ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JAAK PEETRE

Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff

Annales de l'institut Fourier, tome 16, nº 1 (1966), p. 279-317

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_1_279_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
16, 1 (1966), 279-317.

ESPACES D'INTERPOLATION ET THÉORÈME DE SOBOLEFF

par JAAK PEETRE

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction.

Dans [21], [22], [23], [24], [25] nous avons étudié certains espaces d'interpolation nouveaux. Cet article appartient à une série d'articles où l'on donnera des applications concrètes de ces espaces dans l'Analyse classique; voir [26], [27] pour les autres articles de cette série. Comme le titre l'indique il s'y agit des applications plus ou moins liées au théorème de plongement de Soboleff [32]. Outre les espaces d'interpolation nous utilisons maintenant d'une façon essentielle une idée empruntée à Cotlar [4], [5], [6], [7] dans la théorie de la transformation de Hilbert n-dimensionnelle (transformation de Calderón-Zygmund) : c'est de faire une certaine décomposition du noyau de convolution en question (« décomposition de Cotlar »). Nos méthodes sont aussi proches à celles de Grisvard [9] mais en général d'une nature plus élémentaire. La plupart des résultats ne sont pas originaux, bien que maintenant ils s'obtiennent d'un point de vue unifié nouveau. Surtout nous voudrions mentionner la contribution de l'école soviétique (après Soboleff) : Nikolskii, Becov, Slobodeckii, etc.; voir, par exemple, l'article d'ensemble de Nikolskii [18]; mentionnons également Taibleson [34], [39], [40]; nous ne faisons pas une comparaison détaillée ici. D'autre part, nous n'avons considéré que les cas les plus simples; dans des autres cas plus compliqués, soulignons-le, l'utilisation des espaces d'interpolation est encore plus avantageuse. Par exemple mentionnons l'extension au cas des espaces de type Soboleff non-symétriques par rapport aux variables.

Le plan est le suivant. Après un rappel de quelques préliminaires sur les espaces d'interpolation (n° 1) on commence (n° 2) par démontrer le théorème classique selon lequel la transformation de Hilbert applique l'espace des fonctions Lipschitziennes d'exposant donné dans lui-même. Ce qui est intéressant là est naturellement la méthode, où les espaces d'interpolation interviennent d'une façon essentielle. Au n° 3 on étend ensuite cette méthode au cas d'une classe de transformations envisagée d'abord par Cotlar [4], [5], [6]. Au n° 4 on l'étend au cas de la transformation de potentiel d'ordre α et l'on retrouve le théorème classique, dû à Hardy, Littlewood, Soboleff, Thorin, qui dit que la transformation de potentiel applique L^p dans L_q, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. On en donne aussi (n° 5 et 6), toujours dans le cas de la transformation de potentiel, des démonstrations alternatives. En particulier le n° 6 contient l'essentiel d'un article d'O'Neil [20]. Au n° 7, suivant l'idée originale de Soboleff [32] nous démontrons le théorème de plongement de Soboleff pour le cas des espaces de Soboleff « usuels ». Ensuite au n° 8, en utilisant une méthode semblable à celle du n° 5, nous donnons une démonstration de ce théorème pour le cas des espaces de Soboleff « fractionnaires ». Au n° 9 nous considérons un cas limite. Nous montrons aussi (n° 10) que le théorème de Soboleff « usuel » est une conséquence du théorème de Soboleff « fractionnaire ». Nous donnons ensuite (n° 11) quelques résultats sur l'interpolation des espaces de Soboleff, liés à ceux de Grisvard [9]. Comme application nous obtenons (n° 12) une variante d'un théorème d'interpolation dû à Stampacchia [33]. Finalement, nous donnons (n° 13 et 14) encore quelques variantes de nos méthodes où la nouveauté essentielle est maintenant l'utilisation plus systématique de la transformation de Fourier.

En conclusion nous voudrions encore souligner qu'il s'agit proprement d'un « mixtum compositum » : on a appliqué des méthodes voisines à un grand nombre de questions liées entre elles, mais de nature parfois assez différente. C'est surtout pour faire connaître au public mathématique ces méthodes qu'on a écrit cet article. Probablement pourrait-on encore beaucoup améliorer et systématiser la présentation (par exemple, comme l'a remarqué M. Lions, il sera peut être plus naturel de se placer dans le cadre plus général des semi-groupes; voir [12], [14], [9]). C'est surtout par crainte de perdre la simplicité et l'élégance présente qu'on s'est arrêté ici...

1. Rappel sur les espaces d'interpolation.

Nous donnons un bref résumé de la partie de la théorie des espaces d'interpolation qu'on va employer dans ce qui suit; pour les détails et des indications bibliographiques voir [29], [25]; voir également [14].

Soit $\{A_0, A_1\}$ un couple d'espaces de Banach, tous les deux étant continûment plongés dans le même espace vectoriel topologique (séparé) $\mathfrak{A}$:

$$A_0, A_1 \subset \mathfrak{A}.$$

(Nous utilisons le signe $\subset$ pour indiquer la continuité du plongement d'un espace vectoriel topologique dans un autre).

Alors on peut former la *somme* $A_0 + A_1$ et *l'intersection* $A_0 \cap A_1$ de A_0 et A_1.

Pour $0 < t < \infty$, $a \in A_0 + A_1$, nous posons

$$K(t, a) = K(t, a\,; A_0, A_1) = \inf_{a = a_0 + a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\,\|a_1\|_{A_1}),$$

et pour $0 < t < \infty$, $a \in A_0 \cap A_1$,

$$J(t, a) = J(t, a\,; A_0, A_1) = \max(\|a_0\|_{A_0}, t\,\|a_1\|_{A_1}).$$

Nous définissons maintenant (deux définitions équivalentes !) l'espace suivant :

$$(A_0, A_1)_{\theta, p} = \left\{ a \middle| \left(\int_0^\infty t^{-\theta} K(t, a)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} =$$

$$= \left\{ a \middle| \; \exists \; u(t) : a = \int_0^\infty u(x) \frac{dt}{t}, \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} J(t, u(t)))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

où $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$, pour $p = \infty$, avec l'interprétation habituelle. On peut en faire un espace de Banach en prenant n'importe quelle norme équivalente à l'une des deux normes « naturelles » suggérées par ces deux définitions (également équivalente l'une à l'autre !) :

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} \sim \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \sim$$

$$\sim \inf_{a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}} \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} J(t, u(t)))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(Nous utilisons le signe $\sim$ pour indiquer l'équivalence de deux normes.) Nous convenons d'appeler le *théorème d'équivalence* cette possibilité de définir l'espace $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ de ces deux manières.

Rappelons maintenant quelques autres propriétés des espaces $(A_0, A_1)_{\theta, p}$.

D'abord la *propriété d'interpolation*. Soit $\{B_0, B_1\}$ un deuxième couple d'espaces de Banach, tous les deux continûment plongés dans $\mathcal{B}$. Soit T une application linéaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ telle que

$$T : A_0 \to B_0$$
$$T : A_1 \to B_1$$

(Nous utilisons la flèche $\to$ pour indiquer la continuité d'une application linéaire d'un espace vectoriel topologique dans un autre). Alors on a, quels que soient θ, p,

$$T : (A_0, A_1)_{\theta, p} \to (B_0, B_1)_{\theta, p} .$$

Pour les normes d'opérateur en question M_0, M_1, $M_{\theta, p}$ on a l'*inégalité de convexité :*

$$M_{\theta, p} \leqslant C_{\theta, p} M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} .$$

On a aussi les *propriétés d'inclusion* suivante :

$$(A_0, A_1)_{\theta, p} \subset (A_0, A_1)_{\theta, q} \quad \text{si } p < q$$

$$(A_0, A_1)_{\theta', p'} \subset (A_0, A_1)_{\theta'', p''} \quad \text{si } \theta' < \theta'' \text{ et } A_0 \subset A_1.$$

Soit maintenant X un espace quelconque tel que

$$A_0 \cap A_1 \subset X \subset A_0 + A_1.$$

Disons que X est de classe $\mathcal{K}(\theta) = \mathcal{K}(\theta; A_0, A_1)$ où $0 < \theta < 1$ si l'on a:

$$K(t, a) \leqslant C t^{\theta} \|a\|_X \quad \text{pour tout } a \in X$$

ou bien (c'est une condition équivalente) si

$$X \subset (A_0, A_1)_{\theta, \infty} .$$

Disons que X est de classe $\mathcal{J}(\theta) = \mathcal{J}(\theta; A_0, A_1)$ où $0 < \theta < 1$ si l'on a :

$$\|a\|_X \leqslant C\, t^{-\theta} J(t, a) \quad \text{pour tout } a \in A_0 \cap A_1$$

ou bien (c'est une condition équivalente), si

$$(A_0, A_1)_{\theta, 1} \subset X.$$

Alors on a le *théorème de stabilité* (ou de réitération) : Soit X_i de classe $\mathcal{K}(\theta_i) \cap \mathcal{J}(\theta_i)$ $(i = 0, 1)$ où $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$. Alors on a quels que soient θ, avec $\theta_0 < \theta < \theta_1$, et p :

$$(A_0, A_1)_{\theta, p} = (X_0, X_1)_{\eta, p} \quad \text{avec } \theta = (1 - \eta)\, \theta_0 + \eta\, \theta_1 .$$

Tournons-nous maintenant vers les exemples concrets d'espaces $(A_0, A_1)^{\theta, p}$.

On se place toujours sur l'espace numérique R^n muni de ses structures habituelles (mesure de Haar, etc.).

Exemple 1.1. — On a :

$$K(t, a; L_1, L_\infty) = \int_0^t a^*(s)\, ds$$

où $a^*(t)$ désigne le « réarrangement » de a. A l'aide de ceci et du théorème de stabilité, on montre facilement :

$$(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta, p} = L_p \text{ pour } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Plus généralement, on a

$$(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta, q} = L_{p,q} \text{ pour } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

ou encore

$$(L_{p_0, q_0}, L_{p_1, q_1})_{\theta,q} = L_{p,q} \text{ pour } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

où l'on entend par $L_{p,q}$ les espaces de Lorentz (-Calderón) : $a \in L_{p,q}$ si, et seulement si

$$\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} a^*(t))^q \frac{dt}{t}^{\frac{1}{q}}\right) < \infty ;$$

donc en tout cas $L_{p,p} = L_p$. Il en résulte le théorème d'interpolation suivant (Marcinkiewicz-(-Calderón)) : Si

$$T : L_{p_0} \to L_{p_0}$$
$$T : L_{p_1} \to L_{p_1}$$

ou encore si

$$T : L_{p_0, q_0} \to L_{p_0, q_0}$$
$$T : L_{p_1, q_1} \to L_{p_1, q_1}$$

alors on a :

$$T : L_{p,q} \to L_{p',q'}$$

pour

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{p'_0} + \frac{\theta}{p'_1}, \quad q \leqslant q'$$

et donc en particulier

$$T : L_p \to L_{p'}$$

pour

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{p'_0} + \frac{\theta}{p'_1}, \quad p \leqslant p'$$

(Remarquons explicitement que, bien que cela ne résulte pas directement de ce que nous venons de dire, ce résultat vaut encore pour $p_0 = 1$, $p_1 = \infty$.)

Exemple 1.2. — Si N est un entier $\geqslant 0$ nous désignons par $D^N a$ l'ensemble des dérivées d'ordre N de a.

(Donc $D^0 a = a$, $D^1 a = \left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 a}{\partial x_n} \right\}$

$$D^2 a = \left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 a}{\partial x_1 \, \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 a}{\partial x_n^2} \right\}, \text{ etc.)}$$

Nous posons (espace de Soboleff)

$$W_p^N = \{a \mid D^M a \in L_p, \ 0 \leqslant M \leqslant N\}$$

où $1 \leqslant p \leqslant \infty$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|a\|_{W_p^N} = \sum_{M=0}^{N} \|D^M a\|_{L_p}.$$

(Nous écrivons toujours $W_p = W_p^1$.) Nous posons aussi (espace de Soboleff fractionnaire (ou de Becov, etc.))

$$W_p^{s,q} = (L_p, W_p^N)_{s/N, q}$$

où

$$0 < s < N, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

On démontre facilement que W_p^M est de classe

$$\mathcal{K}\left(\frac{M}{N}; L_p, W_p^N\right) \cap \mathcal{J}\left(\frac{M}{N}; L_p, W_p^N\right) \qquad \text{pour} \qquad 0 < M < N.$$

Donc cette définition est en effet indépendante de N. De plus on démontre que

$$K(t, a; L_p, W_p^N) \sim \omega_{N,p}(t^{1/N}, a) + t\,\|a\|_{L_p} \qquad \text{pour} \qquad t \leqslant 1$$

$$K(t, a; L_p, W_p^N) = \|a\|_{L_p} \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant 1$$

où

$$\omega_{N,p}(t, a) = \sup_{|h| \leqslant t} \left\| a(x + Nh) - \binom{N}{1} a(x + (N-1)\,h) + \ldots \right\|_{L_p}$$

est le module de continuité d'ordre N dans L_p. Il en résulte que

$$W_p^{s,q} = \left\{ a \mid a \in L_p, \left(\int_0^1 (t^{-s}\, \omega_{N,p}(t, a))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Le cas $q = \infty$ est particulièrement intéressant : on obtient alors des conditions de type Lipschitz. Nous convenons d'écrire :

$$W_p^{s,\infty} = \mathrm{Lip}_{s,p}, \qquad W_\infty^{s,\infty} = \mathrm{Lip}_s.$$

Exemple 1.3. — Dans des applications il est souvent plus commode d'utiliser au lieu de

$$||a||_{W_p^N} = \sum_{M=0}^{N} ||D^M a||_{L_p}$$

de tout à l'heure l'expression homogène (en D) $||D^N a||\, L_p$. Mais ce n'est qu'une semi-norme. Donc la théorie n'est pas directement applicable. On peut surmonter aisément cette difficulté en faisant le calcul *modulo des polynômes d'ordre* $\leqslant N_0$ où N_0 est un entier convenable $\geqslant N$ fixé pendent la discussion. (Cette idée a été utilisée systématiquement avant nous par Shamir [30], [31].) Alors l'espace

$$\dot{W}_p^N = \{a \,|\, D^N a \in L_p\}$$

où $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $N \leqslant N_0$ est effectivement un espace de Banach pour la norme homogène

$$||a||_{\dot{W}_p^N} = ||D^N a|| \quad .$$

Nous écrivons toujours $\dot{W}_p = \dot{W}_p^1$. Nous pouvons maintenant définir

$$\dot{W}_p^{s,q} = (L_p, \dot{W}_p^N)_{s/N,q}$$

où

$$0 < s < N \leqslant N_0, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Comme tout à l'heure on montre que W_p^M est de classe

$$\mathcal{K}\left(\frac{M}{N}; L_p, \dot{W}_p^N\right) \cap \mathcal{J}\left(\frac{M}{N}; L_p, \dot{W}_p^N\right) \qquad \text{pour} \qquad 0 < M < N \leqslant N_0.$$

Donc la définition est encore indépendante de N (bien que maintenant il faut toujours $s < N_0$). On montre également que

$$K(t, a; L_p, \dot{W}_p^{N_0}) \sim \omega_{N_0,p}(t^{1/N_0}, a).$$

Donc on a

$$\dot{W}_p^{s,q} = \left\{ a \,\middle|\, \left(\int_0^\infty (t^{-s}\,\omega_{N_0,p}(t,a))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Pour $q = \infty$ nous écrivons

$$\dot{W}_p^{s,\infty} = \dot{\mathrm{Lip}}_{s,p}, \qquad \dot{W}_\infty^{s,\infty} = \dot{\mathrm{Lip}}_s.$$

Dans ce qui suit nous allons employer en général les espaces $\dot{W}$ plutôt que les espaces W. (Voir pourtant n° 9, 11, 12.)

Exemple 1.4. — On se demande ce qui se passe si l'on interpole entre deux espaces de la famille W ou $\dot{W}$. Nous distinguons deux cas simples particuliers : 1° p fixé, s varie, 2° p varie, s fixé. (Au n° 11 on donne aussi un résultat dans cette direction lorsque p, s (et q) varient en même temps; voir également Grisvard [9].) Nous nous bornons au cas de $\dot{W}$.

Cas 1°. — Ce cas est banal. Il résulte aussitôt du théorème de stabilité (joint aux propriétés d'inclusion) que

$$(\dot{W}_p^{s_0, q_0}, \dot{W}_p^{s_1, q_1})_{\theta, q} = \dot{W}_p^{s, q} \qquad \text{pour} \qquad s = (1 - \theta)\, s_0 + \theta s_1.$$

Cas 2°. — Nous disons que

$$(\dot{W}_{p_0}^N, \dot{W}_{p_1}^N)_{\theta, p} = \dot{W}_p^N \quad \text{pour} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, 1 < p_0, p_1 < \infty$$

(Probablement on a un énoncé analogue pour $\dot{W}_p^{s, q}$ mais nous n'en aurons pas besoin dans ce qui suit.) En effet, considérons l'application

$$T : a \to D^N a.$$

On a par définition

$$T : \dot{W}_p^N \to L_p^{(N)} \qquad \text{(produit fini d'espaces } L_p).$$

D'où par interpolation (exemple 1.1.)

$$T : (\dot{W}_{p_0}^N, \dot{W}_{p_1}^N)_{\theta, p} \to L_p^{(N)}.$$

D'où :

$$(\dot{W}_{p_0}^N, \dot{W}_{p_1}^N)_{\theta, p} \subset \dot{W}_p^N.$$

Pour démontrer l'inclusion opposée il faut évidemment construire un relèvement de T (c'est-à-dire : une application linéaire S telle que SoT = identité). Nous le faisons par

$$Sb = a, \quad \hat{a}(\xi) = \frac{\xi^N \hat{b}(\xi)}{|\xi|^{2N}} \quad \text{(avec une convention de sommation)}$$

où ^ indique la transformation de Fourier. Vu le théorème de Michlin sur les multiplicateurs de Fourier [15], [16] (Voir aussi Hörmander [11]) on a :

$$S : L_p^N \to \dot{W}_p^N.$$

D'où par interpolation (exemple 1.1)

$$S : L_p \rightarrow (\dot{W}_{p_0}, \dot{W}_{p_1})_{\theta, p}.$$

D'où l'inclusion opposée. Nous ignorons si le résultat vaut encore pour $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$.)

*
* *

Nous espérons qu'en première lecture ce qui précède soit ce qu'il faut connaître de la théorie des espaces d'interpolation, pour bien comprendre ce qui suit; en seconde lecture, il faut certainement revenir à [24], [25], [14] pour étudier les démonstrations.

2. La transformation de Hilbert.

On se place d'abord sur l'axe réel $R = R^1$. La transformation de Hilbert est alors définie par

$$g(x) = \mathcal{H} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

où l'on interprète d'habitude l'intégrale comme une « valeur principale » selon Cauchy; cela veut dire : comme la limite d'intégrales usuelles $\int_{|y| \geqslant t}$, pour $t \rightarrow 0$. Nous allons ici, suivant une idée de Cotlar [4], [5], [6] en faire une modification et travailler avec une série infinie $\sum_{-\infty}^{\infty} \int_{2^k \leqslant |y| < 2^{k+1}}$.
Donc on va prendre l'intégrale de (2.1) dans le sens suivant :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y} dy = \sum_{-\infty}^{\infty} g_k(x); \tag{2.2}$$

$$g_k(x) = \int_{I_k} \frac{f(x-y)}{y} dy, \quad I_k = \{y \mid 2^k \leqslant |y| < 2^{k+1}\}.$$

Nous pouvons écrire :

$$g_k(x) = \int_{I_k} \frac{f(x-y)}{y} dy = \int_{I_k} \frac{f(x-y) - f(x)}{y} dy$$

(ceci grâce au fait que $\int_{I_k} \frac{dy}{y} = 0$!)

$$\mathrm{D}g_k(x) = -\int \frac{f(x-y)}{y^2}\,dy - \frac{f(x-2^{k+1})}{2^{k+1}} + \frac{f(x-2^k)}{2^k}$$
$$+ \frac{f(x+2^{k+1})}{2^{k+1}} - \frac{f(x+2^k)}{2^k} = \int_{\mathrm{I}_k} \frac{\mathrm{D}f(x-y)}{y}\,dy.$$

On en déduit aussitôt que

$$\begin{aligned} \|\mathrm{D}g_k\|_{\mathrm{L}_p} &\leqslant \mathrm{C}\,2^{-k}\,\|f\|_{\mathrm{L}_p} \quad \text{ou bien} \quad \leqslant \mathrm{C}\,\|\mathrm{D}f\|_{\mathrm{L}_p}. \\ \|g_k\|_{\mathrm{L}_p} &\leqslant \mathrm{C}\,\|f\|_{\mathrm{L}_p} \quad \text{ou bien} \quad \leqslant \mathrm{C}\,2^k\,\|\mathrm{D}f\|_{\mathrm{L}_p} \end{aligned} \tag{2.3}$$

D'où

$$\mathrm{J}(2^k, g_k; \mathrm{L}_p, \dot{\mathrm{W}}_p) \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{K}(2^k, f; \mathrm{L}_p, \dot{\mathrm{W}}_p) \tag{2.4}$$

car, si $f = f_0 + f_1$, on a en vertu de (2.3)

$$\mathrm{J}(2^k, g_k) = \max\,(\|g_k\|_{\mathrm{L}_p}, 2^k\,\|\mathrm{D}g_k\|_{\mathrm{L}_p}) \leqslant \mathrm{C}(\|f_0\|_{\mathrm{L}_p} + 2^k\,\|\mathrm{D}f_1\|_{\mathrm{L}_p})$$

et, en faisant varier f_0 et f_1, (2.4) s'ensuit. Posons maintenant

$$g(t) = (\log 2)^{-1}\,g_k \qquad \text{pour} \qquad 2^k \leqslant t < 2^{k+1}.$$

Alors (2.4) devient ($\mathrm{N}_0 = 1$)

$$\mathrm{J}(t, g(t);\ \mathrm{L}_p,\ \dot{\mathrm{W}}_p) \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{K}(t, f;\ \mathrm{L}_p,\ \dot{\mathrm{W}}_p). \tag{2.5}$$

Comme de plus

$$g = \int_0^\infty g(t)\,\frac{dt}{t}$$

il en résulte en vertu du théorème d'équivalence que $f \in \dot{\mathrm{W}}_p^{s,q}$ entraîne $g \in \dot{\mathrm{W}}_p^{s,q}$. En d'autres mots, nous venons de démontrer que ($\mathrm{N}_0 = 1$)

$$\mathscr{H} : \dot{\mathrm{W}}_p^{s,q} \to \dot{\mathrm{W}}_p^{s,q}, \qquad 0 < s < 1, \tag{2.6}$$

et en spécialisant les paramètres ($q = \infty$)

$$\mathscr{H} : \dot{\mathrm{Lip}}_{s,p} \to \dot{\mathrm{Lip}}_{s,p}, \qquad 0 < s < 1. \tag{2.7}$$

Surtout pour $p = \infty$ c'est un résultat classique.

L'avantage de la présente méthode est manifestement qu'elle s'applique aussi dans plusieurs situations beaucoup plus compliquées. Par exemple, on peut traiter le cas de la transformation de Hilbert n-dimensionelle, n quelconque (transformation de Calderón-Zygmund) :

$$g(x) = \mathcal{H} f(x) = (a * f)(x) = \int a(y) f(x-y)\,dy =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} g_k(x);\ g_k(x) = \int_{I_k} a(y) f(x-y)\,dy,\ I_k = \{y \mid 2^k \leqslant |y| < 2^{k+1}\}$$

où $a = a(y)$ est une fonction homogène de degré $-n$, une fois continûment différentiable pour $y \neq 0$ et satisfaisant de plus à l'hypothèse supplémentaire suivante qui est manifestement indispensable :

$$\int_{I_k} a(x)\,dx = 0$$

pour au moins un k (et alors pour tous k); voir [1]. Evidemment, si $n = 1$, $a(y) = \frac{1}{y}$ satisfait à ces conditions. La méthode précédente s'applique encore dans le cas présent conduisant donc au même résultat (2.6) et en particulier aussi à (2.9). Nous n'en donnons pas les détails parce que au paragraphe suivant nous allons étendre le résultat à un cas encore plus général, envisagé par Cotlar [4], [5], [6].

3. Extension de la méthode précédente aux transformations de type Cotlar.

Nous allons considérer, dans R^n, des transformations de la forme

$$g(x) = \mathcal{C} f(x) = (a * f)(x) = \int a(y) f(x-y)\,dy = \int_0^{\infty} g(t, x) \frac{dt}{t};$$

$$g(t, x) = (u(t) * f)(x) = \int u(t, y) f(x-y)\,dy.$$

Donc on va travailler avec des représentations « continues » plutôt que avec des représentations « discrètes » (voir (2.2), (2.8)). Ceci essentiellement par des raisons formelles. Mais, comme en pratique on peut toujours utiliser des représentations discrètes, on ne va pas discuter les difficultés de mesurabilité qui pourraient intervenir.

Nos hypothèses sont les suivantes :

$$\int u(t, x)\,dx = 0, \tag{3.2}$$

$$\| \, |x| \, u(t) \|_{L_1} \leqslant Ct, \tag{3.}$$

$$\| Du(t) \|_{L_1} \leqslant Ct^{-1}. \tag{3.4}$$

Si l'on désigne par $L_{1,\rho}$ l'espace L_1 pour la mesure ρdx (au lieu de seulement dx, mesure de Haar), cet espace muni de la norme naturelle, (3.3) devient

$$\|u(t)\|_{L_{1,|x|}} \leqslant Ct.$$

Donc on peut reformuler (3.3) et (3.4) comme suit

$$J(t^2, u(t);\ L_{1,|x|},\ \dot{W}_1) \leqslant Ct.$$

On peut aller un peu plus loin : Rappelons que

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}.$$

Donc on a en tout cas :

$$a \in (L_{1,|x|},\ W_1)_{1/2,\infty}.$$

Nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. — *On suppose que* (3.2), (3.3), (3.4) *ont lieu. Alors on a* $(N_0 = 1)$:

$$\mathcal{C} : \dot{W}_p^{s,q} \to \dot{W}_p^{s,q},\ 0 < s < 1 \tag{3.5}$$

et en spécialisant les paramètres $(q = \infty)$

$$\mathcal{C} : \dot{\mathrm{Lip}}_{s,p} \to \dot{\mathrm{Lip}}_{s,p},\ 0 < s < 1. \tag{3.6}$$

Démonstration. — Il suffit évidemment de démontrer (voir 2.5) que

$$J(t, g(t)\ ;\ L_p, \dot{W}_p) \leqslant C\,K(t, f\ ;\ L_p, \dot{W}_p). \tag{3.7}$$

On notera que

$$\begin{cases} \|Dg(t)\|_{L_p} \leqslant \|Du(t)\|_{L_1}\|f\|_{L_p} & \text{ou bien} \quad \leqslant \|u(t)\|_{L_{1,|x|}}\|Df\|_{L_p} \\ \|g(t)\|_{L_p} \leqslant \|u(t)\|_{L_1}\|f\|_{L_p} & \text{ou bien} \quad \leqslant \|u(t)\|_{L_1}\|Df\|_{L_p} \end{cases}$$

d'où (3.7) si l'on utilise (3.3) et (3.4) et de plus si l'on sait que

$$\|u(t)\|_{L_1} \leqslant C.$$

Or ceci est une conséquence de (3.3) et (3.4), comme il résulte du lemme suivant :

LEMME 3.1. — *On a :*

$$\|a\|_{L_1} \leqslant C\sqrt{\|a\|_{L_{1,|x|}}\,\|a\|_{\dot{W}_1}}. \tag{3.8}$$

Une formulation équivalente est évidemment :

$$L_1 \text{ est de classe } \mathcal{J}\left(\frac{1}{2}; L_{1,|x|}, W_1\right). \tag{3.9}$$

Démonstration. — Nous allons démontrer un peu plus :

$$\int |a(x)|\,dx \leqslant C\sqrt{\int |x_i|\,|a(x)|\,dx \int |D_1 a(x)|\,dx}\,; \tag{3.10}$$

et pour cela on peut se ramener au cas $n = 1$. Nous écrivons

$$a(x) = a(x + 2t) - \int_0^{2t} Da(x+s)\,ds.$$

D'où

$$\int_{|x|\leqslant t} |a(x)|\,dx \leqslant \int_{|x|\leqslant t} |a(x+2t)|\,dx + \int_0^{2t}\left(\int_{|x|\leqslant t} |Da(x+s)|\,dx\right)ds$$

$$\leqslant \int_{|x|\geqslant t} |a(x)|\,dx + 2t\int |Da(x)|\,dx$$

ou bien

$$\int |a(x)|\,dx \leqslant 2\left(\int_{|x|\geqslant t} |a(x)|\,dx + t\int |Da(x)|\,dx\right).$$

Mais

$$\int_{|x|\geqslant t} |a(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{t}\int |x|\,|a(x)|\,dx.$$

Donc on trouve

$$\int |a(x)|\,dx \leqslant 2\left(\frac{1}{t}\int |x|\,|a(x)|\,dx + t\int |Da(x)|\,dx\right)$$

ce qui est équivalent à (3.10), $n = 1$.

Exemple 3.1. — Inutile de dire que le théorème 3.1 s'applique notamment au cas $\mathcal{C} = \mathcal{H}$ = la transformation de Hilbert; voir n° 2. En effet on prend

$$u(t, x) = u_k(x) \qquad \text{pour} \qquad 2^k \leqslant t \leqslant 2^{k+1},$$

$$u_k(x) = \varphi_k(x)\, a(x),$$

où φ_k est une « partition de l'unité » telle que

$$\begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) = 1, \\ \varphi_k(x) = 0 \quad \text{sauf pour} \quad 2^{k-1} < |x| < 2^{k+1}, \\ |\mathrm{D}^{\mathrm{M}} \varphi_k(x)| \leqslant \mathrm{C}\, 2^{-k\mathrm{M}}, \quad \mathrm{M} = 0{,}1. \end{cases}$$

On peut encore généraliser le théorème 3.1.

THÉORÈME 3.2. — *On suppose qu'il existe $\sigma > 0$ tel que les hypothèses suivantes ont lieu :*

$$\int x^{\mathrm{L}}\, u\,(t, x)\, dx = 0 \textit{ pour tout } \mathrm{L} \textit{ entier} < \sigma \tag{3.11}$$

$$\|u(t)\|_{\mathrm{L}_1\,|x|^\sigma} \leqslant \mathrm{C}\, t \tag{3.12}$$

$$\|u(t)\|_{\dot{\mathrm{W}}_1^{\sigma,\infty}} \leqslant \mathrm{C}\, t^{-1}. \tag{3.13}$$

Alors on a ($\mathrm{N}_0 =$ *le plus petit entier* $\geqslant \sigma$)

$$\mathcal{C} : \dot{\mathrm{W}}_p^{s,q} \to \dot{\mathrm{W}}_p^{s,q}, \qquad 0 < s < \sigma \tag{3.14}$$

et en spécialisant les paramètres ($q = \infty$).

$$\mathcal{C} : \mathrm{L\dot{i}p}_{s,p} \to \mathrm{L\dot{i}p}_{s,p}, \qquad 0 < s < \sigma. \tag{3.15}$$

Démonstration. — Maintenant on trouve

$$\|g(t)\|_{\dot{\mathrm{W}}_p^{\sigma,\infty}} \leqslant \|u(t)\|_{\dot{\mathrm{W}}_1^{\sigma,\infty}} \|f\|_{\mathrm{L}_p} \quad \text{ou bien} \quad \leqslant \|u(t)\|_{\mathrm{L}_1} \|f\|_{\dot{\mathrm{W}}_p^{\sigma,\infty}}$$

$$\|g(t)\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant \|u(t)\|_{\mathrm{L}_1} \|f\|_{\mathrm{L}_p} \quad \text{ou bien} \quad \leqslant \|u(t)\|_{\mathrm{L}_1\,|x|} \|f\|_{\dot{\mathrm{W}}_p^{\sigma,\infty}}$$

et l'énoncé s'ensuit comme ci-dessus cette fois à l'aide du lemme suivant :

LEMME 3.2. — *On a :*

$$\|a\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant \mathrm{C} \sqrt{\|a\|_{\mathrm{L}_1,|x|^\sigma} \|a\|_{\dot{\mathrm{W}}_1^{\sigma,\infty}}}. \tag{3.16}$$

Démonstration. — Tout à fait analogue à celle du lemme 3.1.

Remarque 3.1. — Sous les mêmes hypothèses que dans ce numéro on peut aussi démontrer que (voir Cotlar [5], [6])

$$\mathcal{C} : \mathrm{L}_p \to \mathrm{L}_p, \qquad 1 < p < \infty$$

et donc en particulier que (voir M. Riesz [28] (cas $n = 1$), Calderón-Zygmund [1], Hörmander [11] (cas $n > 1$); voir également [26])

$$\mathcal{H} : L_p \to L_p, \qquad 1 < p < \infty.$$

Un problème intéressant qui se pose maintenant est le suivant : Etant donnée n'importe quelle application linéaire T ayant la propriété :

$$T : \dot{W}_p^{s,q} \to \dot{W}_p^{s,q}, \quad 0 < s < \sigma, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty$$

peut-on affirmer que

$$T : L_p \to L_p, \qquad 1 < p < \infty\ ?$$

(Evidemment on ne peut admettre $p = 1$ parce que ceci est déjà faux dans le cas de la transformation de Hilbert à une dimension.) Une réponse affirmative à cette question conduira à une simplification conceptuelle de la théorie de la transformation de Hilbert.

Pour tout ce numéro voir également Taibleson [39], [40], Peetre [36].

4. La transformation de potentiel : le théorème de Hardy-Littlewood-Soboleff-Thorin.

La transformation de potentiel d'ordre α, $0 < \alpha < n$, est définie par

$$g(x) = \mathfrak{T}_\alpha f(x) = \int \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}\, dy = \sum_{-\infty}^{\infty} g_k(x)\,;$$

$$g_k(x) = \int_{I_k} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}\, dy, \quad I_k = \{\, y | 2^k \leqslant |y| < 2^{k+1}\}. \tag{4.1}$$

(Dans ce cas l'intégrale existe déjà au sens usuel bien que la « décomposition de Cotlar » soit néanmoins très utile dans ce qui suit; voir aussi Cotlar et Panzone [7].)

On a le

THÉORÈME 4.1. — *Soit* $\alpha < \dfrac{n}{p}$, $p > 1$. *Alors on a*

$$\mathfrak{T}_\alpha : L_p \to L_q, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}. \tag{4.2}$$

Plus généralement on a :

$$\mathfrak{K}_\alpha : \mathrm{L}_p \to \mathrm{L}_{q,p}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}. \tag{4.3}$$

Voir, pour (4.2), Hardy-Littlewood [10] (cas $n = 1$), Soboleff [32], Thorin [35] (cas $n > 1$). Le complément (4.3) semble être plus récent; voir, par exemple, O'Neil [20].

Démonstration. — On choisit p_0, q_0, p_1, q_1 tels que

$$p_0 < p < p_1, q_0 < q < q_1, p_i < q_j \ (i, j = 0, 1), \frac{1}{q_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{\alpha}{n} \ (i = 0, 1)$$

(Vue l'hypothèse $p > 1$ il existe de tels nombres.) En utilisant l'inégalité de Young

$$\mathrm{L}_r * \mathrm{L}_p \subset \mathrm{L}_q \text{ si } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1,$$

on trouve que

$$||g_k||_{\mathrm{L}_{q_0}} \leqslant \mathrm{C}\, ||f||_{\mathrm{L}_{p_0}} \quad \text{ou} \quad \leqslant \mathrm{C}\, 2^{k\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)} ||f||_{\mathrm{L}_{p_1}}$$

$$||g_k||_{\mathrm{L}_{q_1}} \leqslant \mathrm{C}\, 2^{k\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)} ||f||_{\mathrm{L}_{p_0}} \quad \text{ou} \quad \leqslant \mathrm{C}\, ||f||_{\mathrm{L}_{p_1}}.$$

D'où, comme d'habitude,

$$\mathrm{J}\left(2^{k\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)}, g_k; \mathrm{L}_{q_0}, \mathrm{L}_{q_1}\right) \leqslant \mathrm{C}\, \mathrm{K}\left(2^{k\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)}, f; \mathrm{L}_{p_0}, \mathrm{L}_{p_1}\right).$$

D'où encore

$$\mathfrak{K}_\alpha : (\mathrm{L}_{p_0}, \mathrm{L}_{p_1})_{\theta, p} \to (\mathrm{L}_{q_0}, \mathrm{L}_{q_1})_{\theta, p}.$$

Mais d'après l'exemple 1.1

$$(\mathrm{L}_{p_0}, \mathrm{L}_{p_1})_{\theta, p} = \mathrm{L}_p, \quad (\mathrm{L}_{q_0}, \mathrm{L}_{q_1})_{\theta, p} = \mathrm{L}_{q, p} \subset \mathrm{L}_q$$

$$\text{pour } \frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

D'où aussitôt (4.2) et (4.3).

Considérons ensuite le cas $\alpha > \dfrac{n}{p}$. On a le

THÉORÈME 4.2. — *Soit* $\alpha > \frac{n}{p}$, $p > 1$. *Alors on a :*

$$\mathfrak{L}_\alpha : \mathrm{L}_p \to \dot{\mathrm{W}}_\infty^{s,p}, \quad s = \alpha - \frac{n}{p}. \tag{4.4}$$

Comme $\mathrm{W}_\infty^{s,p} \subset \mathrm{W}_\infty^{s,\infty} = \mathrm{Lip}_s$ (d'après les propriétés d'inclusion) *on a en particulier :*

$$\mathfrak{L}_\alpha : \mathrm{L}_p \to \dot{\mathrm{Lip}}_s, \quad s = \alpha - \frac{n}{p}. \tag{4.5}$$

Voir, pour (4.5) Hardy-Littlewood [10] (cas $n = 1$), (par exemple) L. Schwartz [29] (cas $n > 1$). Le complément (4.4) semble être plus récent.

Démonstration. — Soit N un entier tel que $s = \alpha - \frac{n}{p} < \mathrm{N}$. Il faut maintenant un peu modifier la définition de g_k (voir (4.1)). Soit (φ_k) une « partition de l'unité » telle que

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) = 1, \\ \varphi_k(x) = 0 \qquad \text{sauf pour} \qquad 2^{k-1} < |x| < 2^{k+1}, \\ |\mathrm{D^M} \varphi_k(x)| \leqslant \mathrm{C}\, 2^{-k\mathrm{M}}, \qquad 0 \leqslant \mathrm{M} \leqslant \mathrm{N}, \end{cases}$$

et prenons

$$g_k(x) = \int \frac{\varphi_k(y)}{|y|^{n-\alpha}} f(x-y)\, dy.$$

On trouve maintenant

$$\|g_k\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant \mathrm{C}\, 2^{k\left(\alpha - \frac{n}{p_0}\right)} \|f\|_{\mathrm{L}_{p_0}} \quad \text{ou} \quad \leqslant \mathrm{C}\, 2^{k\left(\alpha - \frac{n}{p_1}\right)} \|f\|_{\mathrm{L}_{p_1}}$$

$$\|\mathrm{D^N} g_k\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant \mathrm{C}\, 2^{k\left(\alpha - \frac{n}{p_1} - \mathrm{N}\right)} \|f\|_{\mathrm{L}_{p_1}} \quad \text{ou} \quad \leqslant \mathrm{C}\, 2^{k\left(\alpha - \frac{n}{p_1} - \mathrm{N}\right)} \|f\|_{\mathrm{L}_{p_1}}$$

D'où, comme d'habitude,

$$\mathrm{J}(2^{k\mathrm{N}}, g_k; \mathrm{L}_\infty, \mathrm{W}_\infty^{\mathrm{N}}) \leqslant \mathrm{C}\, 2^{k\left(\alpha - \frac{n}{p_0}\right)} \mathrm{K}(2^{kn\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)}, f; \mathrm{L}_{p_0}, \mathrm{L}_{p_1}).$$

D'où

$$\mathfrak{T}_\alpha : (L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta, p} \rightarrow (L_\infty, \dot{W}^N_\infty)_{\eta, p}, \ \eta = \frac{\alpha - n\left(\dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}\right)}{N}$$

et (4.4) s'ensuit facilement.

5. Variante de la méthode précédente, I.

Nous nous bornerons au cas $\alpha < \dfrac{n}{p}$.

Posons alors

$$g_0(x) = \int_{|y| \leqslant s} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \ ; \ g_1(x) = \int_{|y| \leqslant s} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} dy.$$

Soit $p_0 < p < p_1$, $q < p_i (i = 0,1)$. En utilisant l'inégalité de Young on trouve que

$$||g_0||_{L_q} \leqslant C s^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}\right)} ||f||_{L_{p_0}},$$

$$||g_1||_{L_q} \leqslant C s^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\right)} ||f||_{L_{p_1}}.$$

D'où puisque $g = g_0 + g_1$

$$||g||_{L_q} \leqslant C s^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}\right)} J(s^{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\right)}, f; L_{p_0}, L_{p_1})$$

ou (avec $s^{n\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)} = t$)

$$||g||_{L_q} \leqslant C t^{-\theta} J(t, f; L_{p_0}, L_{p_1}); \ \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Soit maintenant

$$f = \int_0^\infty f(t) \frac{dt}{t}$$

et appliquons cette inégalité à $f(t)$ pour tout t. Il vient

$$||g||_{L_q} \leqslant C \int^\infty t^{-\theta} J(t, f(t); L_{p_0}, L_{p_1}); \ \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

D'où

$$\mathfrak{T}_\alpha : (\mathrm{L}_{p_0}, \mathrm{L}_{p_1})_{\theta, 1} \to \mathrm{L}_q \, , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \, .$$

Mais d'après l'exemple 1.1

$$(\mathrm{L}_{p_0}, \mathrm{L}_{p_1})_{\theta, 1} = \mathrm{L}_{p, 1} \, , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \, .$$

Donc on a :

$$\mathfrak{T}_\alpha : \mathrm{L}_{p,1} \to \mathrm{L}_q . \tag{5.1}$$

Nous appliquons maintenant un raisonnement qui sera employé plusieurs fois dans ce qui suit. Nous utilisons (5.1) deux fois, avec des p différents. Il vient :

$$\mathfrak{T}_\alpha : (\mathrm{L}_{p_0,1}, \mathrm{L}_{p_1,1})_{\theta, p} \to (\mathrm{L}_{q_0}, \mathrm{L}_{q_1})_{\theta, p} \, .$$

D'où facilement (4.3), encore d'après l'exemple 1.1. Donc on a retrouvé le th. 4.1.

Par une méthode analogue on peut retrouver le th. 4.2.

6. Variante de la méthode précédente, II : le théorème d'O'Neil.

Considérons l'application bilinéaire (convolution) $\mathcal{B} : (a, b) \to a * b$.

On a alors le théorème suivant (dû essentiellement à O'Neil [20]).

Théorème 6.1. — *On a :*

$$\mathcal{B} : \mathrm{L}_{r,\infty} \times \mathrm{L}_p \to \mathrm{L}_{q,p} \, , \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1, \; 1 < p < \infty, \; 1 < r < \infty \tag{6.1}$$

En particulier on a :

$$\mathcal{B} : \mathrm{L}_{r,\infty} \times \mathrm{L}_p \to \mathrm{L}_q \, . \tag{6.2}$$

Démonstration. — On part de l'inégalité de Young

$$\mathcal{B} : \mathrm{L}_r \times \mathrm{L}_p \to \mathrm{L}_q \, . \tag{6.3}$$

Nous allons maintenant appliquer plusieurs fois l'artifice employé au n° 5.

1) Prenons p fixé et appliquons (6.3) deux fois, avec des r et q différents. Il vient :

$$\mathcal{B} : (L_{r_0}, L_{r_1})_{\theta,\infty} \times L_p \to (L_{q_0}, L_{q_1})_{\theta,\infty}$$

d'où, d'après l'exemple 1.1

$$\mathcal{B} : L_{r,\infty} \times L_p \to L_{q,\infty}. \tag{6.4}$$

2) Prenons r fixé et appliquons (6.4) deux fois, avec des p et q différents. Il vient :

$$\mathcal{B} : L_{r,\infty} \times (L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,p} \to (L_{q_0}, L_{q_1})_{\theta,p}$$

d'où, d'après l'exemple 1.1, (6.1), et la démonstration est complète.

Remarque 6.1. — Une autre démonstration du théorème d'O'Neil, à l'aide des « espaces de traces » (voir [13], [14]), a été trouvée par Lions (inédit).

Exemple 6.1. — On montre facilement que $a(x) = \dfrac{1}{|x|^{n-\alpha}} \in L_{r,\infty}$ pour $\dfrac{1}{r} = 1 - \dfrac{\alpha}{n}$. En appliquant maintenant le th. 6.1 on retrouve le th. 4.1.

Cette fois évidemment on ne peut plus (aisément) retrouver le th. 4.2; voir néanmoins n° 13 et n° 14.

7. Démonstration du théorème de Soboleff (usuel).

Il s'agit du résultat suivant.

THÉORÈME 7.1. — *On a :*

$$\dot{W}_p^N \subset L_{q,p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{N}{n}, 1 < p < \frac{n}{N}, \tag{7.1}$$

et donc en particulier :

$$\dot{W}_p^N \subset L_q. \tag{7.2}$$

Démonstration (d'après l'idée classique de Soboleff [32], v. aussi L. Schwartz [29]). — On peut écrire

$$f = a * D^N f, \tag{7.3}$$

a étant défini par

$$\hat{a}(\xi) = \frac{(-i\xi)^{\mathrm{N}}}{|\xi|^{2\mathrm{N}}}.$$

D'où

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{C}\, |\mathfrak{T}_{\mathrm{N}}\, \mathrm{D}^{\mathrm{N}} f(x)|.$$

En appliquant le th. 4.1, (7.1) s'ensuit.

Remarque 7.1. — Le th. 7.1. vaut encore pour $p = 1$; voir Gagliardo [8] et Nirenberg [19] où l'on en donne une démonstration simple très élémentaire. Par contre le th. 4.1, sur lequel nous avons basé la démonstration du th. 7.1 ci-dessus, est manifestement faux pour $p = 1$.

Considérons ensuite le cas $p > \frac{n}{\mathrm{N}}$. On a le

Théorème 7.2. — *On a :*

$$\dot{\mathrm{W}}_p^{\mathrm{N}} \subset \dot{\mathrm{W}}_\infty^{s,p}, \quad s = \mathrm{N} - \frac{n}{p}, \; p > \frac{n}{\mathrm{N}} \tag{7.4}$$

et donc en particulier

$$\dot{\mathrm{W}}_p^{\mathrm{N}} \subset \dot{\mathrm{Lip}}_s. \tag{7.5}$$

Démonstration. — On utilise encore la représentation (7.3) et la démonstration du th. 4.2 (le théorème 4.2 lui-même n'étant pas directement applicable).

Remarque 7.2. — Ce résultat semble être dû à Morrey [17] qui en donne une démonstration directe élémentaire; voir Gagliardo [8] et Nirenberg [19].

8. Démonstration du théorème de Soboleff fractionnaire.

Nous nous occuperons maintenant de l'extension des résultàts précédents au cas des espaces $\dot{\mathrm{W}}_p^{s,q}$. On pourrait obtenir cette extension par interpolation des résultats précédents mais alors on perdrait quelques intervalles des paramètres. A cause de cela nous allons donner une méthode plus directe; en effet, on verra que c'est une variante de la méthode du n° 5.

THÉORÈME 8.1. — *On a :*

$$\dot{W}_p^{s,r} \subset L_{q,r}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n}, \quad 1 < p < \frac{n}{s}; \tag{8.1}$$

et donc en particulier

$$\dot{W}_p^{s,r} \subset L_q, \; r \leqslant q. \tag{8.2}$$

Démonstration. — Nous partons de l'inégalité la plus banale dans ce sens :

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\,(\|f\|_{L_p} + \|D^N f\|_{L_p}), \; N > \frac{n}{p}.$$

En l'appliquant à la fonction $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$ au lieu de $f(x)$ et en faisant un choix convenable de $\varepsilon > 0$, nous obtenons :

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\,\|f\|_{L_p}^{1-\frac{n}{pN}}\,\|f\|_{\dot{W}^N}^{\frac{n}{pN}}.$$

Mais

$$\|f\|_{L_q} \leqslant \|f\|_{L_p}^{\frac{p}{q}}\,\|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{p}{q}}, \; p < q < \infty.$$

Donc on a aussi :

$$\|f\|_{L_q} \leqslant C\,\|f\|_{L_p}^{1-\theta}\,\|f\|_{\dot{W}_p}^{\theta_N}, \; \theta = \frac{n}{N}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$$

ou encore

$$\|f\|_{L_q} \leqslant C\,t^{-\theta}\,J(t, f; L_p, \dot{W}_p^N).$$

Comme au n° 5 il en résulte que

$$\dot{W}_p^{s,1} \subset L_q, \; s = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right).$$

En appliquant ceci deux fois, avec des s et q différents mais avec p fixé, on déduit

$$(\dot{W}_p^{s_0,1}, \dot{W}_p^{s_1,1})_{\theta,r} \subset (L_{q_0}, L_{q_1})_{\theta,r}$$

d'où, d'après l'exemple 1.1 et l'exemple 1.3, facilement (8.1).

Reste le cas $p > \dfrac{n}{s}$.

THÉORÈME 8.2. — *On a :*

$$\dot{\mathrm{W}}_p^{s,r} \subset \dot{\mathrm{W}}_\infty^{\sigma,r}, \ \sigma = s - \frac{n}{p}, \ p > \frac{n}{s}\,; \tag{8.3}$$

et donc en particulier

$$\dot{\mathrm{W}}_p^{s,r} \subset \dot{\mathrm{Lip}}_\sigma \tag{8.4}$$

Démonstration. — Raisonnement analogue. Maintenant on utilise :

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \mathrm{C}\, \|f\|_{\mathrm{L}_p}^{1-\theta}\, \|f\|_{\dot{\mathrm{W}}_p}^{\theta_{\mathrm{N}}}, \quad \theta = \frac{s}{\mathrm{N}}, \ \mathrm{N} > s.$$

9. Un cas limite.

Nous allons étudier le cas limite $p = \frac{n}{s}$. Cette fois, contrairement à notre habitude, il sera un peu plus commode d'utiliser les espaces W plutôt que les espaces $\dot{\mathrm{W}}$. (Evidemment les résultats du n° 8, par exemple, s'étendent aussitôt à ce cas.)

Nous avons l'inégalité :

$$\|f\|_{\mathrm{L}_q} \leqslant \mathrm{C}\, t^{-\theta}\, \mathrm{J}\,(t, f;\ \mathrm{L}_p, \mathrm{W}_p^{\mathrm{N}}), \ \theta = \frac{n}{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right).$$

Puisque $\mathrm{L}_p \supset \mathrm{W}_p^{\mathrm{N}}$ on peut représenter f sous la forme

$$f = \int_0^1 f\,(t)\,\frac{dt}{t}, \ \mathrm{J}\,(t, f\,(t)) \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{K}\,(t, f)$$

(voir [24], [25]). En appliquant cette inégalité à $f\,(t)$ pour tout t et ensuite l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathrm{L}_q} &\leqslant \mathrm{C} \int_0^1 t^{-\theta}\, \mathrm{K}\,(t, f)\,\frac{dt}{t} \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{C} \left(\int_0^1 (t^{\theta_0-\theta})^{\,r'}\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int_0^1 (t^{-\theta_0}\,\mathrm{K}\,(t, f))^r\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\leqslant \mathrm{C}\,\frac{1}{(\theta_0 - \theta)^{1/r'}}\, \|f\|_{(\mathrm{L}_p, \mathrm{W}_p^{\mathrm{N}})_{\theta_0, r}} \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{C}\,\frac{1}{q^{1/r'}}\, \|f\|_{\mathrm{W}_p^{s,k}}, \ \theta_0 = \frac{n}{\mathrm{N}p}, \ s = \frac{n}{p} = \theta_0\,\mathrm{N} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1.
\end{aligned}$$

Donc on vient de démontrer le

THÉORÈME 9.1. — *On a :*

$$f \in W_p^{s,r} \rightarrow \sup_{p \leq q < \infty} \frac{||f||_{L_q}}{q^{1/r'}} < \infty, \quad s = \frac{n}{p}. \tag{9.1}$$

En désignant par L_Φ l'espace d'Orlicz correspondant à la fonction convexe Φ, nous pouvons reformuler ce résultat comme suit : On a :

$$W_p^{s,r} \subset L_\Phi, \quad \Phi(f) = \sum_{j \geq p} \frac{f^{jr'}}{j!}, \quad s = \frac{n}{p}$$

(voir, par exemple, Stampacchia [33], remarque 1.2).

10. Démonstration que le théorème de Soboleff fractionnaire entraîne le théorème de Soboleff.

On va indiquer comment on peut retrouver le th. 7.1 à partir du th. 8.1.

Nous avons, d'après le fait que $\dot{W}_p^N$ est de classe

$$\mathcal{K}\left(\frac{N}{N_0}; L_p, \dot{W}_p^{N_0}\right) \cap \mathcal{J}\left(\frac{N}{N_0}; L_p, \dot{W}_p^{N_0}\right)$$

(voir l'exemple 1.3),

$$\dot{W}_p^N \subset \dot{W}_p^{N,\infty}$$

et, d'après le th. 8.1,

$$\dot{W}_p^{N,\infty} \subset L_{q,\infty}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{N}{n}.$$

D'où

$$\dot{W}_p^N \subset L_{q,\infty}.$$

Appliquons ceci deux fois, avec N fixe, mais avec des p et q différents. Il vient :

$$(\dot{W}_{p_0}^N, \dot{W}_{p_1}^N)_{\theta,p} \subset (L_{q_0}, L_{q_1})_{\theta,p}.$$

Mais, d'après l'exemple 1.4,

$$(\dot{W}_{p_0}^N, \dot{W}_{p_1}^N)_{\theta,p} = \dot{W}_p^N, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

et d'après l'exemple 1.3,

$$(L_{q_0}, L_{q_1})_{\theta,p} = L_{q,p}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

D'où

$$\dot{W}_p^N \subset L_{q,p}$$

et on a ainsi retrouvé le th. 8.1.

11. Quelques résultats sur l'interpolation des espaces de Soboleff.

Dans ce numéro nous donnons deux résultats, duaux l'un de l'autre, sur l'interpolation des espaces $\dot{W}_p^N$ (ou, plus généralement, $\dot{W}_p^{s,q}$) avec N (ou s) et p variant au même temps. (Le cas où l'un des deux paramètres est fixe est banal; voir l'exemple 1.4). Nous en donnons aussi l'extension au cas W. Ces résultats, ainsi que les méthodes, sont semblables aux résultats de Grisvard [9], bien que leur rapport exact ne soit pas encore clair. Voici le premier de ces deux résultats.

THÉORÈME 11.1. — *On a :*

$$\dot{W}_p^{s,1} \subset (L_{p_0}, \dot{W}_{p_1}^N)_{\theta,p}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad s = (1-\theta)\,N, \quad 1 \leqslant p_0, \quad p_1 \leqslant \infty. \tag{11.1}$$

et, plus généralement,

$$\dot{W}_p^{s,1} \subset (\dot{W}_{p_0}^{s_0,q_0}, \dot{W}_{p_1}^{s_1,q_1})_{\theta,p}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad s = (1-\theta)\,s_0 + \theta s_1, \tag{11.2}$$

Démonstration. — Nous prenons d'abord $1 < p_0, \; p_1 < \infty$. L'idée là est d'utiliser la « décomposition de Cotlar » (voir surtout n° 2, 3) pour l'identité. Plus précisément, on va se servir de la représentation suivante de f :

$$f(x) = \int_0^\infty f_t(x)\,\frac{dt}{t}, \quad f_t(x) = (\psi_t * f)\,(x)$$

où $\psi_t(x) = \frac{1}{t^n}\,\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ et ψ satisfait à

$$\int \psi(x)\,dx = 0, \quad \int x\,\psi(x)\,dx = 0, \ldots, \quad \int x^{N-1}\,\psi(x)\,dx = 0,$$

$$x^N\,\psi \in L_1, \qquad D^N\,\psi \in L_1.$$

Alors on a :

$$\|\psi_t\|_{L_1, |x|^N} \leqslant C\, t^N, \qquad \|\psi_t\|_{\dot{W}_1^N} \leqslant C\, t^{-N}, \qquad \|\psi_t\|_{L_1} \leqslant C.$$

Admettons pour le moment l'existence d'une telle ψ.

Cas de (11.1). — On trouve

$$\left.\begin{aligned} &\|f_t\|_{L_{p_0}} \leqslant C\, \|f\|_{L_{p_0}} \text{ ou } \leqslant C\, t^N \|f\|_{\dot{W}_{p_0}^N} \\ &\|f_t\|_{\dot{W}_{p_1}^N} \leqslant C\, t^{-N} \|f\|_{L_{p_1}} \text{ ou } \leqslant \|f\|_{\dot{W}_{p_1}^N}. \end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$

D'où par interpolation, d'après l'exemple 1.1 et l'exemple 1.4,

$$\|f_t\|_{(L_{p_0},\, \dot{W}_{p_1}^N)_{\theta, p}} \leqslant C\, t^{-\theta N} \|f\|_{L_p} \text{ ou } C\, t^{(1-\theta)N} \|f\|_{\dot{W}_p^N}$$

ou encore

$$\|f_t\|_{(L_{p_0},\, \dot{W}_{p_1}^N)_{\theta, p}} \leqslant C\, t^{-\theta N}\, J\,(t^N, f\,; L_p, \dot{W}_p^N)$$

et (11.1) s'ensuit.

Cas de (11.2). — Raisonnement analogue. Maintenant on utilise

$$\left.\begin{aligned} &\|f_t\|_{\dot{W}_{p_0}^{s_1, q_1}} \leqslant C\, t^{-s_1} \|f\|_{L_{p_0}} \text{ ou bien } \leqslant C\, t^{N-s_1} \|f\|_{\dot{W}_{p_1}^N} \\ &\|f_t\|_{\dot{W}_{p_1}^{s_0, q_0}} \leqslant C\, t^{-s_0} \|f\|_{L_{p_1}} \text{ ou bien } \leqslant C\, t^{N-s_0} \|f\|_{\dot{W}_{p_1}^N}, \end{aligned}\right\}$$

qu'on déduit aisément de (11.4) par interpolation.

Pour achever la démonstration, il faut encore construire ψ. Nous la cherchons sous la forme

$$\psi_t(x) = t \frac{d}{dt} \varphi_t(x), \quad \varphi_t(x) = \frac{1}{t^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \int \varphi(x)\, dx = 1.$$

En éliminant t on voit qu'il faut que

$$\psi(x) = -x\, D\varphi(x) - n\varphi(x) = -D\,(x\varphi(x)).$$

On voit facilement qu'on peut prendre pour φ n'importe quelle fonction indéfiniment différenciable à support compact telle que $\hat{\varphi}(\xi) = 1$ dans un voisinage de 0.

La démonstration est complète dans le cas $1 < p_0, p_1 < \infty$.

Pour l'étendre au cas $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$ nous allons mélanger la méthode précédente avec celle employée dans l'exemple 1.4. On définit l'application S_{ψ_t} par

$$S_{\psi_t}\, g = f, \hat{f}(\xi) = \frac{\hat{\psi}(t\xi)\xi^N \hat{g}(\xi)}{|\xi|^{2N}}\,;$$

on a :

$$S_{\psi_t} T f = f_t .$$

De plus, vu des propriétés simples des multiplicateurs de Fourier (voir par exemple [26]),

$$S_{\psi_t} : L_{p_0}^{(N)} \to L_{p_0}, \ \|S_{\psi_t} g\|_{L_{p_0}} \leqslant C\, t^{-N} \|g\|_{L_{p_0}^{(N)}}$$

$$S_{\psi_t} : L_{p_1}^{(N)} \to \dot{W}_{p_1}^{N}, \ \|S_{\psi_t} g\|_{\dot{W}_{p_1}^{N}} \leqslant C \|g\|_{L_{p_1}^{(N)}}$$

d'où par interpolation

$$S_{\psi_t} : L_p^{(N)} \to (L_{p_0}, \dot{W}_{p_1}^{N})_{\theta, p} ,$$

$$\|S_{\psi_t} g\|_{(L_{p_0}, \dot{W}_{p_1}^{N})_{\theta,p}} \leqslant C\, t^{(1-\theta)N} \|g\|_{L_p^{(N)}}.$$

D'où ($g = Tf$)

$$\|f_t\|_{(L_{p_0}, \dot{W}_{p_1}^{N})_{\theta,p}} \leqslant C\, t^{(1-\theta)N} \|f\|_{\dot{W}_p^{N}} .$$

qui était une des inégalités critiques dans le cas de (11.1). Le cas de (11.2) est tout à fait analogue.

Le th. 11.1 est complètement démontré.

Voici maintenant l'énoncé dual.

Théorème 11.2. — *On a :*

$$(L_{p_0}, \dot{W}_{p_1}^{N})_{\theta, p} \subset \dot{W}_p^{s, \infty} , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad s = (1-\theta)N \tag{11.5}$$

et, plus généralement,

$$(\dot{W}_{p_0}^{s_0, q_0}, \dot{W}_{p_1}^{s_1, q_1})_{\theta, p} \subset \dot{W}_p^{s, \infty} , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1 \tag{11.6}$$

Démonstration. — Nous utilisons une méthode qui est analogue à celle du n° 5. On représente maintenant f sous la forme :

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x); f_0(x) = f(x) - (\varphi_t * f)(x), \ f_1(x) = (\varphi_t * f)(x) \tag{11.7}$$

où $\varphi_t(x) = \dfrac{1}{t^n} \varphi\left(\dfrac{x}{t}\right)$ et φ satisfaisant à

$$\int \varphi(x)\, dx = 1, \quad \int x\, \varphi(x)\, dx = 0, \ldots, \quad \int x^{N-1} \varphi(x)\, dx = 0,$$

$$x^N \varphi \in L_1, \qquad D^N \varphi \in L_1.$$

Alors on a :

$$\|\varphi_t\|_{L_1,|x|^N} \leqslant C\, t^N, \quad \|\varphi_t\|_{\dot{W}_1^N} \leqslant C\, t^{-N}, \quad \|\varphi_t\|_{L_1} \leqslant C.$$

Nous obtenons

$$\|f_0\|_{L_{p_0}} \leqslant C\, \|f\|_{L_{p_0}}, \qquad \|f_0\|_{L_{p_1}} \leqslant C\, t^N\, \|f\|_{\dot{W}_{p_1}^N}$$
$$\|f_1\|_{\dot{W}_{p_0}^N} \leqslant C\, t^{-N}\, \|f\|_{L_{p_0}}, \quad \|f_1\|_{\dot{W}_{p_1}^N} \leqslant C\, \|f\|_{\dot{W}_{p_1}^N}.$$

D'où, par interpolation,

$$\|f_0\|_{L_p} \leqslant C\, t^s\, \|f\|_{(L_{p_0}, \dot{W}_{p_1}^N)_{\theta, p}}$$
$$\|f_1\|_{\dot{W}_p^N} \leqslant C\, t^{s-N}\, \|f\|_{(L_{p_0}, \dot{W}_{p_1}^N)_{\theta, p}}$$

ou encore, puisque $f = f_0 + f_1$,

$$K(t^N, f;\ L_p, \dot{W}_p^N) \leqslant C\, t^s\, \|f\|_{(L_{p_0}, \dot{W}_{p_1}^N)_{\theta, p}}$$

et (11.5) est bien démontré. Par une méthode analogue on trouve ensuite (11.6). Nous laissons les détails au lecteur.

Indiquons enfin brièvement l'extension au cas W.

THÉORÈME 11.3. — *On a :*

$$W_p^{s,1} \subset (L_{p_0}, W_{p_1}^N)_{\theta, p}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad s = (1-\theta)\,N \tag{11.8}$$

et, plus généralement,

$$W_p^{s,1} \subset (W_{p_0}^{s_0, q_0}, W_{p_1}^{s_1, q_1})_{\theta, p}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad s = (1-\theta)\, s_0 + \theta s_1. \tag{11.9}$$

Démonstration. — Au lieu de (11.3) on utilise maintenant une représentation de la forme :

$$f(x) = \int_0^1 f_t(x) \frac{dt}{t} + g(x), \quad f_t(x) = (\varphi_t * f)(x),$$
$$g(t) = (\omega * f)(x),$$

où $\omega \in L_1$. Le premier terme se traite comme tout à l'heure. A l'aide de l'exemple 1.3 on montre ensuite que $f \in L_p = (L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta, p} \supset W_p^{s,1}$ entraîne $g \in (L_{p_0}, W_{p_1}^N)_{\theta, p}$.

THÉORÈME 11.4. — *On a :*

$$(L_{p_0}, W_{p_1}^N)_{\theta,p} \subset W_p^{s,\infty}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad s = (1-\theta)N \tag{11.10}$$

et, plus généralement

$$(W_{p_0}^{s_0, q_0}, W_{p_1}^{s_1, q_1})_{\theta,p} \subset W_p^{s,\infty}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1. \tag{11.11}$$

Démonstration. — C'est encore plus simple. On n'a qu'à utiliser la représentation pour $t < 1$ seulement.

12. Application au théorème d'interpolation de Stampacchia.

Nous avons le résultat suivant, variante d'un théorème, dans une certaine mesure plus fort, démontré par Stampacchia [33] (voir aussi Campanato [2], Campanato-Murthy [3], Stampacchia [38], Spanne [37], Peetre [36]). Une autre démonstration, très voisine de la nôtre, du théorème de Stampacchia a été trouvée par Grisvard [9].

THÉORÈME 12.1. — *Soit*

$$T : L_{q_0} \to L_{p_0}$$
$$T : L_{q_1} \to W_{p_1}^N$$

Alors on a :

$$T : L_q \to \begin{cases} L_{\tilde{p}}, \quad \dfrac{1}{\tilde{p}} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{s}{n} & \text{si} \quad \theta < \dfrac{s}{N} \\ L_\Phi, \quad \Phi(f) = \sum\limits_{j \geqslant p} \dfrac{f^j}{j!} & \text{si} \quad \theta = \dfrac{s}{N} \\ \mathrm{Lip}_{\tilde{s}}, \quad \tilde{s} = s - \dfrac{n}{p} & \text{si} \quad \theta < \dfrac{s}{N} \end{cases}$$

où

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \cdot$$

$$s = \theta N, \ q \leqslant p, \ 1 \leqslant q_0, \ q_1 \leqslant \infty, \ 1 \leqslant p_0, \ p_1 \leqslant \infty.$$

Démonstration. — On trouve toute suite

$$T : (L_{q_0}, L_{q_1})_{\theta,p} \to (L_{p_0}, W^N_{p_1})_{\theta,p}\,.$$

Mais, d'après l'exemple 1.1, on a

$$(L_{q_0}, L_{q_1})_{\theta,p} = L_{q,p} \supset L_q$$

et, d'après le th. 11.4,

$$(L_{p_0}, W^N_{p_1})_{\theta,p} \subset W_p^{s,\infty}\ , \qquad s = \theta N.$$

Donc on a :

$$T : L_q \to W_p^{s,\infty}\ .$$

On applique ensuite $\left(\text{pour } \theta \neq \dfrac{s}{N}\right)$ l'analogue des th. 8.1 et 8.2 et $\left(\text{pour } \theta = \dfrac{s}{N}\right)$ le th. 9.1. La démonstration est complète.

13. Quelques résultats sur les multiplicateurs de Fourier.

Commençons par un cas simple illustratif.

THÉORÈME 13.1. — *Soit $\hat{a}(\xi)$ tel que*

$$|D^M \hat{a}(\xi)| \leqslant C/|\xi|^M,\ 0 \leqslant M \leqslant N \ (\text{« condition de Michlin »}) \tag{13.1}$$

où N *entier* $> \dfrac{n}{2}$. *Alors $\hat{a}(\xi)$ est un multiplicateur de Fourier sur tout espace* $\dot{W}_p^{s,q}$, $s > 0,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$.

C'est évidemment une variante (assez élémentaire) du théorème de Michlin [15], [16] sur les multiplicateurs de Fourier sur L_p.

Ici on utilise quelques nouveaux espaces $\dot{H}^s$ qui correspondent aux espaces $\dot{W}_p^N$ dans le cas non entier. Ce sont les espaces qui correspondent à la norme

$$||a||_{\dot{H}_p} = \left(\int |\xi|^{sp}\, |\hat{a}(\xi)|^p\, d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

D'après le théorème de Michlin cité plus haut on a :

$$\dot{H}_p^s = \dot{W}_p^N,\ s = N \text{ entier},\ 1 < p < \infty.$$

En tous cas on a :

$$\dot{\mathrm{H}}_p^s \text{ est de classe } \mathcal{K}\left(\frac{s}{\mathrm{N}} ; \mathrm{L}_p, \dot{\mathrm{W}}_p^{\mathrm{N}}\right) \cap \mathcal{J}\left(\frac{s}{\mathrm{N}} ; \mathrm{L}_p, \dot{\mathrm{W}}_p^{\mathrm{N}}\right)$$

$$\text{pour } 0 < s < \mathrm{N},\ 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

D'où suit, vu le théorème de stabilité

$$\dot{\mathrm{W}}_p^{s,q} = (\dot{\mathrm{H}}_p^{s_0}, \dot{\mathrm{H}}_p^{s_1})_{\theta,q},\ s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$$

$$1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{13.2}$$

Démonstration. — Soit $f \in \dot{\mathrm{H}}_p^s$. On va démontrer que

$$g = a * f \in \dot{\mathrm{W}}_p^{s,\infty}.$$

(Vu le théorème de stabilité l'énoncé du théorème résultera de là.)

Soit $g_t = a_t * f$, $\hat{a}_0(\xi) = (1 - \hat{\varphi}(t\xi))\,\hat{a}(\xi)$, $\hat{a}_1(\xi) = \hat{\varphi}(t\xi)\,\hat{a}(\xi)$ où $\hat{\varphi}(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leqslant 1$, $= 0$ pour $|\xi| \geqslant 2$. Il suffit de montrer que, pour σ assez petit, on a

$$\|g_0\|_{\dot{\mathrm{H}}_p^{s-\sigma}} \leqslant \mathrm{C}\, t^\sigma \|f\|_{\dot{\mathrm{H}}_p^s} ;\quad \|g_1\|_{\dot{\mathrm{H}}_p^{s+\sigma}} \leqslant \mathrm{C}\, t^\sigma \|f\|_{\dot{\mathrm{H}}_p^s} ;$$

puisque $\dot{\mathrm{W}}_p^{s,\infty} = (\dot{\mathrm{W}}_p^{s-\sigma}, \dot{\mathrm{W}}_p^{s+\sigma})_{1/2,\infty}$ (cas particulier de (13.2)). Or pour cela, d'après un théorème classique de Bernstein (dans notre formulation : tout $\hat{a}(\xi) \in \dot{\mathrm{W}}^{n/2,1}$ est un multiplicateur de Fourier sur L_1; voir [26]), il suffit de montrer que

$$\|\hat{b}_0\|_{\dot{\mathrm{W}}_2^{\frac{n}{2},1}} \leqslant \mathrm{C}\, t^\sigma ;\quad \|\hat{b}_1\|_{\dot{\mathrm{W}}_2^{\frac{n}{2},1}} \leqslant \mathrm{C}\, t^{-\sigma} ;$$

où $\hat{b}_0(\xi) = \hat{a}_0(\xi)\,|\xi|^{-\sigma}$, $\hat{b}_1(\xi) = \hat{a}_1(\xi)\,|\xi|^\sigma$. Démontrons par exemple la première de ces inégalités.

Ecrivons

$$\hat{a}_0(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_j(\xi)\,\hat{a}_0(\xi)$$

avec

$$\begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_j(\xi) = 1, \\ \hat{\varphi}_j(\xi) = 0 \quad \text{sauf pour } 2^{j-1} < |\xi| < 2^{j+1}, \\ |\mathrm{D}^{\mathrm{M}} \hat{\varphi}_j(\xi)| \leqslant \mathrm{C}\, 2^{-j\mathrm{M}},\ 0 \leqslant \mathrm{M} \leqslant \mathrm{N}. \end{cases}$$

Grâce à l'hypothèse (13.1) on voit que

$$2^{-j\frac{n}{2}} \quad \|\hat{\psi}_j \hat{a}_0\|_{L_2} \leqslant C\, 2^{-j\sigma}$$

$$2^{-j\frac{n}{2}} \quad \|D^N \hat{\psi}_j \hat{a}_0\|_{L_2} \leqslant C\, 2^{-j\sigma}.$$

Mais $\hat{\psi}_j \hat{a}_0 = 0$ pour $2^j \geqslant t$. D'où effectivement

$$\hat{a} \in (L_2, \dot{W}_2^N)_{\frac{n}{2}, 1} \quad = \dot{W}^{\frac{n}{2}, 1}$$

ainsi que l'inégalité désirée.

La démonstration est complète.

Faisons maintenant une analyse de la méthode précédente. Envisageons d'abord l'application bilinéaire

$$\hat{\mathcal{B}} : (\hat{a}, f) \to a * f.$$

On a :

$$\hat{\mathcal{B}} : |\xi|^{\sigma}\, \dot{W}_2^{\frac{n}{2}, 1} \quad \times \dot{H}_p^s \to \dot{H}_p^{s-\sigma}$$

$$\hat{\mathcal{B}} : |\xi|^{-\sigma}\, \dot{W}_2^{\frac{n}{2}, 1} \quad \times \dot{H}_p^s \to \dot{H}_p^{s+\sigma}.$$

D'où par interpolation

$$\hat{\mathcal{B}} : U \times \dot{H}_p^s \to (\dot{H}_p^{s-\sigma}, \dot{H}_p^{s+\sigma})_{\frac{1}{2}, \infty}$$

ou bien, d'après (13.2)

$$\hat{\mathcal{B}} : U \times \dot{H}_p^s \to \dot{W}_p^{s, \infty}$$

où l'on a posé

$$U = (|\xi|^{\sigma}\, \dot{W}_2^{\frac{n}{2}, 1}, \; |\xi|^{-\sigma}\, \dot{W}_2^{\frac{n}{2}, 1})_{\frac{1}{2}, \infty} \qquad (\sigma \text{ fixé}). \tag{13.3}$$

En utilisant ceci deux fois, avec σ fixé, mais avec des s différents, on obtient

$$\mathcal{B} : U \times (\dot{H}_p^{s_0}, \dot{H}_p^{s_1})_{\theta, q} \to (\dot{W}_{p_0}^{s_0, \infty}, \dot{W}_{p_1}^{s_1, \infty})_{\theta, q}$$

ou bien

$$\mathcal{B} : U \times \dot{W}_p^{s, q} \to \dot{W}_p^{s, q}.$$

Autrement dit, nous avons le

THÉORÈME 13.2. — *Tout* $\hat{a} \in \mathrm{U}$ (défini par (13.3)) *est un multiplicateur sur tout espace* $\dot{\mathrm{W}}_p^{s,q}$, $s > 0$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Envisageons ensuite l'application bilinéaire

$$\mathcal{B} : (a, f) \to a * f.$$

On a

$$\mathcal{B} : \dot{\mathrm{H}}_1^{-\sigma} \times \dot{\mathrm{H}}_p^s \to \dot{\mathrm{H}}_p^{s-\sigma}$$

$$\mathcal{B} : \dot{\mathrm{H}}_1^{\sigma} \times \dot{\mathrm{H}}_p^s \to \dot{\mathrm{H}}_p^{s+\sigma}$$

(Pour le moment nous prétendons qu'on a une théorie $\dot{\mathrm{H}}_p^s$ pour le cas s signe quelconque). D'où même

$$\mathcal{B} : \mathrm{V} \times \dot{\mathrm{W}}_p^{s,q} \to \dot{\mathrm{W}}_p^{s,q}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{V} = (\dot{\mathrm{H}}_1^{-\sigma}, \dot{\mathrm{H}}_1^{\sigma})_{\frac{1}{2}, \infty} \qquad (\sigma \text{ fixé}). \tag{13.4}$$

(On pourrait dire que $\mathrm{V} = \dot{\mathrm{W}}_1^{0,\infty}$!). Donc nous avons maintenant le

THÉORÈME 13.3. — *Tout* $a \in \mathrm{V}$ (défini par (13.4)) *est un « convoluteur » sur tout espace* $\dot{\mathrm{W}}_p^{s,q}$, $s > 0$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Exemple 13.1. — On a $a \in \mathrm{V}$ lorsque a admet une « décomposition de Cotlar » satisfaisant aux hypothèses envisagées au n° 3. Pour fixer les idées on prend $0 < \sigma < 1$. Donc on suppose que

$$a = \int_0^\infty u(x, t) \frac{dt}{t} \tag{13.5}$$

avec

$$\int u(x, t)\, dx = 0, \tag{13.6}$$

$$\int |x|^\sigma |u(x, t)|\, dx \leqslant \mathrm{C}\, t, \tag{13.7}$$

$$\int |u(x + h, t) - u(x, t)|\, dx \leqslant \mathrm{C}\, |h|^\sigma t^{-1}, \tag{13.8}$$

et on va montrer que

$$||u(t)||_{\dot{\mathrm{H}}_1^{-\sigma}} \leqslant \mathrm{C}\, t \tag{13.9}$$

$$||u(t)||_{\dot{\mathrm{H}}_1^{\sigma}} \leqslant \mathrm{C}\, t^{-1} \tag{13.10}$$

(De (13.9) et (13.10) résulte aussitôt $a \in \mathrm{V}$, en vertu de (13.5)). Mais (13.10) est identique à (13.7). Reste alors seulement (13.9). On notera que

$$||u(t)||_{\dot{\mathrm{H}}_1^{-\sigma}} = \int \left| \int \frac{u(t, y)}{|x-y|^{n-\sigma}} dy \right| dx.$$

Mais, grâce à (13.6),

$$\left| \int \frac{u(t, y)}{|x-y|^{n-\sigma}} dy \right| = \left| \int \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\sigma}} - \frac{1}{|x|^{n-\sigma}} \right) u(t, y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int \left| \frac{1}{|x-y|^{n-\sigma}} - \frac{1}{|x|^{n-\sigma}} \right| |u(t, y)|\, dy.$$

D'où

$$||u(t)||_{\dot{\mathrm{H}}_1^{-\sigma}} \leqslant \int \left(\int \left| \frac{1}{|x-y|^{n-\sigma}} - \frac{1}{|x|^{n-\sigma}} \right| dx \right) |u(t, y)|\, dy.$$

$$\leqslant \mathrm{C} \int |y|^{\sigma} |u(t, y)|\, dy$$

et, grâce à (13.7), découle (13.9). Si on le veut, on a ainsi une nouvelle démonstration du th. 3.2 (dans le cas particulier $0 < \sigma < 1$).

Pour tout ce numéro voir également Taibleson [39].

14. Encore sur la transformation de potentiel.

On va donner une démonstration alternative du th. 4.1 fondée sur la technique du numéro précédent.

Nous considérons encore l'application bilinéaire :

$$\hat{\mathcal{B}} : (\hat{a}, \mathrm{f}) \rightarrow a * f.$$

Alors on a, d'après l'inégalité de Young,

$$\hat{\mathcal{B}} : \mathrm{L}_2 \times \mathrm{L}_p \rightarrow \mathrm{L}_{p_1}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$$

et, d'après le théorème de Bernstein (cité dans la démonstration du th. 13.1),

$$\hat{\mathcal{B}} : \dot{\mathrm{W}}_2^{\frac{n}{2}, 1} \times \mathrm{L}_p \rightarrow \mathrm{L}_p.$$

D'où par interpolation comme d'habitude

$$\hat{\mathcal{B}} : \dot{W}_2^{s,\infty} \times L_p \to L_{q,\infty}$$

avec

$$s = \frac{n}{2}\theta, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1-\theta}{2}$$

ou, par élimination de θ,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{s}{n}.$$

D'où, de nouveau, par interpolation et vu le théorème de stabilité le

THÉORÈME 14.1. — *On a :*

$$\hat{\mathcal{B}} : \dot{W}_2^{s,\infty} \times L_p \to L_{q,p}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{n}\right), \quad 1 < p < \infty. \tag{14.1}$$

En particulier, on a :

$$\hat{\mathcal{B}} : \dot{W}_2^{s,\infty} \times L_p \to L_q. \tag{14.2}$$

Exemple 14.1. — On a :

$$\hat{a}(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \in \dot{W}_2^{s,\infty}, \quad s = \frac{n}{2} - \alpha$$

pourvu que $0 < \alpha < \frac{n}{2}$. D'où

$$\mathcal{I}_\alpha : L_p \to L_{q,p}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$$

avec la même restriction sur $\alpha : 0 < \alpha < \frac{n}{2}$, donc on n'a retrouvé que la moitié du th. 4.1. Mais ce n'est pas grave. En effet d'après une remarque de M. Friberg on peut sauver ce cas si l'on remplace $\dot{W}_2^{\frac{n}{2},1}$ par $\dot{W}_p^{\frac{n}{p},1}$, $1 < p < 2$. Nous laissons ces modifications au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. CALDERÓN et A. ZYGMUND, On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.*, 88 (1952), 85-139.

[2] S. CAMPANATO, Teoremi de interpolazione per transformazioni che applicano L^p in $C^{h,\alpha}$, *Ann. Scuola Norm. Sup.*, Pisa, 18 (1964), 345-360.

[3] S. CAMPANATO et M. K. V. MURTHY, Una generalizzazione del teorema di Riesz-Thorin., *Ann. Scuola Norm. Sup.*, Pisa, 19 (1965), 87-100.

[4] M. COTLAR, A combinatorial inequality and its applications to L^2 spaces, *Revista Mat. Cuyana,* 1 (1955), 41-55.

[5] M. COTLAR, A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems, *Revista Mat. Cuyana,* 1 (1955), 105-167.

[6] M. COTLAR, Condiciones de continuidad de operadores potentiales y de Hilbert, *Cursos y seminarios de matematica, Fascículo* 2, Universidade de Buenos Aires, 1959.

[7] M. COTLAR et R. PANZONE, Generalized potential operators, *Revista Un. Mat. Argentina,* 19 (1960), 3-41.

[8] E. GAGLIARDO, Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, *Ricerche Mat.*, 7 (1958), 102-137.

[9] P. GRISVARD, Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, *Thèse,* Paris (1965).

[10] G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD, Some properties of fractional integral. I, II, *Math. Z.*, 28 (1928), 565-606, 34 (1931), 403-439.

[11] L. HÖRMANDER, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, *Acta Math.,* 104 (1960), 93-140.

[12] J. L. LIONS, Théorèmes de trace et d'interpolation. I, II, *Ann. Scuola Norm. Sup.*, Pisa, 13 (1959), 389-403, 15 (1960), 317-331; III, *J. Math. Pures Appl.*, 42 (1963), 195-203; IV, *Math. Ann.*, 151 (1963), 42-56; V, *Acad. Brasil Ciensas,* 35 (1963), 1-10.

[13] J. L. LIONS, Sur les espaces d'interpolation; dualité, *Math. Scand.*, 9 (1961), 147-177.

[14] J. L. LIONS et J. PEETRE, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.,* 19 (1964), 5-68.

[15] S. G. MICHLIN, Sur les multiplicateurs des intégrales de Fourier, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 109 (1956), 701-203, (en russe).

[16] S. G. MICHLIN, Intégrales de Fourier et intégrales singulières multiples, *Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. Mech. Astr.*, 12 (1957), 143-155, (en russe).

[17] C. B. MORREY, Functions of several variables and absolute continuity, *Duke Math. J.*, 6 (1940), 187-215.

[18] S. M. Nikolskii, Sur les théorèmes de plongement, de prolongement et d'approximation des fonctions différentiables de plusieurs variables, *Uspechi Mat. Nauk SSSR*, 16, 5 (1961) 55-104, (en russe).

[19] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations, *Ann. Scuola Norm. Sup.*, Pisa, 13 (1959), 115-162.

[20] R. O'Neil, Convolution operators and L (p, q) spaces, *Duke Math. J.*, 30 (1963), 129-142.

[21] J. Peetre, Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 256 (1963), 54-55.

[22] J. Peetre, A theory of interpolation of normed spaces, *Cours*, Brasília (1963).

[23] J. Peetre, On the theory of interpolation spaces, *Revista Un. Mat. Argentina.*

[24] J. Peetre, Espaces d'interpolation, généralisations, applications, *Rend. Sem. Mat. Fis.*, Milano, 34 (1964), 133-161.

[25] J. Peetre, Etude de quelques méthodes d'interpolation. (manuscrit inédit).

[26] J. Peetre, Applications de la théorie des espaces d'interpolation dans l'analyse harmonique. (à paraître aux Ricerche Mit.).

[27] J. Peetre, Applications de la théorie des espaces d'interpolation aux développements orthogonaux. (à paraître)

[28] M. Riesz, Sur les fonctions conjuguées, *Math. Z.*, 27 (1927), 218-244.

[29] L. Schwartz, Théorie des distributions, Paris, 1950-51.

[30] E. Shamir, Mixed boundary value problems for elliptic equations in the plane. The L^p theory, *Ann. Scuola Norm. Sup.*, Pisa, 17 (1963), 117-139.

[31] E. Shamir, Reduced Hilbert transforms and singular integral equations, *J. Anal. Math.*, 12 (1964), 277-305.

[32] S. Soboleff, Sur un théorème d'analyse fonctionnelle, *Mat. Sbornik*, 4 (46) (1938), 471-497. (en russe).

[33] G. Stampacchia, $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$ spaces and interpolation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 17 (1964), 293-306.

[34] M. H. Taibleson, On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean *n*-space. I. Principal properties, *J. Math. Mech.*, 13 (1964), 407-419.

[35] C. O. Thorin, Convexity theorems, *Thèse*, Lund, 1948 (*Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.*, 9 (1948), 1-57).

[36] J. Peetre, On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant. (à paraître aux *Ann. Mat. Pura Appl.*).

[37] S. Spanne, Sur l'interpolation entre les espaces $\mathcal{L}_k^{p\Phi}$. (à paraître aux *Ann. Scuola Norm. Sup.*, Pisa).

[38] G. Stampacchia, The spaces $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation, *Ann. Scuola Norm. Sup.*, Pisa, 19 (1965), 443-462.

[39] M. H. TAIBLESON, On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclideau n-space. II. Translation invariant operators, duality, and interpolation, *J. Math. Mech.*, 14 (1965), 821-839.

[40] M. H. TAIBLESON, The preservation of Lipschitz spaces under singular integral operators. *Studia Math.*, 24 (1964), 107-111.

Manuscrit reçu le 27 *juillet* 1965.

JAAK PEETRE,
Institut de Mathématiques,
Sölvegatan, 18,
Lund (Suède)