ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUSTAVE CHOQUET

Démonstration non probabiliste d'un théorème de Getoor

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 2 (1965), p. 409-413

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_409_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 2 (1965), 409-414.

DÉMONSTRATION NON PROBABILISTE D'UN THÉORÈME DE GETOOR

par Gustave CHOQUET

Getoor a démontré par une méthode probabiliste un résultat qui, dans $\mathbf{R}^p (p \geqslant 3)$ et pour le noyau newtonien, se traduit ainsi : Pour toute mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ qui ne charge aucun ensemble polaire, il existe un plus petit fermé fin (c'est-à-dire un ensemble fermé pour la topologie fine) qui porte μ.

Nous allons affaiblir un peu la restriction imposée à μ, et donner de cet énoncé modifié une démonstration non probabiliste fort simple. En vue de son extension à un cadre axiomatique plus général, nous allons placer cette démonstration elle-même dans un cadre axiomatique.

AXIOMES. — On se donne :

— Un espace topologique E à base dénombrable d'ouverts.

— Une tribu $\mathfrak{B}$ de parties de E qui contient les ouverts de E.

— Un ensemble ordonné F dont toute partie a une borne inférieure et contient un sous-ensemble fini ou dénombrable de même borne inférieure.

— Une application b (appelée *base*) de $\mathfrak{T}(E)$ dans $\mathfrak{T}(E)$.

— Une application c (appelée *capacité*) de $\mathfrak{B}$ dans F.

On définit alors sur $\mathfrak{B}$ un pré-ordre noté $\prec$, en posant :

$(X \prec Y)$ si pour tout ouvert ω de E, $c(X \cap \omega) \leqslant c(Y \cap \omega)$.

On suppose vérifiés les axiomes suivants :

1) *Les applications b et c sont croissantes.*

2) $(X_n \subset Y_n$ *et* $c(X_n) = c(Y_n)$ *pour* $n = 1, 2, \ldots)$
$$\Longrightarrow (c(\bigcup X_n) = c(\bigcup Y_n)).$$

3) *Pour tous* $X, Y \in \mathfrak{B}$, $(X \prec Y) \Longrightarrow (b(X) \subset b(Y))$.

On se donne enfin sur $\mathcal{B}$ une mesure σ-additive μ, à valeurs dans $[0, +\infty]$, telle que $\mu(\emptyset) = 0$.

Exemples. — 1) Dans le cadre classique d'un noyau newtonien sur $E = \mathbf{R}^p$, on prendra $\mathcal{B}$ = tribu des parties boréliennes de E; on prendra $F = \overline{\mathbf{R}}$; enfin $c(X)$ désignera la capacité newtonienne de X, et $b(X)$ le dérivé fin de X, c'est-à-dire l'ensemble des points de E qui sont points d'accumulation de X pour la topologie fine.

Que l'axiome 2 soit satisfait résulte alors par exemple du fait que sur $\mathcal{B}$ la capacité newtonienne est fortement sous-additive, et que pour toute suite (X_n) croissante,

$$\lim c(X_n) = c(\bigcup X_n).$$

Que l'axiome 3 soit satisfait résulte par exemple du critère d'effilement donné par Wiener.

2) Dans le cadre de l'axiomatique Brelot (avec base dénombrable d'ouverts et axiomes D), on prendra [1] pour F l'ensemble des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$, muni de l'ordre usuel: $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ si $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ pour tout x. On désignera par $c(X)$ la réduite $\hat{R}^X_{V_0}$ d'une fonction surharmonique $V_0 > 0$, finie et continue, choisie de telle sorte que, pour tout X et pour tout point x_0, l'effilement de X en x_0 se traduise par $\hat{R}^X_{V_0}(x_0) < V_0(x_0)$. Enfin on posera (selon Brelot) :

$b(X)$ = (ensemble des points de l'espace E en lesquels X n'est pas effilé).

Le développement de l'axiomatique Brelot montre que nos axiomes sont alors vérifiés, en prenant encore pour B l'ensemble des boréliens.

Notion de μ-noyau d'un ensemble.

Soit $X \in \mathcal{B}$.

Définition 1. — *On appelle* capacité réduite *de* X *relativement à* μ *la borne inférieure* $f(X)$ *des capacités des* $Y \in \mathcal{B}$ *tels que :*

$$Y \subset X \qquad et \qquad \mu(X \dot{-} Y) = 0.$$

[1] Nous n'avions d'abord considéré que le cas $F = \overline{\mathbf{R}}$; mais d'après M. Brelot, ce cas semble moins commode pour l'étude de son axiomatique.

DÉFINITION 2. — *On appelle* μ-noyau *de* X *tout* $Y \in \mathcal{B}$ *tel que :*

$$Y \subset X; \qquad \mu(X \dot{-} Y) = 0; \qquad c(Y) = f(X).$$

On dit que Y *est un* μ-noyau absolu *de* X *si pour tout ouvert* ω *de* E, $(Y \cap \omega)$ *est un μ-noyau de* $(X \cap \omega)$.

LEMME 3. — *a) Tout* $X \in \mathcal{B}$ *contient un μ-noyau* Y.

b) Si Y_n *est un μ-noyau de* X_n $(n = 1, 2, \ldots)$, $(\bigcup Y_n)$ *est un μ-noyau de* $(\bigcup X_n)$.

Démonstration. — *a*) D'après la définition de $f(X)$ et les propriétés de F, il existe une suite d'éléments Y_n de $\mathcal{B}$ tels que :

$$Y_n \subset X; \qquad \mu(X \dot{-} Y_n) = 0; \qquad \inf\{c(Y_n)\} = f(X).$$

Si l'on pose $Y = \bigcap Y_n$, on a bien :

$$Y \subset X; \qquad \mu(X \dot{-} Y) = 0; \qquad f(X) \leqslant c(Y) \leqslant f(X),$$

d'où $c(Y) = f(X)$.

b) Pour montrer que $\bigcup Y_i$ est un μ-noyau de $\bigcup X_i$, il suffit de montrer que toute partie Z de $\bigcup Y_i$ telle que $\mu((\bigcup Y_i) \dot{-} Z) = 0$ a même « capacité » que $\bigcup Y_i$.

Or si pour tout n, $c(Z \cap Y_n) = c(Y_n)$, l'axiome 2 montre que $c(Z \cap (\bigcup Y_n)) = c(\bigcup Y_n)$, c'est-à-dire $c(Z) = c(\bigcup Y_n)$.

Si donc on a $c(Z) < c(\bigcup Y_n)$, il existe un n_0 tel que :

$$c(Z \cap Y_{n_0}) < c(Y_{n_0}).$$

Comme Y_{n_0} est un μ-noyau, cette inégalité entraîne

$$\mu(Y_{n_0} \dot{-} Z) > 0,$$

donc *a foriori* $\mu((\bigcup Y_n) \dot{-} Z) > 0$, contrairement à l'hypothèse; cette contradiction démontre l'énoncé *b*.

LEMME 4. — *Tout* $X \in \mathcal{B}$ *contient un μ-noyau absolu.*

Démonstration. — Soit $(\omega_n)_{n \in \mathrm{N}}$ une base d'ouverts de E. On va définir par récurrence une suite décroissante (Y_n) de μ-noyaux de X tels que, pour tout $n \geqslant 1$, $Y_n \cap \omega_n$ soit un noyau de $X \cap \omega_n$, et on posera $Y = \bigcap Y_n$.

On pose pour cela :

$$Y_0 = \text{un } \mu\text{-noyau quelconque de } X.$$

Puis, $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ étant définis, on pose :

$$Y_{n+1} = (Y_n \dot{-} \omega_{n+1}) \cup (\text{un } \mu\text{-noyau de } Y_n \cap \omega_{n+1}).$$

Pour tout n, on a $Y \subset Y_n$ et $\mu(X \dot{-} Y_n) = 0$; d'où résulte que $Y \cap \omega_n$ est, comme $Y_n \cap \omega_n$, un noyau de $X \cap \omega_n$.

Comme tout ouvert ω est une réunion de tels ω_n, le lemme 3*b* montre que $Y \cap \omega$ est un noyau de $X \cap \omega$, d'où l'énoncé cherché.

THÉORÈME 5. — *La famille des* $b(X)$ *obtenues à partir des* $X \in \mathcal{B}$ *qui portent* μ(*i.e.* $\mu(E \dot{-} X) = 0$) *a un plus petit élément* B (*appelé* μ*-base de* E).

Pour tout μ*-noyau absolu* X *de* E, *on a* $b(X) = B$.

Démonstration. — Soit X un μ-noyau absolu de E, et soit $Y \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(E \dot{-} Y) = 0$.

Pour tout ouvert ω de E, on a :

$$c(X \cap \omega) = f(\omega) \leqslant c(Y \cap \omega)$$

d'où $Y \prec X$, d'où aussi d'après l'axiome 3 : $b(X) \subset b(Y)$.

COROLLAIRE 6. — *Tous les* μ*-noyaux absolus de* E *ont même dérivé fin.*

Cas particulier. — Dans ce qui suit, l'expression « X porte μ » *signifiera* « X contient un $Y \in B$ qui porte μ ».

DÉFINITION 7. — *On dira qu'une partie* X *de* E *est b-fermée si* $b(X) \subset X$. *On dira que* X *est b-parfait si* $b(X) = X$.

THÉORÈME 8. — *Si pour tout* $X \in \mathcal{B}$, $b(X)$ *est b-fermé, et si* μ *est portée par la* μ*-base* B *de* E, B *est le plus petit ensemble b-fermé qui porte* μ; *et* B *est b-parfait.*

Démonstration. — Soit X un μ-noyau absolu de E, et soit Y un ensemble *b*-fermé qui porte μ.

Il existe un $Y' \in \mathcal{B}$ tel que Y' porte μ et $Y' \subset Y$. On a donc :

$$X \prec Y' \subset Y, \qquad \text{d'où} \qquad b(X) \subset b(Y') \subset b(Y) \subset Y.$$

La μ-base $B = b(X)$ est donc bien contenue dans Y.

Enfin, puisque B porte μ, $b(B)$ porte aussi μ. Comme B est b-fermé, on a $b(B) \subset B$; et comme $b(B)$ est b-fermé, on a $B \subset b(B)$, d'où $B = b(B)$, autrement dit B est b-parfait.

Exemples. — Dans chacun des exemples envisagés plus haut, il est bien exact que tout ensemble $b(X)$ est b-fermé, donc le théorème 8 est applicable. Notons d'autre part que dans ces exemples, « b-fermé » est synonyme de « finement fermé »; le théorème 8 peut donc s'énoncer sous la forme initiale indiquée dans l'introduction. Notons enfin que dans le premier exemple, « b-parfait » équivaut à « finement fermé sans point finement isolé »; tandis que dans le second exemple cette équivalence n'est valable que lorsque tout point de E est polaire.

Dans ces deux exemples, toute mesure μ se décompose canoniquement en une mesure μ_B portée par la μ-base B de E, et une mesure $(\mu - \mu_B)$ portée par le complémentaire de B.

La μ_B-base de E est B lui-même, et B est aussi un μ_B-noyau absolu de μ_B.

La mesure $\mu - \mu_B$ est portée par un ensemble P; par exemple, pour tout μ-noyau absolu X de E, $(X \dot{-} b(X))$ est polaire et porte $(\mu - \mu_B)$.

En particulier, si μ ne charge aucun ensemble polaire, on a $\mu = \mu_B$; mais il peut arriver, même dans le premier exemple, que μ charge un ensemble polaire, et que cependant $\mu = \mu_B$.

Manuscrit reçu en mars 1965.

Gustave Choquet,
16, avenue d'Alembert,
Antony (Seine).