ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Jean-Baptiste BUTRUILLE

Espace de twisteurs d'une variété presque hermitienne de dimension 6

Tome 57, nº 5 (2007), p. 1451-1485.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_5_1451_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
57, 5 (2007) 1451-1485

ESPACE DE TWISTEURS D'UNE VARIÉTÉ PRESQUE HERMITIENNE DE DIMENSION 6

par Jean-Baptiste BUTRUILLE

Résumé. — On s'intéresse à l'espace de twisteurs réduit d'une variété presque hermitienne, en relisant un article de N.R. O'Brian et J.H. Rawnsley (Ann. Global Anal. Geom., 1985). On traite la question laissée ouverte de la dimension 6. Cet espace est muni d'une structure presque complexe $\mathcal{J}$ en utilisant la distribution horizontale de la connexion hermitienne canonique. On montre qu'une condition nécessaire d'intégrabilité de $\mathcal{J}$ est que la variété soit de type $W_1 \oplus W_4$ dans la classification de Gray et Hervella. Dans la deuxième partie on montre alors que les seules variétés de type $W_1 \oplus W_4$ en dimension 6 sont les variétés localement conformément « nearly Kähler ». Finalement la structure presque complexe de l'espace de twisteurs réduit est intégrable si et seulement si la variété est localement conforme à la sphère S^6 ou à une variété kählérienne, Bochner-plate.

Abstract. — We consider the reduced twistor space Z of an almost Hermitian manifold M, after O'Brian and Rawnsley (Ann. Global Anal. Geom., 1985). We concentrate on dimension 6. This space has a natural almost complex structure $\mathcal{J}$ associated with the canonical Hermitian connection. A necessary condition for the integrability of $\mathcal{J}$ on Z is that the manifold belongs to the class $W_1 \oplus W_4$ of Gray, Hervella. In a second part, we then show that the almost Hermitian manifolds of type $W_1 \oplus W_4$ are all locally conformally nearly Kähler in dimension 6. Finally, $\mathcal{J}$ is integrable if and only if M is locally conformal to the sphere S^6 or to a Bochner-flat Kähler manifold.

Introduction

La théorie des twisteurs inventée par R. Penrose (voir l'article fondateur [23]) est un moyen d'utiliser les techniques efficaces de la géométrie holomorphe pour résoudre des problèmes de géométrie riemannienne ou pseudo-riemannienne.

Mots-clés : géométrie presque hermitienne, espaces de twisteurs, structures SU(3).
Classification math. : 53C15, 53C28, 53C10.

Soit M une variété de dimension paire $m = 2n$. On part d'une variété complexe Z, donnée avec une submersion à fibres complexes $\pi : Z \to M$. On associe à tout point j de Z un endomorphisme de carré -1 de $T_{\pi(j)}M$ (ou à toute section, une structure presque complexe de M) en transportant la multiplication par i de T_jZ par l'isomorphisme dépendant du point $(\pi_*)_j : T_jZ/\mathcal{V}_j \to T_{\pi(j)}M$, où $\mathcal{V}$ est la distribution verticale. Soit $\mathcal{Z}$ le fibré de M dont la fibre au-dessus de x est l'ensemble des endomorphismes de carré -1 de T_xM. On note $\pi_0 : \mathcal{Z} \to M$ la projection canonique. On a donc une application φ de Z dans $\mathcal{Z}$, préservant les fibres. D'autre part, il est connu que $\mathcal{Z}_x = \pi_0^{-1}(x)$ est isomorphe en tout point à l'espace symétrique hermitien $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et admet par conséquent une structure presque complexe naturelle intégrable. Alors on demande que φ soit injective et que pour tout $x \in M$ la restriction de φ à Z_x soit une injection holomorphe. Dans ce cas, Z est appelé un *espace de twisteurs complexe* de M.

Réciproquement, pour obtenir un espace de twisteurs complexe sur M, on prend Z une sous-variété de $\mathcal{Z}$ telle que la restriction de π_0 à Z est toujours une fibration et pour tout $x \in M$, Z_x est une sous-variété complexe de $\mathcal{Z}_x$. On construit une structure presque complexe $\mathcal{J}$ sur Z, en se servant d'une section de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{V} \longrightarrow TZ \longrightarrow TZ/\mathcal{V} \to 0$$

donnée d'habitude par une connexion sur M. Alors Z est un espace de twisteurs complexe, avec φ l'injection canonique, si et seulement si $\mathcal{J}$ est intégrable.

Le parfait exemple d'une telle situation est la fibration à fibres $\mathbb{C}P^1$ de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^3$ sur la sphère S^4 dont les vertus furent découvertes par Atiyah, Hitchin & Singer [1]. Les mêmes auteurs ont cherché une généralisation aux variétés riemanniennes de dimension 4, en posant *a priori* que Z est la sous-variété de $\mathcal{Z}$ constituée des structures presque complexes compatibles avec la métrique. Cela peut d'ailleurs être fait en dimension paire supérieure mais dès la dimension 6 la condition obtenue pour l'intégrabilité de $\mathcal{J}$ est que la variété soit conformément plate tandis qu'en dimension 4 elle a lieu pour toute la riche classe des variétés auto-duales, en raison d'une singularité de la décomposition en composantes irréductibles, en $m = 4$, de la représentation de $\mathrm{SO}(m)$ sur l'espace des tenseurs de courbure riemannienne abstraits.

O'Brian & Rawnsley [22] regardent, eux, des espaces de twisteurs associés à une G-structure et une G-connexion. Le cas originel correspond bien sûr à $G = \mathrm{SO}(m)$ et la connexion de Levi-Civita. Ils se sont particulièrement intéressés au cas où $G = \mathrm{U}(n)$. À leur suite, on considère une variété presque hermitienne (M, g, J_0). On demande que les sections de Z soient compatibles avec g et commutent avec J_0 et on a besoin pour construire $\mathcal{J}$ d'une connexion hermitienne $\widetilde{\nabla}$. Les conditions d'intégrabilité rappelées section 2 portent alors non seulement sur la courbure de $\widetilde{\nabla}$ mais sur sa torsion, qui n'est pas nulle en général. Par ailleurs on montre section 3 qu'on peut sans perte de généralité pour notre problème choisir la connexion hermitienne canonique $\overline{\nabla}$.

En dimension supérieure à 10, $\mathcal{J}$ est intégrable si et seulement si la variété est localement conforme à une variété kählérienne (LCK) dont le tenseur de Bochner est nul. Cette classe de variétés présente elle-même un grand intérêt. Leur étude difficile est abordée par exemple dans [4] (voir aussi [10]). On s'intéresse ici à la dimension 6. On montre que les conditions imposées à la torsion sont moins strictes en cette dimension puisque outre les variétés LCK, toutes les variétés de type $W_1 \oplus W_4$ dans la classification de Gray & Hervella [13] les satisfont. Parmi celles-ci on trouve en particulier les variétés strictement « nearly Kähler » (NK). Mais la forme de la courbure de ces dernières est si particulière en dimension 6 que les conditions imposées à celle-ci (proposition 2.3) ne laissent finalement que la sphère S^6.

Or on montre, section 5, que

Théorème 1. — *Les variétés presque hermitiennes de type $W_1 \oplus W_4$ en dimension 6 sont localement conformes à une variété NK.*

Ce théorème et la discussion précédente permettent de conclure, compte-tenu de l'invariance conforme de l'espace de twisteurs réduit et de sa structure presque complexe :

Théorème 2. — *Soient M une variété presque hermitienne de dimension 6, Z son espace de twisteurs réduit, $\mathcal{J}$ la structure presque complexe sur Z associée à la connexion hermitienne canonique : $\mathcal{J}$ est intégrable si et seulement si M est localement conforme à une variété kählérienne Bochner-plate ou à la sphère S^6 munie de sa structure NK.*

L'article est organisé en deux parties, correspondant aux deux théorèmes principaux 1 et 2, quasiment indépendantes. La résolution complète du problème soulevé dans la première partie a motivé l'écriture de la seconde partie.

La méthode utilisée à la section 5 s'inspire de l'étude des variétés NK de dimension 6. A. Gray [12] a montré que celles-ci sont soit kählériennes, soit *strictement* NK (SNK). Dans le dernier cas elles admettent une réduction naturelle à SU(3). C'est de tenir toujours un meilleur compte de cette structure SU(3) que sont venus les derniers résultats les concernant. D'abord Reyes Carrión [24] a montré que la connexion hermitienne canonique était en fait une connexion SU(3). Puis il a découvert, ce que Hitchin a rendu explicite dans [17], que toute l'information pour la structure SU(3), y compris la métrique et la structure presque complexe, est comprise dans la donnée de deux formes : la forme de Kähler ω et la forme volume complexe Ψ (ou dans ce cas la différentielle de la forme de Kähler $\mathrm{d}\omega$), ce qui permet de caractériser les variétés SNK en dimension 6 par une équation différentielle simple portant sur la structure SU(3).

Ici on s'intéresse à d'autres variétés presque hermitiennes de dimension 6 qu'on appelle *spéciales* c'est-à-dire à d'autres structures U(3) qui induisent une structure SU(3) sur la variété par l'intermédiaire de $\mathrm{d}\omega$. Salamon & Chiossi [8], prolongeant le travail de Gray & Hervella ont classifié les variétés SU(3) en considérant la torsion intrinsèque. Celle-ci est donnée par la décomposition en types de $\mathrm{d}\omega$, $\mathrm{d}\Psi$. Les variétés $W_1 \oplus W_4$ sont alors caractérisées par deux équations différentielles portant notamment sur la forme de Lee θ et on peut montrer que celle-ci est fermée, c'est-à-dire représente localement (par le lemme de Poincaré) un changement conforme de métrique par lequel la variété est issue d'une variété NK.

Section 6, vue l'invariance conforme de la définition de l'espace de twisteurs, réduit ou non, on reformule les résultats de la section 5 en considérant des variétés presque hermitiennes *conformes*. On laisse ouverte la question de savoir si un théorème tel que 1 a lieu en toute dimension et pour d'autres classes de variétés presque hermitiennes, stables par transformation conforme. Cette question est liée à l'existence des variétés de type G_1, G_2 de Hervella & Vidal [14]. On donne seulement, section 7, un résultat d'existence locale de variétés de type $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ de dimension 6 non localement conformes à des variétés de type $W_1 \oplus W_2$.

1. Préliminaires

On souhaite donner ici quelques définitions générales et quelques résultats simples ou classiques sur les variétés presque hermitiennes. D'abord fixons quelques notations.

Soient M une variété de dimension m et $\mathrm{GL}(M)$ le fibré principal sur M de groupe $\mathrm{GL}(m)$ (le fibré des repères). Les représentations de $\mathrm{GL}(m)$ fournissent des fibrés associés de $\mathrm{GL}(M)$, les fibrés de tenseurs de M, parmi lesquels TM, le fibré tangent ou les fibrés extérieurs $\mathbf{\Lambda}^p$.

Maintenant, si M est une variété riemannienne orientée, on a une première réduction de $\mathrm{GL}(M)$ à $\mathrm{SO}(m)$: soit $\mathrm{SO}(M)$ le fibré des repères orthonormés directs de M. On note $\mathfrak{so}(M)$ son fibré adjoint, c'est-à-dire le fibré des endomorphismes antisymétriques de TM. Plus généralement, soient G un groupe de Lie, $G \subset \mathrm{SO}(m)$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{so}(m)$. On suppose que M admet une réduction à G, c'est-à-dire qu'il existe un sous-fibré principal $G(M)$ de groupe G de $\mathrm{SO}(M)$. Alors on note $\mathfrak{g}(M)$ le fibré adjoint de $G(M)$. De même $\mathfrak{g}^{\perp}(M)$ désignera le fibré associé à la représentation $\mathfrak{g}^{\perp}$ de G.

Dans cet article on considère des variétés presque hermitiennes. Une telle variété est définie en dimension paire $m = 2n$ par une réduction du fibré des repères à $\mathrm{U}(n)$, notée $\mathrm{U}(M)$, ou autrement par une métrique g et une structure presque complexe J, orthogonale,

$$\forall X, Y \in TM, \quad g(JX, JY) = g(X, Y),$$

définissant une 2-forme ω, appelée *forme de Kähler* :

$$\forall X, Y \in TM, \quad \omega(X, Y) = g(JX, Y).$$

Soit $T^{1,0} \subset T^{\mathbb{C}}M$ le sous-fibré des vecteurs complexes de type $(1,0)$ par rapport à J. De même, soit $T^{0,1}$ le fibré des vecteurs de type (0,1). Autrement dit, quel que soit $x \in M$, $T_x^{1,0}$ (resp. $T_x^{0,1}$) est le sous-espace propre (complexe) de J_x pour la valeur propre i (resp. $-i$). Le tenseur de Nijenhuis N mesure l'intégrabilité de la structure presque complexe J ou de la distribution $T^{1,0}$. Il est défini, en vertu du théorème de Frobenius, par

$$\forall X, Y \in TM, \quad N(X, Y) + iJN(X, Y) = [X^{1,0}, Y^{1,0}]^{0,1}, \tag{1.1}$$

où pour tout $X \in T^{\mathbb{C}}M$,

$$X^{1,0} = \tfrac{1}{2}(X - iJX) \quad \text{et} \quad X^{0,1} = \tfrac{1}{2}(X + iJX)$$

désignent les projections de X sur $T^{1,0}$, $T^{0,1}$, respectivement. Soit donc (M, g, J) une variété presque hermitienne. Le fibré $\mathfrak{u}(M)$ (resp. $\mathfrak{u}(M)^{\perp}$) est le fibré des endomorphismes antisymétriques de TM qui commutent (resp. anticommutent) à J.

On rappelle aussi que pour tout fibré principal P il existe une action naturelle du fibré intérieur sur les fibrés associés. En particulier — si P est un sous-fibré de $\mathrm{GL}(M)$ — sur les fibrés de tenseurs. Il existe aussi une action dérivée du fibré adjoint. On note Φs (resp. $A \cdot s$) l'action d'un automorphisme vertical Φ de P (resp. d'une section A du fibré adjoint) sur un champ de tenseurs s. On souhaite expliciter cette action dans le cas où s

est un tenseur de type $(2,1)$: quels que soient $X, Y, Z \in TM$,

$$\Phi s(X,Y) = \Phi\big(s(\Phi^{-1}X, \Phi^{-1}Y)\big),$$
$$A \cdot s(X,Y) = As(X,Y) - s(AX,Y) - s(X,AY).$$

Or la structure presque complexe J peut être vue alternativement comme un endomorphisme orthogonal de TM ou comme un endomorphisme antisymétrique, c'est-à-dire une section du fibré adjoint $\mathfrak{so}(M)$. Par conséquent, elle peut agir de ces deux façons et puisque $J^2 = -\operatorname{Id}$,

$$Js(X,Y,Z) = J\big(s(JX,JY)\big).$$

Les représentations d'un groupe, ici $\mathrm{U}(n)$, interviennent dans la construction des fibrés associés. On utilise la notation de Salamon [25]. Soit V un espace de représentation complexe. On dit que V est de *type complexe* si V n'est pas isomorphe à son conjugué $\overline{V}$. Alors $[\![V]\!]$ désigne simplement l'espace vectoriel (ou l'espace de représentation) réel sous-jacent. Au contraire V est dit de *type réel* s'il admet une structure réelle, soit un endomorphisme de carré 1 anticommutant à i. En particulier $V \simeq \overline{V}$. Alors on note $[V]$ le sous-espace propre de cet endomorphisme pour la valeur 1. Il s'agit d'un espace vectoriel réel qui admet V comme complexification : $V \simeq [V] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Selon les cas, on a donc $\dim_{\mathbb{R}}[\![V]\!] = 2\dim_{\mathbb{C}} V$ ou $\dim_{\mathbb{R}}[V] = \dim_{\mathbb{C}} V$. De plus on note $[\![\mathbf{V}]\!]$ ou $[\mathbf{V}]$ le fibré associé de $\mathrm{U}(M)$ correspondant.

L'exemple fondamental pour nous est l'espace des formes de type (p,q). On sait que l'intersection de cet espace $\lambda^{p,q}$ avec les r-formes réelles $(r = p+q)$ est nulle si $p \neq q$. En revanche $\lambda^{p,q} \oplus \lambda^{q,p}$ est la complexification de $[\![\lambda^{p,q}]\!]$, l'espace des formes *réelles* de type $(p,q)+(q,p)$. De l'autre côté si $p = q$ on a directement que $\lambda^{p,p}$ est la complexification de $[\lambda^{p,p}]$.

Pour une variété riemannienne, la métrique fournit un isomorphisme $\mathrm{SO}(m)$-invariant des deux fibrés $\mathfrak{so}(M)$ et $\mathbf{\Lambda}^2$. Pour une variété presque hermitienne (M,g,J) on a en outre les isomorphismes $\mathrm{U}(n)$-invariants :

$$\mathfrak{u}(M) \simeq [\boldsymbol{\lambda}^{1,1}] \quad \text{et} \quad \mathfrak{u}(M)^{\perp} \simeq [\![\boldsymbol{\lambda}^{2,0}]\!].$$

Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de g. Gray & Hervella [13] regardent la dérivée covariante de la forme de Kähler $\nabla\omega$. C'est une section de $\mathbf{\Lambda}^1 \otimes [\![\boldsymbol{\lambda}^{2,0}]\!]$. En effet, $J^2 = -\operatorname{Id}$ implique

$$(\nabla_X J)J + J(\nabla_X J) = 0. \tag{1.2}$$

Donc ∇J est une section de $\mathbf{\Lambda}^1 \otimes \mathfrak{u}(M)^{\perp}$. On peut voir ce tenseur comme le défaut pour M d'être kählérienne. En vue de classifier les variétés presque hermitiennes Gray et Hervella décomposent $\Lambda^1 \otimes [\![\lambda^{2,0}]\!]$ sous l'action de $\mathrm{U}(n)$:

$$\Lambda^1 \otimes [\![\lambda^{2,0}]\!] = [\![\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{2,0}]\!] \oplus [\![\lambda^{0,1} \otimes \lambda^{2,0}]\!] = [\![\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{2,0}]\!] \oplus [\![\lambda^{2,1}]\!].$$

Il existe un sous-espace U^1, $\mathrm{U}(n)$-invariant tel que

$$\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{2,0} \simeq \lambda^{3,0} \oplus U^1.$$

Alors

$$\Lambda^1 \otimes [\![\lambda^{2,0}]\!] \simeq [\![\lambda^{3,0}]\!] \oplus [\![U^1]\!] \oplus [\![\lambda_0^{2,1}]\!] \oplus \Lambda^1 \tag{1.3}$$

est la décomposition en composantes irréductibles de la représentation de $\mathrm{U}(n)$ en dimension supérieure ou égale à 6. Pour une démonstration, on se reportera à [13] en identifiant, avec les notations des auteurs

$$W_1 \simeq [\![\lambda^{3,0}]\!], \quad W_2 \simeq [\![U^1]\!], \quad W_3 \simeq [\![\lambda_0^{2,1}]\!] \quad \text{et} \quad W_4 \simeq \Lambda^1.$$

En dimension 4, W_1, W_3 sont réduits à $\{0\}$. La même décomposition est calculée par Falcitelli, Farinola & Salamon [11] en se servant de l'algorithme de décomposition des produits tensoriels exposé au chapitre 6 de [25] (figure 6.5). C'est également la procédure suivie dans cet article pour obtenir les décompositions données sans démonstration à la section 4 (la preuve complète est développée au chapitre 2, section 3 de [7]).

Au lieu de demander que la première dérivée de ω satisfasse certaines conditions, on demandera, dans ce langage, que $\nabla\omega$ prenne ses valeurs dans certains sous-espaces invariants définis par (1.3) :

Définition 1.1. — *Soit $I \subset \{1,2,3,4\}$. On appelle variété de type $\bigoplus_{i\in I} W_i$, une variété presque hermitienne (M,g,J) telle que la dérivée covariante pour la connexion de Levi-Civita de la forme de Kähler $\nabla\omega$ est une section du fibré*

$$\bigoplus_{i\in I} \mathbf{W}_i \subset \mathbf{\Lambda}^1 \otimes [\![\boldsymbol{\lambda}^{2,0}]\!].$$

De plus, on appelle classe $\bigoplus_{i\in I} W_i$ l'ensemble de ces variétés.

Pour information et pour exemple, la classe $W_3 \oplus W_4$ est la classe des variétés hermitiennes et W_2 est la classe des variétés symplectiques. Comme on voit, l'intersection de ces deux classes est formée de variétés vérifiant $\nabla\omega = 0$, ce qui correspond à la définition alternative des variétés kählériennes : la différentielle de la forme de Kähler et le tenseur de Nijenhuis sont nuls en même temps. On verra section 5 une interprétation utile des composantes de $\nabla\omega$ en fonction de N, $\mathrm{d}\omega$ (voir figure 5.1).

On définit la connexion hermitienne canonique $\overline{\nabla}$ par

$$\overline{\nabla}_X = \nabla_X - \tfrac{1}{2} J(\nabla_X J). \tag{1.4}$$

On vérifie que $\overline{\nabla} J = 0$. En outre quel que soit $X \in TM$,

$$\bar{\delta}_X = \nabla_X - \overline{\nabla}_X = \tfrac{1}{2} J(\nabla_X J) \tag{1.5}$$

anticommute à J à cause de (1.2). La connexion $\overline{\nabla}$ est en fait l'unique connexion hermitienne ayant cette propriété. En effet si $\widetilde{\nabla}$ est une autre connexion hermitienne, $\overline{\nabla}_X - \widetilde{\nabla}_X$ commute à J quel que soit $X \in TM$. On peut donc toujours décomposer

$$\begin{array}{ccccc} \nabla - \widetilde{\nabla} & = & (\nabla - \overline{\nabla}) & + & (\overline{\nabla} - \widetilde{\nabla}), \\ \mathbf{\Lambda}^1 \otimes \mathfrak{so}(M) & = & \mathbf{\Lambda}^1 \otimes \mathfrak{u}(M)^{\perp} & \oplus & \mathbf{\Lambda}^1 \otimes \mathfrak{u}(M). \end{array} \tag{1.6}$$

Cette propriété caractérise la *connexion intrinsèque* de la structure $\mathrm{U}(n)$, définie pour toute G-structure, $G \subset \mathrm{SO}(m)$. Le tenseur $\bar{\delta} = \nabla - \overline{\nabla}$ est appelé (par abus de langage) *torsion intrinsèque* de la structure $\mathrm{U}(n)$. En effet, pour une connexion métrique $\widetilde{\nabla}$, l'application qui à $\widetilde{\delta} = \nabla - \widetilde{\nabla}$ associe la torsion

$$T(X,Y) = \widetilde{\delta}_X Y - \widetilde{\delta}_Y X$$

est un isomorphisme. Maintenant, $\bar{\delta}$ est envoyé sur $\nabla\omega$ par un isomorphisme $\mathrm{U}(n)$-invariant. On peut donc aussi regarder les composantes de ce tenseur dans la décomposition (1.3). Par là, la décomposition de Gray-Hervella peut être généralisée à toute G-structure. Les articles [8], [20] seront cités dans la suite pour le cas $G = \mathrm{SU}(n)$ (le premier seulement pour $G = \mathrm{SU}(3)$). On mentionne également sur ce sujet l'article antérieur [3] de Bor & Hernández Lamoneda.

PREMIÈRE PARTIE

2. L'espace de twisteurs réduit et sa structure presque complexe

Soit $\mathrm{Z}(n)$ l'ensemble des endomorphismes unitaires de carré -1 de $\mathbb{C}^n$. Un élément J de $\mathrm{Z}(n)$ a l'inverse $J^{-1} = {}^t\bar{J}$ mais aussi, puisque $J^2 = -1$, $J^{-1} = -J$ d'où $J + {}^t\bar{J} = 0$. Par cette remarque, $\mathrm{Z}(n)$ est l'intersection $\mathrm{U}(n) \cap \mathfrak{u}(n)$ du groupe unitaire et de son algèbre de Lie. La donnée d'un tel endomorphisme diagonalisable est équivalente à la donnée d'un couple $(F, F^{\perp})$ de sous-espaces complexes orthogonaux, les sous-espaces propres de J pour les valeurs propres i et $-i$. En classant suivant la dimension p de F, on voit que $\mathrm{Z}(n)$ a plusieurs composantes connexes, chacune isomorphe à une Grassmanienne complexe $\mathcal{G}_p(\mathbb{C}^n)$. Le groupe $\mathrm{U}(n)$ agit transitivement par

$$(g, J) \longmapsto gJg^{-1}$$

sur chaque composante connexe qui s'identifie ainsi à l'espace homogène $\mathrm{U}(n)/\,\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(n-p)$. En particulier la composante correspondant à $p = 1$ est isomorphe à $\mathbb{C}P^{n-1}$. En revanche, on élimine les composantes singulières correspondant à la multiplication par i et $-i$ de $\mathbb{C}^n$. De plus $\mathrm{Z}(n)$ est muni d'une structure presque complexe canonique $\mathrm{U}(n)$-invariante notée $\mathcal{J}_n$, donnée par la multiplication à gauche par J sur chaque espace tangent $T_J\,\mathrm{Z}(n)$, identifié à l'ensemble des endomorphismes de $\mathfrak{u}(n)$ qui anticommutent à J (cf. [22]).

Définition 2.1. — *Soit* (M, g, J_0) *une variété presque hermitienne de dimension* $m = 2n$ (NB : *par économie de notation, on appelle* J_0, *dans cette partie, la structure presque complexe de la variété*). *L'espace de twisteurs réduit* Z *de* M *est le fibré associé du fibré principal* $\mathrm{U}(M)$ *pour l'action de* $\mathrm{U}(n)$ *sur* $\mathrm{Z}(n)$.

Cette définition prend place dans un cadre très général. Il s'agit d'un cas particulier d'une construction naturelle d'espaces de twisteurs sur des G-variétés utilisée dans [2], [22] (voir aussi [5] pour le cas des espaces symétriques).

Le sous-fibré vertical $\mathcal{V}$ (tangent aux fibres) est muni d'un endomorphisme $\mathcal{J}^v$ de carré -1 copié sur $\mathcal{J}_n$.

On adopte les notations suivantes :

- j désigne toujours un point de Z,
- $\pi : Z \to M$ est la projection canonique et $x = \pi(j)$.

Bien sûr on peut voir j comme un endomorphisme de carré -1 de T_xM, commutant avec $(J_0)_x$ et compatible avec g_x. Alors $\mathcal{J}^v_j$ est la multiplication à gauche par j dans $\mathcal{V}_j$. D'un autre côté, on notera par une majuscule J une section de Z, globale ou locale, c'est-à-dire une structure presque complexe sur M ou un ouvert de M.

Toute connexion sur $\mathrm{U}(M)$, c'est-à-dire toute connexion hermitienne $\widetilde{\nabla}$ définit une connexion sur Z. On note $\widetilde{\mathcal{H}} \subset TZ$ la distribution horizontale correspondante. Elle permet de compléter $\mathcal{J}^v$ en une structure presque complexe $\mathcal{J}$ sur Z en demandant que la restriction de $\mathcal{J}$ à $\widetilde{\mathcal{H}}_j$, pour tout $j \in Z$, soit le relevé de j lui-même, vu comme structure presque complexe sur T_xM.

Maintenant si on utilise une autre connexion $\widehat{\nabla}$, on obtient une structure presque complexe *a priori* différente $\mathcal{J}'$. Pour tout $X \in TM$, on note

$$\eta_X = \widetilde{\nabla}_X - \widehat{\nabla}_X.$$

PROPOSITION 2.2. — *Deux connexions hermitiennes définissent la même structure presque complexe sur l'espace de twisteurs réduit Z si et seulement si leur différence vérifie*

$$[\eta_{JX}, J] = J[\eta_X, J] \tag{2.1}$$

pour tout vecteur X et toute section J de Z, c'est-à-dire toute structure presque complexe sur M commutant avec J_0.

Démonstration. — Soit U un vecteur tangent à Z en j. On appelle $X = \pi_*(U)$ sa projection sur T_xM. Alors il existe une section locale J de Z telle que $J_x = j$, $J_*(X) = U$. Par définition de la dérivée covariante

$$U = J_*(X) = \widetilde{\nabla}_X J + \widetilde{X}$$

où $\widetilde{X}$ désigne le relevé horizontal de X dans $\widetilde{\mathcal{H}}_j$. Cette décomposition est en outre la décomposition de U en sa partie verticale et sa partie horizontale, qui sert à calculer $\mathcal{J}U$. Mais de même $U = \widehat{\nabla}_X J + \widehat{X}$ où $\widehat{X}$ est le relevé de X dans $\widehat{\mathcal{H}}$, l'espace horizontal associé à $\widehat{\nabla}$. D'où on déduit premièrement que

$$\widehat{X} = \widetilde{X} + \widetilde{\nabla}_X J - \widehat{\nabla}_X J = \widetilde{X} + [\eta_X, J],$$

puis

$$\mathcal{J}U = \mathcal{J}^v(\widetilde{\nabla}_X J) + \widetilde{JX}, \quad \mathcal{J}'U = \mathcal{J}^v(\widehat{\nabla}_X J) + \widehat{JX}.$$

On trouve que deux connexions $\widetilde{\nabla}$ et $\widehat{\nabla}$ définissent la même structure presque complexe si et seulement si leur différence vérifie

$$[\eta_{JX}, J] = \mathcal{J}^v[\eta_X, J].$$

Ce n'est rien d'autre que (2.1), par définition de $\mathcal{J}^v$. □

On peut réécrire (2.1) sous une autre forme. Pour cela, on complexifie l'espace tangent et tous ses espaces de tenseurs et on étend η à $T^{\mathbb{C}}M$ par $\mathbb{C}$-linéarité. Comme on l'a vu dans les préliminaires, chaque vecteur $X \in T^{\mathbb{C}}M$ peut être décomposé suivant les sous-espaces propres $T^{1,0}$, $T^{0,1}$ de J_0 en chaque point : $X = X^{1,0} + X^{0,1}$. Il peut aussi être décomposé suivant les sous-espaces propres de J. Soit, dans cette partie,

$$X_J^{1,0} = \tfrac{1}{2}(X - iJX),$$

la projection de X sur $T_J^{1,0}$, le sous-fibré des vecteurs de type (1,0) *par rapport à* J. De même, on note

$$X_J^{0,1} = \tfrac{1}{2}(X + iJX)$$

la projection sur $T_J^{0,1}$. La condition donnée à la proposition 2.2 peut alors être remplacée par

$$(\eta_{X_J^{1,0}} Y_J^{1,0})_J^{0,1} = 0 \tag{2.2}$$

Cette dernière équation est elle-même équivalente à

$$(\eta_{X_J^{0,1}} Y_J^{0,1})_J^{1,0} = 0$$

car η est un tenseur réel.

Une question naturelle maintenant est l'intégrabilité de $\mathcal{J}$, en fixant une connexion, ou une classe d'équivalence de connexions définie par (2.2). Bérard Bergery & Ochiai [2] ou O'Brian & Rawnsley [22] ont donné la réponse sous la forme d'équations portant sur la torsion T et la courbure $\widetilde{R}$ de $\widetilde{\nabla}$.

Proposition 2.3 (Bérard Bergery & Ochiai). — *La structure presque complexe $\mathcal{J}$ de l'espace de twisteurs réduit Z associée à la connexion hermitienne $\widetilde{\nabla}$ est intégrable si et seulement si*

$$T(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0})_J^{0,1} = 0 \tag{2.3}$$

et

$$(\widetilde{R}_{X_J^{1,0}, Y_J^{1,0}} Z_J^{1,0})_J^{0,1} = 0, \tag{2.4}$$

pour tous vecteurs $X, Y, Z \in T^{\mathbb{C}}M$ et toute structure presque complexe J commutant avec J_0.

Remarque. — À noter la ressemblance entre (2.2) ou (2.3) et (1.1). En effet (2.3) correspond à l'annulation de la partie horizontale du tenseur de Nijenhuis $\mathcal{N}$ de $\mathcal{J}$. Quant à (2.4) elle est liée à sa partie verticale. En effet, si U, V sont deux champs de vecteurs tangents à Z, la projection sur $\mathcal{V}$ du crochet $[U, V]$ au point j ne dépend que de U_j, V_j et vaut $[\widetilde{R}_{X,Y}, j]$, où $X = \pi_*(U)$ et $Y = \pi_*(V)$.

3. Résolution des équations portant sur la torsion

On s'attache premièrement à résoudre l'équation portant sur la torsion, c'est-à-dire qu'on cherche des conditions *nécessaires* pour que, une connexion hermitienne $\widetilde{\nabla}$ étant fixée, la structure presque complexe associée $\mathcal{J}$ soit intégrable.

On a vu que J agit en tant que section du fibré adjoint $\mathfrak{so}(M)$ sur les espaces de tenseurs, en particulier sur l'espace des tenseurs de type torsion par

$$J.T(X,Y) = JT(X,Y) - T(JX,Y) - T(X,JY).$$

Comme J est diagonalisable, avec les valeurs propres i et $-i$ sur TM, il l'est encore sur $\mathbf{\Lambda}^2 \otimes TM$ avec les valeurs propres $3i = i+i+i$, $-3i$, $i = i+i-i$ et $-i$. Soit T un vecteur propre pour la valeur propre $-3i$.

$$JT(X,Y) - T(JX,Y) - T(X,JY) = -3iT(X,Y).$$

On voit que $JT(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0}) = -iT(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0})$, c'est-à-dire $T(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0}) \in T_J^{0,1}$. De même on peut montrer que $T(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0}) \in T_J^{1,0}$, si T est un vecteur propre pour la valeur propre $-i$, et $T(X_J^{1,0}, Y_J^{1,0}) = 0$ si T est un vecteur propre pour les valeurs propres $3i$ ou i. Par conséquent, pour un tenseur quelconque T, (2.3) est équivalente à l'annulation de la composante de T suivant le sous-espace propre de J associé à $-3i$. De même, l'équation conjuguée,

$$T(X_J^{0,1}, Y_J^{0,1})_J^{1,0} = 0 \tag{3.1}$$

correspond à l'annulation de la composante dans le sous-espace propre pour la valeur propre $3i$. Finalement (2.3) et (3.1) sont les équations de la somme directe des sous-espaces propres pour les valeurs propres i et $-i$.

Maintenant, pour que la partie horizontale de $\mathcal{N}$ soit nulle, par la proposition 2.3, T doit vérifier ces équations quel que soit J commutant avec J_0 (pour un tenseur réel en effet, l'une de ces équations implique immédiatement l'autre). Appelons $\mathcal{T}$ l'espace des tenseurs de type torsion qui le vérifient. Il est $\mathrm{U}(n)$-invariant. En effet, J n'est pas en général invariant par un élément $g \in \mathrm{U}(n)$ mais envoyé par lui sur une autre structure presque complexe gJg^{-1} commutant avec J_0. C'est pourquoi, pour calculer $\mathcal{T}$, on décompose l'espace des tenseurs de type torsion en chaque point en composantes irréductibles de la représentation de $\mathrm{U}(n)$ puis on fixe une structure presque complexe J commutant avec J_0. Si une composante W a une intersection non nulle avec les sous-espaces propres de J correspondant aux valeurs propres $3i$ ou $-3i$, elle n'apparaît pas dans la décomposition de $\mathcal{T}$. Dans le cas contraire, si J n'a que les valeurs propres i et $-i$ sur W, par invariance, c'est aussi le cas de toutes les autres structures presque complexes obtenues à partir de J par conjugaison avec un certain $g \in \mathrm{U}(n)$, c'est-à-dire appartenant à la même composante connexe de l'espace de twisteurs Z. Pour obtenir une condition d'intégrabilité de $\mathcal{J}$, il suffit par conséquent de considérer une section J par composante connexe. Autrement, on peut chercher des conditions d'intégrabilité *partielle*, en se restreignant à une sous-variété connexe de Z. Les conditions obtenues sont *a priori* différentes pour des composantes connexes distinctes, comme on va montrer que c'est le cas en dimension 8.

Comme on a vu dans les préliminaires, il revient au même de travailler avec T ou $\widetilde{\delta} = \nabla - \widetilde{\nabla}$. On choisit le second. C'est une section de

$$\boldsymbol{\Lambda}^1 \otimes \mathfrak{so}(M) \simeq \boldsymbol{\Lambda}^1 \otimes \boldsymbol{\Lambda}^2.$$

Décomposons cet espace sous l'action de $\mathrm{U}(n)$.

$$\Lambda^1 \otimes \Lambda^2 = \big(\Lambda^1 \otimes [\![\lambda^{2,0}]\!]\big) \oplus \big(\Lambda^1 \otimes [\lambda^{1,1}]\big).$$

Le premier sous-espace se décompose comme en (1.3) ; quant au second, il existe un sous-espace $\mathrm{U}(n)$-invariant U^2 tel que

$$\lambda^{1,0} \otimes \lambda^{1,1} \simeq \lambda^{2,1} \oplus U^2.$$

Alors, en notant U_0^2 la composante primitive de U^2, on obtient la décomposition en composantes irréductibles

$$\Lambda^1 \otimes [\lambda^{1,1}] \simeq 2\Lambda^1 \oplus [\![\lambda_0^{2,1}]\!] \oplus [\![U_0^2]\!].$$

Proposition 3.1. — *Si M est de dimension supérieure à* 10, $\mathcal{T} \simeq 3\boldsymbol{\Lambda}^1$. *Si M est de dimension* 6, $\mathcal{T} \simeq 3\boldsymbol{\Lambda}^1 \oplus [\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!]$.

Démonstration. — Soit J un endomorphisme de carré -1 commutant avec J_0. On diagonalise simultanément J et J_0 en chaque point. Soient F le sous-fibré de $T^{\mathbb{C}}M$ où J coïncide avec J_0, G le sous-fibré sur lequel il vaut $-J_0$. On a $F \oplus G = T^{\mathbb{C}}M$ et même

$$\boldsymbol{\lambda}^{1,0} = \boldsymbol{\lambda}^{1,0}F \oplus \boldsymbol{\lambda}^{1,0}G, \quad \boldsymbol{\lambda}^{0,1} = \boldsymbol{\lambda}^{0,1}F \oplus \boldsymbol{\lambda}^{0,1}G$$

où $\boldsymbol{\lambda}^{1,0}F$ est l'ensemble des formes de type $(1,0)$ qui s'annulent sur G, etc. Une autre façon de le dire est

$$\boldsymbol{\lambda}^{1,0}F = \boldsymbol{\lambda}^{1,0} \cap \boldsymbol{\ell}^{1,0},$$

où $\boldsymbol{\ell}^{1,0}$ est l'espace des 1-formes de type $(1,0)$ *par rapport à* J, $\boldsymbol{\lambda}^{1,0}G = \boldsymbol{\lambda}^{1,0} \cap \boldsymbol{\ell}^{0,1}$, etc. On a donc aussi

$$\boldsymbol{\ell}^{1,0} = \boldsymbol{\ell}^{1,0}F \oplus \boldsymbol{\ell}^{1,0}G = \boldsymbol{\lambda}^{1,0}F \oplus \boldsymbol{\lambda}^{0,1}G$$

où $\boldsymbol{\ell}^{1,0}F$ est comme on s'y attend l'ensemble des formes de type (1,0) *par rapport à* J qui s'annulent sur G, etc.

Par la discussion précédente, les composantes de $\mathcal{T}$ sont celles qui ne rencontrent pas $\bigotimes^3 \boldsymbol{\ell}^{1,0}$ ni $\bigotimes^3 \boldsymbol{\ell}^{0,1}$.

$$\bigotimes^3 \boldsymbol{\ell}^{1,0} = \bigotimes^3 \boldsymbol{\lambda}^{1,0} F \oplus \left(\bigotimes^2 \boldsymbol{\lambda}^{1,0} F \otimes \boldsymbol{\lambda}^{0,1} G\right) \oplus \left(\boldsymbol{\lambda}^{1,0} F \otimes \bigotimes^2 \boldsymbol{\lambda}^{0,1} G\right) \oplus \bigotimes^3 \boldsymbol{\lambda}^{0,1} G.$$

Examinons premièrement l'intersection de chaque terme avec $\boldsymbol{\lambda}^1 \otimes \boldsymbol{\lambda}^{2,0}$.

Le premier, $\bigotimes^3 \boldsymbol{\lambda}^{1,0} F$, a une intersection non réduite à $\{0\}$ avec $\boldsymbol{\lambda}^{3,0}$: $\boldsymbol{\lambda}^{3,0} F$. Il a aussi une intersection non nulle avec $\mathbf{U}^1$ qu'on peut noter $\mathbf{U}^1 F$.

Le deuxième, $\bigotimes^2 \boldsymbol{\lambda}^{1,0} F \otimes \boldsymbol{\lambda}^{0,1} G$, a une intersection non nulle avec $\boldsymbol{\lambda}_0^{2,1}$: $\boldsymbol{\lambda}^{2,0} F \otimes \boldsymbol{\lambda}^{0,1} G$. (Il est à noter que, comme F et G sont J-stables, orthogonaux, $\boldsymbol{\lambda}^{2,0} F \otimes \boldsymbol{\lambda}^{0,1} G$ a une intersection nulle avec $\boldsymbol{\lambda}^{1,0}$. En effet, celui-ci est obtenu dans $\boldsymbol{\lambda}^{2,1}$ en faisant le produit extérieur avec $\omega \in \boldsymbol{\lambda}^{1,1} F \oplus \boldsymbol{\lambda}^{1,1} G$.)

Enfin les deux derniers sous-espaces $\boldsymbol{\lambda}^{1,0} F \otimes \bigotimes^2 \boldsymbol{\lambda}^{0,1} G$ et $\bigotimes^3 \boldsymbol{\lambda}^{0,1} G$ ont une intersection nulle avec $\boldsymbol{\lambda}^1 \otimes \boldsymbol{\lambda}^{2,0}$.

On procède de même pour les composantes de $\boldsymbol{\lambda}^1 \otimes \boldsymbol{\lambda}^{1,1}$: le sous-fibré isomorphe à $\boldsymbol{\lambda}_0^{2,1}$ a une intersection non nulle avec $\bigotimes^3 \boldsymbol{\ell}^{1,0}$: $\boldsymbol{\lambda}^{2,0} F \otimes \boldsymbol{\lambda}^{0,1} G$, quant à $\mathbf{U}_0^2$, il intersecte $\bigotimes^3 \boldsymbol{\ell}^{1,0}$ suivant $\boldsymbol{\sigma}^{2,0} F \otimes \boldsymbol{\lambda}^{0,1} G$. (NB : On note $\sigma^{p,q} = \bigodot^p \lambda^{1,0} \otimes \bigodot^q \lambda^{0,1}$; on voit par exemple que $U^2 = \sigma^{2,1}$.)

Finalement il semble que tous les sous-espaces irréductibles de $\boldsymbol{\Lambda}^1 \otimes \boldsymbol{\Lambda}^2$, sauf ceux isomorphes à $\boldsymbol{\Lambda}^1$, rencontrent le sous-espace propre de J pour la valeur propre $3i$. Cependant il faut voir que si les dimensions de F ou G sont petites, certaines des intersections précédentes sont réduites à $\{0\}$. Ainsi, si F est de dimension 2 ou 4, $\boldsymbol{\lambda}^{3,0} F = \{0\}$. Mais alors, pourvu que M soit de dimension supérieure à 10, G est de dimension supérieure à 6 et $\boldsymbol{\lambda}^{3,0}$ rencontre $\bigotimes^3 \boldsymbol{\ell}^{0,1}$, s'il ne rencontre pas $\bigotimes^3 \boldsymbol{\ell}^{1,0}$. □

Corollaire 3.2. — *Soit (M, g, J_0) une variété presque hermitienne de dimension $m = 2n$. Une condition nécessaire d'intégrabilité de $\mathcal{J}$ est que M soit localement conformément kählerienne en dimension supérieure* à 10 *ou de type $W_1 \oplus W_4$ en dimension* 6.

Démonstration. — Comme on le voit dans la décomposition (1.6), la partie de $\widetilde{\delta}$ dans $\boldsymbol{\Lambda}^1 \otimes \mathfrak{u}(M)^\perp \simeq \boldsymbol{\Lambda}^1 \otimes [\![\boldsymbol{\lambda}^{2,0}]\!]$ est fixe, égale à $\overline{\delta} = \nabla - \overline{\nabla}$. D'après une remarque précédente, celle-ci (1.5), au lieu de $\nabla\omega$, peut servir à définir le type de la variété presque hermitienne. Les conditions imposées à T ou $\widetilde{\delta}$, proposition 3.1, impliquent que les composantes suivant $\mathbf{W}_2 \simeq [\![\mathbf{U}^1]\!]$, $\mathbf{W}_3 \simeq [\![\boldsymbol{\lambda}_0^{2,1}]\!]$ — ainsi que $\mathbf{W}_1 \simeq [\![\lambda^{3,0}]\!]$, en dimension 6 — sont nulles. □

La particularité de la dimension 6 vient de ce que $\dim_{\mathbb{C}} F$ et $\dim_{\mathbb{C}} G$ sont toutes deux strictement inférieures à 6 pourvu que J ne soit pas égal à J_0, ni à son opposé. Alors, $\boldsymbol{\lambda}^{1,0}F$, $\boldsymbol{\lambda}^{0,1}G$ sont de dimension 1 ou 2 et $\boldsymbol{\lambda}^{3,0}F$, $\boldsymbol{\lambda}^{0,3}G$ sont réduits à $\{0\}$. En dimension 8, c'est encore le cas si $\dim_{\mathbb{C}} F = \dim_{\mathbb{C}} G = 4$, c'est-à-dire si J, J_0 déterminent la même orientation de M. Appelons Z_1 le sous-fibré de Z engendré par ces sections, Z_2 le sous-fibré supplémentaire. Comme on a vu, les composantes connexes de Z sont caractérisées par les dimensions des sous-espaces F, G. On en déduit que Z_1 est connexe tandis que Z_2 a deux composantes connexes correspondant respectivement à $\dim_{\mathbb{C}} F = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} G = 6$ et $\dim_{\mathbb{C}} F = 6$, $\dim_{\mathbb{C}} G = 2$. Si J est une section de Z_2, un parmi $\boldsymbol{\lambda}^{3,0}F$, $\boldsymbol{\lambda}^{3,0}G$, selon les cas, n'est pas réduit à $\{0\}$. Par conséquent, quel que soit le tenseur T de $[\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!]$, il existe $J \in Z_2$ tel que T ne vérifie pas (2.3). Ce qui nous intéresse alors, en cette dimension, est moins le tenseur $\mathcal{J}$ de l'espace de twisteurs réduit que ses restrictions à Z_1 et Z_2, notées $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$. Pour une variété M de dimension 8, on note $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) le sous-espace de l'espace des tenseurs de torsion abstraits dont les éléments vérifient (2.3), quelle que soit la section J de Z_1 (resp. Z_2). Autrement dit, $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) détermine une condition nécessaire d'intégrabilité de $\mathcal{J}_1$ (resp. $\mathcal{J}_2$).

Proposition 3.3. — *En dimension* 8, $\mathcal{T}_1 \simeq 3\boldsymbol{\Lambda}^1 \oplus [\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!]$ *mais* $\mathcal{T}_2 \simeq 3\boldsymbol{\Lambda}^1$.

Corollaire 3.4. — *Soit M une variété presque hermitienne de dimension* 8*. La structure presque complexe $\mathcal{J}_1$ de Z_1 est intégrable seulement si la variété est de type $W_1 \oplus W_4$ mais pour que $\mathcal{J}_2$ soit intégrable il faut que M soit localement conformément kählerienne.*

Aucun travail supplémentaire n'est nécessaire pour réduire (2.1), qui est identique à (2.3) à ceci près que η vit dans le sous-espace $\boldsymbol{\Lambda}^1 \otimes [\boldsymbol{\lambda}^{1,1}]$ de $\boldsymbol{\Lambda}^1 \otimes \boldsymbol{\Lambda}^2$. On en déduit que deux connexions hermitiennes définissent la même structure presque complexe de l'espace des twisteurs réduits si et seulement si leur différence est dans $2\boldsymbol{\Lambda}^1$. On définit de cette façon une relation d'équivalence sur les connexions hermitiennes de (M, g, J_0) de telle sorte que la construction de $\mathcal{J}$ sur l'espace de twisteurs réduit est une injection de l'ensemble des classes d'équivalence dans l'espace des structures presque complexes de Z. L'énoncé suivant regroupe les deux résultats :

Proposition 3.5. — *La structure presque complexe $\mathcal{J}$ de l'espace de twisteurs réduit associée à une connexion hermitienne $\widetilde{\nabla}$ ne peut être intégrable que si cette dernière appartient à la même classe d'équivalence que $\overline{\nabla}$, la connexion hermitienne canonique, i.e. $\widetilde{\nabla}$, $\overline{\nabla}$ définissent la même structure presque complexe sur Z. De plus la torsion de $\overline{\nabla}$ doit être une section de $\boldsymbol{\Lambda}^1 \simeq \mathbf{W}_4$ en dimension supérieure à* 8 *ou de $\boldsymbol{\Lambda}^1 \oplus [\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!] \simeq \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_4$ en dimension* 6.

On est donc fondé dans la suite (recherche de conditions suffisantes) à s'intéresser seulement à la connexion hermitienne canonique $\overline{\nabla}$.

4. Conditions d'intégrabilité

On veut maintenant résoudre l'équation (2.4) portant sur la courbure. Soit $\overline{R}$ la courbure de $\overline{\nabla}$. De même que pour la torsion, $\mathcal{T}$ était le plus gros sous-espace $\mathrm{U}(n)$-invariant tel qu'une structure presque complexe J commutant avec J_0, agissant sur les tenseurs de type torsion, n'y ait que les valeurs propres i et $-i$ (jamais $3i$ ni $-3i$), de même $\mathcal{R}$, l'ensemble des tenseurs qui vérifient (2.4), est l'espace des tenseurs de courbure hermitienne abstraits, isomorphe à $\boldsymbol{\Lambda}^2 \otimes [\boldsymbol{\lambda}^{1,1}]$, à l'exclusion des composantes irréductibles qui admettent $\pm 4i$, comme valeur propre de J.

On décompose $\Lambda^2 \otimes [\lambda^{1,1}]$ sous l'action de $\mathrm{U}(n)$:

$$\lambda^2 \otimes \lambda^{1,1} = (\lambda^{2,0} \otimes \lambda^{1,1}) \oplus (\lambda^{0,2} \otimes \lambda^{1,1}) \oplus (\lambda^{1,1} \otimes \lambda^{1,1}).$$

Il existe un sous-espace V^1 tel que

$$\lambda^{1,1} \otimes \lambda^{1,1} = \lambda^{2,2} \oplus V^1 \oplus \overline{V^1} \oplus \sigma^{2,2}.$$

Chaque terme de cette somme se décompose encore en

$$\lambda^{2,2} \simeq \lambda_0^{2,2} \oplus \lambda_0^{1,1} \oplus \mathbb{R}, \quad V^1 \simeq V_0^1 \oplus \lambda_0^{1,1}, \quad \sigma^{2,2} \simeq \sigma_0^{2,2} \oplus \lambda_0^{1,1} \oplus \mathbb{R}.$$

On rappelle que $\lambda_0^{p,q}$ est définie comme la représentation de $\mathrm{U}(n)$ de poids dominant, dans les coordonnées standard,

$$\big(\underbrace{1,\dots,1}_{p},0,\dots,0,\underbrace{-1,\dots,-1}_{q}\big).$$

D'autre part, le poids dominant de $\sigma_0^{p,q}$ est $(p,0,\dots,0,-q)$. En particulier $\lambda_0^{1,1} = \sigma_0^{1,1}$ est de poids dominant $(1,0,\dots,0,-1)$ et $\sigma_0^{2,2}$, de poids dominant $(2,0,\dots,0,-2)$, est le produit de Cartan de $\lambda_0^{1,1}$ avec elle-même. Maintenant, U^1 défini précédemment est la représentation irréductible de poids dominant $(2,0,\dots,-1)$. Enfin V_0^1 est définie comme la représentation irréductible de $\mathrm{U}(n)$ de poids dominant $(2,0,\dots,0,-1,-1)$. À noter que dans le produit symétrique, il ne reste que

$$\lambda^{1,1} \odot \lambda^{1,1} = \lambda^{2,2} \oplus \sigma^{2,2}$$

et dans la dimension qui nous intéresse tout particulièrement, la dimension 6 :

$$[\lambda^{1,1}] \otimes [\lambda^{1,1}] = 3[\lambda_0^{1,1}] \oplus 2\mathbb{R} \oplus [\![V_0^1]\!] \oplus [\sigma_0^{2,2}].$$

Il existe aussi V^2 tel que

$$\lambda^{2,0}\otimes\lambda^{1,1}=\lambda^{3,1}\oplus V^2=\lambda_0^{3,1}\oplus 2\lambda^{2,0}\oplus V_0^2\oplus\sigma^{2,0}$$

où V_0^2 est la représentation irréductible de poids dominant $(2,1,0,\dots,0,-1)$. En dimension 6, en revenant aux espaces de représentation réels :

$$[\![\lambda^{2,0}]\!]\otimes[\lambda^{1,1}]=[\![\lambda^{2,0}]\!]\oplus[\![V_0^2]\!]\oplus[\![\lambda^{2,0}]\!]\oplus[\![\sigma^{2,0}]\!].$$

Le sous-espace propre de J pour la valeur $4i$ dans $\bigotimes^4\mathbf{\Lambda}^1_{\mathbb{C}}$ est

$$\begin{aligned}\bigotimes{}^4\boldsymbol{\ell}^{1,0}=\bigotimes{}^4\boldsymbol{\lambda}^{1,0}F&\oplus\Big(\bigotimes{}^3\boldsymbol{\lambda}^{1,0}F\otimes\boldsymbol{\lambda}^{0,1}G\Big)\\&\oplus\Big(\bigotimes{}^2\boldsymbol{\lambda}^{1,0}F\otimes\bigotimes{}^2\boldsymbol{\lambda}^{0,1}G\Big)\\&\oplus\Big(\boldsymbol{\lambda}^{1,0}F\otimes\bigotimes{}^3\boldsymbol{\lambda}^{0,1}G\Big)\oplus\bigotimes{}^4\boldsymbol{\lambda}^{0,1}G.\end{aligned}$$

Or,

- $\bigotimes^4\boldsymbol{\lambda}^{1,0}F$ n'a d'intersection non nulle qu'avec $\boldsymbol{\lambda}^{2,0}\otimes\boldsymbol{\lambda}^{2,0}$; de même $\bigotimes^4\boldsymbol{\lambda}^{0,1}G$ ne nous intéresse pas.
- $\bigotimes^3\boldsymbol{\lambda}^{1,0}F\otimes\boldsymbol{\lambda}^{0,1}G$ a une intersection non nulle avec $\boldsymbol{\lambda}_0^{3,1}$ (égale à $\boldsymbol{\lambda}^{3,0}F\otimes\boldsymbol{\lambda}^{0,1}G$) et avec $\mathbf{V}^2$ (isomorphe à $\mathbf{U}^1F\otimes\boldsymbol{\lambda}^{0,1}G$).
- $\boldsymbol{\lambda}^{1,0}F\otimes\bigotimes^3\boldsymbol{\lambda}^{0,1}G$ est le conjugué du précédent.
- Enfin $\bigotimes^2\boldsymbol{\lambda}^{1,0}F\otimes\bigotimes^2\boldsymbol{\lambda}^{0,1}G$ a une intersection non nulle avec $\boldsymbol{\lambda}_0^{2,2}$ $(\boldsymbol{\lambda}^{2,0}F\otimes\boldsymbol{\lambda}^{0,2}G)$, $\mathbf{V}_0^1$ $(\boldsymbol{\lambda}^{2,0}F\otimes\boldsymbol{\sigma}^{0,2}G)$, $\overline{\mathbf{V}_0^1}$ et $\boldsymbol{\sigma}_0^{2,2}$ $(\boldsymbol{\sigma}^{2,0}F\otimes\boldsymbol{\sigma}^{0,2}G)$.

Par conséquent les composantes qu'il faut éliminer sont $[\boldsymbol{\lambda}_0^{2,2}]$, $[\![\mathbf{V}_0^1]\!]$, $[\boldsymbol{\sigma}_0^{2,2}]$, $[\![\mathbf{V}_0^2]\!]$, $[\![\boldsymbol{\lambda}_0^{3,1}]\!]$, en dimension supérieure à 10 et $[\![\mathbf{V}_0^1]\!]$, $[\boldsymbol{\sigma}_0^{2,2}]$, $[\![\mathbf{V}_0^2]\!]$, en dimension 6.

Cependant,

Proposition 4.1. — *Soit (M,g,J) une variété presque hermitienne de type $W_1\oplus W_4$, de dimension 6. Les composantes dans $[\![\mathbf{V}_0^1]\!]$ et $[\![\mathbf{V}_0^2]\!]$ de la courbure $\overline{R}$ de la connexion hermitienne canonique $\overline{\nabla}$ sont nulles.*

Démonstration. — Pour le voir on décompose

$$\bar{\delta}=\xi+\vartheta \tag{4.1}$$

où ξ et ϑ sont des sections de $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_4\subset\mathbf{\Lambda}^1\otimes[\![\boldsymbol{\lambda}^{2,0}]\!]$, respectivement. Dès lors $\overline{R}$ est liée à la courbure riemannienne par

$$\begin{aligned}\overline{R}_{X,Y}=R_{X,Y}&-(\overline{\nabla}_X\xi)_Y+(\overline{\nabla}_Y\xi)_X\\&-(\overline{\nabla}_X\vartheta)_Y+(\overline{\nabla}_Y\vartheta)_X-\vartheta_{\vartheta_XY}-\vartheta_YX-[\vartheta_X,\vartheta_Y]\\&-\xi_{\xi_XY}-\xi_YX-[\xi_X,\xi_Y]\\&-\vartheta_{\xi_XY}-\xi_YX-\xi_{\vartheta_XY}-\vartheta_YX-[\xi_X,\vartheta_Y]-[\xi_Y,\vartheta_X].\end{aligned}\tag{4.2}$$

Comme $\overline{\nabla}$ est une connexion hermitienne, $\overline{\nabla}\xi$ vit en tout point dans un espace isomorphe, comme espace de représentation de $\mathrm{U}(n)$, à $\Lambda^1 \otimes [\![\lambda^{3,0}]\!]$; c'est aussi le cas des tenseurs aparaissant à la dernière ligne car $W_4 \simeq \Lambda^1$; les tenseurs aparaissant à la deuxième ligne vivent dans un espace isomorphe à $\mathbf{\Lambda}^1 \otimes \mathbf{\Lambda}^1$; enfin ceux aparaissant à la troisième ligne vivent dans $[\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!] \otimes [\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!]$. Or cette équation permet de décomposer la courbure hermitienne (en utilisant le projecteur b défini par la permutation circulaire sur les trois premières variables) en

$$\overline{R} = \overline{R}_0 + \overline{R}_1 \tag{4.3}$$

où $\overline{R}_0$ vérifie l'identité de Bianchi, i.e. est un tenseur de type courbure kählerienne, et $\overline{R}_1$ ne dépend que de $b(\overline{R})$, autrement dit, puisque $b(R) = 0$, uniquement des autres tenseurs aparaissant dans (4.2). L'espace des tenseurs de courbure kählerienne est $\mathcal{K} = [\boldsymbol{\sigma}_0^{2,2}] \oplus [\boldsymbol{\lambda}_0^{1,1}] \oplus \mathbf{R}$. Décomposons les autres espaces de représentation de $\mathrm{U}(n)$ en composantes irréductibles.

$$\begin{cases} \Lambda^1 \otimes \Lambda^1 & = [\lambda_0^{1,1}] \oplus [\![\lambda^{2,0}]\!] \oplus [\![\sigma^{2,0}]\!] \oplus 2\mathbb{R}, \\ \Lambda^1 \otimes [\![\lambda^{3,0}]\!] & = [\![V^3]\!] \oplus [\![\lambda^{4,0}]\!] \oplus [\![\lambda_0^{3,1}]\!] \oplus [\![\lambda^{2,0}]\!], \end{cases} \tag{4.4}$$

où V^3 est la représentation irréductible (complexe) de poids dominant $(2, 1, 1, 0, \ldots, 0)$. En dimension 6, $[\![\lambda^{4,0}]\!]$ et $[\![\lambda_0^{3,1}]\!]$ n'aparaissent plus dans cette décomposition. Enfin, en dimension 6,

$$[\![\lambda^{3,0}]\!] \otimes [\![\lambda^{3,0}]\!] = [\![\lambda^{3,0}]\!] \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Par conséquent ces trois espaces et $\mathcal{K}$, ont une intersection réduite à $\{0\}$ avec $[\![\mathbf{V}_0^1]\!]$ et $[\![\mathbf{V}_0^2]\!]$. $\square$

Par ailleurs seul R, dans (4.2), a éventuellement une composante non nulle dans $[\boldsymbol{\sigma}_0^{2,2}]$ donc la condition porte indifféremment sur la courbure hermitienne ou la courbure riemannienne. C'est ce qui autorise l'interprétation de O'Brian & Rawnsley dans [22] en termes de tenseur de Bochner généralisé tel que défini dans [27] pour la courbure riemannienne de toute variété presque hermitienne.

Théorème 4.2. — *Soient M une variété presque hermitienne de dimension 6 et $\widetilde{\nabla}$ une connexion hermitienne. La structure presque complexe $\mathcal{J}$ de l'espace de twisteurs réduit associée à $\widetilde{\nabla}$ est intégrable si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1) *$\widetilde{\nabla}$ définit la même structure presque complexe sur Z que la connexion hermitienne canonique $\overline{\nabla}$.*

2) *La variété est de type $W_1 \oplus W_4$.*

3) *Le tenseur de Bochner (ou la composante de R dans $[\boldsymbol{\sigma}_0^{2,2}]$) est nul.*

En particulier,

Corollaire 4.3. — *L'unique variété strictement NK de dimension* 6*, compacte, simplement connexe, telle que l'espace de twisteurs réduit est muni d'une structure presque complexe* $\mathcal{J}$ *intégrable est la sphère* S^6*.*

Démonstration. — Une variété NK est une variété de type W_1 dans la classification de Gray Hervella. De façon équivalente $\nabla\omega$ ou $\bar{\delta}$ sont totalement antisymétriques. Cela correspond à $\vartheta = 0$ dans (4.1). En outre, la torsion de la connexion hermitienne canonique est parallèle :

$$\overline{\nabla}\xi = 0, \tag{4.5}$$

comme démontré en toute généralité dans [18]. Dès lors (4.2) se simplifie grandement. Soit (ξ^2) le tenseur de $\mathbf{\Lambda}^2 \otimes \mathfrak{so}(M)$ défini par $(\xi^2)_{X,Y} = \xi_{\xi_X Y - \xi_Y X} + [\xi_X, \xi_Y]$:

$$\overline{R} = R - (\xi^2).$$

De plus, en dimension 6, les variétés NK non kählériennes admettent une réduction naturelle à SU(3) associée à $d\omega$ ou ξ (voir section 5). Alors (4.5) implique que $\overline{\nabla}$ est une connexion SU(3) et on peut décomposer $\overline{R}$ comme en (4.3) où cette fois $\overline{R}_0 \in \mathcal{K}(\mathfrak{su}(3))$ a les propriétés algébriques du tenseur de courbure d'une variété Calabi-Yau et $\overline{R}_1$ ne dépend que de (ξ^2). Finalement

$$\overline{R} \in [\boldsymbol{\sigma}_0^{2,2}] \oplus \mathbf{R}.$$

Telle est la forme extrêmement simple de la courbure hermitienne mais aussi riemannienne d'une variété strictement NK de dimension 6.

$$R = \overline{R} + (\xi^2) \in [\boldsymbol{\sigma}_0^{2,2}] \oplus \mathbf{R}.$$

On retrouve de cette façon que les variétés NK non kählériennes, comme les variétés de Calabi Yau en dimension 6 sont d'Einstein (voir [12]). Maintenant, pour que $\mathcal{J}$ soit intégrable il faut, par le théorème 4.2, 3), que la composante de la courbure dans $[\boldsymbol{\sigma}_0^{2,2}]$ soit nulle, c'est-à-dire que R soit le tenseur de courbure de la sphère. □

En dimension supérieure à 10, 2) est remplacée, conformément au corollaire 3.2, par M est localement conformément kählerienne, c'est-à-dire, cette fois, $\xi = 0$ dans (4.1). Par conséquent, compte tenu de (4.4), la même remarque précédant le théorème 4.2 est valable, bien qu'on ne soit plus en dimension 6. Comme en outre le tenseur de Bochner est un invariant conforme on a :

Théorème 4.4. — *Soit M une variété presque hermitienne de dimension supérieure à* 10*. La structure presque complexe* $\mathcal{J}$ *de l'espace de twisteurs* *réduit, associé à une connexion hermitienne* $\widetilde{\nabla}$ *est intégrable si et seulement si*

1) $\widetilde{\nabla}$ *définit la même structure presque complexe que* $\overline{\nabla}$ *;*
2) M *est localement conforme à une variété kählerienne, Bochner-plate.*

Il s'agit du résultat obtenu par O'Brian & Rawnsley [22]. Il reste valable en dimension 8 à condition de se restreindre à la sous-variété Z_2 de Z définie plus haut.

DEUXIÈME PARTIE

5. Variétés de type $W_1 \oplus W_4$

La question posée dans cette section est la suivante : toutes les variétés de type $W_1 \oplus W_4$, de dimension 6, sont-elles localement conformes à des variétés NK ? Autrement dit, la forme de Lee θ représente-t-elle toujours un changement conforme local, c'est-à-dire est-elle fermée (localement exacte) ?

Commençons par établir quelques notations. Soit (M, g, J) une variété presque hermitienne de dimension $m = 2n$. On appelle $w_1, \dots, w_4$ les composantes de $\nabla\omega$ dans la décomposition (1.3) servant à définir la classification de Gray et Hervella. L'opérateur de Bianchi (ou la permutation circulaire sur les trois variables) envoie $\mathbf{\Lambda}^1 \otimes [\![\boldsymbol{\lambda}^{2,0}]\!]$ surjectivement sur l'espace des 3-formes $\mathbf{\Lambda}^3$ et $\nabla\omega$ sur $\mathrm{d}\omega$. Il est invariant sous l'action de $\mathrm{U}(n)$ et son noyau est $\mathbf{W}_2$ par conséquent :

$$\mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_3 \oplus \mathbf{W}_4 \simeq \mathbf{\Lambda}^3 \simeq [\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!] \oplus [\![\boldsymbol{\lambda}_0^{2,1}]\!] \oplus \mathbf{\Lambda}^1.$$

La dernière composante est plus précisément dans $\mathbf{\Lambda}^3$ l'image de l'application qui fait le produit extérieur des 1-formes avec ω. On propose d'appeler θ la 1-forme apparaissant dans la décomposition de $\mathrm{d}\omega$. D'autre part, on note ψ sa composante dans $[\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!]$, de sorte que $\mathrm{d}\omega$ s'écrit finalement

$$\mathrm{d}\omega = \psi + (\mathrm{d}\omega)_0^{2,1} + \omega \wedge \theta.$$

En dimension 6, la donnée d'une 3-forme de type $(3,0) + (0,3)$, de norme constante, est équivalente à la donnée d'une 3-forme volume complexe déterminant une réduction de la variété presque hermitienne à $\mathrm{SU}(3)$, comme on va le voir bientôt.

Bien que $\nabla\omega$, $\bar{\delta}$ soient des tenseurs équivalents, pour notre problème et du point de vue des représentations, on préfère noter différemment, pour plus de clarté, leurs composantes dans la décomposition (1.3). Ainsi, la composante de $\bar{\delta}$ dans le sous-fibré de $\mathbf{\Lambda}^1 \otimes \mathfrak{u}(M)^\perp$ isomorphe à $[\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!]$ et correspondant à w_1 ou ψ sera notée ξ et ϑ, comme à la section précédente, la composante dans le sous-fibré isomorphe à $\mathbf{\Lambda}^1$, liée à w_4 ou θ par

$$4\vartheta_X = X^\flat \wedge \theta - JX^\flat \wedge J\theta, \tag{5.1}$$

où $\flat$ désigne l'« isomorphisme musical » qui à un vecteur associe sa 1-forme duale par la métrique. (Notons également que l'expression ci-dessus identifie un endomorphisme antisymétrique de l'espace tangent ϑ_X et une 2-forme différentielle.)

La figure 5.1 résume les identifications qu'on peut faire entre les composantes de $\nabla\omega$, $\mathrm{d}\omega$, $\bar{\delta}$ et du tenseur de Nijenhuis N (voir plus loin). Plus de détails (notamment les isomorphismes $\mathrm{U}(n)$-invariants qui sous-tendent ces identifications) sont donnés au chapitre 3 de la thèse [7].

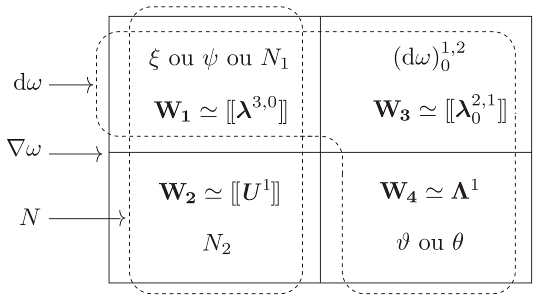

Fig. *5.1. Classes de Gray & Hervella*

Les variétés de type $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ sont caractérisées par

$$\mathrm{d}\omega = \psi + \omega \wedge \theta$$

et parmi celles-ci, les variétés de type $W_1 \oplus W_4$ sont celles ayant

$$\bar{\delta} = \xi + \vartheta. \tag{5.2}$$

À titre de comparaison, les variétés de type $W_2 \oplus W_4$ sont caractérisées par

$$\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \theta.$$

On tire, en différentiant, de cette dernière équation que

$$0 = \mathrm{d}^2\omega = \omega \wedge \mathrm{d}\theta,$$

et de là qu'en dimension supérieure à 6, θ est fermée (localement exacte) et les variétés de la classe $W_2 \oplus W_4$ sont localement conformes à des variétés de type W_2. En particulier $\nabla\omega \in \mathbf{W}_4$ si et seulement si la variété est conformément kählerienne, comme il est bien connu. En dimension 4 *a contrario*, *toutes* les variétés presque hermitiennes M sont de type $W_2 \oplus W_4$ et M appartient à W_4 si et seulement si la structure presque complexe est intégrable.

On donne maintenant la définition suivante :

Définition 5.1. — *On appelle* spéciale *une variété presque hermitienne telle que la norme de* $\psi = (\mathrm{d}\omega)^{3,0}$ *est constante, égale à* 1.

On peut toujours supposer, pour notre problème, qu'une variété de type $W_1 \oplus W_4$ est spéciale, localement sur un ouvert où ψ ne s'annule pas, en effectuant un changement conforme approprié. En effet, la classe $W_1 \oplus W_4$ est stable par changement conforme (voir [13]). Soit f une fonction strictement positive définie sur un ouvert de M. Si on substitue $g' = fg$ à g, la forme de Kähler ω est remplacée par $\omega' = f\omega$ telle que

$$\mathrm{d}\omega' = \mathrm{d}f \wedge \omega + f\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\mathrm{d}f}{f} + \theta\right) \wedge \omega' + f\psi.$$

Par conséquent, θ est remplacée par la 1-forme cohomologue $\theta' = \theta + \frac{\mathrm{d}f}{f}$ (en particulier θ est fermée si et seulement si θ' l'est), ψ par $\psi' = f\psi$ et la norme de ψ par

$$|\psi'|_{g'} = f|\psi|_{g'} = f^{-\frac{1}{2}}|\psi|_g.$$

On peut donc choisir f, sur un ouvert où ψ ne s'annule pas, pour que la norme de $\psi' = (\mathrm{d}\omega')^{3,0}$ par rapport à la nouvelle métrique soit constante égale à 1.

En fait on peut le supposer globalement. Plus précisément :

Lemme 5.2. — *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) *Les variétés de type* $W_1 \oplus W_4$*, de dimension* 6*, sont localement conformément NK.*

2) *Les variétés de type* $W_1 \oplus W_4$ spéciales *de dimension* 6 *sont NK.*

Démonstration. — D'après ce qui précède, le changement conforme est déterminé par le rapport des normes de ψ, ψ'. Or les variétés NK non kählériennes en dimension 6 sont de type constant, d'après [12], c'est-à-dire ont $\nabla\omega$ ou $\mathrm{d}\omega$ (qui dans ce cas est de type pur $(3,0) + (0,3)$, égale à ψ) de norme constante non nulle. Dès lors, si une variété de type $W_1 \oplus W_4$ est localement conforme à une variété NK, le changement conforme est donné par un multiple de $f = |\psi|^2$. En particulier une variété spéciale de type $W_1 \oplus W_4$ est localement conformément NK si et seulement si elle est NK.

Montrons 2) $\Rightarrow$ 1). Soit U l'ouvert de M où ψ ne s'annule pas. La structure presque hermitienne sur U est conforme à une structure presque hermitienne spéciale de type $W_1 \oplus W_4$, c'est-à-dire, par 2), NK. Autrement dit la forme de Kähler est exacte ($\theta = \frac{\mathrm{d}f}{f}$) donc fermée sur U. Mais d'autre part, sur le complémentaire de U, $\psi = 0$ donc la structure presque hermitienne est de type W_4, $\mathrm{d}\omega = \theta \wedge \omega$. Cela implique comme précédemment $\mathrm{d}\theta = 0$ sur tout ouvert de $M \setminus U$. Finalement $\mathrm{d}\theta$ est nulle sur tout M par continuité. $\square$

Remarque. — Ce dernier argument est présenté de façon à peine différente dans l'article de Cleyton & Ivanov [9]. Les auteurs montrent en outre (lemma 8) qu'une variété $W_1 \oplus W_4$ (non localement conformément kählérienne) est localement conforme à une variété NK si et seulement si elle est *globalement* conforme à une variété NK. Ajouté au théorème 1, cela signifie qu'il n'y a *aucune* différence entre la classe des variétés strictement NK et $W_1 \oplus W_4 \setminus W_4$ à une fonction près f définie sur tout M. Les mêmes résultats sont valables, par [19], [9], en remplaçant les variétés « nearly Kähler » par les variétés presque parallèles G_2.

On se restreint dans la suite aux variétés de type $W_1 \oplus W_4$ spéciales de dimension 6. L'intérêt est qu'on peut s'appuyer sur cette 3-forme ψ qui ne s'annule jamais pour obtenir des restrictions sur la géométrie de la variété, en s'inspirant des méthodes utilisées pour les variétés strictement NK. En premier lieu on dispose maintenant sur la variété d'une structure SU(3).

Rappelons quelques propriétés algébriques des formes de type $(3,0)+(0,3)$ en dimension 6. Quelle que soit la 3-forme ψ de type $(3,0)+(0,3)$, il existe une unique $\phi \in [\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!]$ telle que

$$\Psi = \psi + i\phi$$

est de type $(3,0)$. Si ψ est de norme constante non nulle, Ψ est une 3-forme volume complexe, définissant une réduction de M à SU(3), et ψ, ϕ forment une base orthogonale de $[\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!]$ pour le produit scalaire induit par la métrique.

Lemme 5.3. — *On a les résultats suivants :*

1) $\forall X \in TM, \quad \iota_X\psi = \iota_{JX}\phi$
2) $\omega \wedge \iota_X\psi = -JX^\flat \wedge \psi$, *et de même pour* ϕ.
3) $\forall \eta \in \boldsymbol{\Lambda}^1, \quad \eta \wedge \psi = J\eta \wedge \phi$

Une autre façon de définir ϕ à partir de ψ est

$$\phi = *\psi. \tag{5.3}$$

Pour une variété presque hermitienne spéciale, on a donc une structure SU(3) naturelle, compatible avec la structure U(3), associée à $\psi = (\mathrm{d}\omega)^{3,0}$. Or dans ce cas, F.M. Cabrera a remarqué dans [20] — et Salamon &

Chiossi [8] ont montré que toute l'information pour la torsion intrinsèque est contenue dans les différentielles de ω, ψ, ϕ. En particulier, les composantes de $\bar{\delta}$ ou $\nabla\omega$ dans $\mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$ sont déterminées par la partie de type $(2,2)$ de $\mathrm{d}\psi$, $\mathrm{d}\phi \in \mathbf{\Lambda}^4$. Plus précisément, $[\lambda_0^{2,2}]$ est réduit à $\{0\}$ en dimension 6, par conséquent $[\lambda^{2,2}] \simeq [\lambda^{1,1}] \simeq [\lambda_0^{1,1}] \oplus \mathbb{R}$ et il existe n_1, $m_1 \in \mathbb{R}$ et ν_2, $\mu_2 \in [\boldsymbol{\lambda}_0^{1,1}]$ telles que

$$(\mathrm{d}\psi)^{2,2} = n_1 \omega \wedge \omega + \nu_2 \wedge \omega, \quad (\mathrm{d}\phi)^{2,2} = m_1 \omega \wedge \omega + \mu_2 \wedge \omega.$$

Alors,

Proposition 5.4 (Salamon & Chiossi). — *Soit M une variété riemannienne munie d'une structure* SU(3) *définie par* (ω, ψ, ϕ).

1) *La composante de la torsion intrinsèque dans* $\mathbf{W}_1$ *est totalement déterminée par* n_1, m_1, *c'est-à-dire* $w_1 = 0$ *si et seulement si* $n_1 = m_1 = 0$.

2) *De même la composante de* $\bar{\delta}$ *ou* $\nabla\omega$ *suivant* $\mathbf{W}_2$ *est totalement déterminée par* ν_2, μ_2.

Démonstration. — Cela résulte premièrement de raisons théoriques concernant les représentations de SU(3). L'application qui au 1-jet de la structure U(3) (représenté par $\nabla\omega$ ou la torsion intrinsèque $\bar{\delta}$) associe le quadruplet (w_1, w_2, w_3, w_4) est une bijection. Les sous-espaces W_1 et W_2 se décomposent sous l'action de SU(3) en

$$W_1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad W_2 = \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3).$$

Au contraire W_3, W_4 sont toujours irréductibles (et aucun d'eux n'est isomorphe à $\mathbb{R}$ ni $\mathfrak{su}(3)$). On voit n_1, m_1 (resp. ν_2, μ_2) comme des applications de l'espace des 1-jets de structures SU(3) (faisant intervenir la décomposition en types de $\mathrm{d}\psi$, $\mathrm{d}\phi$) dans $\mathbb{R}$ (resp. $[\lambda_0^{1,1}] \simeq \mathfrak{su}(3)$). Maintenant l'espace des 1-jets de structures SU(3) est envoyé surjectivement sur l'espace des 1-jets de structures U(3) et par le lemme de Schur, toutes ces applications étant SU(3)-invariantes, on obtient le résultat annoncé.

Une autre façon de le voir est la suivante. Soit α une forme différentielle de type (p,q). La partie de type $(p-1, q+2)$ de $\mathrm{d}\alpha$ est donnée par le tenseur qui mesure le défaut d'intégrabilité de la structure presque complexe c'est-à-dire N, le tenseur de Nijenhuis. Concrètement si $\alpha \in \boldsymbol{\lambda}^{1,0}$

$$(\mathrm{d}\alpha)^{0,2}(X,Y) = \mathrm{d}\alpha(X^{0,1}, Y^{0,1}) = -\alpha\big([X^{0,1}, Y^{0,1}]\big).$$

D'où, par (1.1),

$$(\mathrm{d}\alpha)^{0,2}(X,Y) = -\alpha\big(N(X,Y)\big).$$

Par là le tenseur N peut-être vu comme un élément de $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{\lambda}^{1,0}, \boldsymbol{\lambda}^{0,2}) \simeq \boldsymbol{\lambda}^{0,1} \otimes \boldsymbol{\lambda}^{0,2}$, ou autrement dit le tenseur *réel* N vit dans un espace isomorphe à $[\![\boldsymbol{\lambda}^{0,1} \otimes \boldsymbol{\lambda}^{0,2}]\!] \simeq \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$. On le décompose en conséquence en

$$N = N_1 + N_2. \tag{5.4}$$

On établit de même une formule plus générale, pour toute forme de type $(p,0)$ mais aussi $(p,0)+(0,p)$:

$$(\mathrm{d}\alpha)^{p-1,2} = N\#\alpha \tag{5.5}$$

où $\# : (\boldsymbol{\Lambda}^2 \otimes TM) \times \boldsymbol{\Lambda}^p \to \boldsymbol{\Lambda}^{p+1}$. Maintenant N_1 est lié à w_1 ou ψ et on peut montrer, quelle que soit $\alpha \in [\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!]$:

$$(\mathrm{d}\alpha)^{2,2} = N_1\#\alpha + N_2\#\alpha \quad = -\frac{2}{3}\langle\phi,\alpha\rangle\,\omega\wedge\omega + \gamma\wedge\omega \tag{5.6}$$

où $\gamma \in [\lambda_0^{1,1}]$. En prenant α égale à ψ ou ϕ on obtient ainsi, puisqu'elles forment une base de $[\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!]$ que N_1 est entièrement déterminé par n_1, m_1 et N_2 est déterminé par ν_2, μ_2. □

On a même un résultat plus précis du fait que la structure SU(3) n'est pas quelconque mais que la 3-forme ψ est issue de $\mathrm{d}\omega$ comme sa partie de type $(3,0)+(0,3)$.

Lemme 5.5. — *Pour une variété presque hermitienne spéciale de dimension* 6*,* $n_1 = 0$*, c'est-à-dire*

$$(\mathrm{d}\psi)^{2,2} = \nu_2 \wedge \omega,$$

où $\nu_2 \in [\boldsymbol{\lambda}_0^{1,1}]$ *et* m_1 *est constante.*

Démonstration. — On a directement $n_1 = -\frac{2}{3}\langle\phi,\psi\rangle = 0$ et $m_1 = -\frac{2}{3}|\phi|^2 = -\frac{2}{3}$ par (5.6). □

Proposition 5.6. — *Soit* M *une variété presque hermitienne de type* $W_1 \oplus W_4$ *spéciale de dimension* 6*. Il existe* $\sigma \in \boldsymbol{\Lambda}^1$ *telle que*

$$\mathrm{d}\psi = \sigma \wedge \psi, \tag{5.7}$$

$$\mathrm{d}\phi = \sigma\wedge\phi - \frac{2}{3}\omega\wedge\omega. \tag{5.8}$$

Démonstration. — D'abord par la proposition 5.4 puis le lemme 5.5, pour une variété presque hermitienne spéciale, $w_2 = 0$ si et seulement si il existe σ et $\varsigma \in \boldsymbol{\Lambda}^1$ telles que

$$\mathrm{d}\psi = \sigma\wedge\psi, \quad \mathrm{d}\phi = \varsigma\wedge\phi - \frac{2}{3}\omega\wedge\omega.$$

En effet en dimension 6, $[\![\boldsymbol{\lambda}^{3,0}]\!]$ est de dimension 2 mais grâce à l'équation 2) du lemme 5.3 toute forme de type $(3,1)+(1,3)$ est décomposable en le produit extŕieur d'une parmi ψ, ϕ avec une certaine 1-forme. Cela signifie que les applications

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\Lambda}^1 & \longrightarrow & [\![\boldsymbol{\lambda}^{3,1}]\!] \\ \eta & \longmapsto & \eta \wedge \psi \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \boldsymbol{\Lambda}^1 & \longrightarrow & [\![\boldsymbol{\lambda}^{3,1}]\!] \\ \eta & \longmapsto & \eta \wedge \psi \end{array}$$

sont des isomorphismes.

En outre ces 1-formes ne sont pas arbitraires : on peut calculer $\sigma = \varsigma$ (voir [7, prop. 3.3.16]). Il s'agit en réalité d'un fait plus général, qui concerne toutes les variétés SU(3) d'après [8] : il existe une 1-forme σ telle que $(\mathrm{d}\psi)^{3,1} = \sigma \wedge \psi$ et $(\mathrm{d}\phi)^{3,1} = \sigma \wedge \phi$. □

On peut maintenant énoncer le

Théorème 5.7. — *Soit M une variété de type $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ c'est-à-dire vérifiant*

$$\mathrm{d}\omega = \psi + \omega \wedge \theta. \tag{5.9}$$

Alors $(\mathrm{d}\psi)^{2,2} = 0$ si et seulement si $(\mathrm{d}\theta)^{1,1} = 0$ et si M est de dimension 6, $w_2 = 0$, i.e. la variété est de type $W_1 \oplus W_4$ si et seulement si elle est localement conformément NK.

Démonstration. — Le premier point résulte simplement de la différentiation de l'équation caractéristique (5.9)

$$0 = \mathrm{d}\psi + \psi \wedge \theta + \omega \wedge \mathrm{d}\theta. \tag{5.10}$$

La 4-forme $\omega \wedge \mathrm{d}\theta$ se scinde suivant les types en

$$\omega \wedge \mathrm{d}\theta = \omega \wedge (\mathrm{d}\theta)^{2,0} + \omega \wedge (\mathrm{d}\theta)^{1,1}.$$

Le dernier terme doit être nul si $\mathrm{d}\psi$ est de type pur $(3,1) + (1,3)$.

Pour prouver le deuxième point, on se ramène au cas des variétés spéciales grâce au lemme 5.2. Si $w_2 = 0$, par les lemmes 5.4 et 5.5, $\mathrm{d}\psi$ est de type $(3,1) + (1,3)$, d'où $(\mathrm{d}\theta)^{1,1} = 0$ par ce qui précède et on se trouve dans la situation de la proposition 5.6. En différentiant (5.7) on obtient premièrement

$$0 = \mathrm{d}^2\psi = \mathrm{d}\sigma \wedge \psi,$$

ce qui implique que $\mathrm{d}\sigma$ est de type $(1,1)$ car l'application

$$[\![\boldsymbol{\lambda}^{2,0}]\!] \longrightarrow \boldsymbol{\Lambda}^5, \quad \eta \longmapsto \eta \wedge \psi$$

est bijective (NB : on a obtenu en fin de compte tous les isomorphismes de représentations de SU(3) suivants : $[\![\lambda^{3,1}]\!] \simeq \Lambda^1 \simeq [\![\lambda^{2,0}]\!] \simeq \Lambda^5$.) Mais alors on a aussi $\mathrm{d}\sigma \wedge \phi = 0$ (il n'y a pas de forme de type $(4,1)$) et en différentiant (5.8), en tenant compte de $\psi \wedge \omega = 0$,

$$0 = -\sigma \wedge d\phi - \frac{4}{3}\mathrm{d}\omega \wedge \omega = \frac{2}{3}\sigma \wedge \omega \wedge \omega - \frac{4}{3}\theta \wedge \omega \wedge \omega = \frac{2}{3}(\sigma - 2\theta) \wedge \omega \wedge \omega.$$

Par conséquent $\theta = \frac{1}{2}\sigma$ et $\mathrm{d}\theta$ est de type $(1,1)$, c'est-à-dire, finalement, nulle.

Comme on a supposé que la variété était spéciale, on doit montrer que cela implique que θ aussi est nulle. Or, (5.10) devient maintenant $\mathrm{d}\psi = \theta \wedge \psi$ et (5.7), $\mathrm{d}\psi = 2\theta \wedge \psi$ d'où $\theta = 0$.

Réciproquement Gray & Hervella [13] ont montré qu'une variété localement conformément NK est de type $W_1 \oplus W_4$.

Les équations (5.7) et (5.8) sont finalement les équations caractéristiques d'une variété strictement NK de dimension 6 obtenues par Reyes Carrion [24] (voir aussi [17]). Toute variété presque hermitienne de type $W_1 \oplus W_4$ spéciale de dimension 6 est strictement NK et par le lemme 5.2 toute variété de type $W_1 \oplus W_4$ de dimension 6 est localement conforme à une variété NK. □

Le théorème annoncé 2 découle de ce théorème et du corollaire 4.3. Mais c'est aussi une pièce d'un problème plus général.

6. Variétés presque hermitiennes conformes

Parmi les seize classes de variétés presque hermitiennes $\bigoplus_{i \in I} W_i$, $I \subset \{1,2,3,4\}$ qu'ils définissent (voir définition 1.1), Gray & Hervella [13] ont remarqué que huit – celles dont la définition comprend W_4 – sont invariantes conformes. En particulier, pour tout $I \subset \{1,2,3\}$, $\bigoplus_{i \in I} W_i \oplus W_4$ contient non seulement les variétés de de la classe plus petite $\bigoplus_{i \in I} W_i$ mais encore toutes les variétés localement conformes à des variétés de ce type. La question se pose alors si ces dernières épuisent toute la classe.

Par le théorème 5.7 la réponse est positive en dimension 6 dans le cas de $W_1 \oplus W_4$. On a vu au début de la section 5 que $W_2 \oplus W_4$ était de même constituée uniquement de variétés localement conformes à des variétés W_2, c'est-à-dire presque kählériennes ou symplectiques, et que W_4 ne contenait que les variétés localement conformément kählériennes en dimension supérieure à 6.

Au contraire il existe des variétés *hermitiennes*, c'est-à-dire de type $W_3 \oplus W_4$, en dimension 6, non localement conformes à des variétés W_3. En effet soit M le produit d'une surface de Riemann S, de forme de Kähler ω_0, et d'une variété hermitienne N de dimension 4 (une surface complexe) non LCK (c'est le cas génériquement.) La forme de Kähler ω_1 de N vérifie $\mathrm{d}\omega_1 = \theta_1 \wedge \omega_1$, pour une 1-forme θ_1 non fermée par hypothèse. Alors la forme de Kähler de $M = S \times N$ est $\omega = \omega_0 + \omega_1$ et on vérifie que la forme de Lee est $\theta = \frac{1}{2}\theta_1$, de sorte que $\mathrm{d}\theta \neq 0$.

De plus on s'apprête à donner (voir corollaire 7.3) un résultat d'existence locale de variétés de type $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ de dimension 6 non issues de variétés semi-kählériennes, c'est-à-dire vérifiant (5.9) mais cette fois encore $\mathrm{d}\theta \neq 0$.

Afin de donner une formulation intrinsèque de ces résultats, on considère des variétés presque hermitiennes conformes, au sens suivant. Soit M une variété de dimension m. On note $\mathcal{L}^k$, pour tout entier k, et on appelle *fibré des scalaires de poids k*, le fibré associé de $\mathrm{GL}(M)$:

$$\mathcal{L}^k = \mathrm{GL}(M) \times_{|\det|^{k/n}} \mathbb{R},$$

de sorte que $\mathcal{L}^0$ s'identifie à $M \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{L}^k \otimes \mathcal{L}^\ell = \mathcal{L}^{k+\ell}$. Une structure conforme sur M est la donnée d'une classe conforme de métriques C ou bien encore d'une section c de $S^2(T^*M) \otimes \mathcal{L}^{-2}$ telle que pour $X \in TM$, non nul, $c(X,X)$ est strictement positif (i.e. s'écrit $\ell \otimes \ell$ pour une section non nulle ℓ de $\mathcal{L}$). Le lien entre les deux définitions est le suivant : tout choix d'une métrique g dans C correspond à une trivialisation ou une section ℓ de $\mathcal{L}$ qui permette d'écrire

$$g = c \otimes \ell^2.$$

La structure conforme c fournit les isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & \mathbf{\Lambda}^1 \otimes \mathcal{L}^2 \\ X & \longmapsto & X^c \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{\Lambda}^1 & \longrightarrow & TM \otimes \mathcal{L}^{-2} \\ \eta & \longmapsto & \eta^\diamond \end{array}$$

analogues des *isomorphismes musicaux* $X \mapsto X^\flat$ et $\eta \mapsto \eta^\sharp$, dans le cas riemannien. La compatibilité entre une métrique et une structure presque complexe, telle qu'elle définit une variété presque hermitienne, si elle a lieu pour une métrique de C, a lieu pour toutes les métriques de la classe. C'est pourquoi on donne la définition suivante :

Définition 6.1. — *On appelle variété presque hermitienne conforme une variété M munie d'une structure conforme c et d'une structure presque complexe J compatibles, c'est-à-dire satisfaisant*

$$\forall X, Y \in TM, \quad c(JX, JY) = c(X,Y).$$

De façon équivalente il existe une réduction du fibré des repères à $\mathrm{CU}(n)$, identifié canoniquement à $\mathbb{R}_+^* \times \mathrm{U}(n)$.

En l'absence de métrique, on ne dispose plus de connexion de Levi-Civita mais uniquement de connexions de Weyl. Soit D la dérivée covariante d'une telle connexion : linéaire, sans torsion et préservant c. On considère

$DJ \in \mathbf{\Lambda}^1 \otimes \mathfrak{co}(M)$. En fait, pour tout $X \in TM$, $D_X J$ est antisymétrique (relativement à c ou à toute métrique de la classe conforme), c'est-à-dire appartient à $\mathfrak{so}(M)$, bien défini même en l'absence de métrique. De plus, en dérivant $J^2 = -\operatorname{Id}$, on obtient qu'il anticommute à J. Finalement on a comme avant $DJ \in \mathbf{\Lambda}^1 \otimes \mathfrak{u}(M)^\perp$, où l'orthogonal est pris dans $\mathfrak{so}(M)$. En restreignant la représentation de $\mathrm{CU}(n)$ à $\mathrm{U}(n)$, on décompose ce fibré en composantes irréductibles en chaque point comme en (1.3). Maintenant, quel que soit $i = 1, \ldots, 4$, W_i est invariant sous l'action de $\mathbb{R}_+^*$ par conséquent il s'agit de la décomposition irréductible de la représentation de $\mathrm{CU}(n)$. On souhaite obtenir une classification qui ne dépende pas de la connexion D. Soit D' une connexion de Weyl différente de D. On cherche à comparer DJ et $D'J$. Chaque connexion D, D' induit une connexion linéaire sur $\mathcal{L}$, notée $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$. Réciproquement, on peut calculer D, D' à partir de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ par un analogue de la formule de Koszul :

$$\begin{aligned} 2c(D_X Y Z) = \mathcal{D}_X\big(c(Y,Z)\big) + \mathcal{D}_Y\big(c(X,Z)\big) - \mathcal{D}_Z\big(c(X,Y)\big) \\ + c\big(Z,[X,Y]\big) - c\big(Y,[X,Z]\big) - c\big(X,[Y,Z]\big). \end{aligned}$$

On appelle τ la 1-forme telle que, pour $\ell \in \mathcal{L}$

$$(\mathcal{D}_X - \mathcal{D}'_X)\ell = 2\tau(X)\ell.$$

Alors

$$(D - D')_X Y = \tau(X)Y + \tau(Y)X - c(X,Y)\tau^\diamond. \tag{6.1}$$

Puis en identifiant $\mathfrak{so}(M)$ et $\mathbf{\Lambda}^2 \otimes \mathcal{L}^2$,

$$(D - D')_X J = X^c \wedge J\tau + JX^c \wedge \tau. \tag{6.2}$$

Par conséquent les trois premières composantes de DJ ne changent pas, lorsqu'on modifie la connexion de Weyl, mais seulement la quatrième, à valeurs dans $\mathbf{W}_4$. C'est exactement ce qu'ont démontré Gray et Hervella en se restreignant aux structures de Weyl fermées, c'est-à-dire coïncidant localement avec la connexion de Levi-Civita d'une métrique de C. D'ailleurs on peut toujours modifier D pour que la composante suivant $\mathbf{W}_4$ soit nulle :

Proposition et définition 6.2. — *Soit (M, c, J) une variété presque hermitienne conforme. Il existe une unique connexion de Weyl, notée D^J, telle que la composante de $D^J J$ dans $\mathbf{W}_4$ est nulle. On appelle cette connexion la connexion adaptée à J.*

Démonstration. — En effet pour une connexion de Weyl quelconque D, il existe une 1-forme η telle que la composante dans $\mathbf{W}_4$ de DJ s'écrit (voir (5.1) pour l'analogue riemannien)

$$L(D) = JX^\flat \wedge \eta + X^\flat \wedge J\eta.$$

Il suffit alors de poser

$$D^J_X Y = D_X Y - \eta(X)Y - \eta(Y)Z + c(X,Y)\eta^\diamond$$

en s'inspirant de (6.1). □

La définition suivante ne dépend pas du choix de D :

Définition 6.3. — *Une variété presque hermitienne conforme* (M, c, J) *est dite de type* W^c, *où* $W = \bigoplus_{i\in I} W_i$, $I \subset \{1,2,3\}$, *si pour toute connexion de Weyl* D, DJ *est une section de* $\mathbf{W} \oplus \mathbf{W}_4$.

On a bien sûr

Proposition 6.4. — *Soient* (M, c, J) *une variété presque hermitienne conforme,* $g \in C$, *la classe conforme définie par* c. *La variété presque hermitienne* (M, g, J) *est de type* $\bigoplus_{i\in I} W_i \oplus W_4$ *si et seulement si* (M, c, J) *est de type* $\bigoplus_{i\in I} W_i^c$.

De plus,

Définition 6.5. — *Une variété presque hermitienne conforme* (M, c, J) *est dite fermée (resp. exacte) si la connexion adaptée à* J *est fermée (resp. exacte) en tant que structure de Weyl.*

Rappelons qu'une structure de Weyl D est dite fermée (resp. exacte) si pour une métrique $g \in C$, la 1-forme η, appelée forme de Lee de (D, g), qui mesure la différence avec la connexion de Levi-Civita comme en (6.1) est fermée (resp. exacte). Cette définition ne dépend pas du choix de la métrique dans C, en effet la forme de Lee de $(D, g' = \mathrm{e}^{2f} g)$ est égale à $\eta' = \eta + \mathrm{d}f$, cohomologue à η. Maintenant, pour la connexion adaptée à J, la forme de Lee de (D^J, g) est égale à $\frac{1}{2}\theta$ c'est-à-dire (à un facteur près) à la forme de Lee de la variété presque hermitienne (M, g, J). En effet par (5.1)

$$(\nabla - D^J)J = L(\nabla) = \tfrac{1}{2}(X^c \wedge J\theta + JX^c \wedge \theta).$$

On peut alors reformuler le théorème 1 :

Théorème 6.6. — *Toute variété presque hermitienne conforme de dimension* 6, *de type* W_1^c *est fermée.*

Par une remarque précédente, on a le même résultat pour les variétés de la classe W_2^c, en dimension supérieure à 6. Dans la section suivante on considère le cas des variétés presque hermitiennes conformes de type $W_1^c \oplus W_2^c$.

7. Variétés de type $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$

Soit V un espace vectoriel de dimension 6. Tout part de l'observation faite par Hitchin que la donnée de deux formes $\omega \in \Lambda^2 V^*$ et $\psi \in \Lambda^3 V^*$ est suffisante pour définir une action de $\mathrm{SU}(3)$ sur V (ou au niveau des variétés, la donnée de deux formes *différentielles* ω et ψ suffit à définir une *réduction* du fibré des repères à $\mathrm{SU}(3)$) moyennant certaines conditions de régularité — pour chaque forme séparément — et de compatibilité. C'est-à-dire que dans cette donnée et sous ces conditions est en fait incluse la donnée de l'endomorphisme J de carré -1 (ou de la structure presque complexe) et du produit scalaire (ou de la métrique). Voici comment on s'y prend.

Tout d'abord ψ doit être une 3-forme *stable* ; on demande plus précisément que son stabilisateur soit isomorphe à $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ (induisant un isomorphisme $V \simeq \mathbb{C}^3$). Pour caractériser les 3-formes stables, Hitchin [17] définit une certaine quantité $\kappa : \Lambda^3 V^* \to (\Lambda^6 V^*)^2$ qui doit vérifier dans notre cas

$$\kappa(\psi) < 0. \tag{r1}$$

La 3-forme ψ définit alors une structure presque complexe J par rapport à laquelle elle est de type $(3,0) + (0,3)$. Dès lors la première condition de compatibilité est que ω soit de type (1,1), ce qui équivaut à

$$\omega \wedge \psi = 0. \tag{c1}$$

On associe comme précédemment à ψ une 3-forme ϕ de façon unique pour que $\psi + i\phi$ soit de type (3,0). Une conséquence de (r1) est que ψ est *non-dégénérée*, c'est-à-dire que l'élément de volume canoniquement associé à ψ, $\mu(\psi) = \psi \wedge \phi \in \Lambda^6 V^*$ est non nul. On demande aussi que ω soit non-dégénérée :

$$\mu(\omega) = \omega \wedge \omega \wedge \omega \neq 0. \tag{r2}$$

La deuxième condition de compatibilité est que la forme bilinéaire symétrique définie par J et ω soit définie positive :

$$(X,Y) \mapsto g(X,Y) = \omega(X,JY) > 0. \tag{c2}$$

Enfin la dernière est que ψ soit de norme 1 pour g, ce qui dans le langage des formes s'écrit

$$\mu(\psi) = \tfrac{2}{3}\mu(\omega). \tag{c3}$$

Proposition 7.1. — *L'ensemble des couples* (ω, ψ) *vérifiant les conditions de régularité* (r1) *et* (r2) *et la condition de compatibilité* (c2) *est un ouvert non vide de* $\Lambda^2 V^* \times \Lambda^3 V^*$.

Démonstration. — Cela résulte de la définition choisie par Hitchin d'une p-forme stable : l'orbite de ψ sous $\mathrm{GL}(V)$ est ouverte dans $\Lambda^p V^*$. En dimension 6, $\Lambda^3 V^*$ contient deux orbites ouvertes correspondant à $\kappa < 0$ et $\kappa > 0$ (pour les détails voir [16], [17]). Quant aux deux autres conditions (r2) et (c2), ce sont clairement des conditions « ouvertes ». □

Maintenant si M est une variété presque hermitienne, $V = T_x M$, ψ est déterminé par le 1-jet de la forme de Kähler au point x (en fait seulement par ω_x, $\mathrm{d}\omega_x$) de la façon suivante. Soit θ_ω la 1-forme telle que

$$\mathrm{d}\omega \wedge \omega = \theta_\omega \wedge \omega \wedge \omega.$$

En effet

$$\mathbf{\Lambda}^1 \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^5, \quad \eta \longmapsto \eta \wedge \omega \wedge \omega,$$

est un isomorphisme lorsque ω est non dégénérée. Alors on pose

$$\psi_\omega = \mathrm{d}\omega - \theta_\omega \wedge \omega.$$

Les équations rassemblées dans l'énoncé de la proposition 7.1 portent maintenant sur le 1-jet de ω : quel que soit $x \in M$ on appelle $U_x \subset (\mathcal{J}^1 \mathbf{\Lambda}^2)_x$ l'ouvert des 1-jets j tels que ω, ψ_ω satisfont les conditions de la proposition 7.1.

Théorème 7.2. — *Soit M une variété de dimension 6, $x \in M$. À tout 1-jet $j \in U_x$ on peut associer localement, sur un voisinage de x, une structure $\mathrm{SU}(3)$ telle que la structure $U(3)$ sous-jacente est de type $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$.*

Démonstration. — Soit ω une 2-forme différentielle dont le 1-jet en x, $(j^1\omega)_x = j$ appartient à U_x. En un point y suffisamment proche de x, l'opération qui à une forme associe son 1-jet étant continue, $(j^1\omega)_y$ reste dans U_y. Il existe un voisinage N de x tel que (ω, ψ_ω) vérifient (r1), (r2), (c2) en tout point de N. Elles vérifient aussi (c1) par définition de ψ_ω, θ_ω :

$$\psi_\omega \wedge \omega = \mathrm{d}\omega \wedge \omega - \theta_\omega \wedge \omega \wedge \omega = 0.$$

Enfin pour que (c3) soit vérifiée il faut définir la structure $\mathrm{SU}(3)$ plutôt par $(\omega, \psi' = f\psi_\omega)$ où

$$f = \sqrt{\frac{2\mu(\omega)}{3\mu(\psi)}}.$$

Les équations (r1) et (r2) assurent que f est bien définie et que ω, ψ' continuent à vérifier les conditions, en particulier ψ' ne s'annule pas. Dès lors, elles définissent une structure $\mathrm{SU}(3)$ au voisinage de x. En effet, $\mu(f\psi) = f^2\mu(\psi)$, pour toute fonction f, implique $\mu(\psi') = \frac{2}{3}\mu(\omega)$.

Maintenant la variété (N, g, J) est de type $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ automatiquement par construction : $\mathrm{d}\omega = f^{-1}\psi' + \theta_\omega \wedge \omega$ n'a pas de composante dans $[\![\boldsymbol{\lambda}_0^{2,1}]\!]$. $\square$

De plus, vue la liberté dans le choix de ω, on peut toujours demander que $\mathrm{d}\theta_\omega \neq 0$.

Corollaire 7.3. — *Il existe des variétés presque hermitiennes conformes de type $W_1^c \oplus W_2^c$ non fermées.*

Conclusion

La théorie des twisteurs rencontre les variétés NK à deux endroits au moins.

Premièrement Hitchin [15] a démontré que les seuls espaces de twisteurs au dessus de variétés de dimension 4, kähleriens sont $\mathbb{C}P^3$ au-dessus de S^4 et $\mathbb{F}^3$, l'espace des drapeaux de $\mathbb{C}^3$, au-dessus de $\mathbb{C}P^2$, c'est-à-dire deux parmi les quatre seules variétés homogènes de dimension 6 admettant une structure SNK (voir [6]). On obtient cette dernière à partir de la structure kählérienne en faisant une homothétie et en changeant le signe de la structure presque complexe le long de la fibre, isomorphe à $\mathbb{C}P^1$. De plus, cette méthode est générale pour obtenir des variétés SNK à partir de submersions riemanniennes dont l'espace total est kählérien, comme a démontré Nagy dans [21]. Il prouve ainsi l'existence d'une structure SNK sur l'espace de twisteurs d'une variété Kähler-quaternionique.

Deuxièmement, par le théorème 2, les seules variétés presque hermitiennes conformes de dimension 6 admettant un espace de twisteurs réduit complexe correspondent aux deux types de variétés NK de dimension 6 : les variétés kählériennes – pourvu qu'elles soient Bochner-plates – et les variétés SNK – en fait seulement S^6 munie de sa structure conforme standard et de la structure presque complexe compatible issue des octonions. Au regard de la raison (traduire des problèmes sur M dans des propriétés des structures holomorphes d'objets associés à Z, voir [1]) qui fait s'intéresser aux espaces de twisteurs complexes, ce résultat est juste préliminaire.

Par exemple, en ce qui concerne S^6, étant conformément plate, elle admet aussi un espace de twisteurs classique. Il s'agit de l'hypersurface quadrique de dimension 6 complexe $\mathcal{Q}_+$ (voir [26]). Par conséquent l'espace de twisteurs réduit Z est une sous-variété de cette dernière, qu'il faudra précisement décrire.

En outre, on fait place à une observation de Bérard-Bergery & Ochiai [2]. D'une importance cruciale dans la théorie des twisteurs en dimension 4 est la correspondance établie en [1] entre les fibrés holomorphes de l'espace de twisteurs, holomorphiquement triviaux sur chaque fibre, et certains fibrés appelés *auto-duaux* sur la base. Cela appelle une généralisation si possible, en suivant Slupinski [26] dans le cas riemannien.

Enfin, une particularité de S^6 parmi les variétés SNK de dimension 6 est qu'elle admet plusieurs structures presque complexes J compatibles avec une métrique donnée g telles que (S^6, g, J) est SNK. En lien aussi avec la théorie des spineurs de Killing, on peut espérer donner une expression naturelle de ce fait en termes de sections de l'espace de twisteurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin & I. M. Singer, « Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry », *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **362** (1978), p. 425-461.

[2] L. Bérard Bergery & T. Ochiai, « On some generalizations of the construction of twistor spaces », in *Global Riemannian geometry*, Ellis Horwood, Chichester, 1984, p. 52-58.

[3] G. Bor & L. Hernández Lamoneda, « Bochner formulae for orthogonal G-structures on compact manifolds », *Differential Geom. Appl.* **21** (2004), p. 79-92.

[4] R. L. Bryant, « Böchner-Kähler metrics », *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 623-715.

[5] F. E. Burstall & J. H. Rawnsley, « Twistor theory for Riemannian symmetric spaces with applications to harmonic maps of Riemann surfaces », in *Lecture Notes in Math.*, vol. 1424, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.

[6] J.-B. Butruille, « Classification des variétés approximativement Kählériennes homogènes », *Ann. Global Anal. Geom.* **27** (2005), p. 201-225.

[7] ———, « Variétés de Gray et géométries spéciales en dimension 6 », Thèse, École Polytechnique, Palaiseau, 2005.

[8] S. Chiossi & S. Salamon, « The intrinsic torsion of SU(3) and G_2 structures », in *Differential Geometry, Valencia 2001*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, p. 115-133.

[9] R. Cleyton & S. Ivanov, « Conformal equivalence between certain geometries in dimension 6 and 7 », math.DG/0607487.

[10] L. David & P. Gauduchon, « The Bochner-flat geometry of weighted projective spaces, in 'Perspectives in Riemannian geometry' », in *CRM Proc. Lecture Notes*, vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, 2006, p. 109-156.

[11] M. Falcitelli, A. Farinola & S. Salamon, « Almost-Hermitian geometry », *Diff. Geom. Appl.* **4** (1994), p. 259-282.

[12] A. Gray, « The structure of nearly Kähler manifolds », *Math. Ann.* **223** (1976), p. 233-248.

[13] A. Gray & L. M. Hervella, « The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants », *Ann. Mat. Pura Appl.* **123** (1980), p. 35-58.

[14] L. Hervella & E. Vidal, « Nouvelles géométries pseudo-Kählériennes G_1 et G_2 », *C. R. Acad. Sci. Paris* **283** (1976), p. 115-118.

[15] N. Hitchin, « Kählerian twistor spaces », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **43** (1981), p. 133-150.

[16] ———, « The geometry of three-forms in six dimensions », *J. Diff. Geom.* **55** (2000), p. 547-576.

[17] ———, « Stable forms and special metrics, Global differential geometry : the mathematical legacy of A. Gray », in *Contemp. Math.*, vol. 288, Amer. Math. Soc., Providence, 2001, p. 70-89.

[18] V. Kirichenko, « K-spaces of maximal rank », *Mat. Zametki* **22** (1977), p. 465-476.

[19] F. Martin Cabrera, « On Riemannian manifolds with G_2 structures », *Boll. Un. Mat. Ital. A* **10** (1996), p. 99-112.

[20] ———, « Special almost Hermitian geometry », *J. Geom. Phys.* **55** (2005), p. 450-470.

[21] P. A. Nagy, « On nearly Kähler geometry », *Ann. Global Anal. Geom* **22** (2002), p. 167-178.

[22] N. R. O'Brian & J. H. Rawnsley, « Twistor spaces », *Ann. Global Anal. Geom.* **3** (1985), p. 29-58.

[23] R. Penrose, « The twistor programme », *Reports on Math. Phys.* **12** (1977), p. 65-76.

[24] R. Reyes Carrión, « Some special geometries defined by Lie groups », Thèse, Oxford, 1993.

[25] S. Salamon, « Riemannian geometry and holonomy groups », in *Pitman Research Notes in Math.*, vol. 201, Longman Scientific and Technical, New York, 1989.

[26] M. J. Slupinski, « The twistor space of the conformal six sphere and vector bundles on quadrics », *J. Geom. Phys.* **19** (1996), p. 246-266.

[27] F. Tricerri & L. Vanhecke, « Curvature tensors on almost Hermitian manifolds », *Trans. Amer. math. Soc.* **267** (1981), p. 365-397.

Manuscrit reçu le 10 novembre 2005,
accepté le 10 novembre 2006.

Jean-Baptiste BUTRUILLE
Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
site de Saint-Martin
2, av. Adolphe Chauvin
95302 Cergy-Pontoise Cedex (France)
Jean-Baptiste.Butruille@u-cergy.fr