ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Christian MAUDUIT

**Propriétés arithmétiques des substitutions et automates infinis**

Tome 56, nº 7 (2006), p. 2525-2549.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2006__56_7_2525_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**56**, 7 (2006) 2525-2549

# PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES SUBSTITUTIONS ET AUTOMATES INFINIS

**par Christian MAUDUIT**

Résumé. — L'objet de ce travail est d'étudier les propriétés arithmétiques et statistiques des mots infinis et des suites de nombres entiers engendrés par des substitutions sur un alphabet infini ou par des automates déterministes ayant un nombre infini dénombrable d'états. En particulier, nous montrons que si $u$ est une suite de nombres entiers engendrée par un automate dont le graphe étiqueté associé représente une marche aléatoire de moyenne nulle sur un réseau de $\mathbb{R}^d$ ($d$ entier positif), alors la suite $(n\alpha)_{n\in u}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Abstract. — This work concerns the study of arithmetical and statistical properties of infinite words and sequences of integers generated by a substitution on an infinite denumerable alphabet or by a deterministic automata with an infinite denumerable set of states. In particular, we prove that if $u$ is a sequence of integers generated by an automaton whose associated graph represents a random walk with zero average on a $d$-dimensional lattice, then the sequence $(n\alpha)_{n\in u}$ is uniformly distributed modulo 1 if and only if $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

## 1. Introduction

De nombreux travaux ont été consacrés ces dernières années à l'étude des propriétés arithmétiques, combinatoires et dynamiques des mots infinis sur un alphabet fini engendrés par des substitutions sur un alphabet fini ou des automates finis. On trouvera dans [1], [30] et [31] une présentation assez détaillée de ces résultats.

L'objet de ce travail est de poursuivre cette étude en définissant d'une part de nouveaux algorithmes simples permettant d'engendrer des mots

*Mots-clés :* mots infinis, substitutions, automates, équirépartition modulo 1.
*Classification math. :* 11B85, 11K06, 11L15, 68Q45, 68R15.

infinis sur un alphabet fini et d'autre part en étudiant les propriétés arithmétiques de premiers exemples de tels mots infinis (ou de manière équivalente d'après la définition 2.1 d'ensembles de nombres entiers) engendrés par des substitutions sur un alphabet dénombrable ou par des automates dénombrables.

## 2. Notations et définitions

### 2.1. Généralités

Dans tout ce travail $g$ désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2. Si $x$ est un nombre réel on pose $e(x) = \exp(2i\pi x)$ et on dénote par $\|x\|$ la distance de $x$ à l'entier relatif le plus proche.

Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites de nombres réels strictement positifs, on dit que $u_n$ et $v_n$ sont de même ordre de grandeur s'il existe deux constantes $0 < c_1 \leqslant c_2$ telles que pour tout nombre entier positif $n$ on a

$$c_1 v_n \leqslant u_n \leqslant c_2 v_n.$$

Dans tout ce travail on désigne par $A$ un alphabet fini ou dénombrable. On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k$ l'ensemble des mots de longueur $k$ (*i.e.*, constitués de $k$ lettres) et $A^* = \cup_{k\geqslant 0} A^k$ l'ensemble des mots finis sur l'alphabet $A$.

Si $m \in A^*$ et si $a \in A$ on note $|m|_a$ le nombre d'apparitions de la lettre $a$ dans le mot $m$ et $|m| = \sum_{a\in A} |m|_a$ la longueur du mot $m$.

On appelle mot infini sur l'alphabet $A$ tout élément de $A^{\mathbb{N}}$.

Pour tout nombre entier positif $n = \sum_{i=0}^{\nu} n_i g^i$ (avec $n_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, \nu\}$ et $n_\nu \neq 0$ si $n \geqslant 1$), on note $\bar{n} = n_\nu n_{\nu-1} \cdots n_0 \in \{0, 1, \ldots, g-1\}^{\nu+1}$ sa représentation en base $g$.

Définition 2.1. — *Si $m \in A^{\mathbb{N}}$ et $a \in A$, on appelle support du mot $m$ relatif à la lettre $a$ l'ensemble des nombres entiers positifs $n$ tels que la $(n+1)$-ème lettre du mot $m$ est $a$.*

On note $[m]_a$ le support du mot $m$ relatif à la lettre $a$.

### 2.2. Substitution sur un alphabet infini

Soit $\sigma$ une substitution sur l'alphabet $A$, c'est-à-dire une application de $A$ vers $A^*$. Cette application peut s'écrire comme suit :

$$\forall a \in A,\ \sigma(a) = \sigma_0(a)\sigma_1(a)\cdots\sigma_{|\sigma(a)|-1}(a)$$

où $r \mapsto \sigma_r(a)$ est une application de $\{0, 1, \ldots, |\sigma(a)| - 1\}$ dans $A$.

Définition 2.2. — *On appelle graphe étiqueté associé à la substitution* $\sigma$, *le graphe* $\mathcal{G} = (A, U)$ *dans lequel*

(i) $A$ *est l'ensemble des sommets de* $\mathcal{G}$,

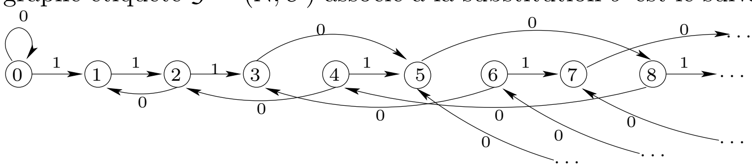
(ii) $U = \{(a, a', r) \in A \times A \times \mathbb{N},\ \sigma_r(a) = a'\}$ *est l'ensemble des arcs étiquetés de* $\mathcal{G}$.

On représente un arc étiqueté $(a, a', r)$ de la manière suivante :

$$a \xrightarrow{r} a'$$

*Exemple* 1. — Soit $\sigma$ la substitution définie sur $A = \mathbb{N}$ par $\sigma(2n) = (n)(2n+1)$ et $\sigma(2n+1) = (3n+2)$ pour tout nombre entier $n$.

Le graphe étiqueté $\mathcal{G} = (\mathbb{N}, U)$ associé à la substitution $\sigma$ est le suivant :



La substitution $\sigma$ se prolonge par concaténation en une application de $A^* \cup A^{\mathbb{N}}$, notée encore $\sigma$.

De même, si $\pi$ est une application d'un alphabet $A$ vers un alphabet $A'$, $\pi$ se prolonge par concaténation en une application de $A^* \cup A^{\mathbb{N}}$ vers $A'^* \cup A'^{\mathbb{N}}$, notée encore $\pi$, appelée projection lettre à lettre de l'alphabet $A$ vers l'alphabet $A'$.

Nous allons nous intéresser aux mots infinis sur l'alphabet $A$ points fixes de la substitution $\sigma$ (*i.e.*, vérifiant $\sigma(\mu) = \mu$) ainsi qu'aux projections lettre à lettre sur un autre alphabet de ces points fixes.

Pour assurer l'existence d'au moins un mot infini point fixe de $\sigma$, il est nécessaire de supposer l'existence d'au moins une lettre $\varepsilon \in A$ telle que $\sigma(\varepsilon) \in \varepsilon A^*$ et $|\sigma(\varepsilon)| \geqslant 2$. Cette condition est d'ailleurs suffisante si l'on suppose que la substitution $\sigma$ est non effaçante, c'est-à-dire que $|\sigma(a)| \geqslant 1$ pour tout $a \in A$. Nous ferons cette hypothèse dans toute la suite de cet article.

*Exemple* 2 (Substitution de l'ivrogne). — $A = \{\varepsilon\} \cup \mathbb{Z}$, $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon 1$ et $\sigma(n) = (n-1)(n+1)$ si $n \in \mathbb{N}$. Le mot infini $\mu = \varepsilon 1\, 0\, 2\, {-1}\, 1\, 1\, 3\, {-2}\, 0\, 0\, 2\, 0\, 2\, 2\, 4\, {-3}\, {-1}\, {-1}\, 1\, {-1}\, 1\, 1\, 3\, {-1}\, 1\, 1\, 3\, 1\, 3\, 3\, 5\, {-4}\, {-2}\, {-2}\, 0 \cdots$ est l'unique point fixe non vide de la substitution $\sigma$ sur l'alphabet $A$.

*Exemple* 3 (Substitution de l'ivrogne bidimensionnel). — $A = \{\varepsilon\} \cup \mathbb{Z}^2$, $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon(0,1)(-1,0)(0,-1)$ et $\sigma((n_1, n_2)) = (n_1 + 1, n_2)(n_1, n_2 + 1)$

$(n_1-1,n_2)(n_1,n_2-1)$ si $(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2$. Le mot infini $\mu=\varepsilon(0,1)(-1,0)$ $(0,-1)(1,1)(0,2)(-1,1)(0,0)(0,0)(-1,1)(-2,0)(-1,1)(1,-1)(0,0)(-1,-1)$ $(0,-2)(2,1)(1,2)(0,1)(1,0)\cdots$ est l'unique point fixe non vide de la substitution $\sigma$ sur l'alphabet $A$.

*Exemple* 4 (Substitution Infinibonacci). — $A=\mathbb{N}$, $\sigma(n)=0(n+1)$ si $n\in\mathbb{N}$. Le mot infini $\mu = 0\,1\,0\,2\,0\,1\,0\,3\,0\,1\,0\,2\,0\,1\,0\,4\,0\,1\,0\,2\,0\,1\,0\,3\,0\,1\,0\,2\,0\,1\,0\,5$ $0\,1\,0\,2\,0\,1\,0\,3\,0\,1\,0\,2\,0\,1\,0\,4\,0\,1\,0\,2\,0\,1\,0\,3\cdots$ est l'unique point fixe non vide de la substitution $\sigma$ sur l'alphabet $A$.

Il est facile de vérifier que pour tout $k\in\mathbb{N}$ fixé on a $[\mu]_k=\{2^{k+1}n+2^k-1,\ n\in\mathbb{N}\}$. La substitution Infinibonacci, qui se veut une généralisation des substitutions $n$-bonacci (voir par exemple [30, Paragraphe 7.5.2]) conduit donc à une situation dégénérée dans laquelle les supports du point fixe constituent une suite de progressions arithmétiques (on trouvera dans [6] une étude combinatoire de ce point fixe).

*Exemple* 5. — $A=\mathbb{N}$, $\sigma(0)=0\,1$ et $\sigma(n)=(n)(n-1)(n+1)$. La substitution $\sigma$ admet une infinité de points fixes. Pour chaque $n$ fixé, elle admet un unique point fixe commençant par la lettre $n$ que le lecteur pourra facilement déterminer.

Il nous semblerait intéressant d'étudier les propriétés combinatoires des mots infinis points fixes d'une substitution sur un alphabet infini ainsi que les propriétés des systèmes dynamiques qui leur sont associés ([30] et [31] présentent de manière détaillée cette théorie dans le cas des alphabets finis).

On trouvera dans [18] de premiers résultats concernant les propriétés ergodiques de certaines substitutions sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

### 2.3. Mot sur un alphabet fini engendré par une substitution sur un alphabet infini

DÉFINITION 2.3. — *On dit qu'une projection lettre à lettre $\pi$ d'un alphabet $A$ vers un alphabet $A'$ est admissible s'il existe une partie finie $B$ de l'alphabet $A$ telle que la restriction de $\pi$ à $A\setminus B$ est constante.*

Soit maintenant $m$ un mot infini sur un alphabet fini $A_0$.

DÉFINITION 2.4. — *On dit que $m\in A_0^{\mathbb{N}}$ est engendré par une substitution sur un alphabet infini s'il existe une substitution $\sigma$ sur un alphabet infini dénombrable $A$ et une projection lettre à lettre admissible $\pi$ de l'alphabet $A$ vers l'alphabet $A_0$ telles que $m=\pi(\mu)$ avec $\mu$ point fixe de $\sigma$.*

*Remarque 2.5.* — Il est important d'avoir une condition d'admissibilité dans la définition 2.4 car tout mot $m = m_0 \cdots m_n \cdots$ sur un alphabet fini $A_0$ peut être écrit sous la forme $m = \pi(\mu)$ où $\pi$ est la projection de $\mathbb{N}$ vers $A_0$ définie par $\pi(n) = m_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mu = 0\,1\,2\,3 \cdots n \cdots \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ point fixe de la substitution $\sigma$ sur l'alphabet $\mathbb{N}$ définie par $\sigma(n) = (2n)(2n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

*Exemple.* — Le mot infini sur l'alphabet $A_0 = \{a, b\}$,

$$m = a\,a\,b\,a\,a\,a\,a\,a\,a\,b\,b\,a\,b\,a\,a\,a\,a\,a\,a\,a\,a \cdots$$

est engendré par la substitution $\sigma$ définie dans l'exemple 2 via la projection $\pi$ définie par $\pi(0) = b$ et $\pi(x) = a$ si $x \in \{\varepsilon\} \cup \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$.

DÉFINITION 2.6. — *Soit $g$ un nombre entier, $g \geqslant 2$. On dit que la substitution $\sigma$ est de longueur constante $g$ si l'on a pour tout $a \in A$, $|\sigma(a)| = g$.*

Les exemples 2 et 3 correspondent à des substitutions de longueur constante égale respectivement à 2 et à 4.

### 2.4. $g$-automate infini déterministe

Un $g$-automate infini déterministe est un triplet $\mathcal{A}_g = (E, e_0, \varphi)$ avec

i) $E$ alphabet infini dénombrable (états),

ii) $e_0 \in E$ (état initial),

iii) $\varphi$ application de $E \times \{0, 1, \ldots, g-1\}$ vers $E$.

Pour tout $(e, r)$ dans $E \times \{0, 1, \ldots, g-1\}$ on pose $\varphi(e, r) = e{\cdot}\, r$ et on prolonge l'application $\varphi$ en une application de $E \times \mathbb{N}$ vers $E$, notée encore $\varphi$ en procédant de la manière suivante : si $n$ est un nombre entier positif dont la représentation en base $g$ est $\bar{n} = n_\nu n_{\nu-1} \cdots n_0 \in \{0, 1, \ldots, g-1\}^{\nu+1}$ on pose pour tout $e$ dans $E$

$$\varphi(e, n) = e{\cdot}\, n = (\cdots((e{\cdot}\, n_\nu) n_{\nu-1}) \cdots)\, n_0.$$

*Remarque 2.7.* — On peut toujours, quitte à ajouter un état supplémentaire, supposer que $\varphi(e_0, 0) = e_0$. Tous les automates que nous considérerons dans la suite de cet article vérifieront cette hypothèse.

*Remarque 2.8.* — Le déterminisme de $\mathcal{A}_g$ (qui traduit le fait que l'état initial $e_0$ est unique et que $\varphi$ est une application) constitue une hypothèse importante : contrairement au cas des automates finis, il n'y a pas équivalence entre la notion d'automate dénombrable déterministe et celle d'automate dénombrable non déterministe.

Définition 2.9. — *On dit qu'un mot infini $m = m_0 m_1 \cdots m_n \cdots$ sur un alphabet fini $A_0$ est engendré par un $g$-automate infini déterministe s'il existe un $g$-automate infini déterministe $\mathcal{A}_g = (E, e_0, \varphi)$ et une projection lettre à lettre admissible $\pi$ de l'alphabet $A$ vers l'alphabet $A_0$ telle que pour tout nombre entier $n$, on a $m_n = \pi(\varphi(e_0, n))$.*

Définition 2.10. — *On appelle états finaux de l'automate $\mathcal{A}_g$ les éléments de la partie finie $F$ de l'alphabet $E$ telle que la restriction de $\pi$ à $E \smallsetminus F$ est constante (voir définition 2.3).*

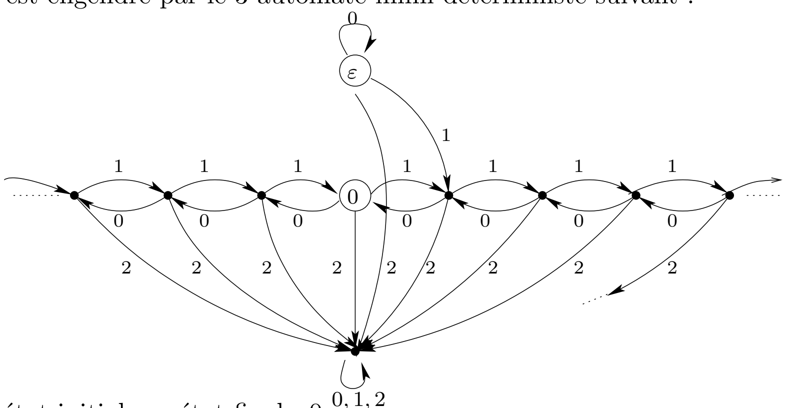
*Remarque 2.11.* — On pourrait définir des classes plus générales d'automates ou de substitutions sur des alphabets infinis dénombrables en affaiblissant notre condition d'admissibilité (définition 2.3) pour la projection lettre à lettre.

Ceci reviendrait, dans le cas des automates, à autoriser des ensembles finaux infinis vérifiant, par exemple, certaines propriétés de rationnalité. C'est dans cette direction que se développent actuellement de nombreux travaux extrêmement intéressants (voir [7], [35] et [36]).

Les définitions 2.4 et 2.9 se traduisent dans le cadre des ensembles de nombres entiers de la manière suivante :

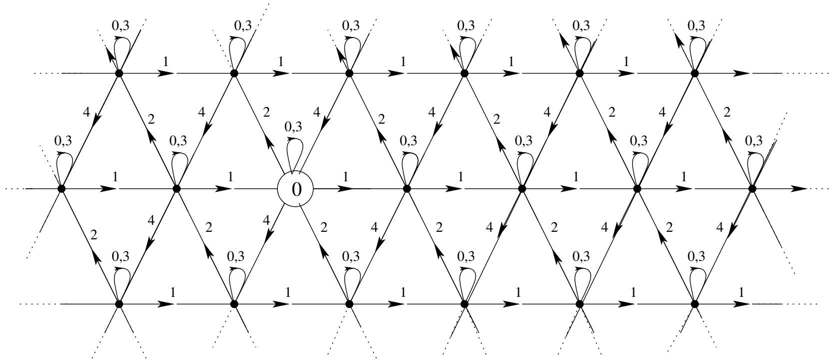
Définition 2.12. — *On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{N}$ est engendrée par une substitution sur un alphabet infini (resp. un $g$-automate infini déterministe) s'il existe un mot infini $m$ sur un alphabet fini $A_0$ engendré par une substitution sur un alphabet infini (resp. un $g$-automate infini déterministe) et une lettre $a \in A_0$ tels que $\mathcal{E} = [m]_a$.*

*Exemple* 6. — L'ensemble des nombres entiers, dont la représentation en base 3 comprend autant de 0 que de 1 mais ne comprend pas le chiffre 2, est engendré par le 3-automate infini déterministe suivant :



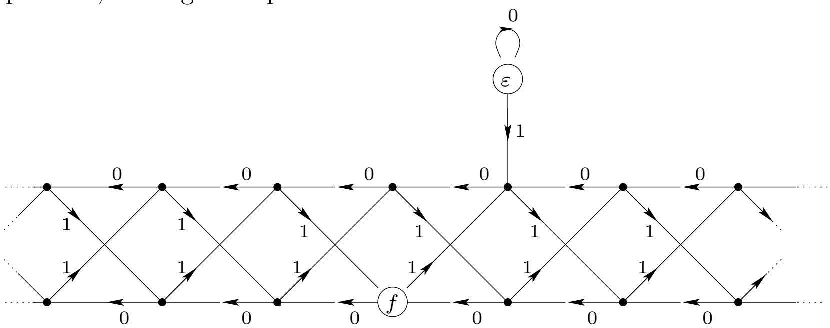

état initial : $\varepsilon$, état final : 0.

*Exemple* 7. — L'ensemble des nombres entiers, dont la représentation en base 5 comprend le même nombre de chiffres 1, 2 et 4, est engendré par le 5-automate infini déterministe suivant :



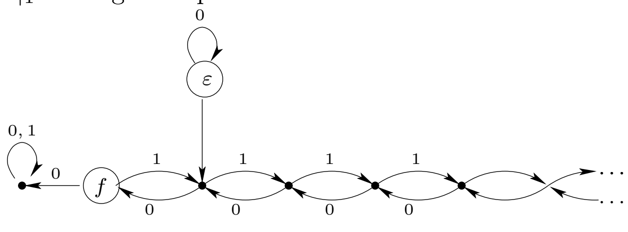
état initial : 0, état final : 0.

*Exemple* 8. — L'ensemble des nombres entiers, dont la somme des chiffres en base 2 est paire et dont la représentation en base 2 comprend autant de 0 que de 1, est engendré par le 2-automate infini déterministe suivant :



état initial : $\varepsilon$, état final : $f$.

*Exemple* 9. — L'ensemble des nombres entiers $n$, dont tout suffixe gauche de la représentation en base 2, contient au moins autant de 1 que de 0 et tels que $|\bar{n}|_0 = |\bar{n}|_1$ est engendré par le 2-automate infini déterministe suivant :



état initial : $\varepsilon$, état final : $f$.

*Exemple* 10. — Pour tout nombre entier $n$ positif $n = \sum_{i=0}^{\nu} n_i F_i$ (avec $n_\nu = 1$, $n_i \in \{0,1\}$ et $n_i n_{i+1} = 0$ pour tout $i \in \{0,1,\dots,\nu-1\}$ et $(F_i)_{i\geqslant 0}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ et $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ pour $i \geqslant 1$), on note $\bar{n}^{\mathrm{Fib}} = n_\nu n_{\nu-1} \cdots n_0$ sa représentation en base de Fibonacci (voir par exemple [30, Chap. 2]).

L'ensemble des nombres entiers dont la représentation en base de Fibonacci contient deux fois plus de 0 que de 1 est engendré par la substitution sur l'alphabet $\{\varepsilon\} \cup \mathbb{Z}$ définie par $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon 2$ et $\sigma(2n) = (2n-1)(2n+2)$, $\sigma(2n+1) = (2n)$ si $n \in \mathbb{Z}$. En effet cet ensemble est le support du point fixe non vide de $\sigma$ relatif à la lettre 0.

## 3. Substitutions de longueur constante sur un alphabet infini et automates infinis déterministes

Nous allons maintenant établir la propriété suivante, qui généralise au cas des alphabets infinis dénombrables le théorème classique de Cobham ([1, Chap. 6] ou [9] ou [30, Chap. 1]).

PROPOSITION 3.1. — *Un mot infini sur un alphabet fini est engendré par une substitution de longueur constante $g$ sur un alphabet infini si, et seulement si, il est engendré par un $g$-automate infini déterministe.*

*Démonstration.* — La preuve de cette proposition suit la même démarche que celle correspondant au cas des alphabets finis.

i) Supposons que $m \in A_0^{\mathbb{N}}$ soit engendré par une substitution $\sigma$ sur un alphabet infini $A$. On a donc $m = \pi(\mu)$ où $\pi$ est une projection lettre à lettre admissible de l'alphabet $A$ vers l'alphabet $A_0$ et $\mu = \mu_0\mu_1 \cdots \mu_n \cdots \in A^{\mathbb{N}}$ un point fixe de $\sigma$ ($\mu_0 = \varepsilon$, avec $\sigma(\varepsilon) \in \varepsilon A^*$ et $|\sigma(\varepsilon)| \geqslant 2$).

Associons à la substitution $\sigma$ l'automate $\mathcal{A}_g = (E, e_0, \varphi)$ défini en choisissant $E = A$, $e_0 = \varepsilon$ et $\varphi(a,r) = \sigma_r(a)$ pour tout $(a,r) \in A \times \{0,1,\dots,g-1\}$.

On remarquera que si $\mathcal{G} = (A,U)$ est le graphe étiqueté associé à $\sigma$, cela revient à poser $\varphi(a,r) = a'$ pour tout $(a,a',r) \in U$. On a ainsi $\mu_n = a \Leftrightarrow \mu_{gn+r} = \sigma_r(a)$ ce qui nous permet de montrer par récurrence sur des paquets de longueur $g^N$ que l'on a pour tout entier $n$, $\mu_n = \varphi(e_0, n)$. En effet, notons $(\mathcal{H}_N)$ l'hypothèse "$\forall n < g^N,\ \mu_n = \varphi(e_0,n)$". L'hypothèse $(\mathcal{H}_0)$ est vérifiée puisque $\mu_0 = \varepsilon = e_0 = \varphi(e_0, 0)$. Si l'on suppose que $(\mathcal{H}_N)$ est vérifiée, on écrit tout entier $n$ tel que $g^N \leqslant n < g^{N+1}$ sous la forme $n = gn' + r$ avec $n' < g^N$ et $r \in \{0,\dots,g-1\}$. On en déduit, puisque $\bar{n} = \overline{n'}r$, que

$$\varphi(e_0, n) = e_0 \cdot n = (e_0 \cdot n')r = \mu_{n'} \cdot r$$

par $(\mathcal{H}_N)$.

Or $\mu_{n'} = a \Rightarrow \mu_{gn'+r} = \sigma_r(a)$ donc

$$\varphi(e_0, n) = a\cdot r = \sigma_r(a)r = \mu_{gn'+r} = \mu_n,$$

ce qui termine la preuve par récurrence.

On en déduit que pour tout nombre entier $n$ on a $m_n = \pi(\varphi(e_0, n))$, ce qui montre que $m$ est engendré par un $g$-automate infini déterministe.

ii) Supposons réciproquement que $m \in A_0^{\mathbb{N}}$ soit engendré par un $g$-automate infini déterministe $\mathcal{A}_g = (E, e_0, \varphi)$. On a donc pour tout nombre entier $n$, $m_n = \pi(\varphi(e_0, n))$ où $\pi$ est une projection lettre à lettre admissible de l'alphabet $A$ vers l'alphabet $A_0$.

Associons à l'automate $\mathcal{A}_g$ la substitution $\sigma$ sur l'alphabet $A = E$ définie par

$$\forall e \in E,\ \sigma(e) = \sigma_0(e) \cdots \sigma_{g-1}(e)$$

avec $\sigma_r(e) = \varphi(e, r)$ pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$. Nous allons montrer que le mot infini $\mu = \mu_0\mu_1 \cdots \mu_n \cdots$ sur l'alphabet $E$ défini par $\mu_n = \varphi(e_0, n)$ pour tout entier $n$ est point fixe de la substitution $\sigma$, c'est-à-dire vérifie la propriété

$$\mu_n = e \Leftrightarrow \mu_{gn+r} = \sigma_r(e) \text{ pour tout } r \in \{0, 1, \ldots, g-1\}.$$

Ceci est vrai puisque l'on a

$$\mu_n = e \Leftrightarrow \varphi(e_0, n) = e$$

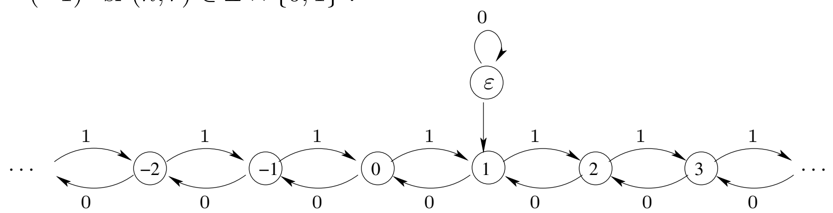
et

$$\varphi(e_0, gn + r) = e_0\cdot (gn + r) = (e_0\cdot n)r = e\cdot r = \sigma_r(e).$$

□

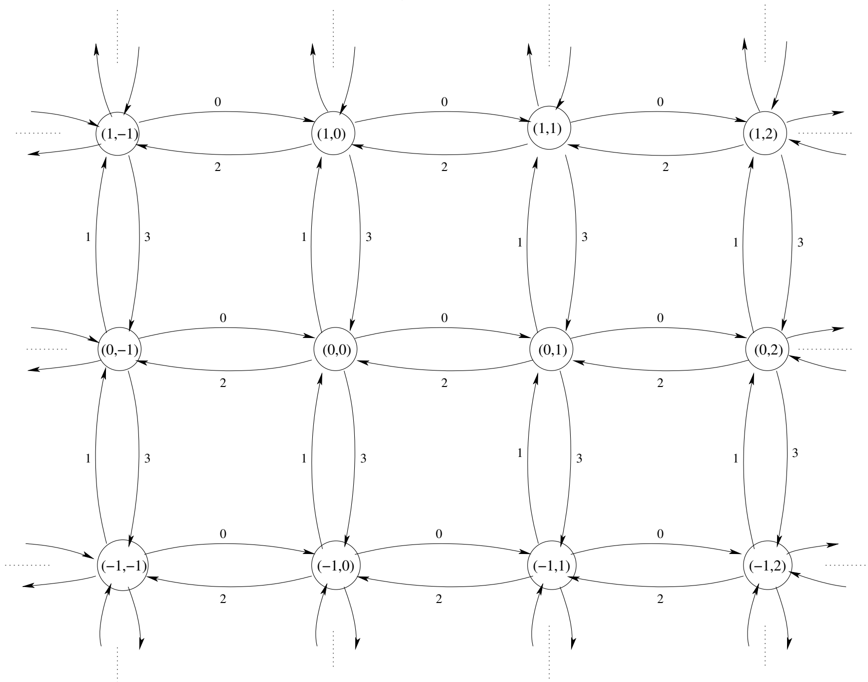
*Exemples.*

i) Le mot infini $m$ défini dans l'exemple 2 est engendré par le 2-automate $\mathcal{A}_2 = (\{\varepsilon\} \cup \mathbb{Z}, \varepsilon, \varphi)$ où $\varphi$ est définie par $\varphi(\varepsilon, 0) = \varepsilon$, $\varphi(\varepsilon, 1) = 1$ et $\varphi(n, r) = n - (-1)^r$ si $(n, r) \in \mathbb{Z} \times \{0, 1\}$ :




Le support de $m$ relatif à la lettre $b$ est l'ensemble des nombres entiers dont la représentation en base 2 contient autant de 0 que de 1.

ii) Le mot infini $m$ défini dans l'exemple 3 est engendré par le 4-automate $\mathcal{A}_4 = (\{\varepsilon\} \cup \mathbb{Z}^2, \varepsilon, \varphi)$ où $\varphi$ est définie par $\varphi(\varepsilon, 0) = \varepsilon$, $\varphi(\varepsilon, 1) = (0, 1)$, $\varphi(\varepsilon; 2) = (-1, 0)$, $\varphi(\varepsilon, 3) = (0, -1)$ et $\varphi((n_1, n_2), 0) = (n_1 + 1, n_2)$, $\varphi((n_1, n_2), 1) = (n_1, n_2 + 1)$, $\varphi((n_1, n_2), 2) = (n_1 - 1, n_2)$, $\varphi((n_1, n_2), 3) = (n_1, n_2 - 1)$ si $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ : (nous omettons l'état initial $\varepsilon$ dans la représentation graphique de l'automate)




Le support de $m$ relatif à la lettre $b$ est l'ensemble des nombres entiers dont la représentation en base 4 contient autant de 0 que de 2 et autant de 1 que de 3.

Il peut s'avérer difficile de démontrer qu'un mot infini ou une partie de $\mathbb{N}$ donnés ne sont pas engendrés par un $g$-automate infini déterministe.

En effet, on ne dispose pas dans le cas des automates infinis de lemme de la pompe ou de théorèmes d'espacements (voir [1], [15, Chap. IV], [29] ou [33] pour une liste des résultats connus dans cette direction concernant le cas des automates finis).

Il serait très intéressant d'établir de tels critères pour les automates infinis et de répondre en particulier aux questions suivantes :

*Problème 1 (Généralisation des théorèmes de Ritchie* [33] *et de Minsky–Papert* [29]*).* — Est-il vrai que l'ensemble des carrés parfaits et l'ensemble des nombres premiers ne sont engendrés par aucun $g$-automate infini déterministe ($g \geqslant 2$) ?

*Problème 2 (Généralisation du théorème de Cobham* [8]*).* — Si $g$ et $g'$ sont multiplicativement indépendants (*i.e.*, $g \geqslant 2$, $g' \geqslant 2$ et $\frac{\log g}{\log g'} \notin \mathbb{Q}$), est-il vrai que tout mot infini (resp. ensemble de nombres entiers) engendré à la fois par un $g$-automate et un $g'$-automate infini déterministe est ultimement périodique (resp. réunion d'un nombre fini de progressions arithmétiques) ?

## 4. Le théorème principal

L'objet de cette partie est d'étudier les propriétés statistiques des mots infinis et des ensembles de nombres entiers engendrés par des automates infinis et plus particulièrement l'équirépartition modulo un de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathcal{E}}$ lorsque $\mathcal{E}$ est engendré par un automate infini.

Comme nous le verrons cela revient, par le théorème de Weyl, à étudier le comportement des sommes d'exponentielles $W_N^{\mathcal{E}}(\alpha) := \sum_{\substack{n<N \\ n\in\mathcal{E}}} e(n\alpha)$. Si l'ensemble $\mathcal{E}$ est engendré par un automate fini on sait (voir par exemple [26]) que $\operatorname{card}\mathcal{E} \cap [1,N[= W_N^{\mathcal{E}}(0)$ est de même ordre de grandeur que $N^{\beta_1}(\log N)^{\beta_2}$ avec $(\beta_1,\beta_2) \in [0,1]\times\mathbb{N}$ et on sait également totalement caractériser les suites $\mathcal{E}$ pour lesquelles $W_N^{\mathcal{E}}(\alpha) = o(W_N^{\mathcal{E}}(0))$ pour tout nombre irrationnel $\alpha$ ([26]). On trouvera dans [27] et [28] une étude analogue dans le cas où $E$ est engendré par une substitution sur un alphabet fini.

Lorsque l'ensemble $\mathcal{E}$ est engendré par un automate infini, il n'est possible de déterminer l'ordre de grandeur de $W_N^{\mathcal{E}}(0)$ que lorsque l'automate engendrant $\mathcal{E}$ possède une structure particulière (voir par exemple [2], [3] et [20] pour de telles estimations).

Nous allons ainsi nous intéresser au cas particulier où cet automate est relié à une marche aléatoire de moyenne nulle sur un réseau de $\mathbb{R}^d$ et pour lequel $W_N^{\mathcal{E}}(0)$ est de même ordre de grandeur que $\frac{N^\beta}{(\log N)^{d/2}}$ avec $(\beta,d) \in [0,1]\times\mathbb{N}$.

Dans la suite de cette partie, on désigne par $d$ un nombre entier vérifiant $1 \leqslant d < g$ et $\mathcal{E}_d$ l'ensemble des nombres entiers dont la représentation en base $g$ ne comprend que les chiffres $0,1,\ldots,d$ et vérifie $|\bar{n}|_0 = \cdots = |\bar{n}|_d$.

Notons $\pi_{\mathcal{H}}$ la projection de $\mathbb{R}^{d+1}$ sur l'hyperplan $\mathcal{H} = \{(x_0,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^{d+1},\ x_0+\cdots+x_d = 0\}$ et $e_0,\ldots,e_d$ l'image par $\pi_{\mathcal{H}}$ de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

On vérifie facilement que $\mathcal{E}_d$ est engendré par le $g$-automate $\mathcal{A}_g^d = (E, \varepsilon, \varphi)$ avec $O_{\mathcal{H}}$ pour unique état final, où l'on a posé

$$E = \{\varepsilon\} \cup \pi_{\mathcal{H}}(\mathbb{Z}^{d+1}) \cup \{p\}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi(\varepsilon, 0) &= \varepsilon,\\
\varphi(\varepsilon, r) &= e_r \text{ si } r \in \{1, \dots, d\},\\
\varphi(x, r) &= x + e_r \text{ si } (x, r) \in \pi_{\mathcal{H}}(\mathbb{Z}^{d+1}) \times \{0, \dots, d\},\\
\varphi(x, r) &= p \text{ si } (x, r) \in \{\varepsilon\} \cup \pi_{\mathcal{H}}(\mathbb{Z}^{d+1}) \times \{d+1, \dots, g-1\},\\
\text{et} \quad \varphi(p, r) &= p \text{ si } r \in \{0, \dots, g-1\}.
\end{aligned}$$

*Exemple.* — Pour $(g, d) = (3, 1)$ on retrouve l'ensemble défini dans l'exemple 6.

La méthode développée par Fouvry et Mauduit dans [21] permet de traiter le cas présenté dans l'exemple 3 et, plus généralement, le cas des ensembles d'entiers $n$ dont la somme des chiffres en base $g$ est proche de la valeur moyenne $\frac{g-1}{2}\left[\log_g n\right]$.

L'objet de ce paragraphe est de généraliser cette étude au cas des ensembles de nombres entiers associés à une marche aléatoire de moyenne nulle sur un réseau de dimension $d$ quelconque.

Proposition 4.1. — *$\operatorname{card} \mathcal{E}_d \cap [1, g^\nu[$ est de même ordre de grandeur que $\frac{(d+1)^\nu}{\nu^{d/2}}$.*

*Démonstration.* — Pour tout nombre entier $k \geqslant 1$ on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{card} \mathcal{E}_d \cap [g^{k-1}, g^k[ &= \operatorname{card} \bigcup_{r=1}^{d} \left\{ r\mu, \mu \in \{0, \dots, d\}^{k-1} \text{ et } |r\mu|_0 = \cdots = |r\mu|_d \right\}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } (d+1) \nmid k \\ \dfrac{d(k-1)!}{\left(\left(\frac{k}{d+1}\right)!\right)^d \left(\frac{k}{d+1} - 1\right)!} & \text{si } (d+1) \mid k. \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit, en remarquant d'une part que

$$\frac{d(k-1)!}{\left(\left(\frac{k}{d+1}\right)!\right)^d \left(\frac{k}{d+1} - 1\right)!} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{d(d+1)^{(d+1)/2}(d+1)^{k-1}}{(2\pi k)^{d/2}}$$

(formule de Stirling) et d'autre part que l'on a

$$\text{(1)} \qquad \text{pour tout } x > 1\ , \ \sum_{k=1}^{\nu} \frac{x^k}{k^{d/2}} = \frac{x^{\nu+1}}{(x-1)\nu^{d/2}} + o\left(\frac{x^\nu}{\nu^{d/2+1}}\right)$$

uniformément pour tout entier $\nu \geqslant 1$ (voir par exemple [21, Lemme 2.3]) que

$$\begin{aligned}\operatorname{card} \mathcal{E}_d \cap [1, g^\nu[ &= \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{card} \mathcal{E}_d \cap [g^{k-1}, g^k[ \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ (d+1)\mid k}}^{\nu} \frac{d(k-1)!}{\left(\frac{k}{d+1}\right)!^d \left(\frac{k}{d+1}-1\right)!}\end{aligned}$$

est de même ordre de grandeur que $\frac{(d+1)^\nu}{\nu^{d/2}}$.

□

Théorème 4.2. — *Pour tout nombre réel irrationnel $\alpha$, la suite $(n\alpha)_{n\in\mathcal{E}_d}$ est équirépartie modulo 1.*

*Démonstration.* — D'après le critère de Weyl (voir par exemple [32, Chap. 1]) le théorème 4.2 est équivalent au fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ et pour tout $h \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ on a

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{E} \\ n<N}} e(nh\alpha) = o(\operatorname{card} \mathcal{E} \cap [1, N[),$$

c'est-à-dire au fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ on a

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{E} \\ n<N}} e(n\alpha) = o(\operatorname{card} \mathcal{E} \cap [1, N[). \tag{2}$$

Fixons $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ et posons pour tout $(K_1, \ldots, K_d) \in \mathbb{Z}^d$ et tout entier $\nu \geqslant 1$

$$S_\nu^{K_1,\ldots,K_d}(\alpha) = \sum_{\substack{g^{\nu-1} \leqslant n < g^\nu \\ \bar{n}\in\{0,1,\ldots,d\}^\nu \\ |\bar{n}|_0 - |\bar{n}|_1 = K_1 \\ \vdots \\ |\bar{n}|_0 - |\bar{n}|_d = K_d}} e(n\alpha).$$

La clef de la preuve du théorème 4.2 est la

Proposition 4.3. — *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, il existe une suite $(\varepsilon_\alpha(\nu))_{\nu\geqslant 1}$ tendant vers 0 lorsque $\nu$ tend vers l'infini et telle que l'on a uniformément pour tout $(K_1, \ldots, K_d) \in \mathbb{Z}^d$*

$$\left| S_\nu^{K_1,\ldots,K_d}(\alpha) \right| \leqslant \frac{(d+1)^\nu}{\nu^{d/2}} \varepsilon_\alpha(\nu).$$

Pour démontrer la proposition 4.3 nous aurons besoin de deux lemmes que nous montrons maintenant :

Lemme 4.4. — *Soit $d$ un nombre entier $d \geqslant 1$. Pour tout $(y_0, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, on a*

$$\Big|\sum_{r=0}^{d} e(y_r)\Big| \leqslant (d+1)\exp\Big(-\frac{16}{(d+1)^2}\sum_{r=1}^{d}\|y_r - y_0\|^2\Big).$$

*Démonstration.* — Pour tout $(y_0, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, on a

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{r=0}^{d} e(y_r)\Big|^2 &= d+1+2\sum_{0\leqslant s<r\leqslant d}\cos 2\pi(y_r - y_s)\\ &\leqslant d+1+2\frac{d(d-1)}{2} + 2\sum_{r=1}^{d}\cos 2\pi(y_r - y_0)\\ &\leqslant d+1+d(d-1)+2\sum_{r=1}^{d}\big(1-2\sin^2\pi(y_r - y_0)\big)\\ &\leqslant (d+1)^2 - 4\sum_{r=1}^{d}4\|y_r - y_0\|^2.\end{aligned}$$

La conclusion découle de la majoration classique $1 - x \leqslant \exp(-x)$ valable pour tout $x \geqslant 0$. □

Lemme 4.5. — *Pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$\|t-y\|^2 + \|gt-y\|^2 \geqslant \max\Big(\frac{1}{2}\|(g-1)t\|^2, \frac{1}{2g^2}\|(g-1)y\|^2\Big).$$

*Démonstration.* — La preuve résulte de la double application de la minoration $\|x\|^2 + \|x+x_0\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|x_0\|^2$ valide pour tout $(x, x_0) \in \mathbb{R}^2$ et dont on trouvera une démonstration par exemple dans [21, Lemme 3.3]. En effet, en posant tout d'abord $x = t - y$ et $x_0 = (g-1)t$ on obtient la minoration $\|t-y\|^2 + \|gt-y\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|(g-1)t\|^2$.

En posant maintenant $x = g(t-y)$ et $x_0 = (g-1)y$ on obtient la minoration

$$\begin{aligned}\|t-y\|^2 + \|gt-y\|^2 = \|\frac{1}{g}x\|^2 + \|x+x_0\|^2 &\geqslant \frac{1}{g^2}\|x\|^2 + \|x+x_0\|^2\\ &\geqslant \frac{1}{g^2}\|x\|^2 + \frac{1}{g^2}\|x+x_0\|^2 \geqslant \frac{1}{2g^2}\|x_0\|^2.\end{aligned}$$

□

*Démonstration de la proposition 4.3.* — Introduisons la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$S_\nu^{K_1,\dots,K_d}(\alpha;x_1,\dots,x_d)=\sum_{\substack{g^{\nu-1}\leqslant n<g^\nu\\ \bar{n}\in\{0,1,\dots,d\}^\nu}} e\Bigl(n\alpha+\sum_{s=1}^d(|n|_0-|n|_s-K_s)x_s\Bigr),$$

de sorte que l'on a

$$S_\nu^{K_1,\dots,K_d}(\alpha)=\int_{[0,1]^d} S_\nu^{K_1,\dots,K_d}(\alpha;x_1,\dots,x_d)\;dx_1\cdots dx_d.$$

On a

$$S_1^{K_1,\dots,K_d}(\alpha;x_1,\dots,x_d)=\sum_{r=1}^d e\left(r\alpha-(1+K_r)x_r\right)$$

et pour tout $\nu\geqslant 1$

$$\begin{aligned}
&S_{\nu+1}^{K_1,\dots,K_d}(\alpha;x_1,\dots,x_d)\\
&\quad=\sum_{r<g}\sum_{\substack{g^\nu\leqslant gn+r<g^{\nu+1}\\ \bar{n}r\in\{0,1,\dots,d\}^{\nu+1}}} e\Bigl((gn+r)\alpha+\sum_{s=1}^d\left(|gn+r|_0-|gn+r|_s-K_s\right)x_s\Bigr)\\
&\quad=\Bigl(e(x_1+\cdots x_d)+\sum_{r=1}^d e(r\alpha-x_r)\Bigr)\\
&\qquad\qquad\cdot\sum_{g^{\nu-1}\leqslant n<g^\nu} e\Bigl(gn\alpha+\sum_{s=1}^d(|n|_0-|n|_s-K_s)x_s\Bigr)\\
&\quad=\Bigl(e(x_1+\cdots x_d)+\sum_{r=1}^d e(r\alpha-x_r)\Bigr)S_\nu^{K_1,\dots,K_d}(g\alpha;x_1,\dots,x_d).
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $\nu\geqslant 1$ on a

$$\begin{aligned}
&S_\nu^{K_1,\dots,K_d}(\alpha;x_1,\dots,x_d)\\
&\quad=\Bigl(\sum_{r=1}^d e(rg^{\nu-1}\alpha-(1+K_r)x_r)\Bigr)\prod_{n=0}^{\nu-2}\Bigl(e(x_1+\cdots+x_d)+\sum_{r=1}^d e(rg^n\alpha-x_r)\Bigr)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\bigl|S_\nu^{K_1,\dots,K_d}(\alpha)\bigr|&\leqslant\int_{[0,1]^d}\bigl|S_\nu^{K_1,\dots,K_d}(\alpha;x_1,\dots,x_d)\bigr|\,dx_1\cdots dx_d\\
&\leqslant d\int_{[0,1]^d}\prod_{n=0}^{\nu-2}\Bigl|1+\sum_{r=1}^d e(rg^n\alpha-\sum_{s=1}^d\mu_{rs}x_s)\Bigr|\;dx_1\cdots dx_d,
\end{aligned}$$

où la suite $(\mu_{rs})_{(r,s)\in\{1,\dots,d\}^2}$ est définie par $\mu_{rr}=2$ et $\mu_{rs}=1$ si $r\neq s$.

Il résulte donc des lemmes 4.4 et 4.5 que

$$\begin{aligned}
&\left|S_\nu^{K_1,\dots,K_d}(\alpha)\right| \\
&\quad\leqslant d(d+1)^{\nu-1}\int_{[0,1]^d}\exp\biggl(-\frac{16}{(d+1)^2}\sum_{r=1}^{d}\sum_{n=0}^{\nu-2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left\|rg^n\alpha-\sum_{s=1}^{d}\mu_{rs}x_s\right\|^2\biggr)\,dx_1\cdots dx_d \\
&\quad\leqslant d(d+1)^{\nu-1}\int_{[0,1]^d}\exp\biggl(-\frac{8}{(d+1)^2}\sum_{r=1}^{d}\sum_{n=0}^{\nu-3} \\
&\qquad\biggl(\left\|rg^n\alpha-\sum_{s=1}^{d}\mu_{rs}x_s\right\|^2+\left\|rg^{n+1}\alpha-\sum_{s=1}^{d}\mu_{rs}x_s\right\|^2\biggr)\biggr)\,dx_1\cdots dx_d \\
&\quad\leqslant d(d+1)^{\nu-1}\int_{[0,1]^d}\exp\biggl(-\frac{4}{(d+1)^2}\sum_{r=1}^{d}\sum_{n=0}^{\nu-3} \\
&\qquad\max\biggl(\|r(g-1)g^n\alpha\|^2,\frac{1}{g^2}\cdot\left\|(g-1)\sum_{s=1}^{d}\mu_{rs}x_s\right\|^2\biggr)\biggr)\,dx_1\cdots dx_d.
\end{aligned}$$

Le nombre $\alpha$ étant irrationnel, il en est de même, pour $r\in\{1,\dots,d\}$, de $r(g-1)\alpha$ qui n'est donc pas un rationnel $g$-adique. Les $d$ suites $(\|r(g-1)g^n\alpha\|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tendent donc pas vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini, ce qui implique l'existence d'un nombre réel $\gamma$ vérifiant $0<\gamma<1$ et d'une suite strictement croissante d'entiers $\mathcal{U}$ telle que pour tout $n\in\mathcal{U}$ on a

$$\exp\biggl(-\frac{4}{(d+1)^2}\sum_{r=1}^{d}\|r(g-1)g^n\alpha\|^2\biggr)\leqslant\gamma.$$

On va donc, dans l'intégrale précédente, conserver le terme $\|r(g-1)g^n\alpha\|^2$ lorsque $n\in\mathcal{U}$ et le remplacer par $\frac{1}{g^2}\|(g-1)\sum_{s=1}^{d}\mu_{rs}x_s\|^2$ lorsque $n\notin\mathcal{U}$. Ceci nous conduit à la majoration valide pour tout $(K_1,\dots,K_d)\in\mathbb{Z}^d$ et pour tout entier $\nu\geqslant 3$ :

$$\begin{aligned}
&\left|S_\nu^{K_1,\dots,K_d}(\alpha)\right|\leqslant d(d+1)^{\nu}\gamma^{u(\nu)} \\
&\quad\int_{[0,1]^d}\exp\biggl(-\frac{4(\nu-2-u(\nu))}{(d+1)^2g^2}\sum_{r=1}^{d}\left\|(g-1)\sum_{s=1}^{d}\mu_{rs}x_s\right\|^2\biggr)\,dx_1\cdots dx_d
\end{aligned}$$

où l'on a posé pour tout $\nu\geqslant 3$

$$u(\nu)=\operatorname{card}\{n\leqslant\nu-3,\ n\in\mathcal{U}\}.$$

Quitte à extraire une sous-suite de la suite $\mathcal{U}$, on peut supposer que l'on a pour tout $\nu \geqslant 3$, $u(\nu) \leqslant \frac{\nu-2}{2}$.

Pour majorer l'intégrale multiple, effectuons le changement de variables ${}^t(y_1,\dots,y_d) = M{}^t(x_1,\dots,x_d)$ où $M = (g-1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $\det(M) = (g-1)(d+1)$ et $M \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})$ :

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^d} \exp\Big(-\frac{4(\nu-2-u(\nu))}{(d+1)^2g^2}\sum_{r=1}^d \Big\|(g-1)\sum_{s=1}^d \mu_{rs}x_s\Big\|^2\Big)\,dx_1\cdots dx_d \\ = \int_{[0,1]^d} \exp\Big(-\frac{4(\nu-2-u(\nu))}{(d+1)^2g^2}\sum_{r=1}^d \|y_r\|^2\Big)\,dy_1\cdots dy_d \\ = \Big(\int_0^1 \exp\Big(-\frac{4(\nu-2-u(\nu))}{(d+1)^2g^2}\|y\|^2\Big)\,dy\Big)^d \\ = \Big(2\int_0^{1/2} \exp\Big(-\frac{4(\nu-2-u(\nu))}{(d+1)^2g^2}y^2\Big)\,dy\Big)^d \\ \leqslant \frac{g^d(d+1)^d}{\nu-2-u(\nu))^{d/2}}.\end{aligned}$$

On en déduit donc que l'on a pour tout $(K_1,\dots,K_d) \in \mathbb{Z}^d$ et pour tout entier $\nu \geqslant 3$

$$\begin{aligned}\big|S_\nu^{K_1,\dots,K_d}(\alpha)\big| &\leqslant \frac{dg^d(d+1)^{\nu+d-1}\gamma^{u(\nu)}}{(\nu-2-u(\nu))^{d/2}} \\ &\leqslant \frac{dg^d(d+1)^{\nu+d-1}\gamma^{u(\nu)}}{\big(\frac{\nu-2}{2}\big)^{d/2}} \\ &\leqslant \frac{(d+1)^\nu}{\nu^{d/2}}\varepsilon_\alpha(\nu),\end{aligned}$$

où $\varepsilon_\alpha(\nu) = dg^d(d+1)^{d-1}\big(\frac{2\nu}{\nu-2}\big)^{d/2}\gamma^{y(\nu)}$ vérifie $\lim_{\nu\to+\infty}\varepsilon(\nu) = 0$, ce qui démontre la proposition 4.3. □

*Suite de la démonstration du théorème.* — Reprenons maintenant la démonstration de (2). Pour cela on écrit tout nombre entier $N$ sous la forme

$$N = C_1g^{\nu_1} + \cdots + C_\ell g^{\nu_\ell} \text{ avec } \ell \geqslant 1, \nu_1 > \cdots > \nu_\ell \geqslant 0 \quad \text{et } C_\lambda \in \{1,\dots,g-1\} \text{ pour tout } \lambda \in \{1,\dots,\ell\}. \tag{3}$$

On a ainsi $\operatorname{card}\mathcal{E} \cap [1, g^{\nu_1}[ \leqslant \operatorname{card}\mathcal{E} \cap [1, N[ < \operatorname{card}\mathcal{E} \cap [1, g^{\nu_1+1}[$ et il résulte de la proposition 4.1 que le théorème 4.2 est équivalent au fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ on a

$$W_N(\alpha) := W_N^{\mathcal{E}_d}(\alpha) = \sum_{\substack{n\in\mathcal{E}\\ n<N}} e(n\alpha) = o\Big(\frac{(d+1)^{\nu_1}}{\nu_1^{d/2}}\Big).$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème dans le cas $\ell = 1$, c'est-à-dire lorsque $N$ est de la forme $N = g^\nu$ :

$$\big|W_{g^\nu}(\alpha)\big| = \Big|\sum_{\substack{n<g^\nu\\ n\in\mathcal{E}}} e(n\alpha)\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{\nu} S_k^{0,\dots,0}(\alpha)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} \frac{g^k}{k^{d/2}} \varepsilon_\alpha(k)$$

d'après la proposition 4.3.

On en déduit, en utilisant (1) et le théorème de Césaro que

$$W_{g^\nu}(\alpha) = o\Big(\frac{g^\nu}{\nu^{d/2}}\Big).$$

Soit maintenant $N$ de la forme (3). On a

$$\begin{aligned}
W_N(\alpha) = W_{g^{\nu_1}}(\alpha) &+ \sum_{j=1}^{C_1-1} \sum_{\substack{jg^{\nu_1}\leqslant n<(j+1)g^{\nu_1}\\ n\in\mathcal{E}}} e(n\alpha)\\
+ \sum_{\lambda=2}^{\ell} \sum_{j=0}^{C_\lambda-1} &\sum_{\substack{C_1g^{\nu_1}+\dots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_1}\leqslant n<C_1g^{\nu_1}+\dots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+(j+1)g^{\nu_\lambda}\\ n\in\mathcal{E}}} e(n\alpha)\\
&= W_{g^{\nu_1}}(\alpha) + \sum_{\substack{j=1\\ j\leqslant d}}^{C_1-1} e(jg^{\nu_1}\alpha) \sum_{\substack{n<g^{\nu_1}\\ \bar{n}\in\{0,1,\dots,d\}^{\nu_1}\\ |\overline{jg^{\nu_1}+n}|_0=|\overline{jg^{\nu_1}+n}|_i\\ i=1,\dots,d}} e(n\alpha)\\
&\quad + \sum_{\lambda=2}^{\ell} \sum_{\substack{j=0\\ j\leqslant d}}^{C_\lambda-1} e\Big(\big(C_1g^{\nu_1}+\dots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_\lambda}\big)\alpha\Big)\\
&\qquad \sum_{\substack{n<g^{\nu_\lambda}\\ \overline{C_1g^{\nu_1}+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_1}+n}\in\{0,1,\dots,d\}^{\nu_1+1}\\ \left|\overline{C_1g^{\nu_1}+\dots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_\lambda}+n}\right|_0=\left|\overline{C_1g^{\nu_1}+\dots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_\lambda}+n}\right|_i\\ i=1,\dots,d}} e(n\alpha)
\end{aligned}$$

$$= W_{g^{\nu_1}}(\alpha) + \sum_{\substack{j=1\\ j\leqslant d}}^{C_1-1} e(jg^{\nu_1}\alpha) \sum_{\substack{n<g^{\nu_1}\\ \bar{n}\in\{0,1,\dots,d\}^{\nu_1}\\ |\overline{jg^{\nu_1}+n}|_0=|\overline{jg^{\nu_1}+n}|_i\\ i=1,\dots,d}} e(n\alpha)$$
$$+ \sum_{\lambda=2}^{\ell_0} \sum_{j=0}^{C_\lambda-1} e\Big(\big(C_1g^{\nu_1}+\cdots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_\lambda}\big)\alpha\Big) \sum_{\substack{n<g^{\nu_\lambda}\\ \bar{n}\in\{0,1,\dots,d\}^{\nu_\lambda}\\ \left|\overline{C_1g^{\nu_1}+\cdots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_\lambda}+n}\right|_0=\left|\overline{C_1g^{\nu_1}+\cdots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_\lambda}+n}\right|_i\\ i=1,\dots,d}} e(n\alpha),$$

où l'on a posé $\ell_0=\max\big\{\lambda,\ c_\lambda\in\{1,\dots,d\}\big\}$ (la somme $\sum_{\lambda=2}^{\ell_0}$ étant vide par convention si $\ell_0=1$).

Remarquons maintenant que pour tout $\lambda\in\{1,\dots,\ell_0\}$ on a

$$\begin{aligned}\big|C_1g^{\nu_1}+&\cdots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_\lambda}+n\big|_0\\ &=|n|_0+\nu_1-\lambda-[\log_g n]+1 \qquad \text{si } j=0\\ &=|n|_0+\nu_1-\lambda-[\log_g n] \qquad\quad \text{si } j\in\{1,\dots,g-1\}\end{aligned}$$

et

$$\big|C_1g^{\nu_1}+\cdots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_\lambda}+n\big|_i=|n|_i+|C_1|_i+\cdots+|C_{\lambda-1}|_i+|j|_i$$

pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,d\}\times\{0,\dots,d\}$.

Cela nous permet d'écrire, en posant pour tout $(\lambda,i)\in\{1,\dots,\ell_0\}\times\{1,\dots,d\}$

$$K_i(\lambda,0)=-\nu_1+\lambda+[\log_g n]+|C_1|_i+\cdots+|C_{\lambda-1}|_i-1$$

et pour tout $(\lambda,j,i)\in\{1,\dots,\ell_0\}\times\{1,\dots,d\}^2$

$$K_i(\lambda,j)=-\nu_1+\lambda+[\log_g n]+|C_1|_i+\cdots+|C_{\lambda-1}|_i+|j|_i,$$

que l'on a pour tout $\lambda\in\{1,\dots,\ell_0\}$ :

$$\sum_{\substack{n<g^{\nu_\lambda}\\ \left|\overline{C_1g^{\nu_1}+\cdots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_\lambda}+n}\right|_0=\left|\overline{C_1g^{\nu_1}+\cdots+C_{\lambda-1}g^{\nu_{\lambda-1}}+jg^{\nu_\lambda}+n}\right|_i\\ i=1,\dots,g-1}} e(n\alpha)$$
$$=\sum_{k=1}^{\nu_\lambda}\sum_{\substack{g^{k-1}\leqslant n<g^k\\ |\bar{n}|_0-|\bar{n}|_i=K_i(\lambda,j)\\ i=1,\dots,d}} e(n\alpha)=\sum_{k=1}^{\nu_\lambda} S_k^{K_1(\lambda,j),\dots,K_d(\lambda,j)}(\alpha).$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned}|W_N(\alpha)| \leqslant |W_{g^{\nu_1}}(\alpha)| &+ \sum_{\substack{j=1\\ j\leqslant d}}^{C_1-1} \sum_{k=1}^{\nu_1} \left| S_k^{K_1(1,j),\dots,K_d(1,j)}(\alpha)\right| \\ &+ \sum_{\lambda=2}^{\ell_0} \sum_{j=0}^{C_\lambda-1} \sum_{k=1}^{\nu_\lambda} \left| S_k^{K_1(\lambda,j),\dots,K_d(\lambda,j)}(\alpha)\right| \\ \leqslant W_{g^{\nu_1}}(\alpha) &+ \sum_{\lambda=1}^{\ell_0} \sum_{\substack{j=0\\ j\leqslant d}}^{C_\lambda-1} \sum_{k=1}^{\nu_\lambda} \left| S_k^{K_1(\lambda,j),\dots,K_d(\lambda,j)}(\alpha)\right| \\ \leqslant W_{g^{\nu_1}}(\alpha) &+ (d+1) \sum_{\lambda=1}^{\ell_0} \sum_{k=1}^{\nu_\lambda} \frac{(d+1)^k}{k^{d/2}} \varepsilon_\alpha(k)\end{aligned}$$

d'après la proposition 4.3.

Nous savons déjà que $W_{g^{\nu_1}}(\alpha) = o\Big(\frac{(d+1)^{\nu_1}}{\nu_1^{d/2}}\Big)$ et pour le second terme, on commence par remarquer (grâce au théorème de Césaro) que pour tout $\lambda \in \{1,\dots,\ell_0\}$ on a

$$\sum_{k=1}^{\nu_\lambda} \frac{(d+1)^k}{k^{d/2}} \varepsilon_\alpha(k) = \frac{(d+1)^{\nu_\lambda}}{\nu_\lambda^{d/2}} \varepsilon'_\alpha(\nu_\lambda)$$

avec $\lim_{\nu_\lambda \to +\infty} \varepsilon'_\alpha(\nu_\lambda) = 0$ et on conclut en majorant $\sum_{\lambda=1}^{\ell_0} \frac{(d+1)^{\nu_\lambda}}{\nu_\lambda^{d/2}} \varepsilon'_\alpha(\nu_\lambda)$ par $\sum_{k=1}^{\nu_1} \frac{(d+1)^k}{k^{d/2}} \varepsilon'_\alpha(k)$ et en appliquant une dernière fois le théorème de Césaro. □

# 5. Généralisation et problèmes ouverts

## 5.1. Généralisation du théorème 4.2

Dans cette partie, on fixe $\mathcal{C} \subset \{0,1,\dots,g-1\}$ et une partition $\mathcal{P} = (\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_t)$ de $\mathcal{C}$ ($t \in \{1,\dots,g\}$).

Pour tout $s \in \{1,\dots,t\}$ on note $d_s + 1 = \operatorname{card} \mathcal{C}_s$ ($d_s \in \{0,1,\dots,g-1\}$) et on écrit les éléments de $\mathcal{C}_s$ sous la forme $c_0^s < c_1^s < \cdots < c_{d_s}^s$. On pose $d = \sum_{s=1}^t d_s$ et on remarque que $\operatorname{card} \mathcal{C} = d + t$.

L'objet de cette partie est de donner les principaux arguments permettant de généraliser le théorème 4.2 aux ensembles

$$\mathcal{E}^{\mathcal{P}} = \Big\{ n \in \mathbb{N},\ \bar{n} \in \mathcal{C}^*,\ \forall s \in \{1,\dots,t\},\ |\bar{n}|_{c_0^s} = \cdots = |\bar{n}|_{c_{d_s}^s} \Big\}.$$

THÉORÈME 5.1. — *Pour tout nombre réel irrationnel $\alpha$, la suite $(n\alpha)_{n\in\mathcal{E}^{\mathcal{P}}}$ est équirépartie modulo 1.*

Lorsque $t=1$ et $\mathcal{C}_1=\{0,1,\ldots,d\}$ on retrouve $\mathcal{E}^{\mathcal{P}}=\mathcal{E}^d$ (*cf.* partie 4).

Les exemples 2, 3, 6 et 7 correspondent à des cas particuliers de cette situation générale :

i) $g=2$, $t=1$, $\mathcal{C}_1=\{0,1\}$, $(d=1)$ correspond à l'exemple 2,

ii) $g=4$, $t=2$, $\mathcal{C}_1=\{0,2\}$, $\mathcal{C}_2=\{1,3\}$, $(d=2)$ correspond à l'exemple 3,

iii) $g=3$, $t=1$, $\mathcal{C}_1=\{0,1\}$, $(d=1)$ correspond à l'exemple 6,

iv) $g=5$, $t=3$, $\mathcal{C}_1=\{1,2,4\}$, $\mathcal{C}_2=\{0\}$, $\mathcal{C}_3=\{3\}$, $(d=1)$ correspond à l'exemple 7.

Pour tout $s\in\{1,\ldots,t\}$ on note $\pi_s$ la projection de $\mathbb{R}^{d+t}$ sur le sous-espace $\mathcal{H}_s$ de dimension $d_s$ de $\mathbb{R}^{d+t}$ défini par

$$\mathcal{H}_s=\left\{x=(x_c)_{c\in\mathcal{C}}\in\mathbb{R}^{d+t},\ \sum_{c\in\mathcal{C}_s}x_c=0,\ x_c=0,\ \forall c\in\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_s\right\}$$

et $(e_c)_{c\in\mathcal{C}_s}$ l'image par $\pi_s$ de la base canonique de $\mathbb{R}^{d+t}$.

On remarque que l'on a par construction $\sum_{c\in\mathcal{C}_s}e_c=0$ pour tout $s\in\{1,\ldots,t\}$ et que $\mathcal{R}=\left\{\sum_{c\in\mathcal{C}_s}n_ce_c,\ (n_c)_{c\in\mathcal{C}}\in\mathbb{Z}^{d+t}\right\}$ est un réseau de $\mathbb{R}^d$.

L'ensemble $\mathcal{E}^{\mathcal{P}}$ est engendré par le $g$-automate $\mathcal{A}_g^{\mathcal{P}}=(E,\varepsilon,\varphi)$ avec $O$ pour unique état final, où l'on a posé

$$E=\{\varepsilon\}\cup\mathcal{R}\cup\{p\}$$

et

$$\begin{aligned}
&\varphi(\varepsilon,0)=\varepsilon,\\
&\varphi(\varepsilon,r)=e_r && \text{si } r\in\mathcal{C}\setminus\{0\},\\
&\varphi(\varepsilon,r)=p && \text{si } r\in\{1,\ldots,g-1\}\setminus\mathcal{C},\\
&\varphi(x,r)=x+e_r && \text{si } (x,r)\in\mathcal{R}\times\mathcal{C},\\
&\varphi(x,r)=p && \text{si } (x,r)\in\mathcal{R}\times(\{0,\ldots,g-1\}\setminus\mathcal{C}),
\end{aligned}$$

et

$$\varphi(p,r)=p \qquad \text{si } r\in\{0,\ldots,g-1\}.$$

On démontre le théorème 5.1 en suivant la même stratégie que pour le théorème 4.2. Nous n'en donnons donc pas la preuve détaillée mais nous en présentons uniquement les grandes lignes.

*Étape 1.* — Pour démontrer que $\operatorname{card}\mathcal{E}^{\mathcal{P}}\cap[1,g^{\nu}[$ est de même ordre de grandeur que $\frac{(d+t)^{\nu}}{\nu^{d/2}}$ (analogue de la proposition 4.1) on commence par remarquer que pour tout nombre entier $k$ $(k\geqslant 1)$, $\operatorname{card}\mathcal{E}^{\mathcal{P}}\cap[g^{k-1},g^k[$ est égal à la somme, pour tout $r \in \mathcal{C}$, du nombre de chemins de longueur $(k-1)$ reliant le sommet $e_r$ au sommet $O$ dans le graphe $\mathcal{G}$ associé à l'automate $\mathcal{A}_g^{\mathcal{P}}$ (ces chemins ne passent par aucun des deux sommets $\varepsilon$ et $p$).

La restriction à $\mathcal{R}$ du graphe $\mathcal{G}$ peut être interprétée comme une marche aléatoire de moyenne nulle sur le réseau $\mathcal{R}$ et on déduit ainsi du théorème de la limite locale (voir par exemple [34, Chap. II.7, Proposition 9]) que $\operatorname{card} \mathcal{E}^{\mathcal{P}} \cap [g^{k-1}, g^k[$ est de même ordre de grandeur que $\frac{(d+t)^k}{k^{d/2}}$.

On en déduit grâce à (1) que $\operatorname{card} \mathcal{E}^{\mathcal{P}} \cap [1, g^{\nu}[$ est de même ordre de grandeur que $\frac{(d+t)^{\nu}}{\nu^{d/2}}$.

*Étape 2.* — Pour tout nombre réel $\alpha$, pour tout $\mathcal{K} = (K_i^s)_{i=1,\dots,d_s}^{s=1,\dots,t} \in \mathbb{Z}^d$ et pour tout nombre entier $\nu \geqslant 1$ on pose

$$S_\nu^{\mathcal{K}}(\alpha) = \sum_{\substack{g^{\nu-1} \leqslant n < g^{\nu} \\ \bar{n} \in \mathcal{C}^{\nu} \\ |\bar{n}|_{c_0^s} - |\bar{n}|_{c_i^s} = K_i^s}} e(n\alpha)$$

et on montre que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ il existe une suite $(\varepsilon_\alpha(\nu))_{\nu \geqslant 1}$ tendant vers 0 lorsque $\nu$ tend vers l'infini telle que l'on a uniformément pour tout $(K_i^s)_{i=1,\dots,d_s}^{s=1,\dots,t} \in \mathbb{Z}^d$

$$\left|S_\nu^{\mathcal{K}}(\alpha)\right| \leqslant \frac{(d+t)^{\nu}}{\nu^{d/2}} \varepsilon_\nu(\nu).$$

Pour démontrer cet analogue de la proposition 4.3, on introduit la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$S_\nu^{\mathcal{K}}\left(\alpha; (x_i^s)_{i=1,\dots,d_s}^{s=1,\dots,t}\right) = \sum_{\substack{g^{\nu-1} \leqslant n < g^{\nu} \\ \bar{n} \in \mathcal{C}^*}} e(n\alpha + \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{d_s} \left(|n|_{c_0^s} - |n|_{c_i^s} - K_i^s\right)$$

et on procède en suivant la même méthode que dans la partie 4 mais au prix d'une complication notable des notations.

*Étape 3.* — On termine de même en passant des sommes $S_\nu^{\mathcal{K}}(\alpha)$ aux sommes $W_N^{\mathcal{P}}(\alpha)$ pour $N$ de la forme (3) avec, à nouveau, plusieurs cas à distinguer et une complication des notations due en particulier au fait que le chiffre 0 ne se comporte pas de la même façon que les autres chiffres lors des calculs concernant des quantités du type $|ag^{\nu} + b|_c$ $(b < g^{\nu})$.

### 5.2. Problèmes ouverts

Comme nous l'avons vu, de nombreuses questions concernant l'étude des propriétés combinatoires, statistiques et arithmétiques des mots infinis engendrés par une substitution sur un alphabet infini et des systèmes dynamiques qui leur sont associés n'admettent actuellement que des réponses partielles.

Nous terminons en mentionnant les trois problèmes suivants :

*Problème 3.* — Est-il vrai que si $\mathrm{pgcd}(c)_{c\in\mathcal{C}\smallsetminus\{0\}} = 1$, alors $\mathcal{E}^{\mathcal{P}}$ contient une infinité de nombres premiers ?

Dans le cas $\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N},\ \bar{n} \in \mathcal{C}^*\}$ (cas des ensembles d'entiers ellipséphiques, qui correspond dans notre définition au cas dégénéré $t = \mathrm{card}\,\mathcal{C}$, $d = 0$ et $\mathcal{R} = \{0\}$ où $\mathcal{E}$ est engendré par un $g$-automate fini), l'existence d'une infinité d'éléments presque premiers a été obtenue dans [13] et [14] et on trouvera plusieurs résultats concernant les propriétés arithmétiques de ces ensembles (en particulier, distribution dans les progressions arithmétiques, propriétés additives et multiplicatives) dans [4], [5], [10], [12], [11] [16], [17], [19], [24] et [23].

Mais aucun résultat de ce type n'est connu à ce jour lorsque $d \geqslant 1$.

En ce qui concerne l'étude des sommes d'exponentielles on pourrait facilement démontrer, en utilisant la méthode présentée dans cet article, l'équirépartition modulo 1 de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathcal{E}}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ lorsque $\mathcal{E}$ est l'ensemble défini dans l'exemple 8.

*Problème 4.* — Est-il vrai que la suite $(n\alpha)_{n\in\mathcal{E}}$ est équirépartie modulo 1 pour tout nombre irrationnel $\alpha$ lorsque $\mathcal{E}$ est l'ensemble défini dans l'exemple 9 ou dans l'exemple 10 ?

Dans le cas de l'exemple 9, cette question a été posée par Rauzy en 1981 (voir [22]).

Enfin, la fonction de complexité d'un mot infini $m$ sur un alphabet fini, qui compte le nombre de facteurs de longueur $n$ du mot $m$ (voir par exemple [1, Chap. 10] ou [30, Chap. 1]) traduit certaines propriétés combinatoires du mot $m$.

*Problème 5.* — Quelles sont les principales propriétés de la fonction de complexité d'un mot infini engendré par une substitution sur un alphabet fini ?

On trouvera dans [25] de premiers résultats concernant le cas où $m$ est engendré par une substitution de longueur constante.

*Remerciements.* — Je remercie Didier Caucal pour plusieurs conversations concernant les multiples facettes des automates infinis et Emmanuel Lesigne pour les références relatives au théorème de la limite locale et ses applications aux marches aléatoires.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] J.-P. Allouche & J. Shallit, *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[2] C. Banderier, M. Bousquet-Mélou, A. Denise, P. Flajolet, D. Gardy & D. Gouyou-Beauchamps, « Generating functions of generating trees », *Discrete Mathematics* **246** (2002), n° 1-3, p. 29-55.

[3] C. Banderier & P. Flajolet, « Basic analytic combinatorics of directed lattice paths », *Theoretical Computer Science* **281** (2002), n° 1-2, p. 37-80.

[4] W. Banks, A. Conlitti & I. E. Shparlinski, « Character sums over integers with restricted $g$-ary digits », *Illinois J. Math.* **46** (2002), p. 819-836.

[5] W. Banks & I. Shparlinski, « Arithmetic properties of numbers with restricted digits », *Acta Arithmetica* **112** (2004), p. 313-332.

[6] J. Cassaigne, « Complexité et facteurs spéciaux », *Bull. Belg. Math. Soc.* **4** (1997), n° 1, p. 67-88.

[7] D. Caucal, « A hierarchy of graph families », preprint.

[8] A. Cobham, « On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata », *Math. Syst. Theory* **3** (1969), p. 186-192.

[9] ———, « Uniform tag sequences », *Math. Syst. Theory* **6** (1972), p. 164-192.

[10] J. Coquet, « On the uniform distribution modulo one of some subsequences of polynomial sequences », *J. Number Theory* **10** (1978), p. 291-296.

[11] ———, « On the uniform distribution modulo one of some subsequences of polynomial sequences II, », *J. Number Theory* **12** (1980), p. 244-250.

[12] ———, « Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition », *J. Number Theory* **16** (1983), p. 363-375.

[13] C. Dartyge & C. Mauduit, « Nombres presque premiers dont l'écriture en base $r$ ne comporte pas certains chiffres », *Journal of Number Theory* **81** (2000), p. 270-291.

[14] ———, « Ensembles de densité nulle contenant des entiers possédant au plus deux facteurs premiers », *Journal of Number Theory* **91** (2001), p. 230-255.

[15] S. Eilenberg, *Automata, languages and machines*, Pure and Applied Mathematics, vol. A, Academic Press, New York, 1974.

[16] P. Erdős, C. Mauduit & A. Sárközy, « On arithmetic properties of integers with missing digits, I », *J. Number Theory* **70** (1998), p. 99-120.

[17] ———, « On arithmetic properties of integers with missing digits, II », *Discrete Math.* **200** (1999), p. 149-164.

[18] S. Ferenczi, « Substitution on infinite alphabet », Ann. Inst. Fourier, à paraître.

[19] M. Filaseta & S. V. Konyagin, « Squarefree values of polynomials all of whose coefficients are 0 and 1 », *Acta Arith.* **74** (1996), p. 191-205.

[20] P. Flajolet & R. Sedgewick, « Analytic combinatorics », en préparation.

[21] E. Fouvry & C. Mauduit, « Sur les entiers dont la somme des chiffres est moyenne », *J. Number Theory* **114** (2005), p. 135-152.

[22] J.-M. Gambaudo, P. Hubert, P. Tisseur & S. Vaienti (Eds), *Dynamical systems : from crystal to chaos*, World Scientific, Cambridge, 2000, Proceedings in honor of G. Rauzy on his 60th birthday.

[23] S. V. Konyagin, « Arithmetic properties of integers with missing digits : distribution in residue classes », *Period. Math. Hungar.* **42** (2001), p. 145-162.

[24] S. V. KONYAGIN, C. MAUDUIT & A. SÁRKÖZY, « On the number of prime factors of integers characterized by digit properties », *Period. Math. Hungar.* **40** (2000), p. 37-52.

[25] M. LE GONIDEC, « Sur la complexité des mots infinis engendrés par des $q$-automates dénombrables », Ann. Inst. Fourier, à paraître.

[26] C. MAUDUIT, « Automates finis et ensembles normaux », *Ann. Inst. Fourier* **36** (1986), p. 1-25.

[27] ———, « Sur l'ensemble normal des substitutions de longueur quelconque », *J. Number Theory* **29** (1988), p. 235-250.

[28] ———, « Caractérisation des ensembles normaux substitutifs », *Invent. Math.* **95** (1989), p. 133-147.

[29] M. L. MINSKY & S. PAPERT, « Unrecognizable sets of numbers », *J. Assoc. Comput. Mach.* **13** (1966), p. 281-286.

[30] N. PYTHEAS FOGG, *Substitutions in dynamicals, arithmetics and combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics, **1794**, Springer-Verlag, Berlin, 2002, Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.

[31] M. QUEFFELEC, *Substitution dynamical systems - Spectral analysis*, Lecture Notes in Mathematics, **1294**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[32] G. RAUZY, *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*, Collection SUP, Presses universitaires de France, Paris, 1976.

[33] R. W. RITCHIE, « Finite automata and the set of squares », *J. Assoc. Comput. Mach.* **10** (1963), p. 528-531.

[34] F. SPITZER, *Principles of random walks, second edition*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 34, Springer-Verlag, New-York-Heidelberg, 1976.

[35] W. THOMAS, « A short introduction to infinite automata », *$5^{th}$ DLT 01 LNCS* **2295** (2001), p. 134-144, W. Kuich, G. Rosenberg, A. Salomaa (Eds).

[36] ———, « Constructing infinite graphs with a decidable monadic theory », *$28^{th}$ MFCS LNCS* **2747** (2003), p. 113-124, R. Rovan, Vojtáš (Eds).

Christian MAUDUIT
Institut de Mathématiques de Luminy
163, avenue de Luminy
case 907
13288 Marseille cedex 9 (France)
mauduit@iml.univ-mrs.fr