ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Naoufel BATTIKH

Relation entre les conjectures de Farrell-Jones en K-théories algébrique et hermitienne

Tome 57, nº 1 (2007), p. 197-207.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_1_197_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
57, 1 (2007) 197-207

RELATION ENTRE LES CONJECTURES DE FARRELL-JONES EN K-THÉORIES ALGÉBRIQUE ET HERMITIENNE

par Naoufel BATTIKH

Résumé. — On montre que si la conjecture de Farrell-Jones en K-théorie algébrique est vérifiée alors celle de la K-théorie hermitienne est équivalente à l'existence d'un entier $p \in Z$ tel que "assembly map" soit un isomorphisme en degré p et $p+1$.

Abstract. — We prove that if the Farrell-Jones conjecture for algebraic K-theory is true then the same conjecture for hermitian K-theory is equivalent to the fact that it exists $p \in Z$ such that the assembly map is an isomorphism in degrees p and $p+1$.

1. Introduction

Soient A un anneau et G un groupe discret. Dans [6] et pour tout $n \in Z$, Loday définit un morphisme de groupes

$$\lambda_n : \ h_n(BG, \mathcal{K}_A) \longrightarrow K_n(AG)$$

couramment appelé "assembly map". Les groupes d'homologie $h_n(BG, \mathcal{K}_A)$ étant les groupes d'homotopie $\pi_n(BG_+ \wedge \mathcal{K}_A)$ où $\mathcal{K}_A$ est le spectre de K-théorie algébrique de l'anneau A. D'une façon analogue et pour tout $n \in Z$, on définit pour un anneau hermitien A, un morphisme de groupes

$$\alpha_n : \ h_n(BG, \mathcal{L}_A) \longrightarrow L_n(AG)$$

où les groupes $h_n(BG, \mathcal{L}_A)$ sont les groupes d'homotopie $\pi_n(BG_+ \wedge \mathcal{L}_A)$ et $\mathcal{L}_A$ est le spectre de K-théorie hermitienne associé à A. Dans [3] Farrell

Mots-clés : K-théorie algébrique, K-théorie hermitienne, conjectures de Farrell-Jones.
Classification math. : 19D99.

et Jones ont conjecturé que pour $A = Z$ le morphisme λ_n est un isomorphisme pour tout $n \in Z$. Ils ont aussi conjecturé que si $A = Z\left[\frac{1}{2}\right]$, les morphismes α_n sont des isomorphismes. Dans cet article, on prouve que si A est un anneau hermitien pour lequel la conjecture de Farrell-Jones est vérifiée en K-théorie algébrique, celle de la K-théorie hermitienne est alors équivalente à l'existence d'un entier relatif p, tel que α_p et α_{p+1} soient des isomorphismes.

2. Les spectres $\mathcal{K}_A$ et $\mathcal{L}_A$

2.1. Définitions

Soit A un anneau. Pour tout $n \in Z$, on pose,

$$(\mathcal{K}_A)_n = \begin{cases} \Omega^{-n}\left(K_0(A) \times BGL(A)^+\right) & \text{si } n \leqslant 0 \\ K_0(S^n A) \times BGL(S^n A)^+ & \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

L'espace $S^n A$ étant la nième suspension algébrique de A. Loday montre dans [6] que $\mathcal{K}_A$ est un Ω-spectre et que pour tout $n \in Z$, on a

$$\pi_n(\mathcal{K}_A) = K_n(A) : \text{le nième groupe de K-théorie algébrique de A.}$$

De même si A est un anneau hermitien, on pose pour tout $n \in Z$

$$(\mathcal{L}_A)_n = \begin{cases} \Omega^{-n}\left(L_0(A) \times B_\varepsilon O(A)^+\right) & \text{si } n \leqslant 0 \\ L_0(S^n A) \times B_\varepsilon O(S^n A)^+ & \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

où ε est un élément du centre de A tel que $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$. Loday montre dans [6] que $\mathcal{L}_A$ est un Ω-spectre et que pour tout $n \in Z$,

$$\pi_n(\mathcal{L}_A) =_\varepsilon L_n(A) : \text{le nième groupe de K-théorie hermitienne de A.}$$

2.2. La structure multiplicative des spectres $\mathcal{K}_A$ et $\mathcal{L}_A$

Si A et B sont deux anneaux, un isomorphisme

$$\varphi : A^p \otimes B^q \longrightarrow (A \otimes B)^{pq}$$

de $A \otimes B-$modules permet par le produit tensoriel des matrices de définir un morphisme de groupes

$$GL_p(A) \times GL_q(B) \longrightarrow GL_{pq}(A \otimes B)$$

et donc une application continue

$$\gamma : BGL\,(A)^+ \times BGL\,(B)^+ \longrightarrow BGL\,(A \otimes B)^+$$

bien définie à homotopie faible près (cf. [6] pour plus de détails). D'autre part, le produit tensoriel des modules définit un produit

$$K_0\,(A) \times K_0\,(B) \longrightarrow K_0\,(A \otimes B)$$

et on a alors la proposition suivante :

Proposition 2.1 ([6]). — *Pour tous anneaux A et B, l'application*

$$\gamma : BGL\,(S^n A)^+ \wedge BGL\,(S^m B)^+ \longrightarrow BGL\left(S^{n+m}\,(A \otimes B)\right)^+$$

s'étend à un accouplement de spectres

$$\mathcal{K}_A \wedge \mathcal{K}_B \longrightarrow \mathcal{K}_{A \otimes B}$$

au sens de Whitehead [7].

3. “Assembly map”

3.1. “Assembly map” pour la K-théorie algébrique

Pour tout anneau A, le $\Omega-$spectre $\mathcal{K}_A$ définit une théorie d'homologie généralisée de la catégorie des CW-complexes finis dans celles des groupes abéliens (cf. [7]) et ce en posant, pour tout CW-complexe fini X,

$$h_n\,(X, \mathcal{K}_A) = \pi_n\,(X_+ \wedge \mathcal{K}_A)\,.$$

Soient A un anneau et G un groupe discret. L'inclusion

$$j : G \longrightarrow GL\,(ZG)$$

induit l'application

$$j^+ : BG \longrightarrow BGL\,(ZG)^+$$

En composant j^+ par l'application

$$\begin{aligned} BGL\,(ZG)^+ &\longrightarrow K_0\,(ZG) \times BGL\,(ZG)^+ \\ x &\longmapsto (0, x) \end{aligned}$$

on obtient l'application

$$BG \longrightarrow (\mathcal{K}_{ZG})_0$$

qui nous permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.1 ([6]). — *La composée*

$$(\mathcal{K}_A)_n \wedge BG_+ \longrightarrow (\mathcal{K}_A)_n \wedge (\mathcal{K}_{ZG})_0 \longrightarrow (\mathcal{K}_{AG})_n$$

définit un morphisme de spectres.

Ce morphisme de spectres induit par passages aux groupes d'homotopies "l'assembly map" :

$$\lambda_n : \; h_n (BG, \mathcal{K}_A) \longrightarrow K_n (AG)$$

3.2. "Assembly map" pour la K-théorie hermitienne

Soient A un anneau hermitien contenant $\frac{1}{2}$ et G un groupe discret. L'anneau AG est muni de l'antiinvolution

$$\overline{\sum a_i g_i} = \sum \overline{a_i} g_i^{-1}$$

De façon analogue à la K-théorie et en utilisant l'inclusion

$$G \longrightarrow_{\varepsilon} O(ZG)$$

$$g \longmapsto \varphi \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi^{-1} \quad \text{où } \varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

on définit "l'assembly map" pour la K-théorie hermitienne

$$\alpha_n : \; h_n (BG, \mathcal{L}_A) \longrightarrow_{\varepsilon} L_n (AG)$$

Ce qui nous permet d'énoncer les conjectures de Farrell et Jones :

Conjecture 3.2 ([2]). — *Pour tout groupe G sans torsion les morphismes*

$$\lambda_n : \; h_n (BG, \mathcal{K}_Z) \longrightarrow K_n (ZG) \quad \textit{et } \alpha_n : \; h_n (BG, \mathcal{L}_{Z'}) \longrightarrow_{\varepsilon} L_n (Z'G)$$

sont des isomorphismes pour tout $n \in Z$. (L'anneau Z' étant $Z\left[\frac{1}{2}\right]$).

Remarque 3.3 ([1]). — Cette conjecture de Farrell-Jones est fausse pour un anneau quelconque puisque si on prend $G = C$: le groupe cyclique infini, la formule de Bass-Heller-Swan [3] pour $K_n (RC) = K_n \left(R\left[t, t^{-1}\right]\right)$ induit que

$$K_n (RC) \simeq K_{n-1} (R) \oplus K_n (R) \oplus NK_n (R) \oplus NK_n (R)$$

où $NK_n (R)$ désigne le coker de l'inclusion $K_n (R) \longrightarrow K_n (R[t])$ qui n'est pas nul en général. D'autre part et puisque S^1 est un modèle de BC, on a

$$h_n (BG, \mathcal{K}_A) \simeq K_{n-1} (R) \oplus K_n (R) .$$

4. Foncteur hyperbolique et foncteur oubli

4.1. Définition

Soit A un anneau hermitien. On notera $\mathcal{P}(A)$ la catégorie dont les objets sont les A-modules projectifs de type fini et les morphismes sont les isomorphismes et on notera ${}_{\varepsilon}\mathcal{Q}(A)$ la catégorie dont les objets sont les A-modules projectifs de type fini munis de forme ε-hermitienne et les morphismes sont les isométries. Le foncteur "hyperbolique"

$$H : \mathcal{P}(A) \longrightarrow_{\varepsilon} \mathcal{Q}(A)$$

est le foncteur qui à tout A-module M associe $H(M) = M \oplus {}^{t}M$ $({}^{t}M$ étant le dual de $M)$ qu'on munit de la forme ε-hermitienne associée à l'isomorphisme

$$\Theta : M \oplus^{t} M \longrightarrow^{t} \left(M \oplus^{t} M\right) \simeq^{t} M \oplus M$$

définie par la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

A tout isomorphisme $f : M \longrightarrow N$, on associe l'isométrie

$$H(f) : H(M) \longrightarrow H(N)$$

définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & {}^{t}f^{-1} \end{pmatrix}$$

Ce foncteur induit une application

$$K_0(A) \longrightarrow_{\varepsilon} L_0(A)$$

D'autre part, on a un morphisme de groupes

$$GL_r(A) \longrightarrow_{\varepsilon} O_{r,r}(A)$$

défini par la correspondance

$$M \longrightarrow \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & {}^{t}\overline{M}^{-1} \end{pmatrix}$$

qui induit après passage aux limites inductives le morphisme

$$GL(A) \longrightarrow_{\varepsilon} O(A)$$

d'où l'application

$$(\mathcal{K}_A)_0 \longrightarrow (\mathcal{L}_A)_0$$

On notera ${}_{\varepsilon}\mathcal{U}\,(A)$ la fibre homotopique de cette application. Le foncteur “oubli”

$$F:\ {}_{\varepsilon}\mathcal{Q}\,(A) \longrightarrow \mathcal{P}\,(A)$$

est le foncteur induit par les inclusions des objets et des morphismes. Ce foncteur induit une application

$$ {}_{\varepsilon}L_0\,(A) \longrightarrow K_0\,(A)$$

D'autre part, l'inclusion naturelle de ${}_{\varepsilon}O_{r,r}\,(A)$ dans $GL_{2r}\,(A)$ induit, par passage aux limites inductives le morphisme

$$ {}_{\varepsilon}O\,(A) \longrightarrow GL\,(A)$$

d'où l'application

$$(\mathcal{L}_A)_0 \longrightarrow (\mathcal{K}_A)_0$$

On notera ${}_{\varepsilon}\mathcal{V}\,(A)$ la fibre homotopique de cette application. Ceci nous amène à énoncer le théorème suivant qui est dû à Karoubi.

Théorème 4.1 ([5]). — *Soit A un anneau hermitien contenant un élément λ dans son centre vérifiant $\lambda + \bar{\lambda} = 1$ (cette condition est satisfaite si $\frac{1}{2} \in A$). Il existe alors une équivalence d'homotopie naturelle entre les espaces $\Omega_{\varepsilon}\mathcal{U}\,(A)$ et ${}_{-\varepsilon}\mathcal{V}\,(A)$.*

Pour tout $n \geqslant 0$ on pose ${}_{\varepsilon}U_n\,(A) = \pi_n\left({}_{\varepsilon}\mathcal{U}\,(A)\right)$ et ${}_{\varepsilon}V_n\,(A) = \pi_n\left({}_{\varepsilon}\mathcal{V}\,(A)\right)$. Pour $n \leqslant 0$ on pose, ${}_{\varepsilon}U_n\,(A) = {}_{\varepsilon}U_0\,(S^{-n}A)$ et ${}_{\varepsilon}V_n\,(A) = {}_{\varepsilon}V_0\,(S^{-n}A)$.

Pour tout $n \in Z$ on aura alors

$$ {}_{\varepsilon}U_{n+1}\,(A) \simeq {}_{-\varepsilon} V_n\,(A)\,.$$

On aura aussi les longues suites exactes suivantes

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon} V_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon} L_n(A) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon} V_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow {}_{\varepsilon} L_{n+1}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon} U_n(A) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon} L_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon} U_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

5. Relation entre les conjectures de Farrell-Jones

5.1. Les spectres ${}_{\varepsilon}\mathcal{U}_A$ et ${}_{\varepsilon}\mathcal{V}_A$.

Soit A un anneau hermitien. Pour tout $n \in Z$, on notera $\left({}_{\varepsilon}\mathcal{U}_A\right)_n$ la fibre homotopique de l'application $(\mathcal{K}_A)_n \longrightarrow \left({}_{\varepsilon}\mathcal{L}_A\right)_n$ induite par le foncteur hyperbolique. De même on notera $\left({}_{\varepsilon}\mathcal{V}_A\right)_n$ la fibre homotopique de l'application $\left({}_{\varepsilon}\mathcal{L}_A\right)_n \longrightarrow (\mathcal{K}_A)_n$ induite par le foncteur oubli et on a le lemme suivant.

LEMME 5.1. — *Pour tout anneau hermitien contenant $\frac{1}{2}$ les suites d'espaces $({}_\varepsilon\mathcal{U}_A)_*$ et $({}_\varepsilon\mathcal{V}_A)_*$ sont des $\Omega-$spectres et pour tout $n \in Z$, on a*

$$\Omega\left({}_\varepsilon\mathcal{U}_A\right)_n \simeq \left({}_{-\varepsilon}\mathcal{V}_A\right)_n$$

Démonstration. —

Les applications $S^1 \wedge ({}_\varepsilon\mathcal{U}_A)_n \longrightarrow ({}_\varepsilon\mathcal{U}_A)_{n+1}$ et $S^1 \wedge ({}_\varepsilon\mathcal{V}_A)_n \longrightarrow ({}_\varepsilon\mathcal{V}_A)_{n+1}$ sont induites par les diagrammes suivant

$$\begin{tikzcd}
S^1 \wedge ({}_\varepsilon\mathcal{U}_A)_n \arrow[r] & S^1 \wedge (\mathcal{K}_A)_n \arrow[r] \arrow[d] & S^1 \wedge ({}_\varepsilon\mathcal{L}_A)_n \arrow[d] \\
({}_\varepsilon\mathcal{U}_A)_{n+1} \arrow[r] & (\mathcal{K}_A)_{n+1} \arrow[r] & ({}_\varepsilon\mathcal{L}_A)_{n+1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
S^1 \wedge ({}_\varepsilon\mathcal{V}_A)_n \arrow[r] & S^1 \wedge ({}_\varepsilon\mathcal{L}_A)_n \arrow[r] \arrow[d] & S^1 \wedge (\mathcal{K}_A)_n \arrow[d] \\
({}_\varepsilon\mathcal{V}_A)_{n+1} \arrow[r] & ({}_\varepsilon\mathcal{L}_A)_{n+1} \arrow[r] & (\mathcal{K}_A)_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Ce qui induit que leur adjointes sont des équivalences d'homotopies. Ensuite pour tout $n \in Z$, on a

$$({}_\varepsilon\mathcal{V}_A)_n = \begin{cases} \Omega^{-n}\left({}_\varepsilon\mathcal{V}\left(A\right)\right) \text{ si } n \leqslant 0 \\ {}_\varepsilon\mathcal{V}\ \left(S^n A\right) \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

et

$$({}_\varepsilon\mathcal{U}_A)_n = \begin{cases} \Omega^{-n}\left({}_\varepsilon\mathcal{U}\left(A\right)\right) \text{ si } n \leqslant 0 \\ {}_\varepsilon\mathcal{U}\left(S^n A\right) \text{ si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

d'où le fait que pour tout $n \in Z$,

$$\Omega\left({}_\varepsilon\mathcal{U}_A\right)_n \simeq \left({}_{-\varepsilon}\mathcal{V}_A\right)_n$$

□

THÉORÈME 5.2. — *Soit A un anneau hermitien, contenant $\frac{1}{2}$, pour lequel la conjecture de Farrell-Jones est vraie en K-théorie algébrique. Celle de la K-théorie hermitienne est alors équivalente à l'existence d'un entier $n \in Z$ tel que α_n et α_{n-1} soient des isomorphismes.*

Démonstration. — Pour tout $n \in Z$, on a les diagrammes de suites exactes suivants :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & h_n(BG,{}_\varepsilon\mathcal{U}_A) & \to & h_n(BG,\mathcal{K}_A) & \to & h_n(BG,{}_\varepsilon\mathcal{L}_A) & \to & h_{n-1}(BG,{}_\varepsilon\mathcal{U}_A) & \to \cdots \\
& \downarrow & & \lambda_n \downarrow & & \alpha_n \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & {}_\varepsilon U_n(AG) & \to & K_n(AG) & \to & {}_\varepsilon L_n(AG) & \to & {}_\varepsilon U_{n-1}(AG) & \to \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & h_n(BG,{}_\varepsilon\mathcal{V}_A) & \to & h_n(BG,{}_\varepsilon\mathcal{L}_A) & \to & h_n(BG,\mathcal{K}_A) & \to & h_{n-1}(BG,{}_\varepsilon\mathcal{V}_A) & \to \cdots \\
& \downarrow & & \alpha_n \downarrow & & \lambda_n \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & {}_\varepsilon V_n(AG) & \to & {}_\varepsilon L_n(AG) & \to & K_n(AG) & \to & {}_\varepsilon V_{n-1}(AG) & \to \cdots
\end{array}$$

Supposons donc que la conjecture soit vraie en K-théorie algébrique et que α_{n-1} et α_n soient des isomorphismes. On a alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to & h_n(BG,{}_\varepsilon\mathcal{L}_A) & \to & h_n(BG,\mathcal{K}_A) & \to & h_{n-1}(BG,{}_\varepsilon\mathcal{V}_A) & \cdots \\
& \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & {}_\varepsilon L_n(AG) & \to & K_n(AG) & \to & {}_\varepsilon V_{n-1}(AG) & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\to & h_{n-1}(BG,{}_\varepsilon\mathcal{L}_A) & \to & h_{n-1}(BG,\mathcal{K}_A) & \to \\
& \wr\downarrow & & \wr\downarrow & \\
\to & {}_\varepsilon L_{n-1}(AG) & \to & K_{n-1}(AG) & \to
\end{array}$$

Ce diagramme montre que le morphisme suivant

$$h_{n-1}\left(BG,_\varepsilon \mathcal{V}_A\right) \longrightarrow_\varepsilon V_{n-1}\left(AG\right)$$

est un isomorphisme. Par conséquent le morphisme

$$h_n\left(BG,_\varepsilon \mathcal{U}_A\right) \longrightarrow_\varepsilon U_n\left(AG\right)$$

est aussi un isomorphisme. Du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & h_{n+1}(BG,\mathcal{K}_A) & \to & h_{n+1}(BG,_\varepsilon \mathcal{L}_A) & \to & h_n(BG,_\varepsilon \mathcal{U}_A) & \to & h_n(BG,_\varepsilon \mathcal{K}_A) & \to \\
& \wr\downarrow & & \downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & \\
\to & K_{n+1}(AG) & \to & {}_\varepsilon L_{n+1}(AG) & \to & {}_\varepsilon U_n(AG) & \to & K_n(AG) & \to
\end{array}$$

on déduit que le morphisme

$$h_{n+1}\left(BG,_\varepsilon \mathcal{L}_A\right) \longrightarrow_\varepsilon L_{n+1}\left(AG\right)$$

est surjectif. Considérons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & h_{n+1}(BG,{}_\varepsilon\mathcal{L}_A) & \longrightarrow & h_{n+1}(BG,\mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_n(BG,{}_\varepsilon\mathcal{V}_A) & \cdots \\
& \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & {}_\varepsilon L_{n+1}(AG) & \longrightarrow & K_{n+1}(AG) & \longrightarrow & {}_\varepsilon V_n(AG) & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow & h_n(BG,{}_\varepsilon\mathcal{L}_A) & \longrightarrow & h_n(BG,\mathcal{K}_A) & \longrightarrow \\
& \wr\downarrow & & \wr\downarrow & \\
\longrightarrow & {}_\varepsilon L_n(AG) & \longrightarrow & K_n(AG) & \longrightarrow
\end{array}$$

Ce diagramme montre que le morphisme

$$h_n\left(BG,_\varepsilon \mathcal{V}_A\right) \longrightarrow_\varepsilon V_n\left(AG\right)$$

est un isomorphisme. D'où le morphisme

$$h_{n+1}\left(BG,_\varepsilon \mathcal{U}_A\right) \longrightarrow_\varepsilon U_{n+1}\left(AG\right)$$

est aussi un isomorphisme. Soit enfin, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & h_{n+1}(BG,_\varepsilon\mathcal{U}_A) & \longrightarrow & h_{n+1}(BG,\mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n+1}(BG,_\varepsilon\mathcal{L}_A) & \cdots \\
 & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & {}_\varepsilon U_{n+1}(AG) & \longrightarrow & K_{n+1}(AG) & \longrightarrow & {}_\varepsilon L_{n+1}(AG) & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\longrightarrow & h_n(BG,_\varepsilon\mathcal{U}_A) & \longrightarrow & h_n(BG,\mathcal{K}_A) & \longrightarrow \\
 & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & \\
\longrightarrow & {}_\varepsilon U_n(AG) & \longrightarrow & K_n(AG) & \longrightarrow
\end{array}$$

Ce diagramme prouve que le morphisme

$$\alpha_{n+1} : h_{n+1}\left(BG,_\varepsilon \mathcal{L}_A\right) \longrightarrow_\varepsilon L_{n+1}\left(AG\right)$$

est un isomorphisme. D'un autre côté, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & h_n(BG,\mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_n(BG,_\varepsilon\mathcal{L}_A) & \longrightarrow & h_{n-1}(BG,_\varepsilon\mathcal{U}_A) & \cdots \\
 & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & K_n(AG) & \longrightarrow & {}_\varepsilon L_n(AG) & \longrightarrow & {}_\varepsilon U_{n-1}(AG) & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\longrightarrow & h_{n-1}(BG,\mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n-1}(BG,_\varepsilon\mathcal{L}_A) & \longrightarrow \\
 & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & \\
\longrightarrow & K_{n-1}(AG) & \longrightarrow & {}_\varepsilon L_{n-1}(AG) & \longrightarrow
\end{array}$$

montre que le morphisme

$$h_{n-1}\left(BG,_\varepsilon \mathcal{U}_A\right) \longrightarrow_\varepsilon U_{n-1}\left(AG\right)$$

est un isomorphisme. Ce qui implique que le morphisme

$$h_{n-2}\left(BG,_\varepsilon \mathcal{V}_A\right) \longrightarrow_\varepsilon V_{n-2}\left(AG\right)$$

l'est aussi. Ensuite le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & h_{n-1}(BG,\mathcal{K}_A) & \to & h_{n-2}(BG,_\varepsilon\mathcal{V}_A) & \to & h_{n-2}(BG,_\varepsilon \mathcal{L}_A) & \to & h_{n-2}(BG,\mathcal{K}_A) & \to \\
 & \downarrow & & \lambda_n \downarrow & & \alpha_n \downarrow & & \downarrow & \\
\to & K_n(AG) & \to & {}_\varepsilon V_{n-2}(AG) & \to & {}_\varepsilon L_{n-2}(AG) & \to & K_{n-2}(AG) & \to
\end{array}$$

montre que le morphisme

$$h_{n-2}\,(BG,_{\varepsilon}\mathcal{L}_A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_{n-2}\,(AG)$$

est injectif. Considérons alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & h_{n-1}(BG,\mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n-1}(BG,_{\varepsilon}\mathcal{L}_A) & \longrightarrow & h_{n-2}(BG,_{\varepsilon}\mathcal{U}_A) & \cdots \\
 & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & K_{n-1}(AG) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_{n-1}(AG) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}U_{n-2}(AG) & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow & h_{n-2}(BG,\mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n-2}(BG,_{\varepsilon}\mathcal{L}_A) & \longrightarrow \\
 & \wr\downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & K_{n-2}(AG) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_{n-2}(AG) & \longrightarrow
\end{array}$$

On en déduit que le morphisme

$$h_{n-2}\,(BG,_{\varepsilon}\mathcal{U}_A) \longrightarrow_{\varepsilon} U_{n-2}\,(AG)$$

est un isomorphisme. Par conséquent le morphisme

$$h_{n-3}\,(BG,_{\varepsilon}\mathcal{V}_A) \longrightarrow_{\varepsilon} V_{n-3}\,(AG)$$

l'est aussi. Soit enfin le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & h_{n-1}(BG,\mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n-2}(BG,_{\varepsilon}\mathcal{V}_A) & \longrightarrow & h_{n-2}(BG,_{\varepsilon}\mathcal{L}_A) & \cdots \\
 & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & K_{n-1}(AG) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}V_{n-2}(AG) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_{n-2}(AG) & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow & h_{n-2}(BG,\mathcal{K}_A) & \longrightarrow & h_{n-3}(BG,_{\varepsilon}\mathcal{V}_A) & \longrightarrow \\
 & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & \\
\longrightarrow & K_{n-2}(AG) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}V_{n-3}(AG) & \longrightarrow
\end{array}$$

Ce diagramme montre que le morphisme

$$\alpha_{n-2} : h_{n-2}\,(BG,_{\varepsilon}\mathcal{L}_A) \longrightarrow_{\varepsilon} L_{n-2}\,(AG)$$

est un isomorphisme. □

Remarque 5.3. — D'une façon analogue, on peut montrer l'équivalent du théorème 5.4 pour les conjectures de Novikov [4] en K-théories algébrique et hermitienne.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bartels & H. Reich, « On the Farrell-Jones conjectures for higher algebraic K-theory », Preprintreihe SFB, 2003.

[2] F. T. Farrell & L. Jones, « Isomorphism conjectures in algebraic K-theory », *J. Amer, Math. Soc.* **6** (1993), n° 2, p. 249-297.

[3] A. H. H. Bass & R. G. Swan, « The whitehead group of polynomial extension », *Inst. hautes études sci.* **22** (1964), p. 61-79.

[4] W. C. Hsiang, *Borel's conjecture, Novikov's conjecture and the K-theoritic analogue*, World scientific book, Singapour, 1989.

[5] M. Karoubi, « Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne », *Annals of mathematics* **112** (1980), p. 259-282.

[6] J.-L. Loday, « K-théorie algébrique et représentation de groupes », *Ann. Sci. Ecole Normale Sup. Sér. 4* **9** (1976), n° 3, p. 309-377.

[7] G. W. Whitehead, « Generalised homology theories », *Trans. A. M. S* **102** (1962), p. 227-283.

Manuscrit reçu le 9 novembre 2005,
révisé le 3 mars 2006,
accepté le 23 mars 2006.

Naoufel BATTIKH
Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Nabeul
Campus universitaire
Merazka, 8000 Nabeul (Tunisie)
naoufelbattikh@yahoo.fr