



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Frédéric CHAPOTON

Le module dendriforme sur le groupe cyclique

Tome 58, n° 7 (2008), p. 2333-2350.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2008__58_7_2333_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

LE MODULE DENDRIFORME SUR LE GROUPE CYCLIQUE

par Frédéric CHAPOTON

RÉSUMÉ. — La structure d'opérade anticyclique de l'opérade dendriforme donne en particulier une matrice d'ordre n agissant sur l'espace engendré par les arbres binaires plans à n feuilles. On calcule le polynôme caractéristique de cette matrice. On propose aussi une conjecture compatible pour le polynôme caractéristique de la transformation de Coxeter du poset de Tamari, qui est essentiellement une racine carrée de cette matrice.

ABSTRACT. — It is known that the Dendriform operad is in fact an anticyclic operad. This refined structure defines in particular a matrix of finite order acting on the vector space spanned by planar binary trees. We compute here its characteristic polynomial and propose a compatible conjecture for the characteristic polynomial of the Coxeter transformation for the Tamari lattice, which is essentially a square root of this matrix.

Introduction

Les arbres binaires plans sont des objets combinatoires très classiques. Ils ont récemment fait l'objet de recherches remarquables en combinatoire algébrique, suite à leur apparition dans les travaux de Loday [10]. Le point de départ est la description par Loday d'une opérade basée sur les arbres binaires plans, nommée opérade dendriforme. À cette opérade correspond une notion d'algèbre dendriforme. Loday et Ronco ont ensuite montré [12] que l'algèbre dendriforme libre sur un générateur avait une structure d'algèbre de Hopf. De nombreux travaux [11, 13, 1, 6, 7, 8] ont suivi sur différents aspects de ces objets.

Mots-clés : opérade anticyclique, opérade dendriforme, treillis de Tamari, transformation de Coxeter.

Classification math. : 18D50, 05E05, 06A07.

L'opérade Dendriforme a en fait une structure plus riche : c'est une opérade anticyclique [2]. Ceci donne en particulier une action du groupe cyclique d'ordre $n + 1$ sur l'espace vectoriel engendré par les arbres binaires plans à n sommets internes. Cette action reste relativement mystérieuse depuis son introduction, malgré quelques progrès effectués depuis dans sa compréhension. On a montré dans [4] que l'action du générateur τ du groupe cyclique était donnée au signe près par le carré de la transformation de Coxeter θ pour le treillis de Tamari. On a aussi montré dans [3] que l'action du générateur τ sur les arbres binaires plans admettait une description très simple par le biais d'un plongement des arbres binaires plans dans les fractions rationnelles.

On calcule ici le polynôme caractéristique du générateur τ de cette action cyclique. On propose ensuite une conjecture pour le polynôme caractéristique de la transformation de Coxeter θ . On montre en particulier que cette conjecture est compatible avec le résultat précédent.

Ce travail a son origine dans une correspondance avec Jean Ecalle, qui a formulé le premier une conjecture sur le polynôme caractéristique de τ .

Merci à Cédric Bonnafé pour la preuve de la Proposition 1.3.

1. Rappels et notations

1.1. Fonctions symétriques

On utilise les notations et conventions classiques sur les fonctions symétriques, qui sont celles du livre [14]. En particulier, on note $(p_n)_{n \geq 1}$ les fonctions symétriques « sommes de puissances ». L'anneau Λ des fonctions symétriques est (sur le corps \mathbb{Q}) un anneau de polynômes en les $(p_n)_{n \geq 1}$. Il admet une base p_λ où λ décrit l'ensemble des partitions d'entiers. On peut identifier les caractères des groupes symétriques à des éléments de Λ par l'application qui envoie un caractère χ sur la somme $\sum_\lambda \chi(\lambda) p_\lambda / z_\lambda$, où les z_λ sont certains coefficients entiers et $\chi(\lambda)$ est la valeur de χ sur la classe de conjugaison de type cyclique λ . Les images des caractères irréductibles des groupes symétriques sont les fonctions de Schur, qui forment une base (sur l'anneau \mathbb{Z}) de l'anneau Λ .

L'anneau Λ possède une structure supplémentaire, qui est un produit associatif (linéaire à gauche seulement), appelé le pléthysme et noté \circ . Cette structure est essentiellement équivalente à la structure (peut-être mieux connue) de λ -anneau sur Λ . Le pléthysme peut se calculer en utilisant la

linéarité à gauche et la propriété suivante :

$$(1.1) \quad p_n \circ f(p_1, p_2, \dots, p_k, \dots) = f(p_n, p_{2n}, \dots, p_{kn} \dots).$$

Le pléthysme est en fait défini sur les entiers et préserve même la positivité, au sens suivant. Si f et g sont combinaisons linéaires entières (resp. entières positives) de fonctions de Schur, alors $f \circ g$ est combinaison linéaire entière (resp. entière positive) de fonctions de Schur.

On aura besoin aussi du fait suivant : la multiplicité de la représentation triviale (*i.e.* la dimension du sous-espace des vecteurs invariants) dans une représentation du groupe symétrique est obtenue par spécialisation en posant $p_n = 1$ pour tout n dans la fonction symétrique correspondante. Par abus de langage, on appellera encore « passage aux invariants » cette spécialisation dans une fonction symétrique quelconque.

Notons enfin qu'à chaque opérade symétrique correspond une fonction symétrique qui est une combinaison linéaire positive de fonctions de Schur et qui permet notamment de calculer les dimensions des algèbres libres sur cette opérade. On utilisera dans cet article les fonctions symétriques associées aux opérades classiques Com et Lie, en admettant leurs propriétés.

1.2. Opérade dendriforme

Une opérade \mathcal{P} est une structure algébrique qui consiste en la donnée d'une suite d'espaces vectoriels $\mathcal{P}(n)$ pour chaque entier positif n et d'applications de composition vérifiant une forme d'associativité, voir par exemple l'appendice B de [10].

On considère ici l'opérade dendriforme, notée Dend, qui a été introduite par Loday. L'espace vectoriel Dend(n) a pour base les arbres binaires plans à n sommets internes (donc $n + 1$ feuilles et une racine) et pour dimension le nombre de Catalan c_n défini par

$$(1.2) \quad c_n = \frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n}.$$

Les premiers espaces Dend(n) sont donc

$$(1.3) \quad \text{Dend}(1) = \mathbb{Q} \left\{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\},$$

$$(1.4) \quad \text{Dend}(2) = \mathbb{Q} \left\{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \end{array} \right\},$$

$$(1.5) \quad \text{Dend}(3) = \mathbb{Q} \left\{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\}.$$

La structure d'opéade (*i.e.* les morphismes de composition) sur cette collection d'espaces vectoriels est assez subtile. On peut la définir directement de manière combinatoire, en termes de battages et de manipulations (coupure, greffe) d'arbres binaires plans [10]. On dispose aussi d'une présentation de l'opéade Dend par générateurs et relations [10], qui permet de faire des calculs par récurrence. Enfin, il existe un plongement dans une opéade formée de fractions rationnelles [3], qui simplifie beaucoup les calculs, mais où la base devient moins naturelle. Comme on n'en aura pas besoin ici, on renvoie le lecteur aux références pour davantage de détails sur la composition dans cette opéade.

1.3. Action du groupe cyclique

On trouve dans [2] la description en termes d'opéade d'une action naturelle du groupe cyclique d'ordre n sur $\text{Dend}(n-1)$, qui vérifie une forme de compatibilité avec la composition de l'opéade Dend. L'action du générateur τ du groupe cyclique envoie chaque arbre binaire plan sur une combinaison linéaire entière d'arbres binaires plans. Par exemple (cf. les matrices de τ données dans l'appendice B),

$$(1.6) \quad \tau \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) = - \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \quad \text{et} \quad \tau \left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}.$$

On ne rappellera pas ici la définition opéradique de cette action, qui nécessiterait d'avoir au préalable introduit l'opéade Dendriforme et la notion d'opéade anticyclique. On peut simplement noter qu'elle est plutôt implicite et utilise la présentation de Dend par générateurs et relations. On peut cependant calculer directement cette action par le biais de sa relation avec le treillis de Tamari (Prop. 3.1). Elle possède aussi la description alternative remarquable suivante, obtenue par plongement dans les fractions rationnelles.

Soit T un arbre binaire plan à n feuilles. On numérote ses feuilles de gauche à droite de 1 à n . On définit une fraction $\psi(T)$ en $n-1$ variables u_1, \dots, u_{n-1} comme suit. C'est l'inverse d'un produit indexé par les sommets internes de T . À chaque sommet interne s de T , on associe le facteur suivant : la somme $u_i + u_{i+1} + \dots + u_{j-1} + u_j$ où i et $j+1$ sont le minimum et le maximum des numéros des feuilles qui sont au dessus du sommet s dans T .

Par exemple, les cinq arbres dans la base de $\text{Dend}(3)$ ont pour images par ψ les fractions suivantes :

$$(1.7) \quad \frac{1}{u_1(u_1+u_2)(u_1+u_2+u_3)}, \frac{1}{(u_1+u_2)u_2(u_1+u_2+u_3)}, \frac{1}{u_1(u_1+u_2+u_3)u_3},$$

$$(1.8) \quad \frac{1}{(u_1+u_2+u_3)u_2(u_2+u_3)} \text{ et } \frac{1}{(u_1+u_2+u_3)(u_2+u_3)u_3}.$$

On prolonge ensuite ψ par linéarité, ce qui définit une application linéaire de $\text{Dend}(n-1)$ dans $\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_{n-1})$ qui est une injection.

Il se trouve alors que l'action de τ sur les arbres correspond via ψ à l'action sur les fractions en $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ de la substitution (encore notée τ) $u_i \mapsto u_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq n-1$ et $u_1 \mapsto -(u_1 + \dots + u_{n-1})$.

Pour le second exemple considéré dans (1.6), on retrouve bien

$$(1.9) \quad \tau \left(\frac{1}{u_1(u_1+u_2+u_3)u_3} \right) = \frac{1}{(u_1+u_2+u_3)u_3u_2} = \frac{1}{(u_1+u_2+u_3)u_2(u_2+u_3)} + \frac{1}{(u_1+u_2+u_3)(u_2+u_3)u_3}.$$

On a donc un module $\text{Dend}(n-1)$ sur le groupe cyclique C_n , d'où un module induit sur le groupe symétrique \mathfrak{S}_n , dont on rappelle le caractère dans la proposition suivante.

PROPOSITION 1.1 ([2], Th. 6.2). — *Le caractère de ce module induit est donné par la fonction symétrique*

$$(1.10) \quad 2\mathbf{c}_{n-1}p_1^n - \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \phi(d) \binom{2n/d}{n/d} p_d^{n/d},$$

où ϕ est l'indicatrice d'Euler.

Cette fonction symétrique décrit donc le module induit. On cherche à comprendre le module $\text{Dend}(n-1)$ sur le groupe cyclique C_n , dont on sait a priori qu'il est défini sur les rationnels et même sur les entiers.

On voit que la formule (1.10) se décompose en une somme de deux termes. Le premier terme $2\mathbf{c}_{n-1}p_1^n$ est une somme de $2\mathbf{c}_{n-1}$ représentations régulières de \mathfrak{S}_n , donc est isomorphe à l'induite de la somme de $2\mathbf{c}_{n-1}$ représentations régulières de C_n . On se concentre donc par la suite sur le deuxième terme.

1.4. Induction du groupe cyclique au groupe symétrique

Soit C_n le groupe cyclique à n éléments. On note t le générateur. L'algèbre de groupe est $\mathbb{Q}[t]/(t^n - 1)$.

Soit d un diviseur de n . L'espace $\mathbb{Q}[t]/(t^d - 1)$ est un module pour C_n , noté $M_{n,d}$.

Remarque : $M_{n,n}$ est la représentation régulière.

Le caractère de $M_{n,d}$ est le suivant :

$$(1.11) \quad \chi_{n,d}(t^k) = \begin{cases} d & \text{si } d|k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $K_0^{\mathbb{Q}}(C_n)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{Q}C_n$ -modules de type fini. Le groupe $K_0^{\mathbb{Q}}(C_n)$ a pour rang le nombre de diviseurs de n et les classes dans $K_0^{\mathbb{Q}}(C_n)$ des modules $M_{n,d}$ pour $d|n$ forment une base de $K_0^{\mathbb{Q}}(C_n)$ [5, §39, Ex. 2].

Soit \mathfrak{S}_n le groupe symétrique sur $\{1, \dots, n\}$.

On a une inclusion de groupe de C_n dans \mathfrak{S}_n qui envoie t sur le grand cycle $c = (1, 2, \dots, n)$.

On considère le module induit $M'_{n,d} = \text{Ind}_{C_n}^{\mathfrak{S}_n} M_{n,d}$.

PROPOSITION 1.2. — *Le caractère de $M'_{n,d}$ est la fonction symétrique*

$$(1.12) \quad \chi'_{n,d} = \frac{d}{n} \sum_{\ell|n/d} \phi(\ell) p_{\ell}^{n/\ell}.$$

Preuve. — Par la formule d'induction des caractères, le caractère $\chi'_{n,d}$ est donné (en tant que fonction centrale sur le groupe symétrique) par

$$(1.13) \quad \chi'_{n,d}(\sigma) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_n \\ \tau^{-1}\sigma\tau \in C_n}} \chi_{n,d}(\tau^{-1}\sigma\tau),$$

pour toute permutation σ . En utilisant (1.11), ceci se simplifie en

$$(1.14) \quad \frac{d}{n} \sum_{d|k} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_n \\ \tau^{-1}\sigma\tau = c^k}} 1.$$

On note que le type cyclique de c^k est $(\frac{n}{n \wedge k})^{n \wedge k}$. On traduit alors le caractère $\chi'_{n,d}$ en termes de fonctions symétriques :

$$(1.15) \quad \chi'_{n,d} = \frac{d}{n} \sum_{\substack{k=1 \dots n \\ d|k}} (p_{\frac{n}{n \wedge k}})^{n \wedge k}.$$

On remplace ensuite k par dk et n par dm :

$$(1.16) \quad \frac{d}{n} \sum_{k=1}^m (p_{\frac{m}{m \wedge k}})^{(m \wedge k)d}.$$

On trouve la formule attendue en regroupant les termes. □

PROPOSITION 1.3. — *L'induction $\text{Ind}_{C_n}^{\mathfrak{S}_n}$ de $K_0^{\mathbb{Q}}(C_n)$ dans $K_0^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{S}_n)$ est une application linéaire injective.*

Preuve. — Comme les classes des modules $M_{n,d}$ forment une base de $K_0^{\mathbb{Q}}(C_n)$, il suffit de montrer que les classes des modules induits $M'_{n,d}$ dans $K_0^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{S}_n)$ sont linéairement indépendantes. Ceci résulte immédiatement de la formule (1.12), par triangularité par rapport à l'ordre partiel défini sur l'ensemble des diviseurs de n par la divisibilité. □

2. Description du module dendriforme

On définit une suite d'entiers positifs \mathbf{a}_n pour $n \geq 1$ par la formule suivante :

$$(2.1) \quad \mathbf{a}_n = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \mu(n/d) \binom{2d}{d},$$

où μ est la fonction de Möbius.

A priori, les \mathbf{a}_n définis ainsi sont des rationnels. Il faut justifier que ce sont bien des entiers positifs. Pour cela, on va faire un calcul plus fin avec des fonctions symétriques.

Considérons la fonction symétrique Lie :

$$(2.2) \quad \text{Lie} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p_d^{n/d}.$$

C'est la fonction symétrique associée à l'opérade symétrique Lie, donc c'est une combinaison linéaire entière positive de fonctions de Schur.

Considérons la fonction symétrique Brace :

$$(2.3) \quad \text{Brace} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} p_1^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_1}}{2}.$$

C'est aussi clairement une combinaison linéaire entière positive de fonctions de Schur, car la fonction symétrique p_1^n correspond à la représentation régulière de \mathfrak{S}_n .

PROPOSITION 2.1. — *Le pléthysme $\text{Lie} \circ \text{Brace}$ est la fonction symétrique*

$$(2.4) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \mu(d) \binom{2n/d}{n/d} p_d^{n/d}.$$

Preuve. — Par définition du pléthysme, il faut calculer

$$(2.5) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4p_d}}{2} \right)^{n/d}.$$

En échangeant les sommations, ceci devient

$$(2.6) \quad - \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4p_d}}{2} \right).$$

En utilisant alors le développement de Taylor (4.25) (Voir appendice A) :

$$(2.7) \quad - \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4u}}{2} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} \binom{2n}{n} u^n,$$

on obtient donc

$$(2.8) \quad \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k} \binom{2k}{k} p_d^k,$$

qui se réduit facilement au résultat voulu. \square

Comme composée pour le pléthysme de combinaisons linéaires entières positives de fonctions de Schur, la fonction $\text{Lie} \circ \text{Brace}$ est aussi une combinaison linéaire entière positive de fonctions de Schur. La multiplicité de la représentation triviale dans $\text{Lie} \circ \text{Brace}$, obtenue en posant $p_d = 1$ pour tout d dans les composantes homogènes de la formule (2.4), est exactement la suite \mathbf{a}_n ; ces nombres sont donc bien des entiers positifs.

Voici les premiers termes de la suite \mathbf{a}_n pour $n \geq 1$:

$$(2.9) \quad 1, 1, 3, 8, 25, 75, 245, 800, 2700, 9225, \dots$$

La suite \mathbf{a}_n a une propriété remarquable.

PROPOSITION 2.2. — *On a*

$$(2.10) \quad F_{\mathbf{a}}(x) = \prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^{-\mathbf{a}_n} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Preuve. — Soit Com la fonction symétrique associée à l'opérateur Com et correspondant à la somme des modules triviaux sur les groupes symétriques.

Elle est donnée par l'expression $\exp(\sum_{n=1}^{\infty} p_n/n) - 1$ et vérifie $(1 + \text{Com}) \circ \text{Lie} = \frac{1}{1-p_1}$. Par conséquent, et par associativité du pléthysme, on a

$$(2.11) \quad (1 + \text{Com}) \circ (\text{Lie} \circ \text{Brace}) = \left(\frac{1}{1-p_1} \right) \circ \text{Brace}.$$

En passant aux invariants de part et d'autre, on en déduit la proposition. □

On utilise maintenant cette suite d'entiers \mathbf{a}_n pour décrire le module dendriforme $\text{Dend}(n - 1)$ sur le groupe cyclique C_n .

PROPOSITION 2.3. — *Pour tout $n \geq 1$, on a l'égalité suivante :*

$$(2.12) \quad \sum_{d|n} \mathbf{a}_d \chi'_{n,d} = \frac{1}{2n} \sum_{d|n} \phi(d) \binom{2n/d}{n/d} p_d^{n/d}.$$

Preuve. — On calcule la somme pour $n \geq 1$ du membre de gauche. En utilisant l'expression (1.12) de $\chi'_{n,d}$, on obtient

$$(2.13) \quad \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \frac{1}{2d} \sum_{k|d} \mu(d/k) \binom{2k}{k} \frac{d}{n} \sum_{\ell|n/d} \phi(\ell) p_\ell^{n/\ell},$$

ce qui s'écrit encore

$$(2.14) \quad \sum_{n \geq 1} \sum_{d|n} \sum_{k|d} \sum_{\ell|n/d} \frac{1}{2n} \mu(d/k) \binom{2k}{k} \phi(\ell) p_\ell^{n/\ell}.$$

On introduit de nouvelles variables de sommation i et j en posant $n = ijkl$ et $d = ik$. En remplaçant les sommations sur n et d par des sommations sur i et j , on obtient

$$(2.15) \quad \sum_{i,j,k,\ell} \frac{1}{2ijkl} \mu(i) \phi(\ell) \binom{2k}{k} p_\ell^{ijk}.$$

En utilisant le pléthysme des fonctions symétriques, on peut factoriser cette expression comme suit :

$$(2.16) \quad \left(\sum_i \mu(i) p_i / i \right) \circ \left(\sum_j p_j / j \right) \circ \left(\sum_{k,\ell} \frac{1}{2k\ell} \phi(\ell) \binom{2k}{k} p_\ell^k \right).$$

Les deux premiers termes sont dans un sous-groupe des fonctions symétriques pour le pléthysme qui est isomorphe au groupe commutatif des séries de Dirichlet pour le produit ; on en déduit que ces deux termes sont inverses l'un de l'autre. On obtient donc

$$(2.17) \quad \sum_{k,\ell} \frac{1}{2k\ell} \phi(\ell) \binom{2k}{k} p_\ell^k.$$

Il est facile de voir que le terme de degré n de cette somme est exactement le résultat attendu. □

On a donc montré que l'induite du module virtuel

$$(2.18) \quad 2\mathbf{c}_{n-1}M_{n,n} - \bigoplus_{d|n} \mathbf{a}_d M_{n,d}$$

a le même caractère que l'induite du module $\text{Dend}(n - 1)$.

On sait aussi que le module $\text{Dend}(n - 1)$ est défini sur les rationnels et même sur les entiers. On sait par ailleurs que les modules $M_{n,d}$ sont aussi définis sur les rationnels.

Par la proposition 1.3, on en déduit

THÉORÈME 2.4. — *Le module $\text{Dend}(n - 1)$ a pour caractère*

$$(2.19) \quad 2\mathbf{c}_{n-1}\chi_{n,n} - \bigoplus_{d|n} \mathbf{a}_d \chi_{n,d},$$

et le polynôme caractéristique du générateur t de C_n est

$$(2.20) \quad \frac{(t^n - 1)^{2\mathbf{c}_{n-1}}}{\prod_{d|n} (t^d - 1)^{\mathbf{a}_d}}.$$

Ce théorème incite à penser que le module $\text{Dend}(n - 1)$ doit admettre une résolution de la forme

$$(2.21) \quad 0 \longrightarrow \bigoplus_{d|n} \mathbf{a}_d M_{n,d} \longrightarrow 2\mathbf{c}_{n-1}M_{n,n} \longrightarrow \text{Dend}(n - 1) \longrightarrow 0.$$



On a une application évidente de $c_{n-1}M_{n,n}$ dans $\text{Dend}(n - 1)$, induite par l'identité de $\text{Dend}(n - 1)$. Pour définir un morphisme de $2c_{n-1}M_{n,n}$ dans $\text{Dend}(n - 1)$, il faudrait une autre application de $c_{n-1}M_{n,n}$ dans $\text{Dend}(n - 1)$. On peut supposer qu'elle doit provenir d'une involution sur $\text{Dend}(n - 1)$.

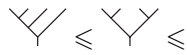

Remarque : dans le cas similaire mais plus simple de l'opérate diassociative *Dias*, dont le caractère anticyclique est donné par $M'_{n,n} - M'_{n,1}$, on retrouve la description connue du module $\text{Dias}(n - 1)$ comme quotient de $M_{n,n}$ par $M_{n,1}$. On a une suite exacte courte

$$(2.22) \quad 0 \longrightarrow M_{n,1} \longrightarrow M_{n,n} \longrightarrow \text{Dias}(n - 1) \longrightarrow 0.$$

3. Transformation de Coxeter

Le treillis de Tamari [9] est un ordre partiel sur les arbres binaires plans à n feuilles. Rappelons brièvement sa définition, en décrivant les relations

de couverture, à partir desquelles l'ordre partiel \leq s'obtient par clôture transitive. Soient S et T deux arbres binaires plans à n feuilles. Alors S est couvert par T (donc $S \leq T$) si S et T diffèrent juste localement dans le voisinage de deux sommets par remplacement de la configuration  dans S par la configuration  dans T .

Par exemple, on a les relations de couvertures suivantes  et .

Soit C la matrice de cet ordre :

$$(3.1) \quad C_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice $\theta = -C({}^t C^{-1})$ est appelée la transformation de Coxeter du poset de Tamari. Elle admet une interprétation naturelle en termes de la catégorie dérivée de la catégorie de modules sur l'algèbre d'incidence du poset de Tamari.

On peut identifier naturellement la base associée à θ , indexée par les arbres binaires plans, et la base de $\text{Dend}(n)$ introduite dans la section §1.2.

On a montré dans [4] la relation suivante.

PROPOSITION 3.1 ([4], Th. 6.1). — Si τ est la matrice d'ordre n provenant de la structure anticyclique de l'opérade Dend et θ la transformation de Coxeter du treillis de Tamari, alors on a

$$(3.2) \quad \tau = (-1)^{n+1} \theta^2.$$

Il est donc naturel de se demander si il existe une description simple du polynôme caractéristique de θ . On propose ci-dessous une conjecture pour ce polynôme. Il est nécessaire de distinguer les cas n pair et n impair.

On commence par introduire une suite d'entiers relatifs $\lambda(n)$.

$$(3.3) \quad \lambda(n) = (-1)^{\binom{n}{2}} \binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}.$$

On définit ensuite une suite d'entiers relatifs \mathbf{b}_n par inversion de Möbius :

$$(3.4) \quad \mathbf{b}_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \lambda(n/d).$$

A priori, les \mathbf{b}_n sont des rationnels. Il faut justifier que ce sont bien des entiers relatifs. On procède comme pour la suite \mathbf{a}_n , en utilisant des fonctions symétriques.

On introduit la fonction symétrique

$$(3.5) \quad Z = p_1 + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \binom{2n}{n} p_1^{2n+2} = \frac{1 + 2p_1 - \sqrt{1 + 4p_1^2}}{2}.$$

PROPOSITION 3.2. — La fonction symétrique $\text{Lie} \circ Z$ est

$$(3.6) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \lambda(n/d) p_d^{n/d}.$$

Preuve. — La preuve est similaire à celle de la Prop. 2.1. Par définition du pléthysme, il faut calculer

$$(3.7) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{1 + 2p_d - \sqrt{1 + 4p_d^2}}{2} \right)^{n/d}.$$

En échangeant les sommations, on obtient

$$(3.8) \quad - \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d} \log \left(\frac{1 - 2p_d + \sqrt{1 + 4p_d^2}}{2} \right).$$

On utilise alors le développement de Taylor (4.29) (Voir appendice A) :

$$(3.9) \quad - \log \left(\frac{1 - 2u + \sqrt{1 + 4u^2}}{2} \right) = \sum_{n \geq 1} \lambda(n) u^n / n.$$

On obtient donc

$$(3.10) \quad \sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda(k)}{k} p_d^k,$$

qui se réduit facilement au résultat voulu. □

Comme Lie et Z sont des combinaisons linéaires entières de fonctions de Schur, la fonction symétrique $\text{Lie} \circ Z$ l'est aussi. Ceci montre que les \mathbf{b}_n sont bien des entiers relatifs, car ce sont les coefficients des fonctions de Schur triviales dans cette fonction symétrique.

Voici les premiers termes de la suite \mathbf{b}_n pour $n \geq 1$:

$$(3.11) \quad 1, -1, -1, 1, 1, -1, -3, 4, 8, -13, -23, 39, 71, -121, \dots$$

On remarque que les signes des \mathbf{b}_n semblent suivre un motif régulier, le même que pour la suite $\lambda(n)$. En fait, il semble même que chaque composante homogène de la fonction symétrique $\text{Lie} \circ Z$ soit une somme de fonctions de Schur dont les signes sont soit tous positifs, soit tous négatifs selon la valeur de n modulo 4. On a vérifié ceci pour $n \leq 12$.

PROPOSITION 3.3. — On a

$$(3.12) \quad F_{\mathbf{b}}(x) = \prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^{-\mathbf{b}_n} = \frac{-1 + 2x + \sqrt{1 + 4x^2}}{2x}.$$

Preuve. — On utilise l'identité

$$(3.13) \quad (1 + \text{Com}) \circ (\text{Lie} \circ Z) = \frac{1}{1 - p_1} \circ Z.$$

En passant aux invariants, on trouve l'égalité voulue. □

On utilise maintenant la suite de nombres entiers relatifs \mathbf{b}_n pour proposer une description de θ .

CONJECTURE 3.4. — Pour n pair, le polynôme caractéristique de θ est

$$(3.14) \quad \frac{(t^{2n} - 1)^{c_{n-1}}}{\prod_{d|2n} (t^d - 1)^{\mathbf{b}_d}}.$$

Pour donner une conjecture dans le cas n impair, on définit une autre suite d'entiers relatifs \mathbf{b}'_n à partir de la suite \mathbf{b}_n :

$$(3.15) \quad \mathbf{b}'_n = \begin{cases} \mathbf{b}_n & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2}, \\ -\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n/2} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Voici les premiers termes de la suite \mathbf{b}'_n pour $n \geq 1$:

$$(3.16) \quad 1, 0, -1, 0, 1, 2, -3, -5, 8, 12, -23, -38, 71, 124, \dots$$

CONJECTURE 3.5. — Pour n impair, le polynôme caractéristique de θ est

$$(3.17) \quad \frac{(t^{2n} - 1)^{c_{n-1}}}{\prod_{d|2n} (t^d - 1)^{\mathbf{b}'_d}}.$$

4. Comparaison entre conjectures et théorème

On montre ici que les conjectures 3.4 et 3.5 sont compatibles avec (et impliquent) le théorème 2.4 décrivant le polynôme caractéristique pour τ .

Le polynôme caractéristique du carré d'une matrice M d'ordre fini à coefficients entiers est obtenu par la substitution suivante dans celui de M :

$$(4.1) \quad (t^d - 1) \mapsto \begin{cases} t^d - 1 & \text{si } d \equiv 1 \pmod{2}, \\ (t^{d/2} - 1)^2 & \text{si } d \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique de l'opposé d'une matrice M d'ordre fini à coefficients entiers est obtenu par la substitution suivante dans celui de M :

$$(4.2) \quad (t^d - 1) \mapsto \begin{cases} (t^{2d} - 1)/(t^d - 1) & \text{si } d = 1 \pmod 2, \\ (t^d - 1) & \text{si } d = 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Supposons d'abord n impair et considérons la conjecture 3.5. Dans ce cas, on a $\tau = \theta^2$. On obtient donc l'expression suivante pour le polynôme caractéristique de τ :

$$(4.3) \quad (t^n - 1)^{2c_{n-1}} \prod_{\substack{d|2n \\ d=1 \pmod 2}} (t^d - 1)^{-b'_d} \prod_{\substack{d|2n \\ d=0 \pmod 2}} (t^{d/2} - 1)^{-2b'_d}.$$

Ceci se réécrit

$$(4.4) \quad (t^n - 1)^{2c_{n-1}} \prod_{d|n} (t^d - 1)^{-b'_d - 2b'_{2d}}.$$

Pour identifier ceci à la formule (2.20), il faut donc avoir

$$(4.5) \quad \mathbf{a}_d = \mathbf{b}'_d + 2\mathbf{b}'_{2d}$$

pour tous les entiers d impairs. En utilisant les relations (3.15), ceci est équivalent à

$$(4.6) \quad \mathbf{a}_d = -\mathbf{b}_d - 2\mathbf{b}_{2d}$$

pour tous les entiers d impairs.

Supposons maintenant n pair et considérons la conjecture 3.4. Dans ce cas, on a $\tau = -\theta^2$. On obtient donc l'expression suivante pour le polynôme caractéristique de τ :

$$(4.7) \quad (t^n - 1)^{2c_{n-1}} \prod_{\substack{d|n \\ d=0 \pmod 2}} (t^d - 1)^{-2b_{2d}} \prod_{\substack{d|n \\ d=1 \pmod 2}} \frac{(t^{2d} - 1)^{-2b_{2d}}}{(t^d - 1)^{-2b_{2d}}} \prod_{\substack{d|n \\ d=1 \pmod 2}} \frac{(t^{2d} - 1)^{-b_d}}{(t^d - 1)^{-b_d}}.$$

Pour identifier cette expression avec la formule (2.20), on distingue selon la valeur de d modulo 4. On obtient les conditions suivantes :

$$(4.8) \quad \mathbf{a}_d = \begin{cases} -2\mathbf{b}_{2d} - \mathbf{b}_d & \text{si } d = 1 \pmod 2, \\ 2\mathbf{b}_{2d} & \text{si } d = 0 \pmod 4, \\ 2\mathbf{b}_{2d} + 2\mathbf{b}_d + \mathbf{b}_{d/2} & \text{si } d = 2 \pmod 4. \end{cases}$$

On remarque que la condition (4.6) obtenue plus haut dans le cas n impair fait aussi partie des trois conditions ci-dessus.

Ces conditions sont équivalentes à la Proposition suivante.

PROPOSITION 4.1. — *On a la relation*

$$(4.9) \quad \prod_n (1 - x^n)^{-\mathbf{a}_n} = \prod_{n=0 \bmod 4} (1 - x^n)^{-2\mathbf{b}_{2n}} \prod_{n=2 \bmod 4} (1 - x^n)^{-2\mathbf{b}_{2n} - 2\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n/2}} \prod_{n=1 \bmod 2} (1 - x^n)^{2\mathbf{b}_{2n} + \mathbf{b}_n}.$$

Preuve. — Calculons le second membre :

$$(4.10) \quad \prod_{n=0 \bmod 2} (1 - x^{2n})^{-2\mathbf{b}_{4n}} \prod_{n=1 \bmod 2} (1 - x^{2n})^{-2\mathbf{b}_{4n} - 2\mathbf{b}_{2n} - \mathbf{b}_n} \prod_{n=1 \bmod 2} (1 - x^n)^{2\mathbf{b}_{2n} + \mathbf{b}_n}.$$

On coupe en deux le facteur central et on regroupe :

$$(4.11) \quad \prod_n (1 - x^{2n})^{-2\mathbf{b}_{4n}} \prod_{n=1 \bmod 2} (1 + x^n)^{-2\mathbf{b}_{2n} - \mathbf{b}_n}.$$

On réécrit le premier facteur et on coupe en deux le second :

$$(4.12) \quad \prod_{n=0 \bmod 2} (1 - x^n)^{-2\mathbf{b}_{2n}} \prod_{n=1 \bmod 2} (1 + x^n)^{-2\mathbf{b}_{2n}} \prod_{n=1 \bmod 2} (1 + x^n)^{-\mathbf{b}_n}.$$

On regroupe les deux premiers facteurs et on réécrit le troisième :

$$(4.13) \quad \prod_n (1 - (-x)^n)^{-2\mathbf{b}_{2n}} \prod_{n=1 \bmod 2} (1 - (-x)^n)^{-\mathbf{b}_n}.$$

On complète le second facteur :

$$(4.14) \quad \prod_n (1 - (-x)^n)^{-2\mathbf{b}_{2n}} \prod_n (1 - (-x)^{2n})^{\mathbf{b}_{2n}} \prod_n (1 - (-x)^n)^{-\mathbf{b}_n}.$$

Le troisième facteur est $F_{\mathbf{b}}(-x)$, la fonction $F_{\mathbf{b}}$ étant définie par (3.12). On regroupe les deux premiers facteurs et on simplifie :

$$(4.15) \quad \prod_n \left(\frac{1 - (-x)^n}{1 + (-x)^n} \right)^{-\mathbf{b}_{2n}} F_{\mathbf{b}}(-x).$$

On pose $x = -z^2$ et on choisit les signes avec soin :

$$(4.16) \quad \prod_n \left(\frac{1 - z^{2n}}{1 + (-z)^{2n}} \right)^{-\mathbf{b}_{2n}} F_{\mathbf{b}}(z^2),$$

soit encore

$$(4.17) \quad \prod_{n=0 \bmod 2} \left(\frac{1 - z^n}{1 + (-z)^n} \right)^{-\mathbf{b}_n} F_{\mathbf{b}}(z^2).$$

On peut alors compléter le produit sans introduire de nouveaux termes :

$$(4.18) \quad \prod_n \left(\frac{1 - z^n}{1 + (-z)^n} \right)^{-\mathbf{b}_n} F_{\mathbf{b}}(z^2),$$

soit enfin

$$(4.19) \quad F_{\mathbf{b}}(z) \prod_n (1 - (-z)^{2n})^{\mathbf{b}_n} \prod_n (1 - (-z)^n)^{-\mathbf{b}_n} F_{\mathbf{b}}(z^2).$$

On obtient donc

$$(4.20) \quad F_{\mathbf{b}}(z)(1/F_{\mathbf{b}}(z^2))F_{\mathbf{b}}(-z)F_{\mathbf{b}}(z^2) = F_{\mathbf{b}}(z)F_{\mathbf{b}}(-z),$$

ce qui vaut bien

$$(4.21) \quad \frac{1 - \sqrt{1 + 4z^2}}{-2z^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Ceci est bien la fonction $F_{\mathbf{a}}(x)$ définie en (2.10), comme attendu. \square

Remarque : on a montré au passage la relation

$$(4.22) \quad F_{\mathbf{a}}(-z^2) = F_{\mathbf{b}}(z)F_{\mathbf{b}}(-z).$$

Appendice A : développements de Taylor utiles

On rappelle quelques développements de Taylor.

Le premier est classique et facile :

$$(4.23) \quad \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 4x}}.$$

On déduit de (4.23) en utilisant l'opérateur $x\partial_x$:

$$(4.24) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

On déduit aussi de (4.23) en utilisant l'opérateur $x\partial_x$:

$$(4.25) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} \binom{2n}{n} x^n = -\log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2} \right).$$

On déduit de (4.24) en remplaçant x par $-x^2$:

$$(4.26) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \binom{2n}{n} x^{2n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 + 4x^2}}{2x}.$$

On démontre ensuite

$$(4.27) \quad \sum_{n \geq 1} \lambda_n x^n = \frac{x}{\sqrt{1 + 4x^2}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} \right),$$

où λ_n est donnée par (3.3), en séparant les puissances paires et impaires de x et en utilisant la relation

$$(4.28) \quad \binom{2n}{n} = 2 \binom{2n-1}{n}.$$

On déduit ensuite de (4.27) en utilisant l'opérateur $x\partial_x$:

$$(4.29) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_n}{n} x^n = -\log \left(\frac{1 - 2x + \sqrt{1 + 4x^2}}{2} \right).$$

Appendice B : exemples pour n petit

On calcule C à l'aide de la description combinatoire du treillis de Tamari. On en déduit θ puis τ , comme au début de la section 3.

$n = 2$. La base de $\text{Dend}(1)$ est $\left\{ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\}$.

$$C = [1] \quad \theta = [-1] \quad \tau = [-1]$$

$n = 3$. La base de $\text{Dend}(2)$ est $\left\{ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\}$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tau = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$n = 4$. La base de $\text{Dend}(3)$ est $\left\{ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\}$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. AGUIAR & F. SOTTILE, « Structure of the Loday-Ronco Hopf algebra of trees », *J. Algebra* **295** (2006), n° 2, p. 473-511.
- [2] F. CHAPOTON, « On some anticyclic operads », *Algebr. Geom. Topol.* **5** (2005), p. 53-69 (electronic).
- [3] ———, « The anticyclic operad of moulds », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2007), n° 20, p. Art. ID rnm078, 36.
- [4] F. CHAPOTON, « On the Coxeter transformations for Tamari posets », *Canad. Math. Bull.* **50** (2007), n° 2, p. 182-190.

- [5] C. W. CURTIS & I. REINER, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XI, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962, xiv+685 pages.
- [6] F. HIVERT, J.-C. NOVELLI & J.-Y. THIBON, « Un analogue du monoïde plaxique pour les arbres binaires de recherche », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), n° 7, p. 577-580.
- [7] ———, « Sur quelques propriétés de l'algèbre des arbres binaires », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **337** (2003), n° 9, p. 565-568.
- [8] ———, « The algebra of binary search trees », *Theoret. Comput. Sci.* **339** (2005), n° 1, p. 129-165.
- [9] S. HUANG & D. TAMARI, « Problems of associativity : A simple proof for the lattice property of systems ordered by a semi-associative law », *J. Combinatorial Theory Ser. A* **13** (1972), p. 7-13.
- [10] J.-L. LODAY, « Dialgebras », in *Dialgebras and related operads*, Lecture Notes in Math., vol. 1763, Springer, Berlin, 2001, p. 7-66.
- [11] ———, « Arithmetree », *J. Algebra* **258** (2002), n° 1, p. 275-309, Special issue in celebration of Claudio Procesi's 60th birthday.
- [12] J.-L. LODAY & M. O. RONCO, « Hopf algebra of the planar binary trees », *Adv. Math.* **139** (1998), n° 2, p. 293-309.
- [13] ———, « Order structure on the algebra of permutations and of planar binary trees », *J. Algebraic Combin.* **15** (2002), n° 3, p. 253-270.
- [14] I. G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second éd., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications, x+475 pages.

Manuscrit reçu le 30 avril 2007,
révisé le 22 janvier 2008,
accepté le 16 mai 2008.

Frédéric CHAPOTON
Université Claude Bernard Lyon 1
Institut Camille Jordan
21 avenue Claude Bernard
69622 Villeurbanne cedex (France)
chapoton@math.univ-lyon1.fr