_l$ peut s'étendre sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et ainsi définir un feuilletage $\mathcal{F}$ de classe

[4] Restreinte à un ouvert trivialisant U, du revêtement $F^k \to L_k$, l'application r_k est à valeurs dans un espace qui s'identifie à $\mathbb{R}_+^{d-k}$. Pour cette structure, on demande que $r_{k|U}$ soit une submersion stratifiée.

C^s. Par (P_3), ces feuilles sont transverses à l'identification de la lamination $(L_l \cap L_k \cap U, \mathcal{L}_{l|L_k \cap L_l \cap U})$. D'après la propriété 1.3.6 de [2], les intersections des feuilles de $\mathcal{F}$ avec celle de $\mathcal{L}_l$ forment les feuilles d'une C^s-lamination $\mathcal{L}_{l|U}$ qui feuillette la restriction de $\mathcal{L}_l$ à $L_k \cap L_l \cap U$.

Comme $(L_l)_{l>k}$ est un recouvrement ouvert de $L_k \setminus X_k$, l'ensemble des fibres de r_k définit les feuilles d'une C^s lamination $\mathcal{L}'_k$ sur $L_k \setminus X_k$.

On va montrer que l'on peut rajouter la feuille X_k à $\mathcal{L}'_k$ pour former une lamination $\mathcal{L}_k$.

Pour cela, on va montrer l'existence d'un recouvrement $(U_i)_i$ de X_k dans N tel que l'intersection des fibres de r_k avec U_i sont des variétés (des plaques) qui tendent vers $X_k \cap U_i$ dans la topologie C^1 compact-ouverte.

On considère ainsi une carte $\phi : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^+)^{d-k}$ d'un ouvert U de N, intersectant X_k et inclus dans L_k. Via ϕ, la variété $U \cap X_k$ s'identifie à $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ et la variété $U \cap X_l$ s'identifie à $\mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^+_*)^{l-k} \times \{0\}$, pour $l > k$ et avec $\mathbb{R}^+_* = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Comme la restriction de r_k à X_l est de classe C^s et que r_k y a exactement $d - l$ zéros, l'application suivante est bien définie et de classe C^s, pour U assez petit et $t \in \mathbb{R}^{l-k} \times \{0\}$:

$$\psi_t : (u, v) \in \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^+_*)^{l-k} \mapsto (r_k \circ \phi^{-1}(u, v, 0) - t) \in \mathbb{R}^{l-k} \times \{0\}.$$

Comme ϕ s'annule sur $r_k^{-1}(\{t\}) \cap U$ et comme, par la (a_f)-régularité de r_k (P_3), $\partial_v \psi_t$ est inversible, l'intersection de $r_k^{-1}(\{t\})$ avec U s'identifie via ϕ à un graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^k$ dans $(\mathbb{R}^+_*)^{l-k} \times \{0\}$. Une telle fonction est de classe C^s et tend vers 0 quand t tend vers 0, dans la topologie C^0 par continuité de r_k, et dans la topologie C^1 par la condition (a_f) vérifiée par r_k (P_3).

Comme X_k est s fois normalement dilatée par f, comme f préserve le feuilletage $\mathcal{L}'_k$ par (P_1) et comme les feuilles de ce feuilletage ont un espace tangent proche de celui de X_k, le lemme 7.4 de [3] implique que les intersections des fibres de r_k avec U sont des variétés qui tendent vers $X_k \cap U$ dans la topologie C^s.

De tels ouverts U recouvrent X_k. L'union de $\mathcal{L}'_k$ avec X_k forme donc une C^s-lamination $\mathcal{L}_k$ sur L_k qui vérifie la condition de feuilletage. Cela achève la récurrence décroissante sur k.

Ainsi $(L_k, \mathcal{L}_k)_k$ forme une structure de treillis de laminations de classe C^s sur Σ. De plus, par la propriété (P_1), la condition (i) du théorème est vérifiée avec $V_k := f^{-1}(L_k) \cap L_k$, pour chaque strate X_k. La condition (ii) du théorème provient elle aussi de la propriété (P_1).

3.2.2. Réalisation de la condition suffisante

On commence par rajouter quelques notations à celles déjà établies avant 3.2.1. Pour $k \geqslant 1$, soient $A_k := p^{-1}(X_k) \cap \partial N \times \{0\}$ et $B := \partial N \times \{0\}$. Chaque point $y \in \hat{V}$ possède un voisinage U_y tel que $p_{|U_y}$ soit un difféomorphisme sur son image. On note $p_y := p_{|U_y}^{-1}$ l'application de $p(U_y)$ dans U_y.

i) Construction de R. Pour x appartenant à $\Upsilon^n := \cap_{k=0}^n \hat{f}^{-k}(\hat{V}')$, on définit :

$$r^n(x) := \sum_{k=0}^{n} p_2 \circ \hat{f}^k(x)$$

où p_2 est la projection de $\partial N \times \mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $x \in \Upsilon^{n+1}$, on a

$$r^n(\hat{f}(x)) - r^n(x) = p_2 \circ \hat{f}^{n+1}(x) - p_2(x).$$

Par la dilatation normale, la compacité relative de N' et la supposition que N est envoyée dans N', il existe $M \geqslant 0$ et $T > 0$ tels que, avec $R := r^M$ restreinte à $\Upsilon := R^{-1}([0, T[)$ (que l'on suppose inclus dans Υ^{M+1}), on a :

i.0. $R^{-1}(\{0\}) = B_1$.

i.1. $\exists C > \lambda > 1\,;\ \forall x \in \Upsilon$, on a $C \cdot R(x) \geqslant R \circ \hat{f}(x) \geqslant \lambda \cdot R(x)$.

i.2. Pour tout $k \geqslant 0$, quitte à restreindre $\hat{U}_k$ et U_k, l'ouvert Υ contient $\hat{U}_k$ et l'application

$$x \in U_k \mapsto \big(R(y)\big)_{y \in F_x^k}$$

est localement une submersion de variétés à coins de classe C^s dans $(\mathbb{R}_+)^{d-k}$.

ii) Définition itérative de r et esquisse de la preuve. Pour construire r, on va choisir un fermé U de Υ, disjoint de B tel que l'union $\cup_{n\geqslant 0}\hat{f}^{-n}(U)$ soit égale à $\Upsilon \setminus B$. On va aussi choisir une fonction Ψ de classe C^s sur Υ égale à 1 sur U et à 0 sur $\Upsilon \setminus \Big(U \cup \hat{f}^{-1}(U)\Big)$. On pose $D := \hat{f}^{-1}(U) \setminus U$ et on définit :

$$R_1 := \Psi \cdot R + (1 - \Psi) \cdot \frac{R \circ \hat{f}}{C}$$

ainsi que :

$$\begin{array}{rcl} r : \Upsilon & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } y \in B \\ \frac{R_1 \circ \hat{f}^n(y)}{C^n} & \text{si } y \in \hat{f}^{-n}(D),\ n \geqslant 0 \\ R_1(y) & \text{si } y \in U \end{array} \right. \end{array}$$

Les propriétés (P_1) et (P_2) sont alors faciles à vérifier.

Pour montrer (P_3), on commence par calculer le noyau de la différentielle de r_k en $x \in U_k$. Pour cela, on calcule la différentielle de r en $y \in \Upsilon \setminus B$. On a :

$$d_y r = \begin{cases} dR_1 \circ T_y \hat{f}^n & \text{si } y \in \hat{f}^{-n}(D) \\ d_y R_1 & \text{si } y \in U \end{cases}$$

On note $n_y := 0$ si y appartient à $B \cup U \cup D$ et $n_y := n$ si y appartient à $\hat{f}^{-n}(D)$.

On a ainsi, pour $x \in U_k$:

$$\ker T_x r_k = \ker(d_x(R_1 \circ \hat{f}^{n_y} \circ p_y))_{y \in F_x^k}. \tag{3.1}$$

Mais, pour $k < d$ et x appartenant à un petit voisinage de X_k, les entiers $(n_y)_{y\in F_x^k}$ n'ont aucune raison d'être égaux. Et, comme la dilatation normale de X_{d-1} n'est pas uniforme, les espaces $(\ker(d_x(R_1 \circ \hat{f}^{n_y} \circ p_y)))_{y\in F_x^k}$ ne sont en général pas proches des espaces $(\ker(d_y R))_{y\in F_x^k}$. De plus, les n_y premiers itérés de $y \in F_x^k$ ne restent pas forcément ni dans $\hat{U}_k$ ni dans un voisinage de A_k où sa dilatation normale agit.

Pour palier à ce problème, l'idée intuitive est de regrouper par paquet les éléments de la fibre F_x^k, en procédant par récurrence décroissante sur k.

Par dilatation normale, pour chaque k, tout plan de dimension k de TN, assez proche d'un plan tangent à X_k, a toutes ses préorbites par Tf, basées dans un certain voisinage L_k de X_k, qui tendent à être tangentes à X_k. Appelons, de façon informelle, *le bassin de répulsion de* TX_k l'union de tels plans de dimension k de TN. On va maintenant esquisser la preuve de $P_3)$, par récurrence décroissante :

Pour $k < d$ et $x \in L_k$, si les entiers $(n_y)_{y\in F_x^k}$ sont tous égaux à un certain entier n, on s'arrange pour que, quelque soit $y \in F_x^k$, chaque point y de la fibre F_x^k arrive à D en étant resté dans $p^{-1}_{|\hat{U}_k}(L_k)$ et pour que $\ker(T_{f^n(x)} r_k)$ appartienne au bassin de répulsion de TX_k.

Si les entiers $(n_y)_{y\in F_x^k}$ ne sont pas égaux, le minimum n de cette famille n'est pas atteint pour exactement $l - k > 0$ éléments de F_x^k. On va alors s'arranger pour que :

- les points $\{f^i(x)\}_{i=0}^n$ appartiennent à $U_k \cap L_k$,
- le point $f^n(x)$ appartienne à U_l et le noyau de $T_{f^n(x)} r_l$ intersecte le noyau de $(TR_1 \circ Tp_y)_{y \in F^k_{f^n(x)} \setminus F^l_{f^n(x)}}$ en un plan de dimension k qui appartient au bassin de répulsion de TX_k.

La géométrie de D est donc dictée par la dilatation normale des strates $(X_k)_k$ et par la géométrie des voisinages $(U_k)_k$.

Comme la dilatation normale de ces strates n'est en général uniforme que pour k minimal, c'est par récurrence croissante sur k que l'on va construire D. On va ainsi combiner une récurrence croissante avec une récurrence décroissante...

iii) Géométrie du domaine fondamental. On va définir dans cette partie et la suivante une famille de petits réels strictement positifs $(t_k)_{k=1}^d$ par récurrence croissante : le réel t_k sera considéré assez petit en fonction de $(t_j)_{j<k}$. On dira que la famille $(t_k)_{k=0}^{d-1}$ est *récursivement assez petite*.

Pour $k \in \{0, \dots, d-1\}$ et $t > 0$, on note :

$$W_k^t := \left\{ x \in U_k; \quad \sum_{y \in F_x^k} R(y) < t \right\}.$$

On pose :

$$W_k := W_k^{t_k},$$
$$U := \Upsilon \setminus kp_{|\hat{U}_k}^{-1}(W_k)$$

Par (i.1) et la propriété 3.2, pour $t < T$, on a $f^{-1}(W_k^t) \subset W_k^{t/\lambda}$. On suppose donc chaque t_k inférieur à T, ainsi l'union $\cup_{n \geqslant 0} \hat{f}^{-n}(U)$ est égale à $\Upsilon \setminus B$. On suppose aussi $(t_k)_k$ récursivement assez petite, pour que $C_k := adh(W_k \setminus \cup_{l<k} f^{-1}(W_l))$ soit un compact propre inclus dans U_k et $\hat{f}^{-1}(\cup_{j \leqslant k} p_{|\hat{U}_j}^{-1}(C_j))$ soit inclus dans l'intérieur de $\cup_{j \leqslant k} p_{|\hat{U}_j}^{-1}(C_j)$, pour $k \in \{0, \dots, d-1\}$.

On démontrera à la fin la propriété, non triviale, suivante :

Propriété 3.3. — *Il existe une fonction Ψ de classe C^s sur Υ, valant 1 sur U et 0 sur $\Upsilon \setminus \hat{f}^{-1}(U)$ telle que, pour $(t_k)_{k=0}^{d-1}$ récursivement assez petite, le noyau $E_k(x) := \ker(dR_1 \circ T_x p_y)_{y \in F_x^k}$ soit uniformément proche de celui de $x \mapsto (dR \circ T_x p_y)_{y \in F_x^k}$, pour $x \in C_k$.*

Il s'agit maintenant de fixer $(t_k)_k$, par une récurrence croissante, en fonction de la dilatation normale. Pour convenir à la définition itérative de r, on va matérialiser l'influence de la dilations normale des strates de $(X_k)_k$ par des champs de cônes.

iv) Champs de cônes. La dilatation normale et la propriété 2.1.12 de [2] implique le

Fait 3.4. — *Pour $k \in \{0, \dots, d-1\}$ et $\epsilon_k > 0$, il existe t_k assez petit devant $(t_j)_{j<k}$ et un champ de cônes χ_k sur C_k tels que :*

(1) *pour $x \in C_k$, $E_k(x)$ est maximal en tant que qu'espace vectoriel inclus dans $\chi_k(x)$; de plus, tout vecteur non nul de $\chi_k(x)$ forme un angle inférieur à ϵ_k avec un vecteur de $E_k(x)$,*

(2) *le champ de cônes χ_k est f_*-stable : pour $x \in C_k \cap f^{-1}(C_k)$, le cône $T_x f^{-1}(\chi_k(f(x)))$ est inclus dans $\chi_k(x)$.*

L'esquisse de la preuve dans ii) invite à fixer définitivement $(t_j)_{j=0}^{d-1}$ et $(\epsilon_j)_{j=0}^{d-1}$ tels que de plus, pour $j \in \{1, \dots, d-1\}$, on a :

(A_j) pour $i < j$ et $x \in C_j \cap C_i$, le cône $\chi_j(x) \cap \ker(dR_1 \circ Tp_y)_{y \in F_x^i \setminus F_x^j}$ est inclus dans $\chi_i(x)$.

Pour ce faire, on procède par récurrence croissante sur $j \in \{0, \dots, d-1\}$:

L'assertion (A_0) est vide de sens.

Soit $k \in \{1, \dots, d-1\}$. Supposons $(\epsilon_j)_{j<k}$ et $(t_j)_{j<k}$ fixés pour que tout ce qui précède (et notamment les assertions (A_j), pour $j < k$) soit vérifié.

Pour tous $i < k$ et $x \in C_k \cap C_i$, l'espace $E_i(x)$ est inclus dans le cône ouvert $\chi_i(x)$ et la fibre F_x^k est incluse dans F_x^i. Donc, pour ϵ_k assez petit, le cône $\chi_k(x)$ qui est ϵ_k-proche de $E_k(x)$, vérifie :

$$\chi_k(x) \cap \ker(dR_1 \circ T_x p_y)_{y \in F_x^i \setminus F_x^k} \subset \chi_i(x).$$

Par compacité, on peut choisir ϵ_k indépendamment de $x \in C_k \cap C_i$. Ainsi, l'assertion (A_j) est vérifiée pour un tel ϵ_k que l'on fixe maintenant. On fixe aussi t_k pour que tout ce qui précède soit vérifié.

v) Vérification de la propriété (P_3). On va montrer par récurrence décroissante la propriété suivante :

Propriété 3.5. — *Sur C_k, le noyau de la différentielle de r_k est inclus dans χ_k.*

Démonstration. — Pour commencer, on remarque que :

$$\emptyset =: M_{-1} \subset M_0 := p_{|\hat{U}_0}^{-1}(C_0) \subset \cdots M_k := \cup_{j \leqslant k} p_{|\hat{U}_j}^{-1}(C_j) \subset \cdots \subset M_d =: \Upsilon$$

est une filtration. Autrement dit, la préimage par $\hat{f}$ de M_k est incluse dans l'intérieur de M_k, pour $k \in \{0, \dots, d-1\}$.

Comme $p_{|\hat{U}_{d-1}}^{-1}(C_{d-1})$ est égal à $adh(p_{|\hat{U}_{d-1}}^{-1}(W_{d-1}) \setminus \hat{f}^{-1}(M_{d-2}))$ toute orbite partant de $p_{|\hat{U}_{d-1}}^{-1}(C_{d-1}) \setminus A_{d-1}$ arrive en D en étant restée dans C_{d-1}. Ainsi, le noyau de la différentielle de r_{d-1} en $x \in C_{d-1}$, qui est égal à celui de $f_*^{n_y}(dR_1 \circ Tp_{f^{n_y}(y)})_{y \in F^{d-1}(z)}$ par (3.1), est inclus dans $\chi_{d-1}(x)$ par les assertions 1 et 2 du fait 3.4.

Soit $k \in \{0, \dots, d-2\}$. On suppose que, pour $j > k$, la propriété 3.5 est vérifiée. Comme $p_{|\hat{U}_k}^{-1}(C_k)$ est égal à $adh(p_{|\hat{U}_k}^{-1}(W_k) \setminus f^{-1}(M_{k-1}))$, toute orbite partant de $p_{|\hat{U}_k}^{-1}(C_k) \setminus A_k$ arrive en D en franchissant $(M_i)_{i \geqslant k}$ par ordre croissant.

Soit $x \in C_k$. Si tous les points de F_x^k arrivent en D en étant restés dans M_k, alors ils sont aussi tous restés dans $p^{-1}_{|\hat{U}_k}(C_k)$. La propriété 3.5 s'obtient alors comme dans le cas $k = d-1$, car les entiers $(n_y)_{y\in F_x^k}$ sont tous égaux. Sinon, on considère $n \geqslant 0$ minimal tel qu'il existe un élément de $y \in F_x^k$ dont l'image $\hat{f}^n(y)$ appartient à $p^{-1}_{|\hat{U}_l}(C_l)$, pour $l > k$. On choisit alors l maximal. Par minimalité de n et comme x n'appartient pas à $f^{-1}(\cup_{j<k}C_j)$, le point $x' := f^n(x)$ appartient à C_k. Comme la fibre $F_{x'}^k$ contient $F_{x'}^l$, on a :

$$\ker T_{x'}r_k = \ker T_{x'}r_l \cap \ker T_{x'}(r(z))_{z\in F_{x'}^k\setminus F_{x'}^l}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\ker T_{x'}r_k \subset \chi_l(x') \cap \ker T_{x'}(r(z))_{z\in F_{x'}^k\setminus F_{x'}^l}.$$

On va montrer que les éléments de $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ appartiennent à D. On a alors d'après (A_l) :

$$\ker T_{x'}r_k \subset \chi_l(x') \cap \ker T_{x'}(R_1(z))_{z\in F_{x'}^k\setminus F_{x'}^l} \subset \chi_k(x').$$

Et par f_*-stabilité de χ_k, on a :

$$\ker T_x r_k \subset (f_*^n \chi_k)(x) \subset \chi_k(x).$$

Ce que l'on souhaitait démontrer.

Il suffit donc de montrer que les éléments de $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ appartiennent à D. Tout d'abord, le point x' appartient à C_l. Donc, tous les points de $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ n'appartiennent pas à $\cup_{j<l}\hat{f}^{-1}(p^{-1}_{|\hat{U}_j}(W_j)) = \cup_{j<l}\hat{f}^{-1}(p^{-1}_{|\hat{U}_j}(C_j))$. Par définition, ces éléments n'appartiennent pas n'ont plus à $p^{-1}_{|\hat{U}_l}(C_l)$. Enfin par maximalité de l, l'ensemble $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ ne peut pas intersecter $\cup_{j>l}p^{-1}_{|\hat{U}_j}(C_j)$. Ainsi, l'ensemble $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ est inclus dans le complémentaire de $\hat{f}^{-1}(U) = \cup_j \hat{f}^{-1}(p^{-1}_{|\hat{U}_j}(C_j))$. Comme x' appartient à C_k, les éléments de $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ appartiennent bien à D. □

Cette dernière propriété montre en particulier que $\ker(T_x r_k)$ est un espace de dimension k, pour tout $x \in C_k$.

On montre maintenant par récurrence décroissante sur k que la propriété (P_3) est vérifiée. Soit $k \in \{1, \dots, d\}$. On va commencer par montrer que $\ker(Tr_k)$ est continue sur C_k. Par l'hypothèse de récurrence, seule la continuité en $\tilde{K}_k := C_k \cap X_k$ n'est pas évidente. Soit $(x_n)_n \in C_k^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $x \in \tilde{K}_k$. Soit E une valeur d'adhérence de $(\ker(T_{x_n}r_k))_n$. L'angle entre les espaces E et $E_k(x) = T_x X_k$ est donc inférieur à ϵ_k. Par f_*-stabilité de $\ker Tr_k$ et f-stabilité de $\tilde{K}$, il existe une valeur d'adhérence E_m de $(\ker(T_{f^m(x_n)}r_k))_n$, qui est ϵ_k-proche de $E_k(f^m(x))$ et telle que E

soit égale à $(T_x f^m)^{-1}(E_m)$. Donc par dilatation normale et la propriété 1 du fait 3.4, l'espace E est égal à $E_k(x) = T_x X_k$. Cela prouve la continuité de $\ker(Tr_k)$, par compacité de la grassmannienne.

On finit maintenant de démontrer la propriété (P_3). Pour $x \in X_k$, il existe $n \geqslant 0$ tel que le point $f^n(x)$ appartient à l'intérieur de $\tilde{K}_k$ dans X_k. Par dilatation normale, il existe un voisinage V_x de $x \in N$ dont l'image par f^n est incluse dans C_k et tel que, pour tout $x' \in V_x$, l'espace $\ker T_{x'} r_k$ est de dimension k.

Par régularité de Tf^n et régularité de $\ker Tr_{k|C_k}$, quitte à réduire V_x, la restriction $\ker Tr_{k|V_x}$ est continue.

On pose alors $L_k := int(\cup_{x\in X_k} V_x \cup C_k)$, qui vérifie donc la propriété (P_3).

vi) Construction de Ψ (preuve de la propriété 3.3). La difficulté de cette propriété réside dans le fait que la famille de réels $(t_k)_k$ soit récursivement assez petite et que les compacts $(C_k)_k$ s'intersectent.

On rappelle que, dans la partie i), on a défini les réels $C > \lambda > 1$. On fixe une fonction ϕ croissante de classe C^s sur $\mathbb{R}$, s'annulant sur $]-\infty, 1/\lambda]$ et égale à 1 sur $]1, \infty[$. Pour $t > 0$, on pose $\phi_t := \phi(\cdot/t)$.

Soit $\Psi := \prod_{j=1}^d \phi_j$ avec $\phi_k := z \in \Upsilon \mapsto \begin{cases} \phi_{t_k}\left(\sum_{y\in F^k_{p(z)}} R(y)\right) & \text{si } z \in \hat{U}_k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Remarquons que Ψ est de classe C^s quand $(t_k)_k$ est récursivement assez petite : pour $k \in \{0, \dots, d-1\}$, il suffit que t_k soit assez petit pour que l'adhérence de $p^{-1}_{|\hat{U}_k}(W_k)$ intersectée avec la frontière de $\hat{U}_k$ soit incluse dans $\hat{f}^{-1}\big(\cup_{j<k} p^{-1}_{|\hat{U}_j}(W_j)\big)$, où $\prod_{j=1}^{k-1} \phi_j$ est nulle.

On remarque enfin que la fonction Ψ est bien nulle sur $\Upsilon \setminus \hat{f}^{-1}(U)$ et égale à 1 sur U.

On doit donc montrer que, pour $(t_j)_j$ récursivement assez petite, le noyau $E_k(x) := \ker(dR_1 \circ Tp_y)_{y\in F^k_x}$ est uniformément proche de celui de $x \mapsto (dR \circ Tp_y)_{y\in F^k_x}$, pour $x \in C_k$ et $k \in \{0, \dots, d-1\}$.

Pour toute la suite de cette preuve, les estimations seront uniformes sur C_k ou sur $p^{-1}_{|\hat{U}_k}(C_k)$ et seront effectuées pour $(t_k)_k$ récursivement assez petite.

On commence par calculer la différentielle de R_1 :

$$dR_1 = \Psi dR + \frac{(1-\Psi)}{C} dR \circ T\hat{f} + \left(R - \frac{R \circ \hat{f}}{C}\right) d\Psi.$$

Et, on a pour $z \in \Upsilon$:

$$d_z\Psi = \sum_{\{i;\hat{U}_i\ni z\}} \left(\prod_{j\neq i} \phi_j\right)(z)\cdot d_z\phi_i = \sum_{\{i:\hat{U}_i\ni z\}} \underbrace{\left(\prod_{j\neq i} \phi_j\right)(z)\cdot \frac{\phi'}{t_i}}_{=:f_i(z)} \cdot \sum_{y\in F^i_{p(z)}} d(R\circ p_y).$$

On analyse maintenant la différentielle de R_1.

- Les fonctions Ψ et $(1-\Psi)/C$ sont à valeurs dans $[0,1]$.
- Par dilatation normale, la différentielle $\frac{dR\circ T\hat{f}}{\|dR\circ T\hat{f}\|}$ est proche de $\frac{dR}{\|dR\|}$ sur $p^{-1}_{|\hat{U}_k}(C_k)$. On a ainsi l'existence d'une fonction continue a sur Υ, bornée et supérieure à 1, telle que :

  $$\Psi dR + \frac{(1-\Psi)}{C} dR\circ T\hat{f} = a\cdot dR + o(1), \quad \text{sur } p^{-1}_{|\hat{U}_k}(C_k).$$

  On note que la fonction a est indépendante de $(t_j)_j$.
- La fonction $\rho := \left(R - \frac{R\circ\hat{f}}{C}\right)$ est positive et inférieure à R, d'après (i.1). Donc, pour tout l, sur $p^{-1}_{|\hat{U}_l}(C_l)$, la fonction ρ est à valeurs dans $[0,t_l]$.

Malheureusement, la norme uniforme de $\rho\cdot d\Psi$ sur C_k n'est ni négligeable ni dans la direction de dR, pour $k\in\{1,\dots,d-2\}$. Cependant, la propriété 3.2.2 veut seulement que l'intersection des noyaux de $(dR_1\circ Tp_y)_{y\in F^k_x}$ soit proche de l'intersection des noyaux de $(dR\circ Tp_y)_{y\in F^k_x}$, sur C_k.

On remarque que, pour $i<l$, la norme uniforme de la fonction f_i est petite devant $1/t_l$.

Ainsi, pour $x\in C_l$ et $z\in F^l_x$, on a :

$$\rho(z)\cdot \sum_{\{i<l:\hat{U}_i\ni z\}} f_i(z) \sum_{y\in F^i_x} d(R\circ p_y) = o(1).$$

Et, pour $z\in \hat{U}_i \setminus p^{-1}_{|\hat{U}_i}(C_i)$, on a :

$$f_i(z) = 0$$

On conclut que, pour $x\in C_k$ et $z\in F^k_x$, si $l\geqslant k$ est maximal tel que z soit dans $p^{-1}_{|\hat{U}_l}(C_l)$, on a :

$$d_zR_1 = a(z)\cdot d_zR + \rho(z)\cdot f_l(z)\sum_{y\in F^l_x} d(R\circ p_y) + o(1).$$

Aussi, pour $k\in\{1,\dots,d\}$ et $x\in C_k$, si x appartient exactement à $(C_{i_j})^l_{j=1}$, pour $(i_j)_j \in \{k,\dots,d-1\}^l$ décroissant (et ainsi $i_l = k$), on a

pour $z \in F_x^{i_j} \setminus F_x^{i_{j-1}}$ (avec $F_x^0 := \emptyset$) :
$$d_z R_1 = a(z) \cdot d_z R + \rho(z) \cdot f_{i_j}(z) \sum_{y \in F_x^{i_j}} d(R \circ p_y) + o(1).$$
On munit F_x^k d'un ordre compatible avec l'indexation $(i_j)_j$, selon lequel on effectue un produit extérieur :
$$\bigwedge_{z \in F_x^k} d(R_1 \circ p_z)$$
$$= \bigwedge_{j=1}^{l} \bigwedge_{z \in F_x^{i_j} \setminus F_x^{i_{j-1}}} \left(a(z) d(R \circ p_z) + \rho(z) \cdot f_{i_j}(z) \sum_{y \in F_x^{i_j}} d(R \circ p_y) + o(1) \right).$$
Tous les scalaires étant positifs, ce produit est égal à :
$$\prod_{j=1}^{l} \left(\prod_{z \in F_x^{i_j} \setminus F_x^{i_{j-1}}} a(z) + \sum_{z \in F_x^{i_j} \setminus F_x^{i_{j-1}}} \rho(z) \cdot f_{i_j}(z) \prod_{y \in F_x^{i_j} \setminus (F_x^{i_{j-1}} \cup \{z\})} a(y) \right) \bigwedge_{z \in F_x^k} \Big(d(R \circ p_z) + o(1) \Big).$$
Cela implique le noyau de $(d(R_1 \circ p_y))_{y \in F_x^k}$, est de dimension k et uniformément proche de $\ker(d(R \circ p_y))_{y \in F_x^k}$ sur C_k, pour une famille $(t_j)_j$ récursivement assez petite.

3.3. Preuve de la propriété 3.2

Pour chaque $k \geqslant 0$, comme N est supposée envoyée par f dans N' relativement compacte, par dilatation normale, il existe un compact K de X_k tel que
$$\cup_{n \geqslant 0} f_{|N}^{-n}(K) = X_k.$$
Comme $p_{|A_k}$ est un revêtement à $d-k$ feuillets de X_k et comme p est un difféomorphisme local, il existe un petit voisinage ouvert $\hat{V}_k$ de $p_{|A_k}^{-1}(K)$ tel que $p_{|\hat{V}_k}$ et $p_{|\hat{V}_k \cup \hat{f}^{-1}(\hat{V}_k)}$ soient des revêtements à $d-k$ feuillets de $V_k := p(\hat{V}_k)$ et $V_k \cup f_{|N}^{-1}(V_k)$ respectivement.
$$\text{Soient } \hat{U}_k := \cup_{n \geqslant 0} \hat{f}^{-n}(\hat{V}_k) \text{ et } U_k := p(\hat{U}_k).$$
D'après l'expression de $\hat{U}_k$, la préimage $\hat{f}^{-1}(\hat{U}_k)$ est incluse dans $\hat{U}_k$. On va montrer que $f_{|N}^{-1}(U_k)$ est inclus dans U_k.

On considère l'application $I : x \in \hat{V}' \mapsto (p(x), \pi(x)) \in V' \times \partial N$, avec $\pi : \partial N \times \mathbb{R}^+ \to \partial N$ la projection canonique. L'application I est une bijection qui permet de faire l'identification géométrique suivante. Un point de $\hat{V}'$ est la donnée d'un point z de N avec une face de l'intersection de N avec un voisinage ouvert de z. Appelons cette face, *une face locale de N proche de x*. Les faces locales ne doivent pas être confondues avec les faces (globales) de N. Par exemple, quand la variété est la "goutte" (voire la partie 3.1), un point proche de l'arrête de dimension 0 est proche de deux faces locales, alors que cette variété est munie d'une unique face.

Par dilatation normale, en choisissant $\hat{V}_k$ petit, on peut choisir $\hat{U}_k$ inclus dans un petit voisinage de l'adhérence de A_k.

L'endomorphisme Tf induit une application entre les faces locales proches de $f(x) \in U_k$ vers les faces locales proches de x car, par dilation normale, la préimage par Tf d'un hyperplan proche de TX_{d-1} est un hyperplan proche de TX_{d-1}. La dilatation normale entraine même que cette application entre faces locales est bijective. On remarque que l'inverse de cette application est $\hat{f}$. Ainsi, pour $x \in f_{|N}^{-1}(U_k)$, un point $y \in F^k_{f(x)}$ est la donnée de $f(x)$ munie d'une face locale proche de $f(x)$. Cette face possède une préimage pointée en x. Cela entraîne que y a une préimage par $\hat{f}$. Ainsi x appartient à $p(\hat{f}^{-1}(\hat{U}_k))$ qui est inclus dans $U_k = p(\hat{U}_k)$.

Cela entraîne aussi que, pour $x \in f_{|N}^{-1}(U_k)$, la fibre F^k_x est incluse dans $\hat{f}^{-1}(\hat{U}_k)$ et que $\hat{f}_{|F^k_x}$ est une bijection de F^k_x sur $F^k_{f(x)}$.

On va maintenant montrer les égalités suivantes :

$$U_k = \cup_{n\geqslant 0} f_{|N}^{-n}(V_k) \quad \text{et} \quad p(\hat{f}^{-n}(\hat{V}'_k)) = f_{|N}^{-n}(V'_k), \tag{3.2}$$

$$\text{avec} \quad \hat{V}'_k := \hat{f}^{-1}(\hat{V}_k) \setminus \hat{V}_k \quad \text{et} \quad V'_k := p(\hat{V}'_k) = f_{|N}^{-1}(V_k) \setminus V_k.$$

Soient $x \in U_k \setminus V_k$ et $y \in F^k_x$, comme $\hat{U}_k$ est égal à $\hat{V}_k \cup \bigcup_{n\geqslant 0} \hat{f}^{-n}(\hat{V}'_k)$, il existe alors un unique $n \geqslant 0$ tel que y appartient à $\hat{f}^{-n}(\hat{V}'_k)$. Donc $\hat{f}^n(y)$ appartient à $\hat{V}'_k$ et, par commutativité du diagramme, $f^n(x)$ appartient à V'_k. Cela implique que x appartient à $f_{|N}^{-n}(V'_k)$. Donc $p(\hat{f}^{-n}(\hat{V}'_k))$ est inclus dans $f_{|N}^{-n}(V'_k)$ et U_k est inclus dans $\cup_{\geqslant 0} f_{|N}^{-n}(V_k)$. Comme U_k contient V_k et est f^{-1} stable, on obtient les égalités de (3.2).

On peut maintenant démontrer que $p_{|\hat{U}_k}$ est un revêtement à $(d-k)$ feuillets de U_k. On a défini $\hat{V}_k$ de façon à ce que la restriction de p à $\hat{V}_k \cup \hat{f}^{-1}(V_k) = \hat{V}_k \cup \hat{V}'_k$ soit un revêtement à $(d-k)$ feuillets de $V_k \cup f_{|N}^{-1}(V_k) = V_k \cup V'_k$. Par la deuxième égalité de (3.2), tous les éléments de $\hat{U}_k \setminus (\hat{V}_k \cup \hat{V}'_k)$ sont envoyés par p à l'extérieur de $V_k \cup V'_k$. Donc F^k_x est de cardinalité $(d-k)$ pour $x \in V_k \cup V'_k$.

Pour $x \in f_{|N}^{-n}(V'_k)$, par la deuxième égalité de (3.2), la fibre F_x^k est incluse dans $\hat{f}^{-n}(\hat{V}_k)$. Par la bijectivité de $\hat{f}^n_{|F_x^k}$, puis la commutativité du diagramme, et enfin la cardinalité de F_y^k, pour $y = f^n(x) \in V'_k$, la fibre F_x^k est bien de cardinalité $(d-k)$.

D'après la première égalité de (3.2), cette discussion implique que $p_{|\hat{U}_k}$ est un revêtement de U_k à $(d-k)$ feuillets.

Pour $j \leqslant k$ et $x \in X_k$ qui tend vers $y \in X_j$, F_x^k tend à être inclus dans F_y^j. Quitte à restreindre V_k et V_j, on peut donc supposer que, pour $x \in U_k \cap U_j$, la fibre F_x^k est incluse dans F_x^j.

4. Questions et remarques sur le théorème de persistance des variétés à coins

En réalité, la version générale du théorème 1.1 (voir le résultat principal de [2]) implique que nous avons montré la C^s-persistance des variétés à coins en un sens plus fort. En effet, toute perturbation f' de f préserve une stratification Σ' qui est l'image de $\Sigma_{|N'}$ par un plongement p contrôlé :

- p est un homéomorphisme sur son image C^0-proche de l'inclusion canonique de N' dans M,
- p envoie les strates de $\Sigma_{|N'}$ sur les strates de Σ' qui sont préservées par f'.
- la restriction de p à chaque intersection de N' avec chaque lamination[(5)] $(L_k, \mathcal{L}_k)$ est un plongement de lamination de classe C^s, proche de l'inclusion canonique. Cela signifie en plus que :
  - p est un plongement de classe C^s le long des plaques de $\mathcal{L}_k$ contenues dans N',
  - ses s premières différentielles varient continument transversalement au plaques,
  - ses différentielles sont proches de celle de l'identité sur tout compact de L_k,

Ainsi, Σ' est munie d'une structure de treillis de laminations $\mathcal{T}'$ de classe C^s. La version générale du théorème 1.1 implique enfin que la structure de treillis $\mathcal{T}'$ vérifie les hypothèses (i) et (ii) du théorème 1.1.

Chacune des laminations $(L_k, \mathcal{L}_k)_k$ étant des fibrations, il semble facile de constater que la stratification $\Sigma_{|N'}$ est persistante en tant que stratification c-régulière au sens de Bekka (voir [1]).

(5) $(L_k, \mathcal{L}_k)$ est définie durant la preuve du théorème 0.1.

Questions.

– Les orbifolds généralisent les structures de variétés à coins et sont aussi canoniquement stratifiés. Considérons un orbifold plongé dans une variété, dont la stratification canonique est normalement dilatée. Cette stratification est-elle persistante ?
– Plus généralement, on peut se demander si toute stratification c-régulière, préservée et normalement dilatée par la dynamique est persistante en tant que stratification c-régulière.
– Mañe a montré que les sous-variétés compactes C^1-persistantes et uniformément localement maximales [8] sont les sous-variétés normalement hyperboliques. Hirsh-Pugh-Shub [7] ont montré que toute sous-variété normalement hyperbolique, par un difféomorphisme f, est l'intersection transverse de deux sous-variétés (une fois) normalement dilatées et dont les adhérences compactes sont envoyées dans elles même par respectivement f et f^{-1}. Est ce que toute variété à coins compacte, C^1-persistante (en tant que stratification) et uniformément localement maximale est aussi l'intersection transverse de deux sous-variétés à coins vérifiant notre théorème 0.1 pour respectivement f et f^{-1} ?

Réciproquement, la persistance des variétés à coins de "façon contrôlée" implique que toute variété à coins compacte, laissée invariante par un difféomorphisme f, qui est l'intersection transverse de deux variétés à coins vérifiant notre théorème 0.1 pour respectivement f et f^{-1}, est alors persistante en tant que stratification a-régulière.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Bekka, « C-régularité et trivialité topologique », in *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 988/1989)*, Lecture Notes in Math., vol. 1462, Springer, Berlin, 1991, p. 42-62.

[2] P. Berger, « Persistence of stratifications of normally expanded laminations », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **346** (2008), n° 13-14, p. 767-772.

[3] ———, « Persistence of laminations », *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **41** (2010), n° 2, p. 259-319.

[4] J. Cerf, « Topologie de certains espaces de plongements », *Bull. Soc. Math. France* **89** (1961), p. 227-380.

[5] A. Douady, « Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires », in *Séminaire Henri Cartan, 1961/62, Exp. 1*, Secrétariat mathématique, Paris, 1961/1962, p. 11.

[6] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlag, New York, 1976, Graduate Texts in Mathematics, No. 33, x+221 pages.

[7] M. W. Hirsch, C. C. Pugh & M. Shub, *Invariant manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583, ii+149 pages.

[8] R. Mañé, « Persistent manifolds are normally hyperbolic », *Trans. Amer. Math. Soc.* **246** (1978), p. 261-283.

[9] J. N. MATHER, « Stratifications and mappings », in *Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 971)*, Academic Press, New York, 1973, p. 195-232.

[10] M. SHUB, « Endomorphisms of compact differentiable manifolds », *Amer. J. Math.* **91** (1969), p. 175-199.

[11] R. THOM, « Local topological properties of differentiable mappings », in *Differential Analysis, Bombay Colloq.*, Oxford Univ. Press, London, 1964, p. 191-202.

[12] H. WHITNEY, « Local properties of analytic varieties », in *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1965, p. 205-244.

Manuscrit reçu le 8 juillet 2008,
accepté le 6 juillet 2009.

Pierre BERGER
Université Paris 13
LAGA Institut Galilée
99 avenue J.B. Clément
93430 Villetaneuse (France)
berger@math.univ-paris13.fr