ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Abdelhamid ADOUANI & Habib MARZOUGUI

Sur les homéomorphismes du cercle de classe $P\,C^r$ par morceaux ($r \geqslant 1$) qui sont conjugués C^r par morceaux aux rotations irrationnelles

Tome 58, n° 3 (2008), p. 755-775.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2008__58_3_755_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
58, 3 (2008) 755-775

SUR LES HOMÉOMORPHISMES DU CERCLE DE CLASSE $P\ C^r$ PAR MORCEAUX ($r \geqslant 1$) QUI SONT CONJUGUÉS C^r PAR MORCEAUX AUX ROTATIONS IRRATIONNELLES

par Abdelhamid ADOUANI & Habib MARZOUGUI

RÉSUMÉ. — Soit $r \geqslant 1$ un réel. Ici, on étudie les homéomorphismes du cercle qui sont de classe $P\ C^r$ par morceaux et de nombres de rotation irrationnels. On caractérise ceux qui sont C^r par morceaux conjugués à des C^r-difféomorphismes. Comme conséquence, on obtient un critère de conjugaison C^1 par morceaux aux rotations diophantiennes. Cette caractérisation étend celles obtenues par Liousse pour les homéomorphismes affines par morceaux du cercle et par Dzhalilov pour les homéomorphismes de classe P de nombres de rotation de type constant. On montre aussi que tout sous-groupe d'homéomorphismes de classe $P\ C^r$ par morceaux qui est abélien et qui contient au moins deux éléments de nombres de rotation irrationnels et rationnellement indépendants est C^r par morceaux conjugué à un sous-groupe de C^r-difféomorphismes. On en déduit un résultat de conjugaison C^∞ (resp. C^ω) pour les homéomorphismes de classe $P\ C^\infty$ (resp. C^ω) par morceaux commutants qui est l'analogue du récent résultat de Fayad et Khanin.

ABSTRACT. — Let $r \geqslant 1$ be a real. In this paper, we study piecewise class $P\ C^r$ circle homeomorphisms with irrational rotation numbers. We give characterizations for such homeomorphisms that are piecewise C^r conjugate to C^r diffeomorphisms. As a consequence, we obtain a criterion of piecewise C^r conjugacy to diophantine rotations. This characterization extends those obtained by Liousse for the PL circle homeomorphisms and by Dzhalilov for the piecewise class P circle homeomorphisms with rotation numbers of constant type. We also show that every abelian subgroup of piecewise class $P\ C^r$ circle homeomorphism which contains at least two elements with rotation numbers irrational and rationally independent, is piecewise C^r conjugate to a subgroup of C^r diffeomorphisms. An analogous to a recent result of Fayad and Khanin, is obtained concerning C^∞ (resp. C^ω) conjugacy for piecewise class $P\ C^\infty$ (resp. C^ω) commuting homeomorphisms of the circle.

Mots-clés : homéomorphisme de classe $P\ C^r$ par morceaux, condition de Hölder, nombre de rotation, conjugaison, point de coupure, point singulier, saut, mesure invariante, mesure équivalente, mesure singulière.
Classification math. : 37C15, 37E10.

1. Introduction

On note $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle et $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ la projection canonique. Soit f un homéomorphisme de S^1 qui préserve l'orientation, f se relève en un homéomorphisme $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissant de $\mathbb{R}$ tel que $p \circ \tilde{f} = f \circ p$. Réciproquement, un tel homéomorphisme de $\mathbb{R}$ se projette en un homéomorphisme de S^1 qui préserve l'orientation.

Soit $x \in S^1$. On appelle *orbite* de x par f le sous-ensemble

$$O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Historiquement, l'étude dynamique des homéomorphismes du cercle est initiée par H. Poincaré ([16], 1886), il introduit le nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle. Il est défini par

$$\rho(f) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}^n(x) - x}{n} (\mathrm{mod}\, 1)$$

Poincaré montre que cette limite existe et ne dépend pas du choix du point x, ni du choix du relevé de f.

Lorsque f est un C^r-difféomorphisme avec $r \geqslant 2$ et de nombre de rotation irrationnel, A. Denjoy ([2]) montre le :

Théorème de Denjoy([2]). — *Tout C^r-difféomorphisme f avec ($r \geqslant 2$) et de nombre de rotation $\rho(f)$ irrationnel est topologiquement conjugué à la rotation $R_{\rho(f)}$.*

Cela signifie qu'il existe un homéomorphisme croissant h de S^1 tel que $f = h^{-1} \circ R_{\rho(f)} \circ h$. Denjoy note que ce résultat s'étend (avec la même preuve) à une classe plus large d'homéomorphismes du cercle : *la classe P*.

Définition 1.1. — *Un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation f est dit de* classe P *s'il est dérivable sauf sur un ensemble fini ou dénombrable de points dits* de coupure *qui admettent des dérivées à droite et à gauche, et sa dérivée $Df : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star$ a les propriétés suivantes :*
– il existe deux constantes $0 < a < b < +\infty$ telles que :
$a < Df(x) < b$, pour tout x où Df est définie,
$a < Df_+(c) < b$ et $a < Df_-(c) < b$ en les points c de coupure,
– $\log Df$ est à variation bornée sur S^1.

Le rapport $\sigma_f(c) := \frac{Df_+(c)}{Df_-(c)}$ est appelé *saut de f au point c.*

L'ensemble des points de coupure de f est noté $C(f)$.

Comme exemples d'homéomorphismes de classe P, nous citons :

– les C^2-difféomorphismes,

– les homéomorphismes affines par morceaux (qui ne sont pas des C^2-difféomorphismes).

Un homéomorphisme f du cercle, préservant l'orientation, est dit *affine par morceaux* si f est dérivable sauf en un nombre fini de points de coupure $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de S^1 et tel que Df est constante sur chaque $]c_i, c_{i+1}[$.

La classe des homéomorphismes affines a été bien étudiée par Liousse dans [13], [12].

Les homéomorphismes analytiques ne sont pas toujours de classe P et ne constituent pas un groupe. D'après J.C. Yoccoz ([18]) ils vérifient la conclusion du théorème de Denjoy mais pas la théorie de Denjoy.

DÉFINITION 1.2. — *On identifie les fonctions définies sur S^1 et les fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques d'une variable réelle.*

a) Soit $0 < \nu < 1$ un réel, et soit I un intervalle de S^1, on dit qu'une fonction continue $\varphi : I \to \mathbb{R}$ vérifie une condition de Hölder d'ordre ν sur I s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C|x-y|^\nu$ pour tous $x, y \in I$.

b) Soient $r \geqslant 1$ un réel et $[r]$ sa partie entière. Une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^r sur I si φ est de classe $C^{[r]}$ sur I et sa dérivée d'ordre $[r]$: $D^{[r]}f$ vérifient une condition de Hölder d'ordre $r-[r]$ sur I.

DÉFINITION 1.3. — *a) Soit $n \geqslant 1$ un entier, un homéomorphisme f de classe P du cercle est dit de classe P C^n par morceaux si f est C^n sauf en un nombre fini de points dits singuliers en lesquels on suppose que les dérivées successives jusqu'à l'ordre n à droite et à gauche existent, et que la dérivée $D^n f$ d'ordre n admet, en les points singuliers c, une limite à gauche (resp. à droite) égale à $D^n f_-(c)$ (resp. $D^n f_+(c)$).*

On note $S(f)$ l'ensemble des points singuliers de f.

b) Soit $r \geqslant 1$ un réel de partie entière $[r]$, $r = +\infty$ ou $r = \omega$. Un homéomorphisme f de classe P du cercle est dit de classe P C^r par morceaux si f est de classe P $C^{[r]}$ par morceaux et si $D^{[r]}f$ vérifie une condition de Hölder d'ordre $r-[r]$ sur tout intervalle I où f est $C^{[r]}$.

On note $\mathcal{P}^r(S^1)$ l'ensemble d'homéomorphismes de classe P C^r par morceaux de S^1 ($r \geqslant 1$ réel, $r = +\infty$, ou $r = \omega$). D'après le lemme 6.2, $\mathcal{P}^r(S^1)$ est un groupe.

Remarquons que dans le cas $r = 1$, l'ensemble singulier $S(f)$ est égal à l'ensemble $C(f)$ des points de coupure de f.

Notons $\pi_s(f)$ le produit des sauts de f aux points de coupure de f :

$$\pi_s(f) = \prod_{c\in C(f)} \sigma_f(c).$$

Proposition 1.4. — [1]*(Invariance de π_s par conjugaison C^1 par morceaux). Soient f, g deux homéomorphismes préservant l'orientation de classe C^1 par morceaux du cercle. Si f et g sont bi-C^1 par morceaux conjugués alors $\pi_s(f) = \pi_s(g)$.*

On a la proposition triviale suivante :

Proposition 1.5. — *L'ensemble singulier $S(f)$ se décompose en une réunion de sous-ensembles finis $S_i(f)$ supportée par des orbites deux à deux disjointes :*

$$S(f) = \coprod_{i=1}^{p} S_i(f)$$

où $S_i(f) = S(f) \cap O_f(c_i), c_i \in S(f)$ et $O_f(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont 2 à 2 disjointes.

Définition 1.6. — *On appelle enveloppe de $S_i(f)$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ l'ensemble*

$$M_i(f) = \{x_i, f(x_i), .., f^{N(f,x_i)}(x_i)\},$$

où $N(f, x_i) \in \mathbb{N}$, $x_i, f^{N(f,x_i)}(x_i) \in S(f)$ et $S(f) \cap M_i(f) = S(f) \cap O_f(x_i) = S_i(f)$. Le cardinal de $M_i(f)$ est égal à $N(f, x_i) + 1$. On pose $M(f) = \cup_{i=1}^{p} M_i(f)$ et son cardinal $N(f) = \sum_{i=1}^{p} N(f, x_i) + p$.

Définition 1.7. — *Soit $r \geqslant 1$ un réel. On dit qu'un homéomorphisme $f \in \mathcal{P}^r(S^1)$ a la propriété D_r si $f^{N(f,x_i)+1}$ est $C^{[r]}$ en x_i, pour $i = 1, ..., p$.*

On remarque que si l'un des $N(f, x_i) = 0$ alors x_i est le seul point singulier de son orbite et la propriété D_r n'est pas vérifiée.

Remarque 1.8. — Dans le cas $r = 1$, la propriété D_1 est équivalente à la propriété D de Minakawa-Liousse (*cf.* [14], [11]) suivante :

Le produit des sauts de f aux points de coupure de f situés sur une même orbite vaut 1 (*i.e.*, pour tout $i = 1, ..., p$,

$$\prod_{d \in M_i(f)} \sigma_f(d) = 1 = \prod_{d \in S_i(f)} \sigma_f(d).)$$

En effet, $f^{N(f,x_i)+1}$ est C^1 en $x_i, i = 1, ..., p$ signifie que

$$\sigma_{f^{N(f,x_i)+1}}(x_i) = 1 = \prod_{c \in S_i(f)} \sigma_f(c) = \prod_{j=0}^{N(f,x_i)} \sigma_f(f^j(x_i)),$$

autrement dit que : f vérifie la propriété D.

En particulier, si f a la propriété D alors $\pi_s(f) = 1$. Réciproquement, si $\pi_s(f) = 1$ et si tous les points de coupure se trouvent sur une même orbite, alors f a la propriété D.

Lorsque f est un homéomorphisme affine par morceaux, on a toujours $\pi_s(f) = 1$. Par conséquent, un homéomorphisme f affine par morceaux satisfait la propriété D si tous ses points de coupure sont sur une même orbite.

2. Enonce des résultats

2.1. Critère de conjugaison dans $\mathcal{P}^r(S^1)$

THÉORÈME 2.1. — *Soit $r \geqslant 1$ un réel et $f \in \mathcal{P}^r(S^1)$ de nombre de rotation irrationnel. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *f est conjugué dans $\mathcal{P}^r(S^1)$ à un C^r-difféomorphisme,*

ii) *f a la propriété D_r,*

iii) *f est conjugué à un C^r-difféomorphisme par un homéomorphisme $K \in \mathcal{P}^r(S^1)$ polynômial par morceaux de degré au plus $(2r+1)^{N(f)-p}$.*

COROLLAIRE 2.2. — [1] *Soit f un homéomorphisme de classe P C^1 par morceaux du cercle de nombre de rotation irrationnel. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *f est conjugué à un C^1-difféomorphisme par un homéomorphisme de classe P,*

ii) *f possède la propriété D,*

iii) *f est conjugué à un C^1-difféomorphisme par un homéomorphisme de classe P polynômial par morceaux.*

COROLLAIRE 2.3. — *Soit f un homéomorphisme affine par morceaux de S^1 de nombre de rotation irrationnel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *f est conjugué dans $\mathcal{P}^r(S^1)$ à un C^r-difféomorphisme de S^1,*

ii) *f possède la propriété D,*

iii) *f est conjugué à un C^r-difféomorphisme de S^1 par un homéomorphisme de classe P polynômial par morceaux pour tout réel $r \geqslant 1$.*

En particulier :

Corollaire 2.4. — *Un homéomorphisme affine par morceaux f de S^1 de nombre de rotation irrationnel dont les points de coupure sont sur une même orbite $O_f(c)$ est conjugué pour tout $r \geqslant 1$ à un C^r-difféomorphisme de S^1 par un homéomorphisme de classe P polynômial par morceaux de degré au plus $(2r+1)^{N(f)}$ où $N(f)+1$ est le cardinal de l'enveloppe de $S(f)$.*

2.1.1. Critères de conjugaison aux rotations

Soient α irrationnel et $\tau \geqslant 0$ un réel. On dit que α est *diophantien* d'ordre $\tau \geqslant 0$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\mid \alpha - \frac{p}{q} \mid > \frac{C}{q^{2+\tau}}$, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Si α est diophantien d'ordre 0, α est dit *de type constant.*

Pour $\alpha = p(\theta) \in S^1$, on note $\| \alpha \| = \min\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mid \theta - k \mid$.

Soient $\theta_1, ..., \theta_d \in S^1$ $(d \geqslant 1)$. On dit que $\theta_1, ..., \theta_d$ satisfont *la condition* (1) : s'il existe $\nu > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}^\star$,

$$\max(\| k\theta_1 \|, ..., \| k\theta_d \|) \geqslant \frac{C}{\mid k \mid^\nu}.$$

Théorème de Katznelson-Ornstein ([9]). — *Soit α un nombre irrationnel diophantien d'ordre $\tau \geqslant 0$. Soit r un réel positif et soit f un C^r-difféomorphisme du cercle de nombre de rotation α. Si $r > \tau + 2$ alors f est conjugué à la rotation R_α par un homéomorphisme de classe $C^{r-1-\tau-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

Théorème de Dzhalilov [4]. — *Soit α un irrationnel* de type constant *et f un homéomorphisme de classe P du cercle de nombre de rotation α dont les points de coupure sont sur une même orbite avec $\pi_s(f) = 1$. Si $f \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \backslash C(f))$ pour un $\varepsilon > 0$ alors f est conjugué à la rotation R_α par un homéomorphisme de classe $C^{1+\varepsilon}$ par morceaux.*

Le théorème suivant peut être vu comme une généralisation du théorème de Dzhalilov énoncé ci-dessus, il est une conséquence directe du théorème 2.1 et du théorème de Katznelson-Ornstein :

Théorème 2.5. — *Soit α un nombre irrationnel diophantien d'ordre $\tau \geqslant 0$ et $r > \tau + 2$ un réel. Soit $f \in \mathcal{P}^r(S^1)$ de nombre de rotation α et possèdant la propriété D_r alors f est conjugué à la rotation R_α par un homéomorphisme de classe $C^{r-1-\tau-\epsilon}$ par morceaux pour tout $\epsilon > 0$, en particulier f est conjugué à la rotation R_α par un homéomorphisme de classe P C^1 par morceaux.*

2.2. Régularité des mesures invariantes

On sait qu'un homéomorphisme f de classe $P\ C^r$ par morceaux ($r \geqslant 1$) du cercle de nombre de rotation α irrationnel préserve une unique mesure sur S^1, notée μ_f, qui est de plus sans atome et à support total. Désignons par m la mesure de Haar sur S^1 (*i.e.*, projetée de la mesure de Lebesgue). Comme μ_f est l'unique mesure de probabilité f-invariante, elle est soit singulière, soit absolument continue par rapport à m. En fait, lorsque μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Haar m, elle est nécessairement équivalente à m comme conséquence de l'ergodicité de f par rapport à la mesure de Haar m.

Alors que certains résultats sur les C^2- difféomorphismes du cercle (théorème de Denjoy, ergodicité par rapport à la mesure de Haar) sont valables pour la classe P, d'autres ne le sont pas. Ainsi le théorème de Katznelson et Ornstein [8](voir aussi, [10] et [17]) affirmant qu'un C^2-difféomorphisme du cercle préservant l'orientation de nombre de rotation irrationnel *de type constant* préserve une mesure équivalente à la mesure de Haar, ne l'est plus en classe P :

• Pour les homéomorphismes affines par morceaux, I. Liousse a montré :

Théorème de Liousse ([12]). — *Soit f un homéomorphisme affine par morceaux du cercle de nombre de rotation irrationnel α.*

i) *Si les points de coupure de f sont sur la même orbite alors la mesure μ_f est équivalente à la mesure de Haar.*
ii) *Si les points de coupure de f ne sont pas sur la même orbite avec α de type constant et les logarithmes des pentes de f sont rationnellement indépendants alors la mesure μ_f est singulière par rapport à la mesure de Haar.*

• Pour les homéomorphismes de classe P ayant un seul point de coupure, Dzhalilov et Khanin ont montré :

Théorème de Dzhalilov-Khanin ([3]). — *Soit f un homéomorphisme de classe P du cercle de nombre de rotation irrationnel. Si f a un seul point de coupure c et si $f \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \backslash \{c\})$ pour un $\varepsilon > 0$ alors la mesure μ_f est singulière par rapport à la mesure de Haar.*

• Pour les homéomorphismes de classe P ayant deux (ou plus) de points de coupure, Dzhalilov et Liousse ont montré :

Théorème de Dzhalilov-Liousse ([5]). — *Soit f un homéomorphisme de classe P du cercle de nombre de rotation α irrationnel. Si f satisfait les conditions suivantes :*

i) *α est de type constant*

ii) *il existe $k_l \geqslant 0$ tel que $\mid Df(x) - Df(y) \mid \leqslant k_l \mid x - y \mid$ sur tout intervalle de continuité de Df*

iii) *f a deux points de coupure qui ne sont pas sur la même orbite, alors la mesure μ_f est singulière par rapport à la mesure de Haar.*

Le théorème de Dzhalilov-Liousse reste aussi valable pour un nombre fini arbitraire de points de coupure pourvu que f ait au moins deux orbites distinctes de points de coupure sur lesquelles le produit des sauts n'est pas égal à 1.

• Pour les homéomorphismes de classe P ayant un nombre fini arbitraire de points de coupure, on obtient :

THÉORÈME 2.6. — *Soit $r > 2$ un réel et $f \in \mathcal{P}^r(S^1)$ de nombre de rotation α irrationnel. On suppose que $f \in C^r(S^1 \backslash C(f))$. Alors :*

i) *si les points de coupure de f sont sur une même orbite et $\pi_s(f) \neq 1$ alors la mesure μ_f est singulière par rapport à la mesure de Haar m,*

ii) *si α est diophantien d'ordre $\tau \geqslant 0$ et si f vérifie la propriété D_r pour un réel $r > 2+\tau$ alors la mesure μ_f est équivalente à la mesure de Haar m.*

Remarque 2.7. — Il existe un homéomorphisme f de classe P C^∞ par morceaux de nombre de rotation de type Liouville (*i.e.*, non diophantien) ayant les propriétés suivantes :

– f a exactement deux points de coupure x_1 et x_2,

– x_1 et x_2 sont sur la même f-orbite et le produit des sauts :

$$\sigma_f(x_1)\sigma_f(x_2) = 1$$

– f possède une mesure invariante singulière par rapport à la mesure de Haar.

En effet, d'après [7], il existe un C^∞-difféomorphisme g de nombre de rotation de type Liouville tel que μ_g est une mesure singulière par rapport à la mesure de Haar m. Il suffit de prendre l'homéomorphisme $f := H \circ g \circ H^{-1}$ avec H un homéomorphisme de classe P C^∞ par morceaux du cercle ayant un seul point de coupure.

2.3. Sur la conjugaison des sous-groupes abéliens de $\mathcal{P}^r(S^1)$

On note $SO(2)$ le groupe des rotations de S^1. Pour $r \in [0,+\infty[$ réel, $r = +\infty$ ou $r = \omega$, on note $\mathrm{Diff}^r_+(S^1)$(resp. $\mathrm{Diff}^\omega_+(S^1)$) le groupe des C^r-difféomorphismes (resp. des difféomorphismes analytiques réels) préservant l'orientation de S^1.

Théorème 2.8. — *Soit $r \geqslant 1$ un réel. Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe abélien d'homéomorphismes de $\mathcal{P}^r(S^1)$ possèdant au moins deux éléments de nombres de rotations irrationnels et rationnellement indépendants. Alors $\mathcal{G}$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ par un homéomorphisme $H \in \mathcal{P}^r(S^1)$ polynômial par morceaux.*

Corollaire 2.9. — *Soient $f, g \in \mathcal{P}^r(S^1)$ (r réel $\geqslant 1$) de nombres de rotation irrationnels et rationnellement indépendants. Si $f \circ g = g \circ f$ alors f et g possèdent la propriété D_r.*

Dans [6], Fayad et Khanin ont résolu le problème de Moser [15] dans le cas C^∞ (resp. C^ω) en montrant un théorème de conjugaison aux rotations pour une famille de C^∞ (resp. C^ω)-difféomorphismes satisfaisant la condition (1) et deux à deux commutants :

Théorème de Fayad-Khanin [6]. — *Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe de Diff^∞_+ (S^1) (resp. $\mathrm{Diff}^\omega_+(S^1)$) engendré par d éléments $f_1, f_2, ..., f_d$ deux à deux commutants ($d \geqslant 2$) et de nombres de rotations $\theta_1, ..., \theta_d$ irrationnels. On suppose que $\theta_1, ..., \theta_d$ satisfont la condition (1). Alors $\mathcal{G}$ est conjugué à un sous-groupe de $SO(2)$ par un élément $H \in \mathrm{Diff}^\infty_+(S^1)$ (resp. $H \in \mathrm{Diff}^\omega_+(S^1)$).*

L'analogue pour $\mathcal{P}^\infty(S^1)$ (resp. $\mathcal{P}^\omega(S^1)$) du théorème ci-dessus est donné par le corollaire suivant :

Corollaire 2.10. — *Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe de $\mathcal{P}^\infty(S^1)$ (resp. $\mathcal{P}^\omega(S^1)$) engendré par d éléments $f_1, f_2, ..., f_d$ deux à deux commutants ($d \geqslant 2$) et de nombres de rotations $\theta_1, ..., \theta_d$ irrationnels et deux à deux rationnellement indépendants. Si $\theta_1, ..., \theta_d$ satisfont la condition (1) alors $\mathcal{G}$ est conjugué à un sous-groupe de $SO(2)$ par un homéomorphisme $H \in \mathcal{P}^\infty(S^1)$ (resp. $\mathcal{P}^\omega(S^1)$).*

3. Conjugaison par la famille de polynômes P_λ

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition 3.1 et un corollaire : la proposition 3.6.

Proposition 3.1. — *Soit $r \geqslant 1$ un réel, et $f \in \mathcal{P}^r(S^1)$ de nombre de rotation irrationnel, d'ensemble singulier $S(f) = \coprod_{i=1}^{p} S_i(f)$ avec $p \in \mathbb{N}^\star$ et $S_i(f) \subset M_i(f) = \{x_i, ..., f^{N(f,x_i)}(x_i)\}$, $(N(f, x_i) \in \mathbb{N})$, et $M(f) = \coprod_{i=1}^{p} M_i(f)$. Alors il existe un homéomorphisme $K \in \mathcal{P}^r(S^1)$ polynômial par morceaux de degré au plus $(2r+1)^{N(f)-p}$ avec ensemble singulier $S(K) \subset M(f) \backslash \{x_1, ..., x_p\}$ et tel que : $F = K \circ f \circ K^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$ et $S(F) \subset \{K(x_1), K(x_2), .., K(x_p)\}$.*

3.1. Cas 1. r est un entier $\geqslant 1$

3.1.1. La famille de polynômes P_λ

Proposition 3.2. — *Soient $a_1 > 0, b_1 > 0$ des réels strictement positifs et $a_2, b_2, ..., a_r, b_r$ des réels.*

1) *Pour tout $\lambda > 0$, il existe un unique polynôme $P = P_\lambda$ de $\mathbb{R}_{2r+1}[X]$ tel que :*

1-a) $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ *;*

1-b) $P^{(k)}(0) = \lambda a_k$, $P^{(k)}(1) = \lambda b_k$ *pour tout* $k = 1, 2, .., r$

2) *Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0[$:*

2-a) $P'_\lambda(x) > 0$ *pour tout* $x \in [0, 1]$

2-b) $\deg(P_\lambda) = 2r + 1$.

Preuve. — Assertion 1) : L'application $\Phi : \mathbb{R}_{2r+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{r+1} \times \mathbb{R}^{r+1}$;

$$P \to (P(0), P'(0), .., P^{(r)}(0)\ ;\ P(1), P'(1), .., P^{(r)}(1))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Par conséquent, pour tout $\lambda > 0$, le polynôme $P = P_\lambda = \Phi^{-1}(0, \lambda a_1, .., \lambda a_r\ ;\ 1, \lambda b_1, .., \lambda b_r)$ satisfait les conditions 1-a), 1-b).

Assertion 2) : Posons $S = \Phi^{-1}(0, .., 0\ ;\ 1, 0, .., 0)$ et $T = \Phi^{-1}(0, a_1, .., a_r\ ;\ 0, b_1, .., b_r)$. On a $P_\lambda = \lambda T + S$.

Puisque $S'(x) = Cx^r(1-x)^r$ où C est une constante donc $S = C\int_0^x t^r(1-t)^r dt$. Puisque $S(1) = 1$, on a $C = \frac{1}{\int_0^1 t^r(1-t)^r dt} > 0$. Par suite, pour tout $x \in [0, 1]$, $S'(x) \geqslant 0$. Ensuite, comme $T'(0) = a_1 > 0$ et $T'(1) = b_1 > 0$, alors par continuité de T', il existe $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha] \cup [1-\alpha, 1]$, on a $T'(x) \geqslant a = \min(\frac{a_1}{2}, \frac{b_1}{2}) > 0$. D'où $P'_\lambda(x) = \lambda T'(x) + S'(x) \geqslant \lambda a > 0$ pour tout $x \in [0, \alpha] \cup [1 - \alpha, 1]$.

D'autre part, puisque $S''(x) = rCx^{r-1}(1 - x)^{r-1}(1 - 2x)$ et $S'(\alpha) = S'(1 - \alpha)$, alors pour tout $x \in [\alpha, 1 - \alpha]$, on a $S'(x) \geqslant S'(\alpha) > 0$.

On pose $m = \min_{x\in[\alpha,1-\alpha]} T'(x)$. On a alors, pour tout $x \in [\alpha, 1-\alpha]$, $P'(x) \geqslant \lambda m + S'(\alpha)$.

Si $m > 0$, il est clair que $P'(x) > 0$ pour tout $x \in [\alpha, 1-\alpha]$. Si $m < 0$, prenons $\lambda_0 = -\frac{S'(\alpha)}{m} > 0$. D'où pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0[$, pour tout $x \in [\alpha, 1-\alpha]$, on a $P'(x) > 0$. Par conséquent, pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0[$, on a $P'(x) > 0$, ce qui prouve 2-a).

Puisque $\deg(S) = 2r+1$ alors $\deg(P_\lambda) = 2r+1$ sauf peut être si $\deg(T) = 2r+1$ auquel cas, il suffit de prendre $\lambda \neq \frac{-\alpha_{2r+1}}{\beta_{2r+1}}$ où α_{2r+1} et β_{2r+1} sont les coefficients des monômes de degré $(2r+1)$ de S et T repectivement, ce qui prouve 2-b). □

Remarque 3.3. — On peut calculer explicitement P_λ : Notons $(e_j)_{j=0}^{2r+1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{r+1}\times\mathbb{R}^{r+1}$ et posons $T_k(X) = \Phi^{-1}(e_k)$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant r$. On a alors $\Phi^{-1}(e_{r+1+k}) = (-1)^k T_k(1-X)$. Donc, $(T_k(X); (-1)^k T_k(1-X))$, $0 \leqslant k \leqslant r$ est une base de $\mathbb{R}_{2r+1}[X]$. On a

$$P_\lambda = \lambda \sum_{k=1}^{r} [a_k T_k(X) + (-1)^k b_k T_k(1-X)] + T_0(1-X).$$

On montre que pour $1 \leqslant k \leqslant r$:

$$T_k(X) = k!(1-X)^{r+1} \sum_{i=0}^{r+1-k} C_{2r+2-k}^{r+1+i} (1-X)^i X^{r+1-i}$$

et que

$$T_0(1-X) = \frac{1}{\int_0^1 t^r(1-t)^r dt} \int_0^X t^r(1-t)^r dt.$$

3.1.2. Réduction d'une orbite singulière

Soit f comme dans la proposition 3.1 et r entier. On pose $y_1 = f^{N(f,x_1)}(x_1)$ si $N(f,x_1) \geqslant 1$. On peut supposer quitte à conjuguer f par la rotation R_{y_1} que $y_1 = 0$. Prenons dans la proposition 3.2, $a_j = f^{(j)}(0+)$ et $b_j = f^{(j)}(0-)$ et P_λ le polynôme correspondant à $\lambda \in]0, \lambda_0[$. Alors $P'_\lambda > 0$ sur $[0,1]$. On définit H_λ comme le projeté sur S^1 de la restriction de P_λ à $[0,1]$. L'application H_λ est alors un homéomorphisme de classe P de S^1, polynômial de degré $2r+1$ ayant 0 pour seul point singulier et vérifiant :

- $H_\lambda(0) = 0$,
- $H_\lambda^{(j)}(0+) = \lambda f^{(j)}(0+)$ et $H_\lambda^{(j)}(0-) = \lambda f^{(j)}(0-)$ pour tout $j = 1, 2, .., r$.

On notera dans la suite, $H = H_\lambda$.

Proposition 3.4. — *Soit $f \in \mathcal{P}^r(S^1)$ comme ci-dessus alors le conjugué $F = H \circ f \circ H^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$ et $S(F) \subset \bigcup_{i=2}^{p} H(S_i(f)) \bigcup \{H(x_1), .., F^{N(f,x_1)-1}(H(x_1))\}$, en particulier $N(F, H(x_1)) \leqslant N(f, x_1) - 1$.*

Preuve. — A priori, les points singuliers de F sont :

– les points singuliers de H^{-1} : $H(0) = 0$,

– les images par H des points singuliers de f :

$$\bigcup_{i=2}^{p} H(S_i(f)); H(f^i(x_1)), i = 0, ..., N(f, x_1),$$

– les images par $H \circ f^{-1}$ des points singuliers de H :

$$H \circ f^{-1}(0) = H(f^{N(f,x_1)-1}(x_1)).$$

Par conséquent,

$$S(F) \subset \bigcup_{i=2}^{p} H(S_i(f)) \bigcup \{H(x_1), F(H(x_1)), .., F^{N(f,x_1)-1}(H(x_1)), 0\}.$$

Montrons que F est C^r en 0.

Pour ceci, il suffit de montrer que $u = f \circ H^{-1}$ est C^r en 0; car dans ce cas, puisque $F = H \circ u$ et $u(0) = f(0) \neq 0$ alors H est C^r en $u(0)$ et par suite, F est C^r en 0.

a) Montrons d'abord que u est C^1 en 0.

On a $\sigma_u(0) = \frac{\sigma_f(0)}{\sigma_H(0)}$. Puisque $H^{'}(0+) = \lambda f^{'}(0+)$ et $H^{'}(0-) = \lambda f^{'}(0-)$ alors $\sigma_f(0) = \sigma_H(0)$ et donc $\sigma_u(0) = 1$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $j = 2, 3, .., r$,

$$u^{(j)}(0+) = u^{(j)}(0-) = 0,$$

ce qui entraîne que u est C^r en 0.

• De la relation $f = u \circ H$, on déduit $f^{''} = (u^{''} \circ H)(H^{'})^2 + (u^{'} \circ H)H^{''}$. Comme $H(0) = 0$ alors $f^{''}(0) = u^{''}(0)(H^{'}(0))^2 + u^{'}(0)H^{''}(0)$.

Comme $H^{'}(0) > 0$, $H^{''}(0) = \lambda f^{''}(0)$ et $u^{'}(0) = \dfrac{1}{\lambda}$ alors $u^{''}(0) = 0$. De même, on a $u^{''}(1) = 0$. Par conséquent, u est C^2 en 0.

Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $m \geqslant 2$, c'est-à-dire que

$$u^{'}(0) = u^{'}(1) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1) = 0 \text{ pour tout } j = 2, 3, ..., m.$$

Montrons que $u^{(m+1)}(0) = u^{(m+1)}(1) = 0$.

De la relation $f = u \circ H$, on déduit $f^{(m+1)}(0) = (u \circ H)^{(m+1)}(0)$. En appliquant la formule de Faà di Bruno, on obtient :

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(0) &= (u \circ H)^{(m+1)}(0) \\ &= \sum \frac{(m+1)!}{j_1!j_2!...j_{m+1}!} u^{(j)}(H(0))\Big(\frac{H^{'}(0)}{1!}\Big)^{j_1}\Big(\frac{H^{''}(0)}{2!}\Big)^{j_2}... \\ &\qquad \Big(\frac{H^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}\Big)^{j_{m+1}} \end{aligned}$$

où la somme est étendue sur tous les entiers solutions de l'équation diophantienne $j_1 + j_2 + ... j_{m+1} = j$, $j_1 + 2j_2 + ... + (m+1)j_{m+1} = m+1$.

D'où, compte-tenu que, pour tout $j = 2, 3, ..., m$: $u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1) = 0$ alors $f^{(m+1)}(0) = (u \circ H)^{(m+1)}(0) = u'(0)H^{(m+1)}(0) + u^{(m+1)}(0)(H'(0))^{m+1}$. Comme $u'(0) = \frac{1}{\lambda}$; $H^{(m+1)}(0) = \lambda f^{(m+1)}(0)$ et $H^{'}(0) > 0$ alors $u^{(m+1)}(0) = 0$.

De la même manière, on a aussi $u^{(m+1)}(1) = 0$. □

Corollaire 3.5. — *Soit $f \in \mathcal{P}^r(S^1)$ comme ci-dessus alors il existe $K_1 \in \mathcal{P}^r(S^1)$ polynômial par morceaux de degré au plus $(2r+1)^{N(f,x_1)}$ tel que $S(K_1) \subset M_1(f)\backslash\{x_1\}$ et le conjugué $G = K_1 \circ f \circ K_1^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$ et $S(F) \subset \bigcup_{i=2}^{p} K_1(S_i(f)) \bigcup \{K_1(x_1)\}$.*

Preuve. — Le calcul du degré se résume en disant que K_1 est la composée d'au plus $N(f, x_1)$ applications qui sont des conjugués par des rotations des P_λ donc est de degré au plus $(2r+1)^{N(f,x_1)}$. □

Preuve de la proposition 3.1. — Le calcul du degré maximum de K se résume en disant que K est la composée des K_i, $i = 1, ..., p$ son degré est le produit des degrés des K_i c'est-à-dire égal au plus à $(2r+1)^{\sum_{i=1}^{p} N(f,x_i)} = (2r+1)^{N(f)-p}$. □

3.2. Cas 2. r est un réel $\geqslant 1$

Si $f \in \mathcal{P}^r(S^1)$ alors d'après le cas 1, il existe $K \in \mathcal{P}^{[r]}(S^1)$ polynômial par morceaux tel que $K \circ f \circ K^{-1} \in \mathcal{P}^{[r]}(S^1)$. Comme K est polynômial par morceaux alors $K \in \mathcal{P}^r(S^1)$, et d'après le lemme 6.2, ii), $K^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$ et puis par i), $K \circ f \circ K^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$.

Proposition 3.6. — *Soit $F = K \circ f \circ K^{-1}$ où K est comme dans la proposition 3.1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *F est un C^r-difféomorphisme de S^1*

ii) $f^{N(f,x_i)+1}$ *est* $C^{[r]}$ *en* x_i, $i = 1, ..., p$ *(i.e.,* f *a* D_r*).*

Preuve.

Cas 1. On suppose que r *est un entier* $\geqslant 1$.

$i) \Longrightarrow ii)$: on suppose que $F = K \circ f \circ K^{-1}$ est un C^r-difféomorphisme de S^1.

• On a $K \circ f^{N(f,x_i)}$ est C^r en x_i.

En effet, $K \circ f^{N(f,x_i)} = F^{N(f,x_i)} \circ K$. Puisque $S(K) \subset M(f) \backslash \{x_1, ..., x_p\}$ alors K est C^r en x_i, d'où $F^{N(f,x_i)} \circ K$ est C^r en x_i.

• $f \circ K^{-1}$ est C^r en $K(f^{N(f,x_i)}(x_i))$.

On a $f \circ K^{-1} = K^{-1} \circ F$ et F est C^r en $K(f^{N(f,x_i)}(x_i))$. Comme $F(K(f^{N(f,x_i)}(x_i))) = K(f^{N(f,x_i)+1}(x_i))$ et que $f^{N(f,x_i)+1}(x_i) \in S^1 \backslash M(f)$ alors K^{-1} est C^r en $K(f^{N(f,x_i)+1}(x_i))$. Il s'ensuit que $K^{-1} \circ F$ est C^r en $K(f^{N(f,x_i)}(x_i))$.

Il résulte de ci-dessus et de la relation $f^{N(f,x_i)+1} = (f \circ K^{-1}) \circ (K \circ f^{N(f,x_i)})$, que $f^{N(f,x_i)+1}$ est C^r en x_i.

$ii) \Longrightarrow i)$: on suppose que pour tout $i = 1, ..., p$, $f^{N(f,x_i)+1}$ est C^r en x_i. On a en particulier, $N(f, x_i) \neq 0$, pour tout i car par hypothèse $x_i \in S(f)$. On a : $F^{N(f,x_i)+1} = K \circ f^{N(f,x_i)+1} \circ K^{-1}$.

• $F^{N(f,x_i)+1}$ est C^r en $K(x_i)$.

On a K^{-1} est C^r en $K(x_i)$ car $S(K) \subset M(f) \backslash \{x_1, ..., x_p\}$. Comme $f^{N(f,x_i)+1}(x_i) \in S^1 \backslash M(f)$ alors K est C^r en $f^{N(f,x_i)+1}(x_i)$.

• Montrons que $F^{N(f,x_i)}$ est C^r en $K(x_i)$.

On a $F^{N(f,x_i)} = F^{-1} \circ F^{N(f,x_i)+1}$. Puisque $F \in C^r(S^1 \backslash \{K(x_1), K(x_2), ..., K(x_p)\})$ et que $F(K(x_j)) \neq F^{N(f,x_i)+1}(K(x_i))$ pour tout $j = 1, .., p$ (car F a un nombre de rotation irrationnel, $N(f, x_i) \neq 0$, pour tout i et les x_j sont sur des f-orbites distinctes) alors F^{-1} est C^r en $F^{N(f,x_i)+1}(K(x_i))$.

On montre de manière analogue que successivement $F^{N(f,x_i)-1}, ..., F^2$, et F sont C^r en $K(x_i)$. Comme F est de classe P alors F est un C^r-difféomorphisme de S^1.

□

3.3. Cas 2. r est un réel

$i) \Longrightarrow ii)$: si F est un C^r-difféomorphisme de S^1 donc F est a fortiori un $C^{[r]}$-difféomorphisme de S^1. D'après le cas 1, on a ii). Réciproquement, si on a ii), d'après le cas 1, F est un $C^{[r]}$-difffémorphisme de S^1. Comme $F = K \circ f \circ K^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$ alors F est un C^r-difféomorphisme de S^1 d'après le lemme 6.2, iii).

4. Preuve du Théorème 2.1, Corollaire 2.2, Corollaire 2.3 et Théorème 2.6

Preuve du Théorème 2.1. — Soit f comme dans le théorème 2.1.

• (iii) $\Longrightarrow$ (i) : est trivial.

• (ii) $\Longrightarrow$ (iii) : soit $F = K\circ f\circ K^{-1}\circ K$ est comme dans la proposition 3.1. On conclut que F est un C^r-difféomorphisme de S^1 par la proposition 3.6.

• (i) $\Longrightarrow$ (ii) : soit $L \in \mathcal{P}^r(S^1)$ tel que $G = L\circ f\circ L^{-1}$ est un C^r-difféomorphisme de S^1. D'après la proposition 3.1, il existe $K \in \mathcal{P}^r(S^1)$ polynômial par morceaux tel que $F = K\circ f\circ K^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$ où $S(F) \subset \{K(x_1), K(x_2), ..., K(x_p)\}$. On a alors : $F = \varphi\circ G\circ\varphi^{-1}$ avec $\varphi = K\circ L^{-1}$. Montrons que φ est un C^r-difféomorphisme de S^1.

On a $\varphi \in \mathcal{P}^r(S^1)$ et $S(\varphi) = E$ est fini. Il suffit de montrer que E est vide.

• On montre d'abord que pour tout $i = 1, ..., p$, $L(x_i) \notin G^{-1}(E)$: en effet, s'il existe $i_0 \in \{1, ..., p\}$ tel que $L(x_{i_0}) \in G^{-1}(E)$ alors puisque $F^{-1}\circ\varphi = \varphi\circ G^{-1}$, on aura $E \subset G^{-1}(E) \cup \{L(x_i) : i = 1, ..., p\}$. D'où $G(L(x_{i_0})) \in G^{-1}(E) \cup \{L(x_i) : i = 1, ..., p\}$. Comme $G(L(x_{i_0})) = L(f(x_{i_0})) \notin \{L(x_i) : i = 1, ..., p\}$ car les $x_i : i = 1, ..., p$ sont sur des f-orbites distinctes et que f a un nombre de rotation irrationnel alors $G(L(x_{i_0})) \in G^{-1}(E)$. Par un calcul analogue en remplaçant G par G^p, on conclut que l'orbite infinie $O_G(L(x_{i_0}))$ est contenue dans $G^{-1}(E)$, ce qui est absurde.

Puisque $F\circ\varphi = \varphi\circ G$ alors $G^{-1}(E) \subset E \cup \{L(x_i) : i = 1, ..., p\}$ et donc $E \subset G(E)$. Ceci implique que E est vide, car E est fini et G a un nombre de rotation irrationnel. Par conséquent, φ est un C^r-difféomorphisme de S^1. On déduit alors que F est un C^r-difféomorphisme de S^1 et la proposition 3.6 permet de conclure. □

Preuve du Corollaire 2.2. — La preuve résulte du théorème 2.1 en prenant $r = 1$ et de la remarque1.8. □

Preuve du Corollaire 2.3. — Si f est un homéomorphisme affine par morceaux du cercle de nombre de rotation irrationnel alors $D^r(f^{N(f,x_i)+1}) = 0$ pour tout $r \geqslant 2$ et la propriété D_r est alors équivalente à la propriété D_1. □

Preuve du Théorème 2.6. — Soit f comme dans le théorème 2.6.

i) Si les points de coupure sont sur une même orbite $O_f(x_1)$ alors $C(f) = S(f) \subset M(f) = \{x_1, ..., f^N(x_1)\}$, $N \in \mathbb{N}$. D'après la proposition 3.1, il existe un homéomorphisme $K \in \mathcal{P}^r(S^1)$ polynômial par morceaux tel que $F = K\circ f\circ K^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$ et $C(F) = S(F) \subset \{K(x_1)\}$. En utilisant l'invariance de π_s (Proposition 1.4) ; on aura $\pi_s(f) = \pi_s(F) = \sigma_F(K(x_1))$.

Si $\pi_s(f) \neq 1$, alors $K(x_1)$ est un point de coupure de F. D'après le théorème de Dzhalilov-Khanin, la mesure μ_F est singulière par rapport à la mesure de Haar et par conséquent, la mesure μ_f l'est aussi.

L'assertion ii) résulte directement du théorème 2.5. $\square$

5. Preuve du Théorème 2.8, Corollaire 2.9 et Corollaire 2.10

Preuve du Théorème 2.8. — La preuve utilise les lemmes suivants.

Lemme 5.1. — *Soit $f \in \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ de nombre de rotation irrationnel et $g \in \mathcal{P}^r(S^1)$. Si $f \circ g = g \circ f$ alors $g \in \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$.*

Preuve. — Notons $E = S(g)$. Puisque $f \in \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ et que $f \circ g = g \circ f$ alors $S(g) = S(f^{-1} \circ g \circ f) = f^{-1}(S(g))$ et donc $E = f^{-1}(E)$. Comme E est fini et f a un nombre de rotation irrationnel alors E est vide ; autrement dit, $g \in \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$. $\square$

Proposition 5.2. — *Soient $F, G \in \mathcal{P}^r(S^1)$ dont les nombres de rotation sont des irrationnels rationnellement indépendants et tels que $F \circ G = G \circ F$. Si $S(F) \subset \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ où les x_i sont sur des F-orbites distinctes alors $F, G \in \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$.*

La preuve de cette proposition utilise le lemme suivant :

Lemme 5.3. — *Pour tous $i, j = 1, 2, .., p$, les orbites $O_F(x_i)$ et $O_G(x_j)$ se coupent en au plus un point.*

Preuve. — S'ils existent $(r, s); (r', s') \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $F^r(x_i) = G^s(x_j)$ et $F^{r'}(x_i) = G^{s'}(x_j)$ alors $x_i = F^{-r} \circ G^s(x_j) = F^{-r'} \circ G^{s'}(x_j)$ et donc $F^{r'-r}(x_j) = G^{s'-s}(x_j) \in O_F(x_j) \cap O_G(x_j)$. Comme les nombres de rotation de F et G sont irrationnels et rationnellement indépendants alors $O_F(x_j) \cap O_G(x_j) = \{x_j\}$. Par suite, $r' - r = s' - s = 0$. $\square$

Lemme 5.4. — *Il existe un entier $s_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que pour $g_0 = G^{s_0}$, on a*

$$O_F(x_i) \cap O_{g_0}(x_j) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad i \neq j \\ \{x_i\} & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Preuve. — Notons

$$A := \{(r, s) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\} : \text{ il existe } 1 \leqslant i,\ j \leqslant p \text{ tel que } F^r(x_i) = G^s(x_j)\}.$$

D'après le lemme 5.3, A est un sous-ensemble non vide et fini de $\mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Soit $s_0 : \max_{(r,s) \in A}(|s| + 1)$ et notons $g_0 = G^{s_0}$. On a pour tout $r \in$

$\mathbb{Z}\backslash\{0\}; (r,0) \notin A$: sinon, il existe i,j tels que $F^r(x_i) = x_j$. Puisque les nombres de rotation sont des irrationnels rationnellement indépendants alors pour $i \neq j$, $O_F(x_i) \cap O_F(x_j) = \emptyset$ d'où $i = j$. Comme F a un nombre de rotation irrationnel, ceci est impossible.

On déduit alors que pour tout $(r,s) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}$; $(r, s_0 s) \notin A$, autrement dit, pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant p$ et pour tout $(r,s) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}$: $F^r(x_i) \neq g_0^s(x_j)$, ce qui prouve le lemme. □

Preuve de la Proposition 5.2. — Puisque $G \circ F = F \circ G$ alors $g_0 \circ F = F \circ g_0$. On a $g_0 \in \mathcal{P}^r(S^1)$ et $S(g_0) = E$ est fini. On a $E \subset F(E) \cup \bigcup_{i=1}^p \{F(x_i)\ ,\ F(g_0^{-1}(x_i))\}$.

Montrons que pour tout $i = 1,2,...,p$, $F(x_i) \notin E$ et $F(g_0^{-1}(x_i)) \notin E$:

Supposons le contraire : il existe $i_0 \in \{1,2,...,p\}$ tel que $F(x_{i_0}) \in E$ ou $F(g_0^{-1}(x_{i_0})) \in E$. On suppose que $F(x_{i_0}) \in E$. Comme $F^{-1} \circ g_0 \circ F = g_0$ alors $E \subset F^{-1}(E) \cup \{x_i;\ g_0^{-1}(x_i) : i = 1,..,p\}$. Comme les x_i sont sur des F-orbites distinctes alors $F(x_{i_0}) \neq x_i$ pour tout $i = 1,...,p$, ensuite d'après le lemme 5.4, et du fait que F a un nombre de rotation irrationnel alors $F(x_{i_0}) \neq g_0^{-1}(x_i)$ pour tout $i = 1,...,p$. On déduit que : $F(x_{i_0}) \in F^{-1}(E)$ ou encore que $F^2(x_{i_0}) \in E$.

De manière analogue, on montre que pour tout entier n, $F^n(x_{i_0}) \in E$, ce qui est impossible car E est fini.

Supposons maintenant que $F(g_0^{-1}(x_{i_0})) \in E$. Pour les mêmes raisons que précédemment, on a $F(g_0^{-1}(x_{i_0})) \neq x_i$ et $F(g_0^{-1}(x_{i_0})) = g_0^{-1}(F(x_{i_0})) \neq g_0^{-1}(x_i)$ pour tout $i = 1,...,p$. On a donc $F^2(g_0^{-1}(x_{i_0})) \in E$ et comme ci-dessus, on aboutit à une contradiction.

Il en résulte alors que $E \subset F(E)$. Comme E est fini, alors E est vide, et donc g_0 est un C^r-difféomorphisme de S^1. D'après le lemme 5.1, F l'est également aussi, ce qui prouve la proposition. □

Preuve du Théorème 2.8. — Soit $\mathcal{G}$ un groupe abélien qui contient au moins deux éléments f et g de nombres de rotation irrationnels et rationnellement indépendants. On applique la proposition 3.1 à f, il existe un homéomorphisme $K \in \mathcal{P}^r(S^1)$ polynômial par morceaux tel que $F = K \circ f \circ K^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$ et $S(F) \subset \{K(x_1),...,K(x_p)\}$ où les $K(x_i)$ sont sur des F-orbites distinctes. Posons $G = K \circ g \circ K^{-1}$. Alors $G \in \mathcal{P}^r(S^1)$ avec $F \circ G = G \circ F$. D'après la proposition 5.2, F et G sont des C^r-difféomorphismes. Pour tout $h \in \mathcal{G}$, $H = K \circ h \circ K^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$ et vérifie $H \circ G = G \circ H$. D'après le lemme 5.1, H est un C^r-difféomorphisme. Par conséquent, le groupe $K \circ \mathcal{G} \circ K^{-1}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^r(S^1)$. □

Preuve du Corollaire 2.9. — Ceci résulte du théorème 2.8 et du théorème 2.1. □

Preuve du Corollaire 2.10. — Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe de $\mathcal{P}^{\infty}(S^1)$(resp. $\mathcal{P}^{\omega}(S^1)$) engendré par d éléments $f_1, f_2, ..., f_d$ ($d \geqslant 2$) deux à deux commutants et de nombres de rotation irrationnels deux à deux rationnellement indépendants et satisfaisant la condition (1). Par le théorème 2.8, il existe un homéomorphisme $H_1 \in \mathcal{P}^{\infty}(S^1)$, polynômial par morceaux tel que $\mathcal{G}_1 = H_1 \circ \mathcal{G} \circ H_1^{-1}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$ (resp. $\mathrm{Diff}_+^{\omega}(S^1)$). D'après le théorème de Fayad-Khanin, il existe $H_2 \in \mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$ (resp. $\mathrm{Diff}_+^{\omega}(S^1)$) tel que $H_2 \circ \mathcal{G}_1 \circ H_2^{-1}$ est un sous-groupe de $SO(2)$. Par conséquent, si $K = H_2 \circ H_1$ alors $K \in \mathcal{P}^{\infty}(S^1)$ (resp. $\mathcal{P}^{\omega}(S^1)$) et $K \circ \mathcal{G} \circ K^{-1}$ est un sous-groupe de $SO(2)$. □

6. Annexe

LEMME 6.1. — *Soit I un intervalle de S^1.*

i) *Si $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues vérifiant une condition de Hölder d'ordre ν sur I ($0 < \nu < 1$ un réel), leur produit fg la vérifie également.*

ii) *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur I et $\varphi : f(I) \to \mathbb{R}$ vérifie une condition de Hölder d'ordre ν sur $f(I)$ ($0 < \nu < 1$ un réel), leur composé $\varphi \circ f$ vérifie une condition de Hölder d'ordre ν sur I.*

iii) *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^r sur I et $g : f(I) \to \mathbb{R}$ est de classe C^r sur $f(I)$ avec $r \geqslant 1$ un réel, leur composé $g \circ f$ est aussi de classe C^r sur I.*

iv) *Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I et vérifie une condition de Hölder d'ordre ν par morceaux sur I ($0 < \nu < 1$ un réel) alors φ vérifie une condition de Hölder d'ordre ν sur I.*

Preuve. — Les assertions i), ii) et iv) sont évidentes. Montrons iii).

• Pour $[r] = 1$, on a $D(g \circ f) = (Dg \circ f)Df$. Comme Dg vérifie une condition de Hölder d'ordre $r - 1$ sur $f(I)$ et f est C^1 (donc lipschitzienne) sur I, alors $Dg \circ f$ vérifie une condition de Hölder d'ordre $r - 1$ sur I d'après ii). Aussi, comme Df vérifie une condition de Hölder d'ordre $r - 1$ sur I alors $(Dg \circ f)Df$ vérifie une condition de Hölder d'ordre $r - 1$ sur I d'après i), ce qui montre que $g \circ f$ est C^r sur I.

• Pour $[r] \geqslant 1$, la preuve résulte de la formule de Faà di Bruno pour $D^{[r]}(g \circ f)$ et des assertions i) et ii). □

LEMME 6.2. — *Soit $r \geqslant 1$ un réel de partie entière $[r]$, $r = +\infty$ ou $r = \omega$. Soient $f, g \in \mathcal{P}^r(S^1)$. Alors :*

i) $g \circ f \in \mathcal{P}^r(S^1)$,

ii) $f^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$,

iii) *Si de plus f est $C^{[r]}$ sur S^1 alors f est C^r sur S^1, ainsi que f^{-1} et f est un C^r-difféomorphisme.*

Preuve. — Soient $f, g \in \mathcal{P}^r(S^1)$ avec $r \geqslant 1$ et soit I une composante connexe de $S^1 \backslash (S(f) \cup f^{-1}(S(g)))$. Alors f est C^r sur I et g est C^r sur $f(I)$.

i) D'après le lemme 6.1, iii), $g \circ f$ est C^r sur I, ce qui prouve que $g \circ f \in \mathcal{P}^r(S^1)$.

ii) D'abord, $Df(x) > a > 0$ pour tout $x \in S^1$ car f est de classe P. Soit la fonction $\mathcal{I} : t \in]a, +\infty[\mapsto \frac{1}{t}$. Montrons que f^{-1} est C^r sur $f(I)$. La preuve se fait par récurrence sur $[r]$:

• Si $[r] = 1$, posons $r = 1 + \nu$, $0 < \nu < 1$. On a $Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(f^{-1}(x))}$, $x \in f(I)$. D'où $Df^{-1} = \mathcal{I} \circ Df \circ f^{-1}$. Comme Df vérifie une condition de Hölder d'ordre ν sur I et que f^{-1} est C^1 sur $f(I)$ alors du lemme 6.1, ii), $Df \circ f^{-1}$ vérifie une condition de Hölder d'ordre ν sur I. Puis comme $\mathcal{I}$ est lipschitzienne sur $]a, +\infty[$ alors $Df^{-1} = \mathcal{I} \circ Df \circ f^{-1}$ vérifie une condition de Hölder d'ordre ν sur I, donc f^{-1} est C^r sur $f(I)$, ce qui prouve que $f^{-1} \in \mathcal{P}^r(S^1)$.

• Si $[r] \geqslant 1$, et supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $[r]-1$. Si f est C^r sur I, donc est aussi C^{r-1} sur I, l'hypothèse de récurrence implique que f^{-1} est C^{r-1} sur $f(I)$. Comme Df est C^{r-1} sur I et que $\mathcal{I}$ est C^∞ sur $]a, +\infty[$ alors $Df^{-1} = \mathcal{I} \circ Df \circ f^{-1}$ est C^{r-1} sur $f(I)$, ce qui prouve que f^{-1} est C^r sur $f(I)$.

iii) Si f est $C^{[r]}$ sur S^1 alors $D^{[r]}f$ est continue sur S^1 et vérifie une condition de Hölder d'ordre $r - [r]$ par morceaux sur S^1 ; plus précisement sur chaque composante connexe de $S^1 \backslash (S(f) \cup f^{-1}(S(g)))$. D'après le lemme 6.1, iv), $D^{[r]}f$ vérifie une condition de Hölder d'ordre $r - [r]$ sur S^1, ce qui prouve que f est C^r sur S^1 et f est alors un C^r-difféomorphisme.

□

Remerciements. Nous tenons à exprimer au referee toutes nos reconnaissances pour ses corrections et suggestions qui ont amélioré le contenu de cet article. Nous voudrions remercier Isabelle Liousse pour ses remarques et d'utiles discussions. Cet article a été rédigé en partie lors du séjour du second auteur à l'ICTP (Trieste) qu'il remercie pour l'hospitalité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Adouani & H. Marzougui, « Conjugacy of Piecewise C^1-Homeomorphisms of class P of the circle », https ://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00007995v3.

[2] A. Denjoy, « Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore », *J. Math. Pures Appl.* **11** (1932), p. 333-375.

[3] A. Dzhalilov & K. M. Khanin, « On invariant measure for homeomorphisms of a circle with a break point », *Functional Analysis and its Applications* **32** (1998), n° 3, p. 153-161.

[4] A. A. Dzhalilov, « Piecewise smoothness of conjugate homeomorphisms of a circle with corners », *Theoretical and Mathematical Physics* **120** (1999), n° 2, p. 961-972.

[5] A. A. Dzhalilov & I. Liousse, « Circle homeomorphisms with two break points », *Nonlinearity* **19** (2006), p. 1951-1968.

[6] B. Fayad & K. Khanin, « Smooth linearization of commuting circle diffeomorphisms », ArXiv : math. DS/0605214 v1(2006).

[7] Y. Katznelson, « Sigma-finite invariant measures for smooth mappings of the circle », *J. Analyse Math.* **31** (1977), p. 1-18.

[8] Y. Katznelson & D. Ornstein, « The absolute continuity of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **9** (1989), n° 4, p. 681-690.

[9] ———, « The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle », *Ergod.Th. and Dynam.Sys.* **9** (1989), n° 4, p. 643-680.

[10] K. M. Khanin & Y. G. Sinaĭ, « Smoothness of conjugacies of diffeomorphisms of the circle with rotations », *Russian Math. Surveys* **44** (1989), n° 1, p. 69-99.

[11] I. Liousse, « Nombres de rotation dans les groupes de Thompson généralisé, automorphismes », https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00004554.

[12] ———, « Nombre de rotation, mesures invariantes et ratio set des homéomorphismes affines par morceaux du cercle », *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **55** (2005), n° 2, p. 1001-1052.

[13] ———, « PL Homeomorphisms of the circle which are piecewise C^1 conjugate to irrational rotations », *Bull Braz Math Soc, New Series* **35** (2005), n° 2, p. 269-280.

[14] H. Minakawa, « Classification of exotic circles of $\mathrm{PL}_+(S^1)$ », *Hokkaido Math. J.* **26** (1997), n° 3, p. 685-697.

[15] J. Moser, « On commuting circle mapping and simultaneous Diophantine approximations », *Math. Z.* **205** (1990), p. 105-121.

[16] H. Poincaré, « Oeuvres complètes », 1885, t.1, 137–158.

[17] J. Stark, « Smooth conjugacy and renormalisation for diffeomorphisms of the circle », *Nonlinearity* **1** (1988), n° 4, p. 541-575.

[18] J.-C. Yoccoz, « Il n' y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique », *C.R.A.S.* **298** (1984), n° 7, p. 141-144, série I.

Manuscrit reçu le 7 septembre 2006,
accepté le 7 août 2007.

Abdelhamid ADOUANI
Inst. Prép. étud. Ingén. Bizerte
7021, Zarzouna (Tunisia)
adouani_abdelhamid@yahoo.fr

Habib MARZOUGUI
Faculty of Sciences of Bizerte
Department of Mathematics
7021, Zarzouna (Tunisia)
habib.marzouki@fsb.rnu.tn