ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE LELONG

Fonctions entières de type exponentiel dans $\mathbf{C}^n$

Annales de l'institut Fourier, tome 16, nº 2 (1966), p. 269-318

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_2_269_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
16, 2 (1966), 269-318.

FONCTIONS ENTIÈRES DE TYPE EXPONENTIEL DANS C^n

par Pierre LELONG

---

1. Introduction; fonctions entières et fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel.

On étudie ici divers problèmes concernant la croissance des fonctions entières de n variables, à valeurs dans C^1 et de type exponentiel ([1]). Ils conduisent d'une part à la définition de domaines d'holomorphie, « images » de cette croissance, et, d'autre part, à la considération « d'ensembles exceptionnels » qui seront étudiés plus loin. Cette étude est utile en vue des applications à l'Analyse fonctionnelle. Elle est faite ici dans un cadre plus général que l'étude des seules fonctions entières. Selon une méthode générale, on considère simultanément une classe de fonctions plurisousharmoniques dans C^n. Cette classe qui sera dite encore de type exponentiel, est définie par la condition (3) plus loin.

On se contentera dans ce qui suit d'utiliser comme norme $||z||$ dans $C^n(z_1, \ldots, z_n)$ la distance à l'origine.

Une fonction entière $F(z) = F(z_1, \ldots, z_n)$ sera dite de type exponentiel fini γ si l'on a

$$(1) \qquad \limsup_{||z||=\infty} ||z||^{-1} \log |F(z)| = \gamma < \infty.$$

Pour $n = 1$, l'étude de la croissance de $V(z) = \log |F(z)|$ sur une demi-droite réelle issue de l'origine :

$$z = re^{i\theta}, \qquad r \to +\infty,$$

([1]) Cet article est le second d'une série consacrée aux fonctions entières (n variables) et à leurs applications; le premier a été publié dans le *Journal d'Analyse de Jérusalem* (cf. [6, g]).

est classique. Elle conduit à l'étude de l'indicatrice

$$h(\theta) = \limsup_{r=\infty} r^{-1} \log |F(re^{i\theta})|.$$

Rappelons que dans ce cas la fonction $L_r(z) = rh(\theta)$ est une fonction convexe dans le plan C^1. On en déduit un ensemble figuratif, le « diagramme de Polya » qui est un compact convexe K; ces propriétés sont en général étudiées conjointement avec celles de la transformée de Fourier-Borel (cf. [3]) définie par

$$\varphi(z) = z^{-1} \int_0^\infty F\left(\frac{u}{z}\right) e^{-u}\, du$$

qui converge hors de K.

On se propose ici une étude directe pour les fonctions entières de n variables $F(z_1, \ldots, z_n)$ vérifiant (1); cette étude conduit à la définition de deux indicatrices :

a) « l'indicatrice *radiale* de centre ζ » de F définie par $L_r(\zeta, z) = \limsup t^{-1} \log |F(\zeta_k + tz_k)$, t réel, $t \to +\infty$

b) « l'indicatrice *cerclée* de centre ζ » de F, définie par

$$L_c(\zeta, z) = \limsup |u|^{-1} \log |F(\zeta + uz_k)|,$$

u complexe, $|u| \to +\infty$.

Faisons quelques remarques sur les méthodes et les résultats :

1) On n'utilisera en fait que le caractère plurisousharmonique de

$$V = \log |F|. \tag{2}$$

Ceci correspond, si l'on veut, à une première étape de la recherche. Toutefois, dans certains cas, le résultat obtenu est dans son genre le meilleur possible et ne peut être amélioré quand on passe de la classe des fonctions plurisousharmoniques à celles qui sont du type (2) où F est analytique entière. Les fonctions $V(z)$, plurisousharmoniques dans tout C^n, qui vérifient

$$\limsup_{\|z\|=\infty} \|z\|^{-1} V(z) < \infty$$

seront dites de type exponentiel; l'expression sera justifiée plus loin.

2) L'étude des indicatrices L_r et L_c se décompose en deux parties :

a) l'étude des régularisées supérieures (relativement à z) notées $L_r^*(\zeta, z)$, $L_c^*(\zeta, z)$. Elles sont indépendantes du centre ζ. La fonction $L_c^*(z) = L_c^*(\zeta, z)$, *indicatrice cerclée régularisée*, est caractérisée [même dans le cas (2)] par la condition d'être plurisousharmonique et de vérifier $L_c^*(uz) = |u|L_c^*(z)$. Sa donnée équivaut encore à celle d'un domaine d'holomorphie semi-cerclé de centre à l'origine.

L'indicatrice *radiale régularisée* $L_r^*(z)$ a une trace convexe sur les droites complexes issues de l'origine. Son étude équivaut d'autre part à celle d'un ensemble ouvert d'holomorphie Δ décrit au § 6.

Ces propriétés montrent l'importance, pour $n > 1$, de la pseudo-convexité dans l'étude de la croissance.

b) D'autres résultats sont sans analogues dans le cas $n = 1$. Ils concernent les « ensembles exceptionnels » définis par $L_c(\zeta, z) < L_c^*(z)$ et par $L_r(\zeta, z) < L_r^*(z)$. Ils dépendent du centre ζ et appartiennent à une classe étudiée dans [6, *c*]. Ces ensembles exceptionnels sont ici précisés (ce qui a conduit à donner une certaine extension au § 2) et classés. Des problèmes demeurent ouverts, notamment la comparaison des ensembles de classe (N), (cf. § 2), appelés négligeables, et des ensembles globalement polaires pour la structure C^n.

3) Systématiquement on a évité ici l'emploi de la transformation de Fourier-Borel et de la correspondance entre fonctions entières et fonctions à singularités à distance finie qu'elle établit. Les domaines d'holomorphie mentionnés plus haut sont obtenus directement à partir des indicatrices régularisées, ce qui permet aussi de traiter le cas des fonctions plurisousharmoniques.

4) L'étude des indicatrices au voisinage du sous-espace réel R^n de C^n présente une importance en vue des applications à l'analyse fonctionnelle. En s'appuyant au § 8 sur le « théorème de Hartogs réel » établi dans [6, *c*] on donne une démonstration courte d'un énoncé de A. Martineau pour l'étude des fonctionnelles analytiques (cf. [7]).

5) Un cas particulier important fait l'objet du § 8; c'est le

cas des transformées de Fourier $\mathcal{F}T$, T fonctionnelle analytique à support réel ou distribution à support compact. Un résultat essentiel et simple est que $L_r^*(x) \leqslant 0$ sur les réels entraîne

$$L_r^*(x + iy) \leqslant L_r^*(iy) = h(y); \quad (z_k = z_k + iy_k);$$

$h(y)$ est alors évidemment une fonction convexe de y.

En annexe on trouvera d'autre part quelques propriétés d'une classe (S_0) de fonctions plurisousharmoniques (non constantes); (S_0) est une classe de croissance minimale dans C^n et est intimement liée à la classe (S_c) des indicatrices cerclées régularisées.

Définition du type exponentiel pour les fonctions plurisousharmoniques (²).

Étant donnée une fonction entière $F(z_1, \ldots, z_n)$, nous lui associons canoniquement la fonction plurisousharmonique

$$(2) \qquad V(z) = V(z_1, \ldots, z_n) = \log |F(z_1, \ldots, z_n)|.$$

On est conduit à la définition :

Définition 1. — *Une fonction* $V(z) = V(z_1, \ldots, z_n)$ *plurisousharmonique dans* C^n *est dite de type exponentiel* γ, *si l'on a*

$$(3) \qquad \limsup \|z\|^{-1} V(z) = \gamma < \infty.$$

Remarques. — *a*) Si $V = \log |F|$, F entière, on retrouve la condition habituelle.

b) $\|z\| = \left[\sum_1^n z_k \bar{z}_k \right]^{1/2}$ peut être, dans tout ce qui suit, remplacé par $[h(z, \bar{z})]^{1/2}$, h étant une forme hermitienne définie positive.

c) La définition précédente est également justifiée par l'existence de la classe de fonctions plurisousharmoniques de crois-

(²) Pour les propriétés générales des fonctions plurisousharmoniques, on se reportera à [6, *b*] et [6, *d*], en attendant la parution d'un ouvrage actuellement en préparation de l'auteur. Rappelons au lecteur qu'une fonction $V(z)$ est dite plurisousharmonique sur une variété analytique complexe (A) si : (*a*) $-\infty \leqslant V(z) < \infty$ et $V(z) \not\equiv -\infty$; (*b*) $V(z)$ est bornée supérieurement sur tout compact; (*c*) si L^1 est l'image holomorphe d'une droite complexe dans (A), la restriction de V à L^1 est localement soit la constante $-\infty$, soit une fonction sousharmonique.

Une fonction plurisousharmonique est semi-continue supérieurement et est une fonction R^{2n} sousharmonique (cf. [6, *a*]).

sance minima. Cette classe fait l'objet de l'Annexe placée à la fin de cet article. Son existence résulte de l'énoncé suivant :

PROPOSITION 1. — *Soit* $M(r) = \sup V(z)$, *pour* $\|z\| = r$, *et soit*

$$a = \liminf \frac{M(r)}{\log r}. \tag{4}$$

Si $a \leqslant 0$, $V(z)$ *est une constante.*

En effet $M(r)$ est fonction convexe de $\log r$ (cf. [6, a]). Donc dans (4) la limite existe. Soit $z^0 = (z_k^0)$ un point différent de l'origine O ; on lui associe la droite complexe $C^1(z^0)$ d'équations $z_k = uz_k^0$, où u est un paramètre complexe; la restriction $v_{z^0}(u) = V(z_k^0 u)$ est, d'après la définition même des fonctions plurisousharmoniques, soit la constante $-\infty$, soit une fonction sousharmonique. Mais, d'après (4), $v_{z^0}(u)$ est nécessairement une constante et vaut $V(0)$. On a $V(0) \neq -\infty$, sinon on aurait $V(z) \equiv -\infty$, contrairement à la définition adoptée pour les fonctions plurisousharmoniques. Finalement on a $V(z) \equiv V(0)$ et $V(0) \neq -\infty$, ce qui établit l'énoncé.

COROLLAIRE. — *Si* $V(z)$ *est plurisousharmonique dans* C^n, *et est bornée supérieurement*, $V(z)$ *est une constante finie.*

La proposition 1 montre qu'il existe, parmi les fonctions plurisousharmoniques non constantes dans C^n une classe (S_0) de croissance minimale caractérisée par la condition qu'on ait pour $\|z\| \to +\infty$:

$$\limsup\, [\log \|z\|]^{-1}\, V(z) = a, \qquad 0 < a < \infty.$$

Revenons aux fonctions de type exponentiel.

PROPOSITION 2. — *Si* $V(z)$ *est plurisousharmonique de type exponentiel, la famille*

$$V_t(\zeta, t) = t^{-1}\, [V(\zeta_k + tz_k)], \qquad t \geqslant 1 \tag{5}$$

est bornée supérieurement sur tout compact de $C^n(\zeta) \times C^n(z)$.

En effet (3) entraîne pour tout $\gamma' > \gamma$ l'existence d'une constante finie c telle qu'on ait

$$\begin{aligned} V(z) &\leqslant \gamma'\|z\| + c \\ V_t(\zeta, z) &\leqslant \gamma'\|z\| + t^{-1}\,(c + \gamma'\|\zeta\|) \end{aligned} \tag{6}$$

et l'existence d'une borne supérieure fixe de V_t pour

$$\|z\| < R, \quad \|\zeta\| < R', \qquad t \geqslant t_0 > 0.$$

2. Ensembles polaires et ensembles négligeables.

Rappelons quelques résultats et notations antérieurs (cf. [6, *a*] et [6, *b*]) :

a) Étant donnée une fonction $f(p)$, $p \in X$ espace topologique, et f à valeurs réelles, nous appellerons *régularisée supérieure* de f (notée $f^* = \text{reg sup } f$) la fonction

$$f^*(p) = \limsup_{p' \to p} f(p')$$

f^* est encore la plus petite majorante semi-continue supérieurement de f.

b) Appelons famille $\mathcal{F}$ une famille de fonctions plurisousharmoniques bornée supérieurement sur tout compact du domaine de définition. Si $V_t(z)$ est une famille $\mathcal{F}$,

$$W(z) = \sup_t V_t(z)$$

n'est pas en général une fonction plurisousharmonique, mais $W^*(z) = \text{reg sup } W(z)$ l'est. De même pour $\limsup V_t(z)$, cf. [6, *a*] et [6, *d*].

c) L'ensemble $E = [z;\ W(z) < W^*(z)]$ a des propriétés de raréfaction particulières cf. [6, *a*], [6, *c*].

Si la variété est un domaine de C^n, E est évidemment R^{2n}-polaire, donc de R^{2n}-mesure nulle. Mais il a des propriétés plus précises. Il est la somme de n ensembles : $E = \Sigma\eta_k$, où η_k est coupé par les droites complexes $C^1(z_k)$ selon un ensemble polaire dans le plan de la variable z_k (c'est-à-dire R^2-polaire). Il est intéressant aussi de noter que, d'après un résultat de G. Choquet [2], un ensemble du type précédent est toujours contenu dans un ensemble E' construit par le même procédé mais à partir d'une sous-famille dénombrable; $W(z)$ est alors une fonction de Baire (cf. [6, *c*]). On notera enfin (cf. [6, *c*] que E est de R^n-mesure nulle sur le sous-espace réel $R^n \subset C^n$, et sur ses images holomorphes, par exemple sur l'arête d'un polycercle dans C^n.

Nous donnerons ici quelques résultats complémentaires nécessaires pour la suite :

Définition 2. — *Un ensemble* E *sur une variété analytique complexe* (A) *sera dit globalement polaire s'il existe une fonction* V(*z*) *plurisousharmonique sur* (A) *telle que*

$$E \subset [z;\ V(z) = -\infty].$$

Rappelons qu'une fonction est plurisousharmonique sur (A) si elle l'est sur chaque carte par rapport aux coordonnées locales. Nous dirons que (A) est *dénombrable à l'infini* si $(A) = \sum_1^\infty A_m$, les A_m étant des ouverts croissants relativement compacts sur (A) et tels que tout compact $K \subset (A)$ appartienne à un A_q. Bien que nous n'ayons en vue que $(A) = C^n$, nous énoncerons sous forme générale :

Proposition 3. — *Si* $V_q(z)$ *est une suite de fonctions plurisousharmoniques sur une variété analytique complexe* (A) *dénombrable à l'infini, il existe des coefficients* a_q, b_q *réels avec* $a_q > 0$ *tels que, si l'on pose* $V'_q(z) = a_q V_q(z) + b_q$, *la série* $\Sigma V'_q(z)$ *converge sur* (A) *vers une fonction plurisousharmonique.*

En effet sur une carte locale de A_1, on choisit z^0 de manière que l'on ait $V_q(z^0) > -\infty$ pour tout indice q, ce qui est possible car les ensembles

$$[z;\ V_q(z) = -\infty]$$

sont de mesure nulle dans l'espace des coordonnées locales.

On va former à partir de $V_q(z)$ une suite $V'_q(z) = a_q V_q(z) + b_q$, $a_q > 0$, de manière que $\varepsilon_q > 0$ étant donné, avec $\Sigma\varepsilon_q < \infty$, on satisfasse aux deux conditions :

(7) $\qquad V'_q(z) \leqslant 0 \quad$ sur $\quad A_q$

(8) $\qquad -\varepsilon_q \leqslant V'_q(z^0) \leqslant 0.$

Il suffit de poser, si $m_q = \sup V_q(z)$ pour $z \in A_q$:

a) $V'_q(z) = V_q(z) - m_q$ si $V_q(z^0) = m_q$, (auquel cas V_q est constante dans A_q).

b) $V'_q(z) = \varepsilon_q[m_q - V_q(z^0)]^{-1}\,[V_q(z) - m_q]$, si $V_q(z^0) < m_q$.

Dans tous les cas, (7) et (8) sont vérifiées par la suite $V'_q(z)$ ainsi construite.

Soit $S(z) = \sum_{1}^{\infty} V'_q(z)$: $S(z)$ est plurisousharmonique sur (A) car sur A'_q la suite $\sum_{1}^{r}$ est décroissante pour $r > q$. Elle converge donc soit vers la constante $-\infty$ sur (A) soit vers une fonction plurisousharmonique sur (A); la convergence en z^0 assure qu'on est dans le second cas, ce qui établit l'énoncé.

Proposition 4. — *Soit* $E = \sum_{1}^{\infty} E_q$ *une réunion dénombrable d'ensembles globalement polaires sur la variété analytique* (A) *dénombrable à l'infini. Alors* E *est globalement polaire.*

En effet si $E_q = [z;\, V_q(z) = -\infty]$, on construit à partir de $\{V_q(z), A_q\}$ comme à la Proposition 3, une suite

$$V_q(z) = a_q V_q(z) + b_q, \quad a_q > 0,$$

et l'on a évidemment

$$E \subset [z;\, S(z) = -\infty]$$

ce qui établit l'énoncé.

Définition 3. — *On dira qu'un ensemble* E *est négligeable ou de classe* (N) *sur une variété analytique complexe* (A) *s'il existe une suite croissante* $V_q(z)$ *de fonctions plurisousharmoniques sur* (A), *localement bornée supérieurement, telle qu'on ait*

$$\lim_q V_q(z) = W(z) \qquad \textit{et} \qquad E \subset [z;\, W(z) < W^*(z)]$$

où $W^* = \text{reg sup } W$.

La fonction $W(z)$ est de la classe (M_0) étudiée dans [6, *c*]. Il en résulte qu'un ensemble de classe (N) dans un domaine de C^n est de R^{2n}-mesure et même de R^{2n}-capacité nulle ([3]).

On verra plus loin qu'un ensemble globalement polaire sur (A) est aussi de classe (N) sur (A). Mais la réciproque est encore un problème ouvert : un cas particulier fera l'objet de la Proposition 7.

Proposition 5. — *Si* $E = \sum_{1}^{\infty} E_q$ *et si les* E_q *sont de classe* (N) *dans un domaine* D *de* C^n, (*éventuellement* D *est* C^n *lui-même*), *alors* E *est de classe* (N) *dans* D.

([3]) La notion d'ensemble négligeable définie ici est relative à la structure C^n et plus fine que celle de la théorie du potentiel dans R^{2n}.

Par hypothèse on a :

$$E_q \subset [z;\ W_q(z) < W_q^*(z)]$$

avec $W_q(z) = \lim\limits_{s=\infty} V_{q,s}(z)$, la suite $V_{q,s}$ étant croissante de l'indice s, pour q donné. Les $V_{q,s}$, ainsi que les W_q^* sont des fonctions plurisousharmoniques.

Opérant comme plus haut à la Proposition 3, on construit :

a) une suite croissante $\{A_q\}$, $q \geqslant 1$, d'ouverts relativement compacts avec $\lim A_q = D$, tout compact $K \subset D$ appartenant à A_q pour q assez grand;

b) un point $z^0 \in A_1$ tel qu'on ait $W_q(z^0) = W_q^*(z^0) > -\infty$ pour tout q, ce qui est possible car les E_q ainsi que les ensembles $[z;\ W_q^*(z) = -\infty]$ sont de mesure nulle;

c) une suite de nombres $\varepsilon_q > 0$, avec $\Sigma\varepsilon_q < \infty$, et des a_q, b_q avec $a_q > 0$, tels que

$$W_q'^*(z) = a_q W_q^*(z) + b_q$$

vérifient $W_q'^* \leqslant 0$ sur A_q et $-\varepsilon_q \leqslant W_q'^*(z^0) \leqslant 0$. On pose alors $W_q' = a_q W_q + b_q$, $V_{q,s}' = a_q V_{q,s} + b_q$ et l'on forme :

$$S(z) = \Sigma W_q'^*(z); \qquad \sigma(z) = \Sigma W_q'(z).$$

Comme plus haut, $S(z)$ est plurisousharmonique dans D et coïncide avec $\sigma(z)$ sauf sur E, c'est-à-dire presque partout; on a $\sigma(z) \leqslant S(z)$, donc $\sigma^*(z) = S(z)$.

D'autre part on a

$$\lim_{s=\infty} V_{q,s}'(z) = W_q'(z). \tag{9}$$

La suite (9), pour q fixé, s croissant, est une suite croissante. Pour q fixé, on a encore, $d\tau$ étant l'élément d'espace

$$\lim_{s=\infty} \int_K [W_q'^*(z) - V_{q,s}'(z)]\, d\tau = 0 \tag{10}$$

sur tout domaine compact K dans D. On extrait une suite $V_{q,m}'' = V_{q,s_m}'$, de manière à réaliser pour q fixé :

$$\int_{A_q} [W_q'(z) - V_{q,m}''(z)]\, d\tau \leqslant \frac{\varepsilon_q'}{m} \tag{11}$$

la suite ε'_q étant choisie arbitrairement sous les conditions $\varepsilon'_q > 0$, $\sum_q \varepsilon'_q = 1$.

Posons alors

$$(12) \qquad S_m(z) = \sum_{q=1}^{q=\infty} V''_{q,m}(z)$$

$S_m(z)$ est plurisousharmonique dans D, car d'après

$$V''_{q,m}(z) \leqslant W'^{*}_q(z)$$

la somme $\sum_{q=1}^{q=r}$ est décroissante de r sur A_t dès que l'on a $r > t$. On a évidemment d'autre part :

$$S_m(z) \leqslant \sigma(z) \leqslant S(z)$$

pour tout m. Ainsi $S_m(z)$ est une suite croissante de fonctions plurisousharmoniques sur D.

Si maintenant K est un domaine compact dans D, on a $K \subset A_r$ pour un certain r fini et alors :

$$\int_K [S(z) - S_m(z)]\, d\tau \leqslant \sum_q \int_{A_r} [W'^{*}_q(z) - V''_{q,m}(z)]\, d\tau = \sum_q I_q.$$

On peut choisir $m > m_1$ de manière que, pour

$$1 \leqslant q \leqslant r,$$

on ait :

$$I_q = \int_{A_r} (W'^{*}_q - V''_{q,m})\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2r}$$

$\varepsilon > 0$ étant donné. Ceci est possible d'après (10).

Si $q > r$, on majore I_q en utilisant (11) puisqu'on a $K \subset A_q$. Il vient finalement

$$(13) \qquad \int_K [S(z) - S_m(z)]\, d\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{m} \sum_1^{\infty} \varepsilon'_s \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{m}.$$

Le compact K étant fixé l'intégrale

$$\int_K [S(z) - S_m(z)]\, d\tau = \int_K |S(z) - S_m(z)|\, d\tau$$

peut donc être rendue aussi petite qu'on veut si m est assez grand; d'après un résultat classique, ceci montre, la suite S_m

étant croissante, que si l'on pose

$$\sigma_1(z) = \lim_{m=\infty} S_m(z),$$

on aura

$$\sigma_1^*(z) = S(z).$$

On a donc

$$\sigma_1(z) \leqslant \sigma(z) \leqslant S(z) \qquad \text{et} \qquad \sigma_1^* = \sigma^* = S.$$

Soit ζ un point de E_k; on a $W_k(\zeta) < W_k^*(\zeta)$, donc $\sigma(\zeta) < S(\zeta)$. Il en résulte

$$E = \Sigma E_k \subset [z; \sigma(z) < S(z)] \subset [z; \sigma_1(z) < S(z)].$$

Mais le dernier ensemble est de classe (N) dans D, et la Proposition 5 est établie.

Le résultat précédent va nous conduire à une propriété particulièrement simple. Soit comme dans [6, *c*], (M) la classe des fonctions à valeurs réelles définie sur une variété analytique complexe (A) de la manière suivante :

(I) — (M) contient les fonctions plurisousharmoniques sur (A); celles-ci constituent la classe (C_0) dans (M).

(II) — (M) est formée par l'addition de classes successives (C_0), (C_1) ... (C_q), où (C_q) est formée des enveloppes supérieures des familles $\mathcal{F}$ de fonctions $V_t(z) \in (C_{q-1})$, et des fonctions $W \not\equiv -\infty$ qui sont limites de suites décroissantes de fonctions déjà obtenues.

Une classe plus restreinte (M_0), formée de fonctions de Baire, est obtenue en ne prenant que les familles $\mathcal{F}$ dénombrables (cf. [6, *c*]). Alors on a :

THÉORÈME 1. — *Pour toute fonction* $W \in (M)$, *la régularisée* W^* *est plurisousharmonique et* $E = [z; W(z) < W^*(z)]$ *est de classe* (N).

Tout d'abord (cf. [6, *c*]) et [2] on peut se contenter d'établir le théorème pour (M_0) car si $W(z) = \sup V_t(z)$, $V_t(z) \in \mathcal{F}$, il existe un suite extraite $V_m(z) = V_{t_m}(z)$ avec

$$\sup V_{t_m}(z) = W'(z) \qquad \text{et} \qquad W'^*(z) = W^*(z).$$

On a alors $E = [z; W(z) < W^*(z)] \subset [z; W'(z) < W'^*(z)] = E_1$.

On établira l'énoncé par récurrence. Si $V_m(z) \in (C_q)$ la suite V_m étant localement bornée supérieurement, on a en posant

$$W(z) = \sup_m V_m(z), \qquad W'(z) = \sup_m V_m^*(z)$$

$$(14) \quad E = [z;\, W(z) < W^*(z)] \subset \sum_{m=1}^{m=\infty} [z;\, V_m(z) < V_m^*(z)] + [z;\, W'(z) < W^*(z)]$$

car on a $W(z) \leqslant W'(z) \leqslant W^*(z)$ ce qui donne en prenant les régularisées supérieures $W^*(z) \leqslant W'^*(z) \leqslant W^*(z)$, soit

$$W'^* = W^*.$$

Finalement W^* est encore une fonction plurisousharmonique puisqu'elle est égale à W'^* et E est compris dans une réunion dénombrable d'ensembles de classe (N); il est donc de classe (N) d'après la Proposition 4.

Reste à considérer le cas d'une suite décroissante $V_m(z)$ tendant vers $W(z) \not\equiv -\infty$. En supposant la propriété vraie pour les V_m, on a :

$$E = [z;\, W(z) < W^*(z)] \subset \sum_1^{\infty} [z;\, V_m(z) < V_m^*(z)]$$

et $W^*(z) = \lim V_m^*(z)$, cette suite étant décroissante. Alors la Proposition 5 montre que E est encore de classe (N) et $W^*(z)$ est encore plurisousharmonique.

Le théorème 1 est donc établi.

Corollaire. — *Si on considère une famille* $V_t(z)$ *localement bornée supérieurement de fonctions de classe* (M), *et si l'on pose* $W(z) = \lim \sup_t V_t(z)$, *alors si* $W(z) \not\equiv -\infty$, $W^*(z)$ *est plurisousharmonique et l'ensemble* $[z;\, W(z) < W^*(z)]$ *est un ensemble de classe* (N).

En effet on se ramène au cas d'une suite $V_m(z) = V_{t_m}(z)$; puis on opère comme plus haut en formant $\sup_{m \geqslant p} V_m(z) = W_p(z)$ et considérant la suite décroissante $W_p(z)$.

Le corollaire ne suppose pas que les $V_t(z)$ appartiennent à une classe (C_q) d'indice q borné quand t varie.

Un ensemble globalement polaire sur une variété analytique (A) y est de classe (N); en effet si l'on a $E \subset [z;\, V(z) = -\infty]$, on a aussi $E \subset [z; W(z) = \limsup \frac{1}{n} V(z) < W^*(z)]$ où $W^*(z)$ est évidemment la constante nulle sur (A).

La réciproque demeure un problème ouvert dans le cas général, mais on démontrera :

Proposition 7. — *Si $V_t(z)$ est une famille de fonctions plurisousharmoniques localement bornée supérieurement sur une variété analytique* (A) *à base dénombrable et si*

$$\sup V_t(z) = W(z)$$

a sa régularisée supérieure $W^*(z)$ égale à une constante ou à une fonction pluriharmonique, alors $E = [z;\ W(z) < W^*(z)]$ est globalement polaire.

On peut évidemment pour la démonstration se contenter du cas où $W^*(z) \equiv 0$. On peut aussi d'après le résultat rappelé plus haut, se ramener au cas d'une suite $V_m(z)$. On suppose donc

$$\limsup V_m(z) = W(z) \qquad \text{avec} \qquad W^*(z) = 0.$$

L'ensemble E étant de mesure nulle sur toute carte de (A), on choisit z^0 de manière que $W(z^0) = 0$; on extrait de $\{V_m\}$ une suite partielle notée V_p telle que $\lim V_p(z^0) = 0$, et on la choisit de manière que $\Sigma|V_p(z^0)| < \infty$. On a alors

$$W'(z) = \limsup V_p(z) \leqslant W(z) \leqslant 0.$$

Alors $W'^*(z)$ est plurisousharmonique; on a $W'^*(z^0) \geqslant 0$ et $W'^*(z) \leqslant W^*(z) \leqslant 0$, ce qui entraîne $W'^*(z) \equiv 0$ et

$$E_1 = [z;\ W'(z) < W'^*(z)] \supset [z;\ W(z) < W^*(z)] = E$$

de sorte qu'on est ramené à montrer que E_1 est globalement polaire.

Soit comme plus haut $\{A_q\}$ une suite croissante d'ouverts relativement compacts contenant z^0 et tendant vers (A); associons à $\{A_q\}$ une suite ε_q, avec $\varepsilon_q > 0$, $\Sigma\varepsilon_q < \infty$, ε_q décroissants. D'après le théorème classique de Hartogs, il existe pour chaque q un m_q tel qu'on ait $V_p(z) < \varepsilon_q$ pour $z \in A_q$ et $p \geqslant m_q$. Les m_q sont évidemment croissants et l'on considèrera cette nouvelle suite extraite $V_{m_q} = V_q(z)$.

Comme plus haut, on a

$$E_2 = [z;\ \sup V_q(z) = W''(z) < W''^*(z)] \supset E.$$

On pose

$$V'_q(z) = V_q(z) - \varepsilon_q$$

de sorte qu'on a $V_q(z) \leqslant 0$ pour $z \in A_q$, et $\Sigma|V_q(z^0)| < \infty$.
Alors comme à la Proposition 3,

$$(14) \qquad S(z) = \Sigma V'_q(z)$$

est plurisousharmonique sur (A). D'autre part si $\zeta \in E_2$, il existe $\alpha > 0$, tel que $V'_q(z) \leqslant -\alpha - \varepsilon_q < -\alpha$, quel que soit q; donc on a d'après (14) : $S(\zeta) = -\infty$ et $\zeta \in [z;\ S(z) = -\infty]$, ce qui établit que E_2 et, par suite E lui-même, est globalement polaire.

3. Définition des indicatrices.

Partons d'une fonction plurisousharmonique

$$V(z) = V(z_1, \ldots, z_n)$$

de type exponentiel fini (qui peut être en particulier

$$V = \log |F|,$$

F entière).

Définition 4. — a) *On appelle indicatrice radiale, de centre* $\zeta = (\zeta_k)$ *de la fonction plurisousharmonique* $V(z)$ *de type exponentiel, la fonction*

$$(15) \qquad L_r(\zeta_k;\ z_k) = \limsup t^{-1}\, V(\zeta_k + tz_k), \quad t \to +\infty, \quad t \text{ réel}.$$

b) *On appelle indicatrice cerclée, de centre* $\zeta = (\zeta_k)$ *de* $V(z)$ *la fonction :*

$$(16) \qquad L_c(\zeta_k;\ z_k) = \limsup |u|^{-1}\, V(\zeta_k + uz_k), \quad |u| \to +\infty, \quad u \text{ complexe}.$$

c) *Si* $F(z) = F(z_1, \ldots, z_n)$ *est une fonction entière de type exponentiel fini, on appelle indicatrices de* F *les indicatrices définies en* a) *et* b) *pour* $V = \log |F|$.

PROPOSITION 8. — *Soit* V *de type exponentiel* γ. *On a :*

$$(17) \qquad L_c(\zeta_k; z_k) = \sup_\theta . L_r(\zeta_k; z_k e^{i\theta}) \leqslant \gamma \|z\|.$$

A un point $z^0 = (z_k^0)$, $z^0 \neq 0$, correspondent d'une part le rayon $R^1(z^0)$ issu de l'origine et donné par $z_k = z_k^0 t$, $t > 0$, t réel, et d'autre part la droite complexe $C^1(z^0)$ définie par $z_k = z_k^0 u$, u complexe; (17) résulte des définitions.

PROPOSITION 9. — *On a :*

$$(18) \qquad L_r(\zeta_k; \sigma z_k) = \sigma L_r(\zeta_k; z_k) \qquad \text{pour tout} \qquad \sigma > 0$$
$$(19) \qquad L_c(\zeta_k; \nu z_k) = |\nu| L_c(\zeta_k; z_k) \qquad \text{pour tout} \qquad \nu \text{ complexe.}$$

C'est une conséquence immédiate des définitions.

De la Proposition 1 résulte alors que les régularisées supérieures de L_r, L_c par rapport à z (respectivement ζ) sont des fonctions plurisousharmoniques de z (respectivement ζ). On considérera également la régularisée supérieure dans l'espace produit $\zeta \times z$. On a :

PROPOSITION 10.

$$(20) \qquad \operatorname{reg} \sup_\zeta L_r(\zeta; z) \leqslant \operatorname{reg} \sup_z L_r(\zeta; z) = \operatorname{reg} \sup_{\zeta \times z} L_r(\zeta; z)$$

et le même énoncé où l'on remplace L_r *par* L_c.

En effet considérons un rayon $z_k = \zeta_k^0 + t z_k^0$, $z^0 = (z_k^0) \neq 0$. Le cône $P(\zeta^0, U_\alpha)$, de sommet $\zeta^0 = (\zeta_k^0)$, de base la boule $U_\alpha = [z; \|z - z_0\| < \alpha]$ contient, à l'extérieur d'une boule de centre l'origine, de rayon suffisamment grand, le cylindre de base $\|z - \zeta^0\| < R$ dans C^n, qui a pour direction de génératrices le vecteur z^0. Car si l'on écrit $z_k = \zeta_k^0 + \zeta_k + t z_k^0$, $\|\zeta\| < R$, les coordonnées d'un point du cylindre, on a

$$z_k = \zeta_k^0 + t(z_k^0 + t^{-1}\zeta_k)$$

et il suffit de prendre t de manière qu'on ait $t^{-1}\|\zeta\| < t^{-1}R \leqslant \alpha$ pour que (z) appartienne à $P(\zeta^0, U_\alpha)$.

Si donc $\operatorname{reg} \sup_z L_r(\zeta : z)$ vaut A pour $\zeta = \zeta^0$, $z = z^0$, on a $V(\zeta_k^0 + t z_k) \leqslant (A + \varepsilon)t$, pour $\|z - z^0\| < \alpha$, $t > t_0$, d'après le théorème de Hartogs (l'énoncé en est rappelé au § 7) et il en résulte $V(\zeta_k^0 + \zeta_k + t z_k^0) \leqslant (A + \varepsilon)t$ pour $\|\zeta\| < R$, pour $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$, ce qui établit l'énoncé.

De (20) découle alors que $\operatorname{reg}_z L_r(\zeta;\ z)$ présente un intérêt particulier.

Définition 5. — *On appellera indicatrices régularisées (respectivement radiales et cerclées) les fonctions*

$$L_r^*(\zeta;\ z) = \operatorname{reg}\sup_z L_r(\zeta;\ z)$$
$$L_c^*(\zeta;\ z) = \operatorname{reg}\sup_z L_c(\zeta;\ z).$$

Théorème 2. — 1) *Les indicatrices régularisées sont indépendantes du centre* ζ. *On les notera* $L_r^*(z)$ *et* $L_c^*(z)$.

2) *Pour chaque rayon z fixé, l'ensemble des* ζ *où l'on a*

$$L_r(\zeta;\ z) < L_r^*(z) \qquad \text{ou} \qquad L_c(\zeta;\ z) < L_c^*(z)$$

est globalement polaire dans C^n.

3) *Les fonctions* $L_r^*(z)$ *et* $L_c^*(z)$ *sont plurisousharmoniques et vérifient respectivement les identités*

$$L_r^*(\sigma z) = \sigma L_r^*(z) \qquad \textit{pour tout} \qquad \sigma > 0$$
$$L_c^*(uz) = |u| L_c^*(z) \qquad \textit{pour tout} \qquad u \textit{ complexe.}$$

En effet d'après la Proposition 10

$$\operatorname{reg}\sup_z L_r(\zeta;\ z) = \operatorname{reg}\sup_{\zeta\times z} L_r(\zeta;\ z)$$

est une fonction plurisousharmonique dans l'espace $\zeta \times z$; pour z fixé elle est donc plurisousharmonique de ζ (elle est évidemment différente de la constante $-\infty$). Mais d'après (6) elle est majorée par la constante γ, type exponentiel de V. Elle est donc bornée. Il résulte alors de la Propriété 1 qu'elle est une constante pour z fixé. On peut donc écrire $L_r^*(z)$ au lieu de $L_r^*(\zeta;\ z)$.

De même pour $L_c^*(\zeta,\ z)$ qui sera noté $L_c^*(z)$.

Le 3) découle de la Proposition 2 et de l'identité (18).

Le 2) est une conséquence du 1) et de la Proposition 7.

Remarque. — Si on considère

$$G_r(\zeta;\ z) = \operatorname{reg}\sup_\zeta L_r(\zeta;\ z)$$

c'est une fonction plurisousharmonique de ζ pour z fixé;

elle est comme plus haut indépendante de ζ; on l'écrira $G_r(z)$ et pour z fixé l'ensemble $L_r(\zeta; z) < G_r(z)$ est globalement polaire. On a $L_r(\zeta; z) \leqslant G_r(z) \leqslant L_r^*(z)$. Il résulte d'autre part d'un théorème donné [4] dans [6, *c*] que

$$\operatorname{reg}\sup_{\zeta}\,[\operatorname{reg}\sup_{z}] = \operatorname{reg}\sup_{\zeta\times z}$$

pour la fonction $L_r(\zeta; z)$. Donc $[z;\ G_r(z) < L_r^*(z)]$ est de classe (N). Peut-il être non vide? Il serait intéressant de l'étudier dans le cas général où $V(z)$ est plurisousharmonique et dans le cas restreint $V = \log|F|$, F entière.

4. Indicatrices cerclées.

Nous considèrerons une classe de fonctions plurisousharmoniques qui, en fait, coïncide avec celle des indicatrices cerclées régularisées [5].

DÉFINITION 6. — *Une fonction sera dite de classe* (S_c) *si elle est plurisousharmonique dans* C^n *et si elle vérifie :*

(21) $V(uz_k) = |u|\,V(z_k)$ *pour tout* u *complexe.*

PROPOSITION 11. — *Une fonction plurisousharmonique qui vérifie* (21) *a les propriétés suivantes :*

a) *Elle est de type exponentiel.*

b) *On a* $V \geqslant 0$ *et* $\log V$ *est plurisousharmonique.*

c) *Il existe une suite de polynômes homogènes* $P_m(z)$, *degré* $P_m = m$, *de manière que les fonctions*

$$V_m = \frac{1}{m}\log|P_m(z)|$$

soient bornées supérieurement sur tout compact et qu'on ait $\log V(z) = W^*(z)$ *avec* $W(z) = \limsup V_m(z)$.

Démonstration. — *a*) Résulte du fait que $\sup V(z)$ pour $\|z\| \leqslant 1$ est un nombre fini. On a donc $V(z) \leqslant a\|z\|$ d'après (21).

(4) Cf [6, *c*, Proposition $2{,}5_b$, p. 530].

(5) Les méthodes de ce paragraphe s'étendent aux fonctions entières d'ordre fini quelconque, cf [6, *i*].

b) D'après (21) on a également $V(0) = 0$; il existe en effet un point au moins, soit z^0 en lequel $V(z^0) \neq -\infty$ et (21) donne $V(0) = V(u_0 z^0) = |u_0| V(z^0)$ avec $u_0 = 0$, donc $V(0) = 0$. L'ensemble $V < 0$ est alors vide, car s'il contenait un point, soit z^1, on aurait $z^1 \neq 0$ et $V(uz)^1 = |u| V(z^1)$ montre qu'on a nécessairement $V \equiv -\infty$ sur $C^1(z^1)$, $V(uz^1)$ tendant vers $-\infty$ quand $|u| \to +\infty$. On a contradiction car on aurait alors $V(0) = -\infty$. Donc $[z;\ V(z) < 0]$ est vide et l'on a $V(z) \geqslant 0$.

Considérons alors le domaine cerclé $V(z) < 1$; il a l'origine comme point intérieur. Il est pseudo-convexe. Mais d'après un énoncé devenu classique (cf. [6, *a*]), si un domaine D défini par $S(u, z) < 1$ où S est plurisousharmonique contient

$$[u = 0,\ z \in d],$$

la distance $R(z)$, à la frontière de D parallèlement à $C^1(u)$, du point $[u = 0,\ z]$, a la propriété que $-\log R(z)$ est une fonction plurisousharmonique de z. Dans le cas présent cette distance $|u| = R(z)$ est donnée en écrivant

$$V(uz) = |u|\ V(z) = R(z)\ V(z) = 1.$$

Ainsi $\log V(z) = -\log R(z)$ est une fonction plurisousharmonique de z, soit $V_1(z)$ qui vérifie

$$V_1(\nu z) = \log |\nu| + V(z)$$

pour tout ν complexe. Elle appartient à la classe de croissance minimale (S_0) étudiée dans l'Annexe.

c) Revenons au domaine $D = [z;\ V(z) < 1]$; c'est un domaine d'holomorphie d'après le théorème de K. Oka. Il existe donc une fonction $G(z) = G(z_1, \ldots, z_n)$ ayant D comme domaine d'holomorphie.

Soit :

$$G(z) = \sum_0^\infty P_m(z) \tag{22}$$

son développement en série de polygones homogènes. On a :

$$G(uz_k) = \sum_0^\infty u^m P_m(z). \tag{23}$$

La série (23) converge dans le plus grand domaine cerclé $|u| < R'(z)$ contenu dans le domaine d'holomorphie de $G(uz_k)$ dans $C^{n+1}(u, z_k)$. On a donc $R'(z) = R(z)$ et d'après un résultat classique (cf. [6, *a*]) :

$$\log V(z) = -\log R(z) = \text{reg sup}\left[\limsup_{m} \frac{1}{m} \log |P_m(z)|\right]$$

qui achève la démonstration de l'énoncé.

Théorème 3. — *L'égalité* (21) *jointe à la propriété d'être plurisousharmonique dans* C^n *caractérise les indicatrices cerclées régularisées des fonctions entières de type exponentiel.*

En effet soit $L^*(z)$ une fonction plurisousharmonique dans C^n qui vérifie (21). On forme comme à la proposition précédente une fonction $G(z)$ ayant $D = [z;\ L^*(z) < 1]$ comme domaine d'holomorphie. On considère ensuite

$$G_1(z) = \Sigma \frac{1}{m!} P_m(z)$$

où l'isomorphisme $G \to G_1$ est (à un changement de variable près) la transformation de Fourier-Borel. Alors $G_1(z)$ est de type exponentiel γ; le calcul du type exponentiel en u de $G_1(uz_k)$ à partir de (23) — cf. [3] — montre que ce type est $L(0, z_k)$ qui vaut donc

$$L(0, z_k) = \limsup \left[\frac{1}{m} \log |P_m(z)|\right].$$

Alors $G_1(z)$ a bien $L^*(z)$ comme indicatrice cerclée régularisée, et l'on a établi une correspondance $L^* \to G_1$, G_1 entière (évidemment G_1 n'est pas unique) de manière que G_1 ait L^* comme indicatrice cerclée régularisée.

Théorème 4. — *Il existe une correspondance biunivoque entre les indicatrices cerclées régularisées des fonctions entières* F *de type exponentiel et les domaines d'holomorphie univalents ayant l'origine comme point intérieur et disqués par rapport à l'origine c'est-à-dire contenant en même temps que* (z) *le disque* $z'_k = \lambda z_k$, $|\lambda| \leqslant 1$.

On dira qu'un tel domaine est associé à l'indicatrice cerclée régularisée de F, ou encore *représente la croissance cerclée régularisée de* F.

Démonstration. — On a les correspondances : $F \to \log|F| \to L_c^*$, et $L_c^* \to D = [z;\ L_c^*(z) < 1]$, où D est un domaine du type indiqué. Dans l'autre sens, si D est donné, avec les propriétés indiquées, il est coupé par chaque $C^1(z_k)$,

$$z = (z_k) \neq 0,$$

selon un cercle de centre l'origine et sa trace dans $C^{n+1}[u, z_k]$ est un domaine $|u| < R(z_k)$; $-\log R(z_k)$ est plurisousharmonique et $R(\sigma z_k) = \sigma^{-1}R(z_k)$ pour tout $\sigma > 0$. Il en résulte qu'en posant $-\log R(z_k) = \log V(z_k)$, on définit D par

$$V(z_k) < 1$$

où V est de la classe (S_c). D'autre part à $V \in (S_c)$ correspond d'après le théorème 3 une fonction entière au moins, $G_1(z)$, de type exponentiel. Finalement à D correspond $G_1(z)$ de manière que D représente la croissance cerclée régularisée de G_1.

Remarque. — L'application $D \to V \in (S_c)$ est évidemment biunivoque; il n'en est rien de $V = L_c^* \to G_1$; pour L_c^* donnée de classe (S_c), il existe une famille de fonctions entières de type exponentiel qui ont la même indicatrice cerclée régularisée.

Théorème 5. — *L'application* $V \to L_c^*$, *soit* T *est une projection de l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel sur la sous-classe* (S_c).

En effet si on part d'une fonction de classe (S_c) elle est sa propre indicatrice cerclée régularisée.

Remarque. — 1° Par projection dans l'énoncé précédent, il faut entendre simplement une opération T vérifiant $T^2 = T$. L'espace (S) des fonctions plurisousharmoniques dans C^n n'est pas un espace vectoriel, mais seulement un cône : si $V \in (S)$, on a $\lambda V \in (S)$ pour $\lambda \geqslant 0$. De plus T n'est pas linéaire, on a seulement

$$L_c^*(V_1 + V_2) \leqslant L_c^*(V_1) + L_c^*(V_2).$$

2° Remarquons la propriété suivante :

Corollaire. — *Si* $V \in L(S_c)$, *cône des fonctions plurisousharmoniques vérifiant* (21), $T^{-1}(V)$ *contient au moins une fonction entière de type exponentiel qui a* V *pour indicatrice cerclée régularisée.*

L'ensemble $L_c(z) < L_c^*(z)$. — Contentons-nous de considérer $L_c(\zeta, z)$ pour $\zeta = 0$; soit $L_c(0, z) = L_c(z)$.

L'ensemble $E = [z; L_c(z) < L_c^*(z)]$ est de classe (N) d'après le théorème 1. De plus il est composé de droites complexes issues de l'origine. Il lui correspond alors canoniquement un ensemble e de l'espace projectif complexe P^{n-1}.

En particulier si $V = \log |F|$, et si $F(z) = \sum_0^\infty P_m(z)$, est une fonction entière de type exponentiel, P_m étant un polynôme homogène et de degré m, on aura :

$$L_c(z) = c(z) = \limsup_m me^{-1}|P_m(z)|^{1/m} = \limsup_m |m\,!\, P_m(z)|^{1/m}.$$

Sur une carte du projectif P^{n-1} où l'on prend comme coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_{n-1})$, E s'identifie à un ensemble de classe (N) de l'espace C^{n-1}.

En particulier si $n = 2$, on identifiera P^1 à $\overline{C}^1$ et on pourra utiliser la notion de capacité comme dans [6, *f*], et énoncer :

Proposition 12. — *Si* $F(z_1, z_2)$ *est une fonction entière de type exponentiel, l'ensemble* E :

$$\left[u = \frac{z_1}{z_2}; \quad L_c(z_1, z_2) < L_c^*(z_1, z_2)\right]$$

est de capacité nulle dans $\overline{C}^1$. *De plus si on se donne dans* $\overline{C}_1$ *une réunion dénombrable d'ensembles fermés de capacité nulle, soit* E', *on peut trouver* $F(z_1, z_2)$ *telle que* E *construit à partir de* F *contienne* E'.

5. Indicatrice radiale et indicatrice radiale régularisée.

Étudions d'abord l'indicatrice radiale régularisée (indépendante du centre ζ d'après le théorème 2) :

$$L_r^*(z) = \operatorname*{reg\,sup}_z \left[\limsup_t t^{-1}\, V(\zeta_k + tz_k)\right]$$

$L_r^*(z)$ est une fonction plurisousharmonique dans C^n et vérifie

$$(26) \qquad L_r^*(\sigma z) = \sigma L_r^*(z) \qquad \text{pour tout} \qquad \sigma > 0.$$

Proposition 13. — *Pour qu'une fonction* $V(z)$ *soit indicatrice radiale régularisée d'une fonction plurisousharmonique de type exponentiel dans* C^n, *il faut et il suffit que*

a) *elle soit plurisousharmonique dans* C^n;

b) *qu'elle vérifie l'identité* (26).

Elle est en effet alors de type exponentiel et est sa propre indicatrice radiale.

Proposition 14. — *Si* $L_r^*(z^0) = a$, *et* $\|z^0\| = 1$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un nombre* A *et un cône* G *de sommet l'origine, contenant* z^0 *à son intérieur, de manière que l'on ait uniformément*

$$V(z) < (a + \varepsilon)\|z\|$$

pour $z \in G$, $\|z\| \geqslant A$.

C'est une conséquence du théorème classique de Hartogs (pour le lecteur il est rappelé au § 7) : $L_r^*(z)$ étant semi-continue supérieurement, on a : $L_r^*(z) \leqslant a + \frac{\varepsilon}{2}$ dans une boule B : $\|z - z^0\| \leqslant b$, $b \neq 0$ et en particulier sur $F = B \cap [\|z\| = 1]$. Il en résulte

$$V_t(z) = t^{-1}V(tz) \leqslant a + \varepsilon$$

pour $z \in F$, $t > t_0$, d'après le théorème de Hartogs. Or un point d'un cône de base F, soit z' s'écrit $z' = \|z'\|z$, $\|z\| = 1$, ce qui établit l'énoncé en prenant F comme base de G et $A = t_0$.

Nous allons maintenant étudier la trace de L_r^* et celle de L_r sur une droite complexe issue de 0. Celle-ci est déterminée par un de ses points z^0, si $z^0 \neq 0$. On est ramené à étudier $L_r(z^0u)$ et $L_r^*(z^0u)$, où u est une variable complexe et $z^0u = (z_k^0u)$. Rappelons des résultats classiques de Polya (cf. [1]) en mettant en évidence le rôle des fonctions convexes dans le plan C^1.

Proposition 15. — a) *Les traces*

$$\psi_1(u) = L_r(z^0u), \qquad \psi(u) = L_r^*(z^0u)$$

sont des fonctions convexes dans le plan de la variable

$$u = u_1 + iu_2$$

b) *On a* $\psi(\sigma u) = \sigma\psi(u)$ *pour tout* $\sigma > 0$ *et de même pour* ψ_1.

c) On a $\psi(u+v) \leqslant \psi(u) + \psi(v)$, *pour tout couple* u, v *de nombres complexes. En particulier on a*

$$\psi(u) + \psi(-u) \geqslant 0$$

et la même propriété pour ψ_1, *ce qui donne*

$$(27) \quad L_r(z) + L_r(-z) \geqslant 0, \qquad L_r^*(z) + L_r^*(-z) \geqslant 0$$

Démonstration. — Les propriétés (*b*) étant déjà établies, montrons la convexité de $\psi(u)$ dans le plan $R^2(u_1, u_2)$: elle est une conséquence du théorème de Phragmen-Lindelöf appliqué à la fonction sousharmonique $\psi(u)$ dans le plan de la variable complexe u.

Soient $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$ et $u' = (u_1', u_2')$ deux points non alignés avec l'origine dans ce plan :

$$(28) \qquad u_1^0 u_2' - u_2^0 u_1' \neq 0.$$

Il existe d'après (28) une fonction linéaire (donc harmonique)

$$f(u_1, u_2) = au_1 + bu_2$$

qui prend en u^0 et u' les valeurs $\psi(u^0)$ et $\psi(u')$ respectivement. On a alors

$$\psi(u) - f(u_1, u_2) = 0$$

sur les côtés de l'angle $\omega = Ou^0, Ou'$, $|\omega| < \pi$. Il s'ensuit d'après le théorème de Phragmen-Lindelöf

$$\psi(u) \leqslant f(u_1, u_2) = au_1 + bu_2$$

dans cet angle ; en particulier sur le segment qui joint les points u^0, u', $\psi(u)$ est inférieur à la fonction linéaire $au_1 + bu_2$ qui coïncide avec $\psi(u)$ aux extrémités du segment, ce qui établit la convexité de $\psi(u)$ dans le plan de la variable complexe u.

La convexité de $\psi_1(u)$ s'établit en considérant sa régularisée $\psi_1^*(u)$ dans le plan de la variable u : $\psi_1^*(u)$ vérifie (*b*), est sousharmonique, donc est une fonction convexe. Mais on a

$$\psi_1(u) = \psi_1^*(u).$$

En effet $e = [u ; \psi_1(u) < \psi_1^*(u)]$ est de classe (N) dans le plan, donc de capacité nulle. S'il n'était pas vide, il contiendrait un point $v \neq 0$; il contiendrait alors le rayon $u = \sigma v$, $\sigma > 0$, en contradiction avec le fait qu'il est de capacité nulle.

La propriété (c) résulte de la convexité. On a en effet :

$$\frac{1}{2}\psi(u+v) = \psi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\psi(u) + \frac{1}{2}\psi(v).$$

Même propriété pour $\psi_1(u)$.

Posons $v = -u$; on obtient (c) à partir de $\psi(0) = \psi_1(0) = 0$.

Proposition 16. — *Si*

$$L_r^*(z^0) + L_r^*(-z^0) = 0, \qquad \psi(u) = L_r^*(z^0 u)$$

a la valeur $au_1 + c_1 u_2$ *pour* $u_2 \geqslant 0$ *et la valeur* $au_1 + c_2 u_2$ *pour* $u_2 \leqslant 0$, *avec* $c_1 - c_2 \geqslant 0$. *Même propriété pour* $L_r(z^0 u)$. *On a posé* $u = u_1 + iu_2$, $L_r^*(z^0 u) = L_r^*(z_k^0 u)$.

Considérons en effet la restriction $\psi(u)$ à la droite complexe issue de l'origine et passant par le point z^0. On a

$$\psi(1) + \psi(-1) = 0.$$

Il en résulte, si $\psi(1) = a$, qu'on a

$$\psi(u_1) = au_1, \qquad -\infty < u_1 < +\infty.$$

Alors

$$h(u_1, u_2) = \psi(u_1 + iu_2) - au_1$$

a les propriétés énoncées à la Proposition 15 et de plus vérifie $h(u_1, 0) \equiv 0$. De la propriété (c) découle si $u_2 \geqslant 0$ et si

$$h(0, 1) = c_1$$
$$h(u_1, u_2) \leqslant h(u_1, 0) + h(0, u_2) = h(0, u_2)$$
$$h(-u_1, u_2) \leqslant h(-u_1, 0) + h(0, u_2) = h(0, u_2).$$

La convexité de h quand u_1 varie seul donne alors, quel que soit u_1

$$h(u_1, u_2) = h(0, u_2) = c_1 u_2.$$

Finalement on a

$$\psi(u_1 + iu_2) = au_1 + c_1 u_2, \qquad \text{si} \qquad u_2 \geqslant 0.$$

De même on a

$$\psi(u_1 + iu_2) = au_1 + c_2 u_2, \qquad \text{si} \qquad u_2 \leqslant 0$$

et l'on a nécessairement $c_1 - c_2 \geqslant 0$, ψ étant fonction convexe de la variable u_2, ce qui achève la démonstration de l'énoncé.

Proposition 17 *a.* — *Si sur l'ensemble*

$$\Pi = [z_k = x_k + iy_k;\, y_k \geqslant 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n],$$

$V(z) = V(z_1, \ldots, z)$ *est plurisousharmonique et de type exponentiel, si* V *est négatif sur l'arête*

$$A = [z_k = x_k + iy_k;\, y_k = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n),$$

alors V *est majoré par une fonction des y seuls; on a:*

$$\sup_x V(x_k + iy_k) = h(y)$$

où $h(y)$ *est une fonction convexe des* y, *et l'on a* $h(y) \leqslant \gamma\|y\|$, γ *étant le type exponentiel de* V.

En effet dans le cas $n = 1$, si V est fonction sousharmonique dans le demi-plan $y \geqslant 0$, si V est de type exponentiel, et si $V \leqslant 0$ pour $y = 0$, la décomposition de Riesz de V dans le demi-plan (cf. [3], p. 92) donne:

$$V(x + iy) \leqslant cy$$

où

$$c = \lim_{r=\infty} \frac{2}{\pi r} \int_0^\pi V(re^{i\theta}) \sin\theta\, d\theta;\; z = re^{i\theta}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Pour $n > 1$, il en résulte en faisant varier z_1 seul

$$(29) \qquad V(z_1;\, x_2 \ldots x_n) \leqslant cy_1 \qquad \text{pour} \qquad y_1 \geqslant 0$$

c a une borne supérieure finie indépendante de $x_2 \ldots x_n$. Si l'on définit

$$g_1(z_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim \frac{2}{\pi r} \int_0^\pi V(z_1 + re^{i\theta},\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \sin\theta\, d\theta$$

g_1 est en effet borné par 2γ dans π et l'on aura (29) quels que soient $x_2 \ldots x_n$ avec une valeur finie c_1 de la constante c. On procède ensuite par récurrence; si l'on a établi

$$V(z_1 \ldots z_p;\, x_{p+1} \ldots x_n) \leqslant \sum_1^p c_k y_k$$

pour $y_k \geqslant 0$, et x_j réels, $p+1 \leqslant j \leqslant n$, on considèrera

$$V(z_1, \ldots, z_p, z_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n)$$

et l'on appliquera le raisonnement précédent au demi-plan $y_{p+1} \geqslant 0$ et à la fonction $V - \sum_1^p c_k y_k$, considérée comme fonction de z_{p+1} seul. De proche en proche il vient, les c_k étant finis :

$$V(z_1, \ldots, z_n) \leqslant \sum_1^n c_k y_k, \qquad y_k \geqslant 0. \tag{30}$$

Soit alors :

$$h(z) = \sup_x V(x_k + iy_k) = \sup_{x'} V(x'_k + x_k + iy_k),$$

$h(z)$ est égale à sa régularisée h^* car elles ne dépendent que des y et l'ensemble $[z;\, h(z) < h^*(z)]$ ne peut contenir un sous-espace déduit par translation du sous-espace réel; h^* est alors une fonction plurisousharmonique ne dépendant que des y; c'est donc une fonction convexe de l'ensemble des y. Finalement on a

$$\sup_x V(x + iy) = h(y); \tag{31}$$

$h(y)$ est une fonction convexe de y, pour $y_k \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, ce qui établit l'énoncé. La même méthode conduit dans C^n à :

Proposition 17*b*. — *Si* $V(z)$ *est plurisousharmonique de type exponentiel dans* C^n *et si l'on a* $V \leqslant 0$ *sur les réels, on a* (31) *où* $h(y)$ *est une fonction convexe de* y *dans* R.

En particulier considérons l'indicatrice L_r^* elle-même :

Proposition 18. — *Si on a* $L_r(0, x) = 0$ *sur les réels* x, *on a aussi* $L_r^*(x) = 0$, *et la fonction*

$$\sup_x L_r^*(x + iy) = l(y),$$

est une fonction convexe des y *vérifiant* $l(\sigma y) = \sigma l(y)$ *pour tout* $\sigma > 0$, $l(y + y') \leqslant l(y) + l(y')$.

En effet on a $L_r(0, x) = L_r^*(0, x)$ presque partout sur le sous-espace réel $R^n(x)$, la restriction aux réels d'un ensemble de classe (N) étant de R^n-mesure nulle. De plus

$$L_r(0, x) \leqslant L_r^*(0, x);$$

donc on a $L_r^*(0, x) \equiv 0$ sur $R^n(x)$. Alors si l'on pose

$$l(y) = \sup_x L_r^*(x + iy),$$

d'après la Proposition précédente, $l(y)$ est convexe. On a évidemment $l(\sigma y) = \sigma l(y)$ pour tout $\sigma > 0$, ce qui établit l'énoncé.

6. Domaines indicateurs de la croissance radiale.

Formons les ensembles ouverts :

$$\Delta_1 = [z;\ L_r^*(z) < 1] \tag{32a}$$
$$\Delta_2 = [z;\ L_r^*(-z) < -1]. \tag{32b}$$

Les fonctions $L_r^*(z)$, $L_r^*(-z)$ sont plurisousharmoniques; donc Δ_1 et Δ_2 sont deux ouverts d'holomorphie; les sections de Δ_1 et Δ_2 par une droite complexe issue de l'origine sont des ensembles convexes d'après la Proposition 5. D'autre part $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, car on a $L_r^*(z) + L_r^*(-z) \geqslant 0$. Donc $\Delta_1 \cup \Delta_2$ est un ouvert d'holomorphie.

Définition 7. — *L'ensemble ouvert $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ défini par* (31) *et* (32) *sera appelé l'indicateur de la croissance radiale de la fonction plurisousharmonique* V *dont* L_r^* *est l'indicatrice radiale régularisée.*

Proposition 19. — *L'indicateur Δ de la croissance radiale de* V *est un ouvert d'holomorphie. Il contient l'origine à son intérieur, ainsi que la boule $\|z\| < \gamma^{-1}$, γ étant le type exponentiel de* V. *Il est coupé par une droite complexe $z_k = z_k^0 u$, u complexe, selon un ou deux domaines convexes.*

Précisons la section de Δ par la réunion $r = r_1 \cup r_2$ de deux rayons opposés :

$$r_1 = [z;\ z = tz^0,\ t \geqslant 0]; \qquad r_2 = [z;\ z = tz^0,\ t \leqslant 0];$$

on suppose $z^0 \neq 0$.

Si $L_r^*(z^0) \geqslant 0$ et $L_r^*(-z^0) \geqslant 0$, Δ découpe sur r un segment

m_1m_2 (l'un des points m_1 ou m_2, ou les deux à la fois, sont éventuellement à l'infini) qui contient l'origine à son intérieur. Dans ce cas $\Delta \cap r = \Delta_1 \cap r$.

Si $L_r^*(z^0) \geqslant 0$ et $L_r^*(-z^0) < 0$, alors Δ découpe sur r deux segments illimités d'un côté, I_1 et I_2, n'empiétant pas et constituant un ensemble dont le complémentaire est un segment fermé non vide m_1m_2 ne contenant pas l'origine. Dans ce cas $I_1 = \Delta_1 \cap r$ et $I_2 = \Delta_2 \cap r$.

Diagramme compact. — Pour obtenir dans le cas $n > 1$ une « image » de la croissance radiale qui soit comparable avec le résultat classique de G. Polya, on est amené à considérer la sphère unité

$$\|z\| = 1$$

et son intersection avec une droite $C^1(z^0)$, $z^0 \neq 0$, déterminée par le point z^0. Soit $\|z^0\| = 1$, $z_k = z_k^0 u$; (c) étant le cercle défini par $|u| = 1$. La « polaire réciproque » par rapport à (c) de la frontière de l'ouvert $\Delta \cap C^1(z^0)$ est une courbe convexe : on supposera $z^0 = \lambda$, $\|\lambda\| = 1$ et dans le plan $C^1(\lambda)$ où la variable complexe est u : $u_1 + iu_2 = re^{i\theta}$, on posera $L_r^*(\lambda u) = rh(\theta)$. On considèrera la droite d d'équation

$$u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta - h(\theta) = 0.$$

Elle enveloppe, quand θ varie, un compact convexe $K(\lambda)$, le diagramme de Polya, de la fonction sousharmonique

$$\psi(u) = L_r^*(\lambda u);$$

les raisonnements classiques (cf. [3]) s'appliquent aussi bien en effet qu'il s'agisse d'une fonction entière ou d'une fonction sousharmonique de type exponentiel. Le fait que $K(\lambda)$ soit compact convexe dans $C^1(\lambda)$ résulte du fait que $K(\lambda)$ est borné, fermé dans $C^1(\lambda)$ et est l'image de la frontière convexe de $\Delta \cap C^1(\lambda)$ par la transformation par polaires réciproques faite par rapport au cercle (c) défini par $|u| = 1$ dans $C^1(\lambda)$. On a ainsi une démonstration élémentaire de l'existence et de la convexité du compact $K(\lambda)$.

La réunion, quand λ parcourt la sphère unité :

$$P = \cup K(\lambda), \qquad \|\lambda\| = 1$$

est un ensemble borné, contenu dans la boule $\|z\| \leqslant \gamma$. Montrons que P est fermé. Il suffit pour l'établir de prendre une suite de droites à une dimension réelle, soit d_q ayant pour limite d, soit

$$d_q = [z;\ z_k = \lambda_k^{(q)}(a_k^{(q)}t + b_k^{(q)})],$$

$a_k^{(q)}$, $b_k^{(q)}$ constantes complexes, $\lambda^{(q)} = (\lambda_k^{(q)})$ avec $\|\lambda^{(q)}\| = 1$, $a_k^q \to a_k$, $b_k^{(q)} \to b_k$, $\lambda_k^{(q)} \to \lambda_k^0$, de manière que $d_q \to d_0 \in C^1(\lambda^0)$ et de montrer que si $K(\lambda^{(q)} \cap d_q) \neq \emptyset$, $K(\lambda^0) \cap d$ n'est pas vide.

Si l'on passe dans chaque $C^1(\lambda)$ à la polaire réciproque, celle-ci définit une transformation continue L qui associe aux d_q des points m_q qui appartiennent au complémentaire $C(\Delta)$ de Δ dans C^n. Mais $C(\Delta)$ est fermé. Donc, si l'on a

$$m_q = L(d_q) \in C(\Delta) \qquad \text{et} \qquad L(d_0) = m_0 = \lim m_q,$$

on a $m_0 \in C(\Delta)$. Donc d_0 intersecte $K(\lambda^0)$, ce qui établit que P est fermé. P est donc un compact dans C^n.

Comparons au cas classique. Pour $n = 1$ le diagramme compact P ainsi construit est le symétrique, par rapport à l'axe réel, du « diagramme de Polya » hors duquel la transformée de Borel-Polya de $F(z)$ est définie comme fonction holomorphe. Pour $n > 1$, il est plus simple de considérer directement l'indicateur Δ précédemment défini : en effet Δ possède une propriété de pseudo-convexité qui se traduit, semble-t-il, plus malaisément sur P.

Donnons quelques applications dans la direction des recherches faites ces dernières années par plusieurs mathématiciens russes, notamment V. K. Ivanov [3] et Rankine [7]. La méthode suivie par eux utilise la transformation de Fourier-Borel des fonctions entières de deux ou n variables complexes; en déterminant son domaine de convergence (au sens de la convergence uniforme des fonctions de plusieurs variables), ils ont été conduits à énoncer :

PROPOSITION 20. — *Si l'on pose $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $r_k \neq 0$ et si l'on fixe les valeurs des φ_k, on a*

$$(34) \qquad L_r^*(r_k e^{i\varphi_k}) = \limsup_{\rho_k \to r_k} L_r(0, \rho_k e^{i\varphi_k}).$$

En effet au voisinage du point $z_k^0 = r_k e^{i\varphi_k}$, l'ensemble

$$\arg^t z_k = \varphi_k$$

est l'image du sous-espace réel par la transformation

$$z'_k = -i \log z_k.$$

Il est possible d'avoir des résultats plus précis. Disons qu'un ensemble E est C^n-*effilé en* z^0 s'il existe une fonction plurisousharmonique $V(z)$ au voisinage de z^0 pour laquelle $\limsup V(z) \leqslant -1$ quand $z \in E$, $z \to z^0$ et pour laquelle $V(z^0) = 0$. En modifiant un peu la méthode de [6, *c*, p. 540], on peut établir :

Proposition 21. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité* (34) *ait lieu est que* $\rho = (\rho_k) \to r = (r_k)$ *sur un ensemble e de manière que, dans l'espace des variables*

$$z'_k = \log z_k,$$

l'image e' *de e parcourue par* $z' = (z'_k = \log \rho_k + i\varphi_k)$ *soit un ensemble non effilé en* $z'^0_k = \log r_k + i\varphi_k$, *et conserve cette propriété après soustraction des points de tout ensemble de classe* (N) *défini au voisinage de* z'^0.

En particulier il suffit que e' contienne le produit d'ensembles e'_k, e'_k étant non effilé au point $z'^0_k = \log r_k + i\varphi_k$ (au sens de l'effilement plan) dans le plan de la variable z'_k. La Proposition 20 résulte du fait que l'espace des parties réelles Rz'_k possède cette propriété en z'^0_k.

Par suite de l'identité $L_r(\sigma z_k) = \sigma L(z_k)$, pour tout $\sigma > 0$, on peut énoncer encore :

$$\sup_{r_k} L_r(0, r_k e^{i\varphi_k}) = \sup L_r^*(r e^{i\varphi_k})$$

le sup étant pris pour $\Sigma r_k^2 = 1$. De même on a :

$$L_r^*(r_k e^{i\varphi_k}) = \limsup L_r(0, \rho_k e^{i\varphi_k})$$

quand $\rho_k \to r_k$, $\Sigma \rho_k^2 = \Sigma r_k^2 = 1$.

7. Applications du théorème de Hartogs « réel ».

Rappelons d'abord le classique théorème de Hartogs sous la forme générale donnée dans [6, *h*]. Il concerne les familles localement bornées supérieurement de fonctions sousharmoniques; il s'applique donc aussi aux fonctions plurisousharmoniques.

Théorème de Hartogs. — Soit $V_t(z)$, où t parcourt un ensemble ordonné, une famille de fonctions plurisousharmoniques dans un domaine D de C^n. On suppose la famille localement bornée supérieurement (c'est-à-dire sur tout compact dans D, les valeurs prises V_t ont une borne supérieure finie). Alors l'hypothèse

$$\limsup_t V_t(z) \leqslant g(z), \qquad z \in D \tag{35}$$

où $g(z)$ est une fonction continue dans D entraîne: à tout compact $K \subset D$, et à tout $\varepsilon > 0$, correspond t_0, tel que pour $t > t_0$ et $z \in K$, on ait

$$V_t(z) \leqslant g(z) + \varepsilon. \tag{36}$$

Cet énoncé maintenant classique ne doit évidemment rien à la structure complexe.

On a donné dans [6, *c*] un énoncé où l'hypothèse (35) ne porte que sur les points z à coordonnées réelles (un tel point sera dit réel). Rappelons cet énoncé:

THÉORÈME DE HARTOGS « RÉEL ». — *Soit* $V_t(z)$ *une famille localement bornée supérieurement de fonctions plurisousharmoniques dans* D, *où* t *parcourt un ensemble ordonné. On suppose que le sous-espace réel* R^n *intersecte* D *et on désigne par* d *un domaine (pour la topologie de* R^n*) appartenant à cette intersection. Soit* $g(x)$ *une fonction continue, et* $\bar{g}(z)$ *une fonction continue prolongeant* $g(x)$ *sur* C^n. *Alors si l'on a*

$$\limsup_t V_t(x) \leqslant g(x), \qquad x \text{ réel}, \quad x \in d \tag{37}$$

on a la propriété suivante; à tout compact $K \subset d$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *correspondent d'une part* t_0, *d'autre part un ouvert (pour la topologie de* C^n*), soit* $\Omega(K)$ *qui est un voisinage de* K *dans* C^n, *de manière que l'on ait*

$$V_t(z) \leqslant \bar{g}(z) + \varepsilon \tag{38}$$

pour $t > t_0$, $z \in \Omega(K)$.

Pour la démonstration voir [6, *c*].

Remarques. — 1) On pourra en particulier considérer le prolongement

$$\bar{g}(x_k + iy_k) = g(x).$$

2) L'énoncé, à la différence du précédent, donne la possibilité d'une majoration sur les complexes à partir de l'hypothèse (35) sur les réels.

3) On trouvera dans [6, *c*] des résultats plus précis. Si l'on considère

$$\mathrm{W}(z) = \limsup_{t} \mathrm{V}_t(z)$$

dans D et sa régularisée

$$\mathrm{W}^*(z) = \limsup \mathrm{W}(z') \qquad \text{pour} \qquad z' \to z.$$

On a :

$$\mathrm{W}^*(x) = \limsup_{x' \to x} \mathrm{W}(x') \qquad x' \to x \quad \text{sur les réels.}$$

En fait l'ensemble $\mathrm{W}(x) < \mathrm{W}^*(x)$ est de R^n-mesure nulle (cf. [6, *c*]).

Une conséquence directe du théorème de Hartogs réel est l'énoncé suivant :

Théorème 6. — *Soit* $\psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ *une fonction continue positive définie sur les réels* R^n, *et positivement homogène :*

$$\psi(\sigma x) = \sigma\psi(x) \qquad \textit{pour tout} \qquad \sigma > 0.$$

Soit d'autre part, $\mathrm{V}(z)$ *une fonction plurisousharmonique dans* C^n, *de type exponentiel c'est-à-dire vérifiant*

$$\limsup \|z\|^{-1}\mathrm{V}(z) = \gamma < \infty. \tag{39}$$

On désigne par $\overline{\psi}(x + iy)$ *le prolongement de* ψ *donné par*

$$\overline{\psi}(x + iy) = \psi(x).$$

Alors si l'on a sur les réels

$$\limsup_{t} t^{-1}\mathrm{V}(tx) \leqslant \psi(x), \qquad t \to +\infty$$

on a la propriété suivante : à tout $\varepsilon > 0$ *correspondent des* *constantes* $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ *telles qu'on ait sur* C^n :

$$V(z) = V(x_k + iy_k) \leqslant \psi(x_k) + \varepsilon\|x\| + C_1(\varepsilon)\|y\| + C_2(\varepsilon).$$

Démonstration. — On applique le théorème de Hartogs « réel » à la famille

$$V_t(z) = \frac{1}{t} V(tz), \qquad t \geqslant 1 \tag{40}$$

qui est bornée supérieurement sur tout compact d'après (39). On considère dans ce but le domaine

$$D = \frac{1}{4} < \|z\| < 4$$

et dans $R^n \cap D$ le compact K

$$K = \frac{1}{2} \leqslant \|x\| \leqslant 2.$$

A $\varepsilon > 0$ donné correspondent une valeur t_0 et un ouvert $\Omega(K)$ de C^n tels qu'on ait

$$V_t(z) \leqslant \overline{\psi}(z) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{41}$$

pour $t \geqslant t_0$, $z \in \Omega(K)$. Mais $\Omega(K)$ contient un compact

$$K' = [x \in K, \ \|y\| \leqslant \alpha]$$

pour un certain $\alpha > 0$.

Par homothétie $z \to tz$, $t \geqslant 1$, K′ recouvre tout $z = x + iy$ avec

$$\|x\| \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \|y\| \leqslant 2\alpha\|x\|.$$

De (41) l'on déduit :

$$V(tz) \leqslant t\overline{\psi}(z) + t\,\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour} \qquad z \in K', \quad t \geqslant t_0 \geqslant 1.$$

Les points tz, $z \in K'$, $t \geqslant t_0$, recouvrent l'ensemble $\Gamma(t_1)$:

$$\|z\| > t_1, \qquad \|y\| \leqslant 2\alpha\|x\|$$

si $t_1^2 \geqslant \frac{1}{4} t_0^2 (1 + 4\alpha^2)$. D'autre part t étant le rapport d'homothétie, on a $t < 2\,||x||$. En tenant compte de l'hypothèse

$$\psi(tx) = t\psi(x), \qquad t > 0,$$

pour $z \in \Gamma(t_1)$, $z = tz'$, $z \in \mathrm{K}'$, on a :

$$\mathrm{V}(z) = \mathrm{V}(tz') \leqslant t\overline{\psi}(z') + \frac{\varepsilon}{2}\, t.$$

Finalement on obtient :

$$\mathrm{V}(z) \leqslant \overline{\psi}(z) + \varepsilon||x|| \tag{42}$$

pour $z \in \Gamma(t_1)$, c'est-à-dire pour

$$||z|| > t_1, \qquad ||y|| \leqslant 2\alpha||x||.$$

D'autre part sur l'ensemble $||y|| > 2\alpha||x||$, on aura

$$\mathrm{V}(z) \leqslant (\gamma + \varepsilon)||z|| \leqslant (\gamma + \varepsilon)||y||\left(1 + \frac{1}{4\alpha^2}\right)^{1/2} \tag{43}$$

pour $||z|| > t_2$. Les seconds membres de (42) et (43) étant positifs, on a dans tout C^n

$$\mathrm{V}(z) \leqslant \overline{\psi}(z) + \varepsilon||x|| + (\gamma + \varepsilon)\left(1 + \frac{1}{4\alpha^2}\right)^{1/2} ||y||$$

pour $||z|| \geqslant t_3$, où $t_3 = \sup(t_1, t_2)$.

Finalement en posant $\mathrm{V}^+ = \sup(\mathrm{V}, 0)$ et $\mathrm{C}_2(\varepsilon) = \sup \mathrm{V}^+(z)$ pour $||z|| \leqslant t_3$, on aura

$$\mathrm{V}(z) \leqslant \psi(x) + \varepsilon||x|| + (\gamma + \varepsilon)\left(1 + \frac{1}{4\alpha^2}\right)^{1/2} ||y|| + \mathrm{C}_2(\varepsilon) \tag{44}$$

ce qui établit le théorème 6.

Remarque. — Soit $\mathcal{F}_\gamma$ la classe des fonctions plurisousharmoniques vérifiant (39). Soit $\mathrm{L}_r^*(z)$ l'indicatrice radiale régularisée d'une telle fonction. On a

$$\mathrm{L}_r^*(z) \leqslant \gamma||z|| \tag{45}$$

d'après (39) pour tout $\mathrm{V} \in \mathcal{F}$. Donc la projection p :

$$\mathrm{V} \to \mathrm{L}_r^*$$

associe à $\mathrm{V} \in \mathcal{F}_\gamma$, une fonction plurisousharmonique positivement homogène vérifiant (45) en tout point z. On désignera par $\mathcal{F}_{\gamma,r}$ l'image de $\mathcal{F}_\gamma$ par p. Alors si l'on pose

$$L_r(z) = \limsup \frac{1}{t} V(tz), \qquad t \to +\infty$$

on a l'énoncé :

THÉORÈME 7. — *Si l'indicatrice* $L_r(x)$ *vérifie :*

$$L_r(x) \leqslant \psi(x), \tag{46}$$

où $\psi(x)$ *est continue, positive et positivement homogène :*

$$\psi(\sigma x) = \sigma\psi(x), \qquad \textit{pour tout} \qquad \sigma > 0,$$

alors, à tout $\varepsilon > 0$ *correspond* $C_1(\varepsilon)$ *tel qu'on ait*

$$L_r^*(z) \leqslant \psi(x) + \varepsilon\|x\| + C_1(\varepsilon)\|y\|,$$

et la constante $C_1(\varepsilon)$ *ne dépend que de* γ, *de* ε *et de la fonction* ψ.

Ce résultat précise le théorème précédent.

Démonstration. — On applique la méthode précédente à L_r^* en remarquant que (46) entraîne

$$L_r^*(x) \leqslant \psi(x) \quad \text{sur les réels} \tag{47}$$

tandis qu'on a

$$L_r^*(z) \leqslant \gamma\|z\|$$

sur $\mathbf{C}^n$. On considère alors la fonction :

$$W(z) = \sup L_r^*(x), \qquad L_r^* \in \mathcal{F}_{\gamma,r}$$

et sa régularisée supérieure

$$W^*(z) = \text{reg sup } W(z).$$

On a évidemment

$$W(z) \leqslant \gamma\|z\|, \qquad W^*(z) \leqslant \gamma\|z\|,$$

et sur les réels $W(x) \leqslant \psi(x)$ qui entraîne $W^*(x) \leqslant \psi(x)$, d'après la Proposition 21.

On applique alors la démonstration précédente à $W^*(x)$, ce qui donne (42), soit :

$$W^*(z) \leqslant \overline{\psi}(z) + \varepsilon\|x\|$$

pour $\|z\| > t_1$, $\|y\| \leqslant 2\alpha\|x\|$, où $\alpha > 0$ ne dépend que de ε, de γ et de la fonction ψ.

Puis on remarque que dans (43) on a $W^*(z) \leqslant \gamma\|z\|$, de sorte que l'on obtient au lieu de (44) :

$$L_r^*(z) \leqslant W^*(z) \leqslant \psi(x) + \varepsilon\|x\| + \gamma\left(1 + \frac{1}{4\alpha^2}\right)^{1/2}\|y\|$$

où α ne dépend que de ε et de $W^*(z)$, donc de la famille $\mathcal{F}_\gamma$ et de ψ, c'est-à-dire de γ, de ε et de ψ, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Si* $V(z)$ *est une fonction plurisousharmonique de type exponentiel* γ, *vérifiant sur les réels*

$$\limsup \frac{1}{t} V(tx) \leqslant \psi(x) \qquad t \to +\infty$$

où $\psi(x)$ *est une fonction vérifiant les hypothèses du théorème* 2, *alors à tout* $\varepsilon > 0$ *correspond* $\alpha > 0$, *tel qu'on ait*

$$\limsup \frac{1}{t} V(tz) \leqslant \psi(x) + \varepsilon\|x\| + \gamma\left[1 + \frac{1}{4\alpha^2}\right]^{1/2}\|y\|$$

la fonction $\alpha(\varepsilon)$ *pouvant être prise indépendante de* $V \in \mathcal{F}_\gamma$. *Il en résulte pour* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ *donnés, l'existence d'une constante* $C(\varepsilon')$ *telle qu'on ait :*

$$V(z) \leqslant \psi(x) + \varepsilon\|x\| + \gamma\left[1 + \frac{1}{4\alpha^2}\right]^{1/2}\|y\| + \varepsilon'\|z\| + C(\varepsilon')$$

$C(\varepsilon')$ *dépendant de* ε' *et de* $V \in \mathcal{F}_\gamma$, *tandis que* α *dépend seulement de* ε *et des données* γ *et* ψ *et non de* $V \in \mathcal{F}_\gamma$.

8. Le cas particulier où l'on suppose $L_r(x) = 0$ sur un sous-espace R^n.

Nous étudierons maintenant un cas intéressant pour les applications à l'Analyse fonctionnelle, celui où l'on a $L_r \leqslant 0$ sur un sous-espace vectoriel *réel* M, de dimension n avec l'hypothèse que son complexifié M_c soit C^n. Par un choix convenable des coordonnées de C^n, on peut se ramener au cas où M est l'espace R^n des points de C^n à « coordonnées réelles » $x = (x_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. La condition $L_r \leqslant 0$ se présente directement ainsi quand L_r est l'indicatrice d'une fonction entière $\hat{T}(z)$

$$\hat{T}(z) = \mathcal{F}T = T\,[\exp(-\,i(\xi, z)]$$
$$(\xi, z) = \Sigma \xi_k z_k, \qquad \xi = (\xi_k \text{ réels})$$

et T un opérateur linéaire de l'un des types suivants :

a) T est une distribution à support compact dans $R^n(\xi)$;

b) T est une fonctionnelle analytique à support réel.

Les énoncés qui suivent complètent ceux obtenus dans le premier cas par L. Hörmander (cf. [4]), dans le second par A. Martineau (cf. [7]).

Proposition 22. — *L'hypothèse* $L_r(x) \leqslant 0$ *sur les réels entraîne* $L_r(x) = L_r^*(x) = 0$ *sur les réels,* L_r *et* L_r^* *étant les indicatrices radiales d'une fonction plurisousharmonique de type exponentiel. Même conclusion si l'on suppose* $L_r^*(x) \leqslant 0$ *sur les réels.*

Démonstration. — D'après (27), on a pour tout x

$$L_r(x) + L_r(-\,x) \geqslant 0.$$

L'hypothèse entraîne donc $L_r(x) = L_r(-\,x) = 0$ sur les réels; on en déduit $L_r^*(x) = 0$ sur les réels, d'après la Proposition 18. Par ailleurs l'hypothèse $L_r^*(x) \leqslant 0$ sur les réels entraîne $L_r(x) \leqslant L_r^*(x) \leqslant 0$ et les mêmes conclusions.

Lemme 1 (cas $n = 1$). — *Soit* $V(x + iy)$ *une fonction sous-harmonique, de type exponentiel dans le demi-plan*

$$Q = [z = x + iy;\ y \geqslant 0].$$

On suppose $V(x) \leqslant 0$ *sur les réels et que* V *ne demeure pas négatif dans* Q.

Alors si l'on pose

$$c = \limsup t^{-1}\, V(it), \qquad t > 0, \qquad t \to +\,\infty,$$

on a $c > 0$ *et dans le demi-plan* Q :

$$V(x + iy) \leqslant cy.$$

De plus sur tout rayon $z = te^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$, *on a pour* $t \to +\infty$:

$$\limsup t^{-1}\, V(te^{i\theta}) = c \sin \theta.$$

Le résultat est connu; la démonstration peut se faire sans utiliser la décomposition de Riesz de V dans Q. Soit en effet $c' > c$. Il existe une majoration

$$V(it) \leqslant c't + d, \qquad t > 0, \qquad d \geqslant 0.$$

Considérons V dans le quadrant Q^+ :

$$[z = x + iy;\ y \geqslant 0,\ x \geqslant 0]:$$

V est majoré par $c'y + d$ sur la frontière de Q^+ à distance finie, donc aussi dans Q^+, d'après le théorème de Phragmen-Lindelöf. Il en est de même dans Q^- :

$$[z = x + iy;\ y \geqslant 0,\ x \leqslant 0].$$

Finalement on a dans Q :

$$\text{(48)} \qquad M(y) = \sup_x V(x + iy) \leqslant c'y + d.$$

Mais $V(x) \leqslant 0$ entraîne $M(0) \leqslant 0$. On a $c' > 0$ sinon on aurait $V \leqslant 0$ dans Q. D'autre part $M(y)$ est une fonction sousharmonique dans Q qui ne dépend que de y, donc est une fonction convexe de y; $y^{-1}\,[M(y) - M(0)]$ est alors une fonction croissante de y qui, d'après (48), est bornée par c'.

On a donc

$$V(x + iy) \leqslant M(y) \leqslant c'y.$$

pour tout $c' > c$. D'où la première partie du lemme.

Au lieu de considérer les quadrants Q^+ et Q^-, considérons les deux angles $0 \leqslant \arg^t z \leqslant \theta$ et $\theta \leqslant \arg^t z \leqslant \pi$, pour $0 < \theta < \pi$. On peut leur appliquer le raisonnement précédent, ce qui fournit la majoration indiquée. Elle s'écrit encore :

$$\limsup t^{-1}\, V(tz) = L_r(z) = cy,$$

pour $\qquad y \geqslant 0, \qquad t > 0, \qquad t \to +\infty.$

Corollaire ($n = 1$) (cf. la Proposition 16). — *Si* $V(x + iy)$ *est sousharmonique dans le plan complexe, de type exponentiel et vérifie* $V(x) \leqslant 0$ *sur les réels,* $L_r(z)$ *est une fonction* $h(y)$

qui vaut $c_1|y|$ *pour* $y \geqslant 0$ *et* $c_2|y|$ *pour* $y \leqslant 0$, *avec* $c_1 + c_2 \geqslant 0$.

On a de plus comme indicatrices radiales :

$$L_r(x + iy) = L_r^*(x + iy) = h(y)$$

de plus

$$M(y) = \sup_x V(x + iy) \leqslant h(y).$$

Passons au cas $n > 1$. Les résultats sont résumés dans l'énoncé donné plus loin (théorème 8). Soit $C^n = R^n \times R'^n$, où $R^n = R^n(x)$ et $R'^n = R^n(y)$, $z_k = x_k + iy_k$. L'hypothèse $V(x) \leqslant 0$ sur les réels $R^n(x)$, entraîne, on l'a vu, l'existence d'une majorante $h(y)$ ne dépendant que de $y \in R'^n$, et cette majorante sera une fonction convexe continue de y égale à $L_r^*(iy)$. Le théorème 8 donne une comparaison des indicatrices avec $h(y)$. Nous désignons par $L_r(\zeta, z)$ et $L_r^*(z)$ l'indicatrice radiale et sa régularisée. On a, rappelons-le, $L_r(\zeta, z) \leqslant L_r^*(z)$ pour tout ζ.

THÉORÈME 8. — *Soit* $V(z)$ *une fonction plurisousharmonique de type exponentiel* $\gamma > 0$, *vérifiant* $V(x) \leqslant 0$ *sur les réels* R^n. *Alors l'indicatrice radiale* $L_r(\zeta, z)$, $z = x + iy$, *et l'indicatrice radiale régularisée* $L_r^*(z)$ *ont les propriétés suivantes* :

a) $L_r(o,x) = L_r^*(x)$ *sur les réels* x.

b) $\sup_x L_r(\zeta, x + iy) = \sup_x L_r^*(x + iy) = L_r^*(iy) = h(y)$

où $h(y)$ *est une fonction convexe dans* R'^n, *vérifiant* $h(\sigma y) = \sigma h(y)$ *pour tout* $\sigma > 0$.

Soit $M(y) = \sup_x V(x + iy)$: $M(ty)$ *est une fonction convexe de* $t > 0$ *et* $t^{-1} M(ty)$ *tend en croissant vers* $h(y)$; *on a alors :*

$$V(x + iy) \leqslant M(y) \leqslant h(y).$$

c) *Pour* y *fixé dans* R^n, *on a* $L_r(\zeta, iy) = h(y)$ *sauf éventuellement pour* $\zeta \in E_y$ *où* E_y *est globalement polaire dans* C^n. *En particulier si* $\zeta = \xi + i\eta$, *on a :*

$$\sup_{\xi \in \omega} L_r(\zeta, iy) = h(y) \tag{48'}$$

où ω *est ensemble de* R^n, *de* R^n*-mesure positive.*

Plus précisément, si $\zeta \notin E_y$, *on a pour* $u_2 > 0$, $u_2 \to +\infty$:

$$\limsup u_2^{-1} V[\zeta_k + (u_1 + iu_2)y_k] = h(y_k),$$

et, pour $0 < \theta < \pi$ *fixé et* $t \to +\infty$:

$$\limsup t^{-1} V(\zeta_k + te^{i\theta}y_k) = h(y_k)\sin\theta, \qquad \zeta \notin E_y.$$

Démonstration. — *a*) résulte de la Proposition 22; pour établir *b*) considérons une variable complexe $u = u_1 + iu_2$ et la fonction

$$f(u_1, u_2) = V(\xi_k + uy_k). \tag{49}$$

Appliquons lui le lemme 1 en remarquant qu'on a

$$f(u_1, 0) = V(\xi_k + u_1y_k) \leqslant 0.$$

Il vient pour $u_2 > 0$, $u_2 \to +\infty$, ξ_k réels,

(50)

$$\limsup_{u_2} u_2^{-1} V(\xi_k + u_1y_k + iu_2y_k) = \limsup t^{-1} V(\xi_k + ity_k)$$
$$= L_r(\xi, iy_k)$$
$$V(\xi_k + u_1y_k + iu_2y_k) \leqslant u_2L_r(\xi, iy_k) \leqslant u_2L_r^*(iy_k).$$

En particulier il vient pour $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $\xi_k = x_k$ réels :

$$V(x_k + iy_k) \leqslant L_r^*(iy_k). \tag{51}$$

Appliquons ceci en particulier à la fonction $L_r^*(x + iy)$ qui est évidemment sa propre indicatrice régularisée à l'origine. Il vient :

$$L_r^*(x_k + iy_k) \leqslant L_r^*(iy_k).$$

Posons

$$L_r^*(iy_k) = h(y_k) = \sup_x L_r^*(x_k + iy_k). \tag{52}$$

Alors $h(y)$ est une fonction plurisousharmonique ne dépendant que de y. Elle est donc une fonction convexe, et vérifie les propriétés indiquées en *b*). De même $M(y)$ est une fonction convexe de $y \in R'^n$. Il en résulte que

$$\varphi(t, y) = t^{-1}[M(ty) - M(0)], \qquad t > 0,$$

est fonction croissante de t. Dans ces conditions $M(0) \leqslant 0$ entraîne la croissance de $t^{-1}M(ty)$; de plus (51) et (52) ont pour conséquence $M(y) \leqslant h(y)$. Mais, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe une suite $t_n \to +\infty$, $t_n > 0$, et des x_n, y_n tels que l'on ait :

$$t_n^{-1}\, V(t_n x_k + i t_n y_k) \geqslant L_r^*(iy_k) - \varepsilon = h(y_k) - \varepsilon$$

ce qui entraîne

$$\lim_{t=\infty} t^{-1}\, M(ty) = h(y).$$

Pour établir *c*), considérons la régularisée intermédiaire $G_r(\zeta; z)$ comme au § 3, et utilisons la Remarque qui fait suite au théorème 2. Elle énonce que

$$g_r(z) = G_r(\zeta; z) = \operatorname{reg} \sup_{\zeta} L_r(\zeta, z)$$

est indépendant de ζ. Donnons alors à z une valeur iy. On a alors la propriété suivante :

LEMME 2. — *Pour tout $y \in R'^n$, on a sous l'hypothèse $V(x) \leqslant 0$:*

$$g_r(iy) = h(y) = L_r^*(iy).$$

Démonstration. — D'après la Proposition 10, § 3, on a :

$$L_r(\xi, iy) \leqslant g_r(iy) \leqslant L_r^*(iy) = h(y).$$

Pour obtenir une inégalité de sens contraire, considérons la fonction $f(u_1, u_2)$ définie par (49). On a, en appliquant le Lemme 1 :

$$V(\xi_k + u_1 y_k + i u_2 y_k) \leqslant u_2\, g_r(y).$$

Pour $u_2 = 1$, et $\xi_k + u_1\, y_k = x_k$, on obtient :

$$V(x_k + iy_k) \leqslant g_r(iy_k)$$

qui donne $M(iy) \leqslant g_r(y)$ et, pour $t > 0$,

$$h(y) = \lim_{t=+\infty} t^{-1} M(ty) \leqslant g_r(iy)$$

qui établit le Lemme 2.

La première partie *c*) du théorème 8 en découle immédiatement, car, pour y fixé l'ensemble $[\zeta;\ L_r(\zeta, iy) < g_r(y)]$ est un ensemble E_y, globalement polaire dans $C^n(\zeta)$ d'après la Proposition 7. Un tel ensemble est de mesure nulle sur les réels (cf. [6, *c*]), ce qui établit (48′). D'autre part si $\zeta \notin E_y$, on a, en posant $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$:

$$\mathrm{L}_r(\zeta,\ iy) = g_r(iy) = \mathrm{L}_r^*(iy) = h(y).$$

On considère alors la fonction

$$f_1(u_1,\ u_2) = \mathrm{V}[\xi_k + i\eta_k + (u_1 + iu_2)y_k] - \mathrm{M}(\eta)$$

pour laquelle on a $f_1(u_1, 0) \leqslant 0$ et

$$\limsup_t t^{-1} f_1(0,\ t) = \limsup_t t^{-1}\mathrm{V}(\xi_k + i\eta_k + ity_k) = h(y).$$

L'application du lemme 1 donne alors les deux égalités énoncées à la fin du c).

ANNEXE

Note sur une classe de fonctions plurisousharmoniques de croissance minimale.

1. L'existence d'une classe de fonctions plurisousharmoniques de croissance minimale découle de la Proposition 1 du § 1; si l'on pose

$$M(r) = \sup_{\|z\|=r} V(z)$$

la majoration

$$M(r) = 0 (\log r)$$

entraîne que $V(z)$ soit constante dans C^n. On va préciser ce résultat en introduisant la moyenne de V sur la sphère $\|z\| = r$ de C^n, soit

$$\lambda(r) = \omega_{2n-1}^{-1}(1) \int V(r\alpha)\, d\omega_{2n-1}(\alpha); \tag{53}$$

α désigne un vecteur unitaire de C^n, et $\omega_{2n-1}(1)$, $\tau_{2n}(1)$ sont les mesures de la sphère et de la boule unité dans C^n.

Définition 9. — *On appellera classe (de croissance) minimale dans* C^n *la classe des fonctions* V, *plurisousharmoniques dans* C^n, *non constantes, pour lesquelles on a*

$$a_V = \limsup\, (\log \|z\|)^{-1}\, V(z) < \infty. \tag{54}$$

On désignera cette classe par (S_0).

A toute fonction $V \in (S_0)$ correspond d'après (49) un nombre $a_V < \infty$. On a donné plus haut deux exemples :

a) Si $P_m(z)$ est un polynôme de degré total m, $\dfrac{1}{m} \log |P_m(z)|$ appartient à (S_0) et le coefficient a_V vaut l'unité.

b) Si V_1 est l'indicatrice cerclée régularisée d'une fonction de type exponentiel γ, $V = \log V_1$ appartient à (S_0) et

$$a_V = \log \gamma.$$

Les propriétés de la classe (S_0) sont précisées par l'énoncé suivant :

Théorème 9. — *Si* $V(z)$ *est plurisousharmonique dans* C^n *on a les propriétés suivantes :*

1° *Les limites*

$$a = \lim \frac{M(r)}{\log r}; \qquad b = \lim \frac{\lambda(r)}{\log r}$$

existent quand $r \to +\infty$, *finies ou infinies*; *on a* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a \leqslant b$.

2° *Les seules possibilités sont les suivantes :*

(i) $a = 0$, $b = 0$ et $V(z)$ *est une constante*;

(ii) $0 < a < \infty$, *qui entraîne* $b = a$;

(iii) $a = +\infty$. *Dans ce cas, ou bien* $b = +\infty$, *ou bien* b *est fini et l'on a alors* $\liminf \dfrac{M(r)}{r} = a' > 0$, *la croissance de* V *étant au moins de type exponentiel non nul.*

Démonstration. — Les propriétés 1° sont des conséquences du fait que $M(r)$ et $\lambda(r)$ sont des fonctions convexes croissantes de $\log r$. On a $\lambda(r) \leqslant M(r)$ ce qui entraîne $a \leqslant b$. La dérivée

$$\nu(r) = \frac{\partial \lambda}{\partial \log r} \tag{55}$$

est positive et croissante et l'on a

$$b = \lim \nu(r) \qquad \text{pour} \qquad r \to +\infty. \tag{56}$$

Remarquons de plus que, si a est fini $(\log r)^{-1}\,[M(r) - M(0)]$ étant croissant, on a $M(r) \leqslant a \log r + V(0)$.

La propriété (ii) se trouve déjà dans la thèse [1] de V. Avanissian. Nous utiliserons ici une méthode générale qui établit à la fois (ii) et (iii). Formons le potentiel canonique de la mesure σ associée au courant positif fermé θ, défini comme dans [6, *g*] :

$$\theta = i\pi^{-1}\, d_z d_{\bar z}\, V \tag{57}$$

θ est défini dans C^n; $\nu(t)$ en est l'indicatrice de croissance; on a d'après (56), $\int_0^\infty d\nu(t) = b$.

Dans ces conditions le courant positif fermé défini par (57) d'indicatrice de croissance $\nu(t)$, est d'après (56) de genre $q = 0$, au sens de [6, g]. Il existe alors une fonction plurisousharmonique $I(z)$ vérifiant $i\pi^{-1}\, d_z d_{\bar z} I = \theta$.

Elle est donnée par

$$\text{(58)} \qquad I(z) = \frac{(n-2)!}{2\pi^{n-1}} \int d\sigma(a) e_n(a, z, 0)$$

σ est la mesure positive

$$\text{(59)} \qquad \sigma = \theta \wedge \beta_{n-1} = \frac{1}{2\pi} \Delta V\, \beta_n; \qquad \sigma(t) = \int_{\|z\| \leqslant t} d\sigma$$

ΔV désigne la distribution laplacien de V, β_n l'élément de volume de C^n, et l'on a (cf. [6, g]) :

$$e_n(a, z, o) = -\|a - z\|^{2-2n} + \|a\|^{2-2n}.$$

Nous supposerons d'abord que le support de ΔV ne contient pas une boule $\|z\| < r_0$. L'indicatrice $\nu(t)$ est liée à $\sigma(t)$ par la relation :

$$\sigma(t) = \nu(t) t^{2n-2}\, \tau_{2n-2}\, (1).$$

L'étude générale faite dans [6, g] donne la majoration

$$I(z) \leqslant \frac{1}{2(n-1)} C(n, 0) \left[r \int_{r_0}^\infty \frac{(2n-1)t + (2n-2)r}{(r+t)^2 t} \nu(t)\, dt \right].$$

En négligeant des termes qui demeurent bornés quand $r \to +\infty$, on a :

$$\text{(60)} \quad I(z) \leqslant C(n, 0) r \int_{r_0}^\infty \frac{\nu(t)\, dt}{t(t+r)} \leqslant C(n, 0) b \log \frac{r_0 + r}{r_0}.$$

La partie de l'intégrale correspondant à $t \geqslant r$ fournit une contribution bornée quand $r \to +\infty$. On peut donc ne considérer que les valeurs de t inférieures à r. Dans ce cas, le coefficient $C(n, q)$ [cf. (6, g, p. 378] peut être remplacé par un coefficient $C_2\,(n, q)$ qui pour $q = 0$ se réduit à l'unité, et l'on a :

$$\text{(61)} \qquad I(z) \leqslant b \log r + 0(1).$$

D'après la remarque qui suit (56), on a plus précisément

$$I(0) = 0, \qquad I(z) \leqslant b \log r.$$

Dans la suite, posons $x^+ = \sup(x, 0)$; $\lambda(f, 0, r)$ désignera la moyenne de f sur la sphère $\|z\| = r$. En utilisant la propriété de la moyenne d'être croissante, on aura,

$$I(0) = 0 \leqslant \lambda(I^+, 0, r) - \lambda(I^-, 0, r).$$
$$\lambda(I^-, 0, r) \leqslant \lambda(I^+, 0, r) \leqslant b \log r.$$

Démontrons (ii), (i) étant une conséquence de la Proposition 1. On a :

(62) $$V(z) = I(z) + H(z)$$

Si $0 < a < \infty$, $H(z)$ est une constante car on a, en procédant comme plus haut

$$\lambda(H^-, 0, r) \leqslant \lambda(H^+, 0, r) + |H(0)|$$

$$\lambda(|H|, 0, r) = \lambda(H^+, 0, r) + \lambda(H^-, 0, r) \leqslant 2\lambda(H^+, 0, r) + 0(1).$$

Alors (62) donne

$$H^+(z) \leqslant V^+(z) + I^-(z)$$
$$\lambda(|H|, 0, r) \leqslant 2\lambda(V^+, 0, r) + 2\lambda(I^-, 0, r) + 0(1)$$
$$\leqslant 2\,(a + b) \log r + 0(1)$$

qui entraîne une majoration de $|H|$ sur la sphère $\|z\| = r$ par une quantité $O(\log r)$. Dans ces conditions $H(z)$ se réduit à une constante (cf. [6, g, p. 385]. On a donc

$$V(z) = I(z) + V(0), \qquad \text{et} \qquad a \leqslant b.$$

D'où $a = b$.

Pour établir (iii), supposons $a = \infty$, $b < \infty$. Alors (62) montre que $H(z)$ n'est pas une constante, donc (cf. [6, g]), $\liminf r^{-1} \lambda(H^+, 0, r) \geqslant a' > 0$. Or on a, d'après (62) :

$$H^+(z) \leqslant V^+(z) + I^-(z)$$
$$\lambda(H^+, 0, r) \leqslant M(r) + \lambda(I^+, 0, r) \leqslant M(r) + b \log r.$$

qui établit $\liminf r^{-1} M(r) \geqslant a' > 0$ et achève la démonstration de l'énoncé.

Si l'origine appartient au support de ΔV, on considère une suite de nombres h_n décroissants, de manière que $\lim h_n = V(0)$, cette dernière valeur étant finie ou $-\infty$. Alors l'origine n'appartient pas au support de ΔV_n où l'on pose

$$V_n(z) = \sup [V(z), h_n]$$

et V_n tend vers $V(z)$ sur tout compact en norme L^1. Donc $d_z d_{\bar z} V_n \to d_z d_{\bar z} V$ au sens de la convergence faible des mesures et des courants et les mesures positives σ_n, et ν_n tendent vers σ et ν. Ainsi les propriétés énoncées au théorème 10, sont encore valables pour V même si l'origine appartient au support de ΔV.

2. *Croissance radicale et cerclée des fonctions de classe* (S_0).

Définissons

$$a(z) = \limsup \frac{V(tz)}{\log t}, \qquad t \to +\infty, \quad t \geqslant t_0 > 1.$$

PROPOSITION 23. — *La régularisée supérieure $a^*(z)$ de $a(z)$ est constante; on a*

$$a^*(z) = a = \lim\, (\log r)^{-1} M(r)$$

et l'ensemble

$$E = [z;\ a(z) < a] \tag{63}$$

est globalement C^n polaire.

En effet on a évidemment $a^*(z) \leqslant a$, donc la fonction plurisousharmonique $a^*(z)$ est une constante $a' \leqslant a$. Si l'on avait $a' < a$, on aurait

$$V_t(z) = (\log t)^{-1} V(tz) \leqslant a' + \varepsilon < a$$

pour $t > t_1$, et $\|z\| \leqslant 1$, donc $V(z) \leqslant (a' + \varepsilon) \log \|z\|$ pour $\|z\| > t_1$, en contradiction avec la définition de a'. Donc $a^*(z) = a$. De plus, si $W(z) = \limsup\limits_{t=\infty} V_t(z)$, on a $W^*(z) = a$ et l'ensemble $[z;\ W(z) < W^*(z)]$ est globalement C^n-polaire d'après la Proposition 7.

Mais un ensemble globalement C^n polaire est de R^2-capacité nulle sur une droite complexe, ou la contient. Dans le cas présent, si E contient un point $z^0 \neq 0$, il contient les points du rayon tz^0, $t > 0$. Donc E contient la droite complexe $z = uz^0$, u paramètre complexe. Finalement on a :

PROPOSITION 24. — *L'ensemble défini par* (63) *coïncide avec l'ensemble* $E = [z,\ a'(z) < a]$, *où*

$$a'(z) = \limsup\, (\log |u|)^{-1} V(uz),$$

u complexe, et E *est un ensemble globalement* C^n *polaire formé de droites complexes issues de l'origine.*

3. Parmi les fonctions de classe (S_0), nous avons déjà remarqué celles qui vérifient une identité

$$V(uz) = V(z) + \log |u|, \quad u \text{ complexe} \tag{64}$$

Le procédé qui consiste à passer d'un polynôme $P(z_1, \ldots, z_n)$ à un polynôme homogène $Q(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ de $n+1$ variables en posant

$$Q = z_0^m P\left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right), \qquad m = \text{degré } P.$$

établit une correspondance $\log |P| \to \log |Q|$. Elle se généralise en une correspondance qui associe à une fonction de la classe (S_0) de C^n une fonction de la classe (S_0) de C^{n+1} vérifiant (64).

Auparavant nous démontrerons :

Proposition 25. — *Si* V *est de classe* (S_0), *avec*

$$\limsup \frac{M(r)}{\log r} = a_V, \tag{65}$$

alors

$$\alpha(r) = M(r) - a_V \log r$$

est une fonction décroissante et $\alpha_V = \lim \alpha(r)$ *existe, fini, ou valant* $-\infty$ *pour* $r = \infty$.

En effet $M(r)$ étant fonction convexe de $\log r$ la dérivée $d(r) = \dfrac{dM(r)}{d \log r}$ existe comme dérivée à droite, et tend en croissant vers a_V. On a alors

$$\frac{d\alpha(r)}{d \log r} = d(r) - a_V \leqslant 0$$

qui montre que $\alpha(r)$ est décroissant.

Corollaire. — *Si* V *est de la classe* (S_0), *et si* a_V *est défini par* (65), *il existe une constante* C *finie, telle qu'on ait quel que soit* z :

$$V(z) \leqslant a_V \log \|z\| + C$$

et l'on peut prendre $C = M(1)$.

Remarque. — Si $V(z) = \dfrac{1}{m} \log |P_m(z)|$, où P_m désigne un polynôme, $m =$ degré P_m, on a $V \in (S_0)$, et $a_V = 1$; alors α_V a toujours une valeur finie. Mais, par exemple, la fonction $V(z)$ définie par

$$V(z) = 0 \qquad \text{si} \qquad \|z\| \leqslant e^2$$
$$V(z) = 1 + \log\|z\| - \sqrt{1 + 4\log\|z\|} \qquad \text{si} \qquad \|z\| \geqslant e^2$$

est plurisousharmonique dans $\mathbf{C}^n$ et l'on a $\alpha_V = -\infty$.

Proposition 26. — *Soit* $V(z_1, \ldots, z_n)$ *une fonction de classe* (S_0). *La fonction*

$$(66) \quad V'(z_0, z_1, \ldots z_n) = a_V \log |z_0| + V\left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right),$$

définie par (66) *pour* $z_0 \neq 0$, *se prolonge par continuité en une fonction* $\overline{V}'$ *plurisousharmonique dans* $\mathbf{C}^{n+1}(z_0, \ldots, z_n)$; $\overline{V}'$ *vérifie l'identité* (64); $\overline{V}'$ *sera dit « homogénéisé » de* V.

En effet d'après (66), V' est plurisousharmonique sauf peut-être pour $z_0 = 0$. Dans le cylindre

$$G_r = \left[z = (z_0, \ldots, z_n); \qquad \sum_1^n |z_k|^2 < r^2\right]$$

on a d'après la Proposition 25 et son Corollaire :

$$V'(z_0, \ldots, z_n) \leqslant a_V \log |z_0| + a_V \log \frac{r}{|z_0|} - \alpha_V.$$

Il en résulte

$$V'(z_0, \ldots, z_n) \leqslant a_V \log r - \alpha_V$$

qui montre que V' est borné supérieurement dans le cylindre G_r, donc borné supérieurement dans $\mathbf{C}^{n+1}$ au voisinage de tout point de l'ensemble analytique A défini par $z_0 = 0$. D'après un énoncé classique (cf. [6, *b*]), V' se prolonge en une fonction $\overline{V}'$ plurisousharmonique aussi sur $z_0 = 0$ (on définit en tout point $m \in A$: $\overline{V}'(m) = \lim.\ \sup.\ V'(p)$, $p \to m$, $p \in A$).

D'autre part $\overline{V}'$ vérifie (64) d'après la définition (66).

La Proposition 26 est ainsi établie. Elle entraîne comme corollaire : toute fonction V appartenant à la classe de croissance minimale (S_0), de $\mathbf{C}^n$ a son « homogénéisée » $\overline{V}'$ (au sens de la Proposition 26) de la forme log U, où U est l'indicatrice cerclée régularisée d'une fonction entière de type exponentiel dans $\mathbf{C}^{n+1}$. Réciproquement si U est une telle indicatrice dans

C^{n+1}, la restriction de log U à $z_0 = 0$ est bien de la classe minimale (S_0) de C^n.

Il existe ainsi une correspondance bijective entre les fonctions plurisousharmoniques de la classe (S_0) de croissance minimale et les indicatrices cerclées régularisées des fonctions entières de C^{n+1} de type exponentiel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Avanissian, Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques, *Ann. E.N.S.*, t. 78, (1961).

[2] M. Brelot et G. Choquet, Le théorème de convergence en théorie du potentiel, *Journal Madras Univ.*, t. 27, nº 1, (1957), 319-337.

[3] R. P. Boas, Entire Functions. *Acad. Press.*, New York, (1954).

[4] L. Hörmander, Supports and singular supports of convolution, *Acat. Math.*, t. 110, 1963, 279-302.

[5] V. K. Ivanov, *Math. Sbornik*, t. 47, (89), (1959), 3-16.

[6] P. Lelong, *a*) Les fonctions plurisousharmoniques. *Ann. E.N.S.*, t. 62, (1945), 301-338.

b) Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques, *Journal de Math.*, t. 36 (1957), 263-303.

c) Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques réelles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 11, (1961), 263-303.

d) Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, *Colloque du C.I.M.E.*, Varenna, (1963), Éditions Cremonese, Rome.

e) Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel, *C.R. Ac. Sc.*, Paris, t. 260, 1663, (1965).

f) On a problem of M. A. Zorn, *Proc. Ann. Math. Soc.*, t. 2, 12-19, (1951).

g) Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n, *Journal d'Analyse mathématique de Jérusalem*, t. 12, (1964), 365-407.

h) Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes, *Ann. E.N.S.*, t. 58, 1942.

i) Non continuous indicators for entire functions of $n \geqslant 2$ variables and of finite order. à paraître dans *Transactions American Math. Society*, (1967).

[7] A. Martineau, Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation] de Fourier-Borel, *Journal d'Analyse de Jérusalem*, (1963), t. 11, 1-162.

[8] M. Plancherel et G. Polya, Fonctions entières, *Commentarii Math. Helvetici*, t. 9, (1937), 224-248 et t. 10, 112-163.

[9] Rankine, *Dokl. Akad. Nauk.*, t. 153, (1963), 278-281.

Manuscrit reçu le 11 mars 1966.

Pierre Lelong,
Institut Henri-Poincaré,
11, rue Pierre-Curie,
Paris, 5e.