

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ LICHNEROWICZ

## Variétés complexes et tenseur de Bergmann

*Annales de l'institut Fourier*, tome 15, n° 2 (1965), p. 345-407

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1965\\_\\_15\\_2\\_345\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_345_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## VARIÉTÉS COMPLEXES ET TENSEUR DE BERGMANN

par André LICHNEROWICZ

---

### Introduction.

Dans une série de travaux classiques, S. Bergmann [2], [3] a introduit, sur les domaines bornés de  $C^n$ , un noyau invariant par les transformations holomorphes et une métrique correspondante. Dans un mémoire récent, S. Kobayashi [7], suivant une suggestion d'E. Calabi, a défini sur une variété complexe  $W_n$  (de tenseur  $\mathcal{J}$  de structure complexe) une  $2n$ -forme  $K$  qui généralise le noyau classique de Bergmann. Il utilise à cet effet l'espace  $F$  des  $n$ -formes holomorphes de carrés intégrables sur  $W_n$  et il étudie les cas où de la forme  $K$ , on peut déduire une « métrique de Bergmann » définie positive.

Une variété complexe  $W_n$  est dite ici *normale* si la forme  $K$  ne s'annule en aucun point de  $W_n$ . Il est alors possible de déduire de  $K$  un tenseur  $t$  de type  $(1, 1)$ , invariant comme  $K$  par les transformations holomorphes de  $W_n$ , et auquel nous donnons le nom de *tenseur de Bergmann*. Si  $t$  est défini positif, on retrouve le cas étudié par Kobayashi. Le but du présent article est au contraire d'étudier certaines des circonstances qui se présentent dans le cas où  $t$  n'est pas supposé défini.

Cet article est divisé en quatre chapitres. Le chapitre I rappelle la définition du noyau de Bergmann selon Kobayashi. Il ne comporte pas de résultats nouveaux, mais contient, dans un souci de clarté, des démonstrations détaillées ne figurant pas en général dans la littérature. Le chapitre II porte sur le tenseur  $t$  de Bergmann d'une variété complexe normale  $W_n$  et sur la 2-forme associée  $\tau$ . Le résultat principal est le suivant : si  $X$  est une transformation infinitésimale holomorphe

complète de  $W_n$  et si  $\mathcal{J}X$  est aussi complète,  $X$  annule  $\tau$  et laisse invariante toute  $n$ -forme holomorphe de carré intégrable. Si  $\tau^n$  n'est pas identiquement nulle, il ne peut donc exister de telle transformation infinitésimale  $X$  non nulle. Ce théorème répond à une question posée par Kobayashi [7] et constitue une généralisation d'un théorème classique d'Henri Cartan concernant les domaines bornés de  $C^n$ .

Le chapitre III est relatif à l'étude de l'application canonique  $j$  d'une variété complexe normale  $W_n$  dans l'espace projectif complexe  $P(F^*)$ , en général de dimension infinie. Cette application  $j$  a été étudiée par plusieurs auteurs dont Kobayashi et le tenseur de Bergmann n'est autre que l'image réciproque par  $j$  du tenseur métrique canonique de  $P(F^*)$ . Par suite pour que  $t = 0$ , il faut et il suffit qu'il existe une  $n$ -forme holomorphe normée, unique à un facteur près, forme qui soit non nulle en tout point de  $W_n$ . Les transformations holomorphes  $\mu$  de  $W_n$  induisent naturellement des isométries holomorphes  $\tilde{\mu}$  de  $P(F^*)$  et toute transformation infinitésimale holomorphe complète de  $W_n$  est projetable par  $j$  sur  $j(W_n)$ .

Pour qu'une transformation holomorphe de  $W_n$  induise l'identité sur  $j(W_n)$  (et par suite sur  $P(F^*)$ ), il faut et il suffit qu'elle multiplie tout élément de  $F$  par un facteur constant complexe de module 1. Ce résultat explique le théorème du chapitre II.

Le chapitre IV étudie le cas où la variété complexe normale  $W_n$  admet un groupe discontinu uniforme  $D$  de transformations holomorphes; l'espace  $W_n/D$  est alors une variété complexe compacte admettant  $W_n$  pour revêtement. Des extensions de théorèmes de Kobayashi sont obtenues. En particulier, si  $C_1(W_n/D) \neq 0$  ( $C_1$  première classe de Chern), il n'existe pas sur  $W_n$  de transformations infinitésimales holomorphes non nulles invariantes par  $D$ . On étudie le cas où  $W_n/D$  admet une métrique kählérienne; s'il en est ainsi, on établit à l'aide du théorème d'E. Hopf que pour  $W_n/D$  et pour toute métrique kählérienne, le groupe d'isotropie  $H$  des isométries est nécessairement fini et le plus grand groupe connexe  $G_0$  d'isométries est abélien. Si  $\chi(W_n/D) \neq 0$ ,  $G_0$  est réduit à l'identité.

Certains des résultats de cet article ont été annoncés dans une note aux Comptes Rendus (*C. R. Acad. Sc.*, 259, 2737, 1964).

## I. NOYAU DE BERGMANN.

1. L'élément de volume naturel de  $C^n$ .

Considérons l'espace vectoriel complexe  $C^n$  rapporté à ses coordonnées canoniques  $\{z^\alpha\}$  ( $\alpha$ , tout indice grec = 1, 2, ...,  $n$ ). Nous poserons dans la suite :

$$z^{\bar{\alpha}} = \bar{z}^\alpha \quad (\bar{\alpha} \dots, \text{ tout indice grec} = n + 1, \dots, 2n)$$

et introduisons les parties réelles et imaginaires de  $z^\alpha$  sous la forme :

$$(1, 1) \quad z^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^\alpha + iy^\alpha)$$

où  $x^\alpha, y^\alpha \in \mathbb{R}$ . L'espace  $C^n$  est ainsi appliqué sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . On a :

$$dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2} (dx^\alpha + i dy^\alpha) (dx^\alpha - i dy^\alpha)$$

soit

$$dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\alpha}} = -i dx^\alpha \wedge dy^\alpha.$$

On déduit que l'élément de volume naturel de  $C^n$  :

$$(1, 2) \quad \eta = dx^1 \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^n$$

peut s'écrire :

$$\eta = \frac{(-1)^n}{i^n} dz^1 \wedge dz^{\bar{1}} \wedge \dots \wedge dz^n \wedge dz^{\bar{n}}.$$

Par transpositions, on aboutit ainsi à la formule :

$$(1, 3) \quad \eta = \varepsilon_n dz^1 \wedge dz^2 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge dz^{\bar{1}} \wedge dz^{\bar{2}} \wedge \dots \wedge dz^{\bar{n}}$$

où

$$\varepsilon_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{i^n}.$$

On vérifie immédiatement que  $\varepsilon_n = 1$  pour  $n$  pair,  $\varepsilon_n = i$  pour  $n$  impair.

## 2. Le cas d'un domaine borné de $C^n$ .

Considérons dans  $C^n$  un domaine  $V$ , c'est-à-dire un ouvert connexe de  $C^n$ . Nous allons résumer brièvement les résultats obtenus pour un tel domaine par S. Bergmann. Soit  $F$  l'ensemble des fonctions holomorphes  $\varphi$  sur  $V$  telles que :

$$\left| \int_V |\varphi|^2 dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge dz^{\bar{1}} \wedge \dots \wedge dz^{\bar{n}} \right| = \int_V |\varphi|^2 \eta < \infty.$$

On sait que  $F$  admet une structure naturelle d'espace de Hilbert complexe. Soit  $\{\varphi_A\}$  ( $A = 0, 1, \dots$ ) une base orthonormée de  $\bar{F}$ . Si l'on forme :

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{A=0}^{\infty} \varphi_A(z) \bar{\varphi}_A(\bar{\zeta}) \quad (z, \zeta \in V)$$

on démontre que  $K(z, \bar{\zeta})$  est une fonction holomorphe de  $z$  et  $\bar{\zeta}$  indépendante du choix de la base orthonormée envisagée. Il est clair que  $K(z, \bar{z})$  est toujours positive ou nulle.

Supposons que  $V$  soit un *domaine borné* de  $C^n$ ;  $K(z, \bar{z})$  est alors toujours strictement positif et nous pouvons définir un tenseur  $t$  par :

$$t_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \log K(z, \bar{z}) = \partial_\alpha \bar{\partial}_\beta \log K(z, \bar{z})$$

$$\left( \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \quad \partial_{\bar{\beta}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} \right).$$

On montre que ce tenseur  $t$  définit sur  $V$  une métrique kählerienne définie positive, invariante par toute transformation holomorphe de  $V$ . Au tenseur  $t$  canoniquement associé au domaine borné  $V$  on donne le nom de *tenseur de Bergmann* du domaine  $V$  (Bergmann [2], [3]).

Cette notion de tenseur de Bergmann a été généralisée par E. Calabi et S. Kobayashi [7] à une large classe de variétés analytiques complexes; le but du présent article est l'étude de certains aspects de cette généralisation.

Notons dès à présent que le domaine  $V$  envisagé admet une  $n$ -forme canonique holomorphe  $dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$  et qu'il est possible de traduire la définition que nous venons de donner

du tenseur de Bergmann de  $V$  en termes de  $n$ -formes holomorphes  $\varphi dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$ . Dans le cas d'une variété analytique complexe générale, il n'existe pas de coordonnées canoniques globales ni de  $n$ -forme holomorphe canonique et c'est pourquoi nous serons amenés à substituer aux fonctions holomorphes envisagées des  $n$ -formes holomorphes.

### 3. Variétés analytiques complexes.

a) Soit  $W_n$  une variété différentiable connexe paracompacte de dimension topologique  $2n$ . Nous appelons système de coordonnées locales complexes — ou carte locale complexe — pour  $W_n$  une représentation topologique  $\psi_U$  d'un domaine  $U$  de  $W_n$  dans  $C^n$

$$\psi_U : z \in U \rightarrow \{z^\alpha\} \in C^n.$$

$U$  est dit le domaine du système de coordonnées; les  $n$  complexes  $\{z^\alpha\}$  sont appelés les coordonnées complexes du point  $z$  de  $W_n$  dans la carte considérée.

La variété  $W_n$  admet une *structure analytique complexe* s'il existe un ensemble  $A$  de cartes complexes — ou atlas — satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1) la réunion des domaines des cartes de  $A$  est identique à  $W_n$ .
- 2) Si  $U$  et  $V$  sont deux domaines de cartes de  $A$  et si  $z \in U \cap V$ , les coordonnées complexes  $\{z^\alpha\}$  de  $z$  dans  $U$  sont des fonctions holomorphes, à jacobien  $J_U^V$  non nul, des coordonnées complexes  $\{z'^\alpha\}$  du même point  $z$  dans l'autre carte.

La structure analytique complexe de  $W_n$  est définie par un atlas maximal relativement aux conditions 1 et 2. Nous décrivons brièvement cette situation en disant que  $W_n$  est une *variété analytique complexe de dimension complexe  $n$* .

Si  $\bar{A}$  est l'atlas correspondant aux

$$\bar{\psi}_U : z \in U \rightarrow \{z^{\bar{\alpha}}\} \in C^n$$

$\bar{A}$  définit sur la variété une structure analytique complexe dite conjuguée de la précédente. Nous noterons  $\bar{W}_n$  la variété munie de cette structure complexe.

b) Si  $\{z^\alpha\}$  désigne des coordonnées locales complexes, les  $2n$  nombres réels  $\{x^\alpha, y^\alpha\}$  qui s'en déduisent par (1-1) sont dits

les coordonnées locales réelles *associées* aux coordonnées complexes  $\{z^\alpha\}$ . Si  $z \in U \cap V$ , les coordonnées réelles du point  $z$  associées à l'une des cartes complexes sont des fonctions analytiques réelles, à jacobien non nul, des coordonnées réelles de  $z$  associées à l'autre carte. Il en résulte qu'une structure analytique complexe portée par  $W_n$  induit sur cette variété une structure analytique réelle ou de classe  $C^\omega$ . La structure analytique complexe est dite *subordonnée* à cette structure analytique réelle, ou plus généralement, à la structure différentiable  $C^\infty$  correspondante.

c) Soit  $T_z$  et  $T_z^*$  les espaces vectoriels tangents en  $z$  à  $W_n$ ,  $T_z^c$  et  $(T_z^c)^*$  leurs complexifiés. Si, pour  $z$  appartenant au domaine  $U$  d'un système de coordonnées locales complexes, nous substituons aux  $2n$  coordonnées réelles associées  $\{x^\alpha, y^\alpha\}$ , les  $2n$  nombres complexes  $\{z^\alpha, z^{\bar{\alpha}}\}$  — ou plus brièvement  $\{z^k\}$  ( $k = 1, \dots, 2n$ ) — les formes  $\{dz^\alpha, dz^{\bar{\alpha}}\}$  définissent en  $z \in U$  un repère de  $(T_z^c)^*$  et, par dualité, on obtient un repère  $\{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\bar{\alpha}}\}$  de  $T_z^c$ . Nous dirons que  $\{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\bar{\alpha}}\}$  et  $\{dz^\alpha, dz^{\bar{\alpha}}\}$  sont respectivement *le repère et le corepère naturels* au point  $z$  du système de coordonnées locales envisagé.

Si  $z$  appartient à l'intersection  $U \cap V$  des domaines de deux cartes complexes, les repères et corepères naturels correspondants sont reliés par les formules :

$$(3,1) \quad dz^\alpha = A_{\beta'}^\alpha dz^{\beta'}, \quad \varepsilon_{\beta'} = A_{\beta'}^\alpha \varepsilon_\alpha$$

où  $A = (A_{\beta'}^\alpha)$  est la matrice régulière  $n \times n$  à éléments complexes définie par :

$$A_{\beta'}^\alpha = \frac{\partial z^\alpha}{\partial z^{\beta'}}$$

Il résulte de (3,1) que le système des  $n$  vecteurs  $\varepsilon_\alpha$  engendre un sous-espace  $S_x^c$  de  $T_x^c$  ne dépendant que de la structure analytique complexe donnée sur  $W_n$ . Ainsi la donnée d'une structure analytique complexe sur  $W_n$  définit en chaque point  $z$  de la variété une *structure complexe de l'espace tangent*.

Cette structure peut aussi être définie en  $z$  par l'opérateur  $J_z$ , de carré  $Id$ , sur  $T_z$  défini de la manière suivante : si  $\nu$  de composantes  $\nu^\alpha, \nu^{\bar{\alpha}}$  appartient à  $T_z$ , on a :

$$(J_z \nu)^\alpha = i\nu^\alpha, \quad (J_z \nu)^{\bar{\alpha}} = -i\nu^{\bar{\alpha}}.$$

Nous désignons par  $\mathfrak{J}$  le champ des opérateurs  $\mathfrak{J}_z$ , champ qui ne dépend que de la structure analytique complexe. Inversement le champ  $\mathfrak{J}$  caractérise en un certain sens la structure analytique complexe envisagée sur  $W_n$ . On établit en effet aisément le résultat suivant : si deux structures analytiques complexes subordonnées à la même structure différentiable définissent sur  $W_n$  le même champ  $\mathfrak{J}$  elles coïncident.

d) Sur les domaines  $U$  et  $V$  de deux cartes complexes, considérons les  $2n$ -formes locales  $\eta_U$  et  $\eta_V$  définies à partir des coordonnées réelles associées aux cartes par (1,2). Si  $z \in U \cap V$ , il résulte de la formule (1,3) que :

$$\eta_U = J_V^U \bar{J}_V^U \eta_V = |J_V^U|^2 \eta_V$$

où  $J_V^U = \det. A$ . Le jacobien  $|J_V^U|^2$  de passage d'un système de coordonnées réelles associées à un autre est donc strictement positif.

Il en résulte que la variété analytique complexe  $W_n$  admet une *orientation naturelle* définie en prenant comme positifs les repères naturels correspondants aux coordonnées réelles associées et c'est cette orientation que nous adoptons.

#### 4. L'espace de Hilbert $F$ .

a) Une *n-forme holomorphe*  $\alpha$  sur  $W_n$  est une *n-forme complexe* qui peut s'écrire localement sur le domaine  $U$  d'un système de coordonnées complexes :

$$\alpha_U = a_U(z) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$$

où les  $a_U(z)$  sont des fonctions holomorphes des coordonnées complexes  $\{z^\alpha\}$  dans  $U$ . Si  $z \in U \cap V$ , on a :

$$a_V(z) = J_V^U a_U(z).$$

Soit  $F$  l'ensemble des *n-formes holomorphes* telles que :

$$(4,1) \quad \left| \int_{W_n} \alpha \wedge \bar{\alpha} \right| < \infty$$



où  $\bar{\alpha}$  désigne la forme complexe conjuguée de  $\alpha$ , et introduisons le *produit scalaire* :

$$(4,2) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \varepsilon_n \int_{W_n} \alpha \wedge \bar{\beta} \quad (\alpha, \beta \in F).$$

Supposons  $W_n$  munie d'un recouvrement localement fini par des domaines  $U_i$  de coordonnées locales tels que les  $\bar{U}_i$  soient compacts. Il existe alors une partition  $\{\varphi_i\}$  de l'unité subordonnée au recouvrement  $\{U_i\}$  : chaque fonction  $\varphi_i \geq 0$  a un support compact contenu dans  $U_i$  et  $\sum_i \varphi_i = 1$ . Avec des notations pour  $\beta$  semblables à celles utilisées pour  $\alpha$ , on a :

$$(4,3) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_i \int_{U_i} a_{U_i}(z) \overline{b_{U_i}(z)} \varphi_i(z) \eta_{U_i}(z)$$

$\langle \alpha, \alpha \rangle$  est manifestement défini positif et un raisonnement standard montre que  $F$  est, pour (4,2), un espace de Hilbert complexe (Kobayashi [7]).

b) Une *transformation holomorphe*  $\mu$  de la variété complexe  $W_n$  est une transformation de  $W_n$  qui laisse invariante sa structure : si  $z$  admet les coordonnées complexes  $\{z^\beta\}$  et  $\zeta = \mu(z)$  les coordonnées complexes  $\{\zeta^\alpha\}$ , les  $\zeta^\alpha$  sont des fonctions holomorphes locales, à jacobien  $J(\mu)$  non nul, des  $z^\beta$  :  $\zeta^\alpha = \mu^\alpha(z^\beta)$ .

Si  $\beta$  est une  $n$ -forme holomorphe, on a pour  $\zeta \in U_i$  :

$$\beta_{U_i} = b_{U_i}(\zeta) d\zeta^1 \wedge \dots \wedge d\zeta^n \quad (\zeta \in U_i).$$

L'image réciproque  $\mu^*\beta$  de la forme  $\beta$  par  $\mu$  vérifie :

$$(4,4) \quad (\mu^*\beta)_{\mu^{-1}U_i} = b_{U_i}\{\mu(z)\} J(\mu) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \\ (z \in \mu^{-1}U_i).$$

Les  $\{\mu^{-1}U_i\}$  définissent encore un recouvrement localement fini de  $W_n$  tel que les  $\mu^{-1}U_i$  soient compacts et les fonctions  $\{\varphi_i \circ \mu\}$  constituent une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. On a d'après (4,3) :

$$(4,5) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_i \int_{U_i} a_{U_i}(\zeta) \overline{b_{U_i}(\zeta)} \varphi_i(\zeta) \eta_{U_i}(\zeta)$$

et aussi d'après la remarque précédente :

$$\langle \mu^* \alpha, \mu^* \beta \rangle = \sum_i \int_{\mu^{-1}U_i} a_{U_i} \{ \mu(z) \} \overline{b_{U_i} \{ \mu(z) \}} J(\mu) \overline{J(\mu)} [\varphi_i \circ \mu](z) \eta_{\mu^{-1}U_i}(z).$$

En effectuant dans les intégrales du second membre de (4,5) le changement de variables  $\zeta^\alpha = \mu^\alpha(z^\beta)$  il vient :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_i \int_{\mu^{-1}U_i} a_{U_i} \{ \mu(z) \} b_{U_i} \{ \mu(z) \} [\varphi_i \circ \mu](z) J(\mu) \overline{J(\mu)} \eta_{\mu^{-1}U_i}(z).$$

Il en résulte :

$$(4,6) \quad \langle \mu^* \alpha, \mu^* \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

**THÉORÈME.** — *Le produit scalaire (4,2) est invariant par l'action des transformations holomorphes  $\mu$  de  $W_n$ .*

**5. Décomposition de l'espace F relativement à un point z.**

Choisissons dans la variété  $W_n$  un point  $z$  et désignons par  $F'(z)$  le sous-espace de  $F$  défini par les  $n$ -formes  $\gamma \in F$  qui s'annulent en  $z$ . Si  $F'(z) = F$  tout élément de  $F$  s'annule au point  $z$  considéré. Nous allons étudier le cas où  $F'(z) \neq F$ .

S'il en est ainsi, il existe des éléments non nuls de  $F$  orthogonaux à  $F'(z)$ . Soit  $\alpha_0$  un tel élément; on a  $\alpha_0(z) \neq 0$  sinon  $\alpha_0$  appartiendrait à  $F'(z)$  et étant orthogonale à elle-même serait nulle. Nous pouvons supposer  $\alpha_0$  normé et vérifiant ainsi les relations :

$$(5,1) \quad \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle = 1, \quad \langle \alpha_0, \gamma \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in F'(z).$$

Si  $\beta$  est un élément arbitraire de  $F$ , il existe une constante complexe  $c = \beta(z)/\alpha_0(z)$  telle que la forme  $\gamma = \beta - c\alpha_0$  s'annule en  $z$  et par suite appartienne à  $F'(z)$ . Ainsi tout élément  $\beta$  de  $F$  peut s'écrire :

$$(5,2) \quad \beta = c\alpha_0 + \gamma \quad (c \in \mathbb{C}, \gamma \in F'(z)).$$

Si  $D(z)$  est le sous-espace de dimension complexe 1 engendré par  $\alpha_0$ , on a  $D(z) \cap F'(z) = 0$  et d'après (5,2), l'espace de Hilbert

F est la somme directe :

$$(5,3) \quad F = F'(z) \oplus D(z)$$

$D(z)$  est l'orthocomplément de  $F'(z)$  dans  $F$ .

Soit  $\hat{\alpha}_0 \in F$  une  $n$ -forme quelconque vérifiant les relations (5,1);  $\hat{\alpha}_0$  appartient à  $D(z)$

$$\hat{\alpha}_0 = c\alpha_0 \quad (c \in \mathbb{C})$$

et  $\hat{\alpha}_0$  étant normée, on a  $|c| = 1$ , c'est-à-dire  $c = e^{i\omega}$  ( $\omega \in \mathbb{R}$ ). Ainsi les relations (5,1) définissent la  $n$ -forme  $\alpha_0$  à un facteur  $e^{i\omega}$  constant près de module 1.

## 6. Étude d'une série construite à partir d'une base orthonormée de $F$ .

a) Désignons par  $\{\beta_\Lambda\}$  ( $\Lambda = 0, 1, \dots$ ) une base orthonormée arbitraire de l'espace de Hilbert  $F$ . Nous nous proposons d'étudier la convergence sur  $W_n \times \overline{W}_n$  de la série

$$(6,1) \quad \sum_{\Lambda=0}^{\infty} \beta_\Lambda(z) \wedge \overline{\beta_\Lambda(\zeta)} \quad (z, \zeta \in W_n).$$

Si  $U$  est un domaine d'un système de coordonnées locales et si  $z \in U$ , nous posons :

$$(\beta_\Lambda)_U(z) = (b_\Lambda)_U(z) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n.$$

Par suite si  $U$  et  $V$  sont deux domaines de coordonnées locales, la série (6,1) peut s'écrire pour  $(z, \zeta) \in U \times V$

$$(6,2) \quad \left\{ \sum_{\Lambda=0}^{\infty} (b_\Lambda)_U(z) (\overline{b_\Lambda}_V(\zeta)) \right\} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\overline{\zeta}^1 \wedge \dots \wedge d\overline{\zeta}^n.$$

Pour étudier la convergence de cette série, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME. — Soit  $z = \{z^\alpha\}$  un point de  $C^n$ ,  $B$  un polycylindre fermé de  $C^n$  lieu du point  $\zeta = \{\zeta^\alpha\}$  tel que  $|\zeta^\alpha - z^\alpha| \leq r^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ). Si  $\varphi(\zeta)$  est une fonction holomorphe sur  $B$ , on a l'inégalité

$$(6,3) \quad \int_B |\varphi(\zeta)|^2 \eta \geq |\varphi(z)|^2 \int_B \eta.$$

Par translation, on peut supposer sans nuire à la généralité  $z = \{0\}$ . On vérifie immédiatement que :

$$(6,4) \quad \int_B (z^1)^{m_1} \dots (z^n)^{m_n} (\bar{z}^1)^{p_1} \dots (\bar{z}^n)^{p_n} \eta = 0$$

si la suite  $(m_1, \dots, m_n)$  est distincte de la suite  $(p_1, \dots, p_n)$ . La fonction  $\varphi$  admet un développement de Taylor uniformément convergent dans B :

$$\varphi(\zeta) = \varphi(0) + \sum_{\alpha=1}^n [\partial_\alpha \varphi](0) \zeta^\alpha + \dots$$

En évaluant  $\varphi \bar{\varphi}$  et en intégrant sur B, il vient, compte-tenu de (6,4) :

$$\int_B |\varphi(\zeta)|^2 \eta = |\varphi(0)|^2 \int_B \eta + \sum_{\alpha=1}^n |[\partial_\alpha \varphi](0)|^2 \int_B |\zeta^\alpha|^2 \eta + \dots$$

et l'inégalité (6,3) en résulte (Bergmann [3]).

b)  $z$  appartenant à U, domaine de coordonnées locales de  $W_n$ , proposons-nous de majorer :

$$\sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z)|^2 = \sum_{A,B=0}^P \langle \beta_A, \beta_B \rangle \overline{(b_A)_U(z)} (b_B)_U(z)$$

ce qui peut s'écrire,  $\zeta$  étant la variable d'intégration sur  $W_n$  :

$$(6,5) \quad \sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z)|^2 = \varepsilon_n \int_{W_n} \left\{ \sum_{A=0}^P \beta_A(\zeta) \overline{(b_A)_U(z)} \right\} \wedge \left\{ \sum_{B=0}^P \beta_B(\zeta) \overline{(b_B)_U(z)} \right\}.$$

Soit  $B_z$  un polycylindre fermé contenu dans U lieu du point  $\zeta = \{\zeta^\alpha\}$  de U tel que  $|\zeta^\alpha - z^\alpha| \leq r^\alpha$ .

De (6,5) il résulte :

$$\sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z)|^2 \geq \varepsilon_n \int_B \left\{ \sum_{A=0}^P \beta_A(\zeta) \overline{(b_A)_U(z)} \right\} \wedge \left\{ \sum_{B=0}^P \beta_B(\zeta) \overline{(b_B)_U(z)} \right\}$$

soit  $\zeta$  appartenant à U :

$$\sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z)|^2 \geq \int_B \left| \sum_{A=0}^P (b_A)_U(\zeta) \overline{(b_A)_U(z)} \right|^2 \eta_U(\zeta).$$

D'après le lemme appliqué à la fonction

$$\varphi(\zeta^\alpha) = \sum_{A=0}^P (b_A)_U(\zeta) \overline{(b_A)_U(z)}$$

il vient

$$\sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z)|^2 \geq C^2(B_z) \left| \sum_{A=0}^P (b_A)_U(z) \overline{(b_A)_U(z)} \right|^2$$

où l'on a posé :

$$(6,6) \quad C^2(B_z) = \int_{B_z} \eta_U > 0.$$

On obtient ainsi :

$$C^2(B_z) \left[ \sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z)|^2 \right]^2 \leq \sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z)|^2$$

soit l'inégalité de majoration.

$$(6,7) \quad \sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z)|^2 \leq \frac{1}{C^2(B_z)}.$$

c) Si U et V sont deux domaines de coordonnées locales de  $W_n$ , on a en vertu de l'inégalité de Schwarz, pour un couple  $z, \zeta \in U \times V$  :

$$\left[ \sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z) \overline{(b_A)_V(\zeta)}| \right]^2 \leq \left[ \sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z)|^2 \right] \left[ \sum_{A=0}^P |(b_A)_V(\zeta)|^2 \right].$$

Par suite si  $B_z$  et  $B'_\zeta$  sont deux polycylindres fermés respectivement contenus dans U et dans V et ayant pour origines respectives z et  $\zeta$ , on a d'après (6,7) :

$$\sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z) \overline{(b_A)_V(\zeta)}| \leq \frac{1}{C(B_z)C(B'_\zeta)}.$$

Donnons-nous deux polycylindres fermés fixes arbitraires  $B \subset U$  et  $B' \subset V$ . Posons :

$$h(B) = \inf_{z \in B} C(B_z), \quad h(B') = \inf_{\zeta \in B'} C(B'_\zeta).$$

On a pour tout  $(z, \zeta) \in B \times B'$

$$(6,8) \quad \sum_{A=0}^P |(b_A)_U(z) \overline{(b_A)_V(\zeta)}| \leq \frac{1}{h(B)h(B')}.$$

Considérons la série :

$$(6,9) \quad \sum_{A=0}^{\infty} (b_A)_U(z) \overline{(b_A)_V(\zeta)}.$$

On déduit de (6,8)

1° que la série (6,9) *converge absolument* sur  $B \times B'$ ;

2° que cette série de fonctions holomorphes en  $z$  et  $\bar{\zeta}$  est *bornée dans son ensemble* dans  $B \times B'$ .

D'un théorème classique de Montel-Vitali, il résulte qu'elle *converge uniformément* dans  $B \times B'$ . Ainsi (6,9) définit dans  $B \times B'$  une fonction holomorphe de  $z$  et  $\bar{\zeta}$  et *peut être dérivée terme à terme* à l'intérieur de  $B \times B'$ . Nous pouvons énoncer :

**THÉORÈME 1.** — *Si  $\{\beta_A\}$  ( $A = 0, 1, \dots$ ) est une base orthonormée de  $F$ , la série*

$$\sum_{A=0}^{\infty} \beta_A(z) \wedge \overline{\beta_A(\zeta)}$$

*converge absolument et définit sur  $W_n \times \bar{W}_n$  une forme  $K(z, \zeta)$  holomorphe en  $z$  et  $\bar{\zeta}$ .*

d) Soit  $\alpha$  un élément de  $F$ ,  $C_A$  ( $A = 0, 1, \dots$ ) les coefficients de Fourier de  $\alpha$  relativement à la base orthonormée  $\{\beta_A\}$  de  $F$  :

$$C_A = \langle \alpha, \beta_A \rangle.$$

Les  $\{\beta_A\}$  formant une base orthonormée de  $F$ , on a la relation de Parseval :

$$(6,10) \quad \sum_{A=0}^{\infty} |C_A|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

La série

$$\sum_{A=0}^{\infty} C_A \beta_A$$

converge en moyenne quadratique vers  $\alpha$ . Étudions sa convergence ordinaire en un point  $z$  de  $W_n$  ou, si  $U$  est un domaine de coordonnées locales contenant  $z$ , la convergence de la série

$$(6,11) \quad \sum_{A=0}^{\infty} C_A (b_A)_U(z).$$

Il vient d'après l'inégalité de Schwarz :

$$\left[ \sum_{A=0}^p |C_A(b_A)_{U(z)}| \right]^2 \leq \sum_{A=0}^p |C_A|^2 \sum_{A=0}^p |(b_A)_{U(z)}|^2$$

soit d'après (6,10) :

$$\left[ \sum_{A=0}^p |C_A(b_A)_{U(z)}| \right]^2 \leq \langle \alpha, \alpha \rangle \sum_{A=0}^{\infty} |(b_A)_{U(z)}|^2$$

où la série du second membre est convergente d'après (6,7). La série (6,11) est ainsi absolument convergente. Soit  $B \subset U$  un polycylindre fermé fixe. Le même raisonnement donne :

$$\left[ \sum_{A=p}^{\infty} |C_A(b_A)_{U(z)}| \right]^2 \leq \sum_{A=p}^{\infty} |C_A|^2 \sum_{A=p}^{\infty} |(b_A)_{U(z)}|^2$$

soit avec les notations de (6,8)

$$\left[ \sum_{A=p}^{\infty} C_A(b_A)_{U(z)} \right]^2 \leq \frac{1}{h(B)^2} \sum_{A=p}^{\infty} |C_A|^2$$

(6,11) converge uniformément dans  $B$ . La série de Fourier de  $\alpha$  définit donc une  $n$ -forme holomorphe qui ne peut que coïncider avec  $\alpha$ .

**THÉORÈME 2.** — *Si  $\{\beta_A\}$  est une base orthonormée de  $F$ , la série de Fourier correspondant à  $\{\beta_A\}$  de tout élément  $\alpha$  de  $F$  converge sur  $W_n$  et représente la  $n$ -forme  $\alpha$  :*

$$(6,12) \quad \alpha = \sum_{A=p}^{\infty} C_A \beta_A \quad (C_A = \langle \alpha, \beta_A \rangle).$$

### 7. Forme et noyau de Bergmann.

a) Soient  $\{\beta_A\}$ ,  $\{\beta'_B\}$  ( $A, B = 0, 1, \dots$ ) deux bases orthonormées de l'espace de Hilbert  $F$ . Nous poserons :

$$C_{AB} = \langle \beta_A, \beta'_B \rangle.$$

Du théorème 2 du paragraphe 6, on déduit :

$$(7,1) \quad \beta_A = \sum_{B=0}^{\infty} C_{AB} \beta'_B$$

et aussi comme  $\bar{C}_{AB} = \langle \beta'_B, \beta_A \rangle$

$$(7,2) \quad \beta'_B = \sum_{A=0}^{\infty} \bar{C}_{AB} \beta_A.$$

D'après l'égalité de Parseval, il vient :

$$\sum_{A=0}^{\infty} \bar{C}_{AB} C_{AC} = \langle \beta'_B, \beta'_C \rangle$$

soit

$$(7,3) \quad \sum_{A=0}^{\infty} \bar{C}_{AB} C_{AC} = \delta_{BC}.$$

Cela posé, considérons la forme  $K(z, \zeta)$  définie par :

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{A=0}^{\infty} \beta_A(z) \wedge \overline{\beta_A(\zeta)}.$$

D'après (7,1), il vient :

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{A=0}^{\infty} \left( \sum_{B=0}^{\infty} C_{AB} \beta'_B(z) \right) \wedge \left( \sum_{i=0}^{\infty} \overline{C_{AC} \beta'_C(\zeta)} \right)$$

soit : 
$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{B, C=0}^{\infty} \left( \sum_{A=0}^{\infty} C_{AB} \bar{C}_{AC} \right) \beta'_B(z) \wedge \overline{\beta'_C(\zeta)}.$$

De (7,3) il résulte :

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{B, C=0}^{\infty} \delta_{BC} \beta'_B(z) \wedge \overline{\beta'_C(\zeta)}.$$

On obtient :

$$(7,4) \quad K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{B=0}^{\infty} \beta'_B(z) \wedge \overline{\beta'_B(\zeta)}.$$

*Ainsi la forme  $K(z, \bar{\zeta})$  est indépendante du choix de la base orthonormée de  $F$  à partir de laquelle on l'a définie.*

b) En faisant  $\zeta = z$ , on définit ainsi une  $2n$ -forme sur la variété analytique complexe  $W_n$

$$(7,5) \quad K(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} \beta_A(z) \wedge \overline{\beta_A(z)}.$$

*A cette  $2n$ -forme  $K(z, \bar{z})$  on donnera le nom de forme de Bergmann de la variété  $W_n$ .*

Sur le domaine  $U$  d'un système de coordonnées locales posons

$$(7,6) \quad K_U(z, \bar{z}) = k_U(z, \bar{z}) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge dz^{\bar{1}} \wedge \dots \wedge dz^{\bar{n}}.$$



Si  $z \in U \cap V$ , il vient immédiatement :

$$(7,7) \quad k_V(z, \bar{z}) = |J_V^U|^2 k_U(z, \bar{z}).$$

Il en résulte que les  $k_U(z, \bar{z})$  définissent sur  $W_n$  une *densité scalaire*  $k$  de poids 1. A  $k$  on donnera le nom de *noyau de Bergmann* de la variété analytique complexe  $W_n$ .

Avec les notations du paragraphe 6, il est clair que l'on a :

$$(7,8) \quad k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} |(b_A)_U(z)|^2.$$

c) Soit  $\mu$  une transformation holomorphe de  $W_n$ ,  $\{\beta_A\}$  une base orthonormée de l'espace de Hilbert  $F$ . On a :

$$\langle \beta_A, \beta_B \rangle = \delta_{AB}.$$

De l'invariance par  $\mu$  du produit scalaire, il résulte :

$$\langle \mu^* \beta_A, \mu^* \beta_B \rangle = \delta_{AB}.$$

Les  $\{\mu^* \beta_A\}$  forment donc aussi un système orthonormé. Si  $\alpha \in F$ , les composantes de  $\alpha$  dans ce système sont :

$$C_A = \langle \alpha, \mu^* \beta_A \rangle = \langle \mu^{-1*} \alpha, \beta_A \rangle.$$

Le système  $\{\beta_A\}$  étant complet, on a :

$$\sum_{A=0}^{\infty} |C_A|^2 = \langle \mu^{-1*} \alpha, \mu^{-1*} \alpha \rangle$$

et par suite la relation de Parseval :

$$\sum_{A=0}^{\infty} |C_A|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

Ainsi si  $\{\beta_A\}$  est une base orthonormée de  $F$ , il en est de même pour  $\{\mu^* \beta_A\}$ . Le transformé de  $K(z, \bar{z})$  par  $\mu$ , soit

$$\mu^* K(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} \mu^* \beta_A(z) \wedge \overline{\mu^* \beta_A(z)}$$

ne peut différer de  $K(z, \bar{z})$  d'après l'indépendance de  $K$  par rapport au choix d'une base orthonormée de  $F$ . Nous obtenons :

**THÉORÈME.** — *La forme de Bergmann  $K$  et par suite le noyau de Bergmann  $k$  d'une variété complexe  $W_n$  sont invariants par toute transformation holomorphe  $\mu$  de la variété  $W_n$ .*

**8.  $F'(z)$  et la forme de Bergmann.**

a) Choisissons un point  $z$  de  $W_n$  et reprenons les notations du paragraphe 5. Si  $F'(z) = F$ , tout élément de  $F$  s'annule en  $z$  et en ce point

$$K(z, \bar{z}) = 0.$$

Si  $z \in U$ , domaine de coordonnées locales :

$$k_U(z, \bar{z}) = 0.$$

Si  $F'(z) \neq F$ , soit  $\alpha_0$  un élément de  $F$  vérifiant les relations :

$$(8,1) \quad \langle \alpha, \alpha_0 \rangle = 1, \quad \langle \alpha_0, \gamma \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in F'(z).$$

Il existe des bases orthonormées de  $F$  dont le premier élément est  $\alpha_0$ . Les autres éléments  $\{\alpha_A\}$  ( $A = 1, 2, \dots$ ) appartiennent à  $F'(z)$ . Ainsi

$$(8,2) \quad \alpha_0(z) \neq 0, \quad \alpha_1(z) = \dots = \alpha_A(z) = \dots = 0.$$

Nous dirons qu'une telle base orthonormée de  $F$  est adaptée au point  $z$  choisi. Pour une telle base orthonormée adaptée à  $z$ , on a en ce point

$$K(z, \bar{z}) = \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)}$$

et si  $z \in U$

$$k_U(z, \bar{z}) = |(\alpha_0)_U(z)|^2 > 0$$

$k$  est donc nul en  $z$  si  $F'(z) = F$ , strictement positif en  $z$  si  $F'(z) \neq F$ .

b) Soit  $U$  un domaine de coordonnées locales contenant le point  $z$  choisi,  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments de l'espace  $F$ . On a :

$$\begin{aligned} \alpha_U(z) &= a_U(z) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n, \\ \beta_U(z) &= b_U(z) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n. \end{aligned}$$

Supposons qu'en  $z$  :

$$(8,3) \quad |b_U(z)|^2 \leq |a_U(z)|^2.$$

Soit  $V$  un autre domaine de coordonnées locales contenant  $z$ . De la relation entre les composantes  $a_U(z)$  et  $a_V(z)$  il résulte :

$$|b_V(z)|^2 \leq |a_V(z)|^2 \quad (z \in U \cap V)$$

et l'inégalité (8,3) est indépendante du domaine de coordonnées

locales choisi. Lorsque cette inégalité est satisfaite nous écrivons :

$$\beta(z) \wedge \overline{\beta(z)} \leq \alpha(z) \wedge \overline{\alpha(z)}.$$

Cette relation d'ordre introduite relativement au point  $z$ , nous pouvons énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME.** —  $z$  étant un point choisi de  $W_n$ , on a :

$$(8,4) \quad K(z, \bar{z}) = \text{Max}_{\langle \alpha, \alpha \rangle = 1} \alpha(z) \wedge \overline{\alpha(z)}.$$

Pour  $K(z, \bar{z}) \neq 0$  ce maximum est atteint par les formes  $\alpha_0$  vérifiant (8,1) et définies à un facteur constant près de module 1.

En effet si  $F'(z) = F$ , on a

$$\alpha(z) = 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in F, \quad K(z, \bar{z}) = 0$$

et la relation (8,4) est triviale.

Si  $F'(z) \neq F$ , tout élément  $\alpha$  de  $F$  peut s'écrire :

$$\alpha = c\alpha_0 + \gamma \quad (\gamma \in F'(z)).$$

Si  $\alpha$  est normée :

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = |c|^2 + \langle \gamma, \gamma \rangle = 1.$$

Il en résulte :

$$\alpha(z) \wedge \overline{\alpha(z)} = |c|^2 \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)} = \{1 - \langle \gamma, \gamma \rangle\} \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)}.$$

Ainsi

$$(8,5) \quad \alpha(z) \wedge \overline{\alpha(z)} = \{1 - \langle \gamma, \gamma \rangle\} K(z, \bar{z}).$$

Le premier membre de (8,5) est maximum pour  $\langle \gamma, \gamma \rangle = 0$ , ce qui établit (8,4). Le maximum est atteint pour les formes  $\alpha = C\alpha_0$ , où  $|C| = 1$ , c'est-à-dire pour les formes vérifiant les relations (8,1).

### 9. Forme de Bergmann d'un domaine.

Nous allons rappeler quelques applications du théorème précédent.

Soit  $D$  un domaine, c'est-à-dire un ouvert connexe, de la variété analytique complexe  $W_n$  et désignons par  $K$  la forme de Bergmann relative à  $W_n$ , par  $K_D$  celle relative au domaine  $D$ .

Si  $z \in D$ , supposons  $K(z, \bar{z}) \neq 0$ . Soit  $\{\alpha_A\}$  une base adaptée à  $z$  de l'espace  $F$  relatif à  $W_n$ . Avec les notations antérieures :

$$(9,1) \quad K(z, \bar{z}) = \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)}.$$

D'autre part la restriction à  $D$  de la  $n$ -forme  $\alpha_0$  est une  $n$ -forme holomorphe sur  $D$ , que nous noterons encore  $\alpha_0$ , et qui est telle que :

$$\langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_D \leq \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_{W_n} = 1.$$

Posons :

$$c^2 = \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_D \quad (\text{avec } 0 < c \leq 1).$$

On voit que

$$\left\langle \frac{\alpha_0}{c}, \frac{\alpha_0}{c} \right\rangle_D = 1.$$

Il en résulte, en vertu du théorème précédent appliqué à  $D$ ,

$$\frac{1}{c^2} \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)} \leq K_D(z, \bar{z})$$

soit, d'après (9,1),

$$K(z, \bar{z}') \leq c^2 K_D(z, \bar{z}).$$

Il vient ainsi :

$$(9,2) \quad K(z, \bar{z}) \leq K_D(z, \bar{z})$$

où l'inégalité est entendue au sens du paragraphe 8, b.

Si  $K(z, \bar{z}) = 0$ , l'inégalité (9,2) est trivialement satisfaite. Nous pouvons énoncer :

**THÉORÈME.** — *Soit  $D$  un domaine de la variété analytique complexe  $W_n$  et soient  $K$  et  $K_D$  les formes de Bergmann respectives de  $W_n$  et  $D$ . Pour  $z \in D$ , on a au sens du paragraphe 8, b*

$$K(z, \bar{z}) \leq K_D(z, \bar{z}).$$

### 10. Forme de Bergmann d'une variété produit.

Soient  $W_n$  et  $W'_p$  deux variétés analytiques complexes de dimensions complexes respectives  $n$  et  $p$ . La variété produit  $W_n \times W'_p$  est une variété complexe de dimension  $n + p$ . Toute forme de  $W_n$  (resp.  $W'_p$ ) s'identifie de manière naturelle

à une forme de  $W_n \times W'_p$ . Avec cette identification, nous nous proposons d'établir le théorème suivant.

**THÉORÈME.** — *Si  $W_n$  et  $W'_p$  sont deux variétés complexes de formes de Bergmann  $K_{W_n}$  et  $K_{W'_p}$ , la variété  $W_n \times W'_p$  admet la forme de Bergmann.*

$$(10,1) \quad K_{W_n \times W'_p} = (-1)^{np} K_{W_n} \wedge K_{W'_p}.$$

a) Pour établir ce théorème, nous ferons d'abord les remarques suivantes. Soit  $F_{W_n}$  (resp.  $F_{W'_p}$ ,  $F_{W_n \times W'_p}$ ) l'espace des  $n$ -formes (resp.  $p$ -formes,  $(n+p)$ -formes) holomorphes de carrés intégrables de  $W_n$  (resp. de  $W'_p$ ,  $W_n \times W'_p$ ). Si  $\alpha \in F_{W_n}$ ,  $\alpha' \in F_{W'_p}$ , il est clair que  $\alpha \wedge \alpha'$  est une  $(n+p)$ -forme holomorphe sur  $W_n \times W'_p$ . De plus :

$$\begin{aligned} \left| \int_{W_n \times W'_p} \alpha(z) \wedge \alpha'(z') \wedge \overline{\alpha(z)} \wedge \overline{\alpha'(z')} \right| \\ = \left| \int_{W_n} \alpha(z) \wedge \overline{\alpha(z)} \right| \left| \int_{W'_p} \alpha'(z') \wedge \overline{\alpha'(z')} \right| < \infty \end{aligned}$$

et  $\alpha \wedge \alpha'$  appartient à  $F_{W_n \times W'_p}$ .

Considérons d'autre part une forme  $\beta \in F_{W_n \times W'_p}$ . Si

$$\zeta = (z, z') \in W_n \times W'_p$$

et si,  $U$ ,  $U'$  sont des domaines de coordonnées locales de  $W_n$  et  $W'_p$  contenant respectivement  $z$  et  $z'$ , on a :

$$\beta(\zeta) = \beta(z, z') = b_{U \times U'}(z, z') dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge dz'^1 \wedge \dots \wedge dz'^p.$$

Le point  $z'$  étant fixé, considérons la  $n$ -forme sur  $U$  :

$$[\beta_{z'}]_U(z) = b_{U \times U'}(z, z') dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n.$$

Les  $[\beta_{z'}]_U$  déterminent une  $n$ -forme  $\beta_{z'}$  holomorphe sur  $W_n$ , définie à un facteur près fonction holomorphe de  $z'$  dépendant du choix de  $U'$ . En introduisant sur  $W'_p$  un recouvrement  $\{U'_i\}$  analogue à celui du paragraphe 4 et une partition correspondante de l'unité  $\{\varphi_i\}$ , il vient avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} \left| \int_{W_n \times W'_p} \beta(z, z') \wedge \overline{(\beta(z, z'))} \right| \\ = \left| \sum_i \int_{U'_i} \varphi_i(z') \eta_{U'_i}(z') \int_{W_n} [\beta_{z'}(z) \wedge \overline{\beta_{z'}(z)}]_i \right| < \infty. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\beta_{z'} \in F_{W_n}$ .

b) Cela posé, supposons qu'au point  $\zeta_0 = (z_0, z'_0) \in W_n \times W'_p$ , on ait :

$$(10,2) \quad K_{W_n \times W'_p}(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) = 0.$$

Il en résulte que quels que soient  $\alpha \in F_{W_n}$ ,  $\alpha' \in F_{W'_p}$ , la forme  $\alpha \wedge \alpha'$  s'annule en  $\zeta_0$

$$\alpha(z_0) \wedge \alpha'(z'_0) = 0.$$

S'il existe  $\alpha' \in F_{W'_p}$  tel que  $\alpha'(z'_0) \neq 0$ , on en déduit  $\alpha(z_0) = 0$  pour tout  $\alpha \in F_{W_n}$  et par suite

$$K_{W_n}(z_0, \bar{z}_0) = 0.$$

Ainsi (10,2) entraîne ou bien  $K_{W_n}(z_0, \bar{z}_0) = 0$  ou bien  $K_{W'_p}(z'_0, \bar{z}'_0) = 0$ .

Inversement supposons que pour  $z_0 \in W_n$  :

$$(10,3) \quad K_{W_n}(z_0, \bar{z}_0) = 0.$$

Choisissons un point arbitraire  $z'_0$  de  $W'_p$ . Si  $\beta \in F_{W_n \times W'_p}$ , la forme  $\beta_{z'_0}$  de  $F_{W_n}$  est, d'après (10,3) telle que  $\beta_{z'_0}(z_0) = 0$ . Il en résulte  $\beta(z_0, z'_0) = 0$  pour tout  $\beta$  et (10,2) est satisfaite pour  $\zeta_0 = (z_0, z'_0)$ .

La formule (10,1) est donc vérifiée, si l'on suppose que l'une des trois formes de Bergmann s'annule.

c) Supposons maintenant que pour  $\zeta_0 = (z_0, z'_0)$ , aucune des trois formes de Bergmann ne s'annule. Il existe des formes  $\alpha_0 \in F_{W_n}$ ,  $\alpha'_0 \in F_{W'_p}$  telles que :

$$\langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_{W_n} = 1, \quad \langle \alpha_0, \gamma \rangle_{W_n} = 0$$

pour toute  $\gamma \in F_{W_n}$  telle que  $\gamma(z_0) = 0$  et

$$\langle \alpha'_0, \alpha'_0 \rangle_{W'_p} = 1, \quad \langle \alpha'_0, \gamma' \rangle_{W'_p} = 0$$

pour toute  $\gamma' \in F_{W'_p}$  telle que  $\gamma'(z'_0) = 0$  et il vient :

$$(10,4) \quad \begin{aligned} K_{W_n}(z_0, \bar{z}_0) &= \alpha_0(z_0) \wedge \overline{\alpha_0(z_0)}, \\ K_{W'_p}(z'_0, \bar{z}'_0) &= \alpha'_0(z'_0) \wedge \overline{\alpha'_0(z'_0)}. \end{aligned}$$

Cela posé, soit  $\delta$  un élément de  $F_{W_n \times W'_p}$  tel que  $\delta(z_0, z'_0) = 0$  donc que  $\delta_{z'_0}(z_0) = 0$ . Considérons la  $p$ -forme définie par :

$$\gamma'(z') = \int_{W_n} \delta(z, z') \wedge \overline{\alpha_0(z)}.$$

C'est une  $p$ -forme holomorphe sur  $W'_p$ . De l'inégalité de Schwarz, il résulte :

$$\varepsilon_p \gamma' \wedge \bar{\gamma}' \leq \left[ \varepsilon_n \int_{W_n} \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)} \right] \left[ (-1)^{np} \varepsilon_n \varepsilon_p \int_{W_n} \delta(z, z') \wedge \overline{\delta(z, z')} \right]$$

soit comme :

$$(10,5) \quad \frac{\varepsilon_{n+p}}{\varepsilon_n \varepsilon_p} = (-1)^{np}$$

il vient :

$$\varepsilon_p \gamma' \wedge \bar{\gamma}' \leq \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_{W_n} \varepsilon_{n+p} \int_{W_n} \delta(z, z') \wedge \overline{\delta(z, z')}.$$

En intégrant sur  $W'_p$ , on obtient :

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle_{W'_p} \leq \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_{W_n} \langle \delta, \delta \rangle_{W_n \times W'_p} < \infty.$$

Ainsi  $\gamma'$  appartient à  $F_{W'_p}$ . Comme  $\delta_{z'}(z_0) = 0$ ,  $\delta_{z'_0}$  est orthogonale à  $\alpha'_0$  dans  $F_{W'_p}$ , c'est-à-dire :

$$\int_{W_n \times W'_p} \delta(z, z') \wedge \overline{\alpha_0(z)} \wedge \overline{\alpha'_0(z')} = 0.$$

On obtient ainsi

$$(10,6) \quad \langle \alpha_0 \wedge \alpha'_0, \delta \rangle_{W_n \times W'_p} = 0$$

pour tout  $\delta \in F_{W_n \times W'_p}$  tel que  $\delta(z_0, z'_0) = 0$ .

Étudions d'autre part

$$\langle \alpha_0 \wedge \alpha'_0, \alpha_0 \wedge \alpha'_0 \rangle_{W_n \times W'_p} = \varepsilon_{n+p} \int_{W_n \times W'_p} \alpha_0 \wedge \alpha'_0 \wedge \bar{\alpha}_0 \wedge \bar{\alpha}'_0.$$

Il vient :

$$\langle \alpha_0 \wedge \alpha'_0, \alpha_0 \wedge \alpha'_0 \rangle_{W_n \times W'_p} = (-1)^{np} \varepsilon_{n+p} \int_{W_n \times W'_p} \alpha_0 \wedge \bar{\alpha}_0 \wedge \alpha'_0 \wedge \bar{\alpha}'_0$$

c'est-à-dire :

$$\langle \alpha_0 \wedge \alpha'_0, \alpha_0 \wedge \alpha'_0 \rangle_{W_n \times W'_p} = \frac{(-1)^{np} \varepsilon_{n+p}}{\varepsilon_n \varepsilon_p} \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_{W_n} \langle \alpha'_0, \alpha'_0 \rangle_{W'_p}.$$

On obtient ainsi d'après (10,5) :

$$(10,7) \quad \langle \alpha_0 \wedge \alpha'_0, \alpha_0 \wedge \alpha'_0 \rangle_{W_n \times W'_p} = 1.$$

Les relations (10-6) et (10-7) montrent que :

$$K_{W_n \times W'_p}(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) = \alpha_0(z_0) \wedge \alpha'_0(z'_0) \wedge \overline{\alpha_0(z_0)} \wedge \overline{\alpha'_0(z'_0)}$$

soit :

$$K_{W_n \times W_p}(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) = (-1)^{np} \alpha_0(z_0) \wedge \overline{\alpha_0(z_0)} \wedge \alpha'_0(z'_0) \wedge \overline{\alpha'_0(z'_0)}$$

ce qui, d'après (10,4), fournit la relation énoncée.

## II. TENSEUR INVARIANT DE BERGMANN.

### 11. Variété complexe normale et tenseur de Bergmann.

a) Soit  $K$  la  $2n$ -forme de Bergmann de la variété analytique complexe  $W_n$ . Sur le domaine  $U$  d'un système de coordonnées locales, nous avons posé :

$$(11,1) \quad K_U(z, \bar{z}) = k_U(z, \bar{z}) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}^n.$$

Soient  $U$  et  $V$  deux domaines de coordonnées locales notées  $\{z^\alpha\}$  et  $\{z^\lambda\}$ ; si  $z \in U \cap V$  nous posons :

$$A_{\lambda'}^\alpha = \frac{\partial z^\alpha}{\partial z^{\lambda'}}, \quad A_{\bar{\lambda}'}^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial z^{\bar{\alpha}}}{\partial z^{\bar{\lambda}'}}.$$

La matrice  $A_V^U = (A_{\lambda'}^\alpha)$  admet pour déterminant le jacobien  $J_V^U = \det(A_{\lambda'}^\alpha)$  qui est localement une fonction holomorphe. Les  $k_U$  définissent le *noyau  $k$  de Bergmann* de  $W_n$  : pour  $z \in U \cap V$

$$(11,2) \quad k_V(z, \bar{z}) = k_U(z, \bar{z}) J_V^U \overline{J_V^U}.$$

Si  $\{\beta_\alpha\}$  est une base orthonormée de  $F$ , rappelons qu'on a avec les notations du paragraphe 6 :

$$(11,3) \quad k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} |(b_A)_U(z)|^2 \geq 0.$$

b) Nous ne nous intéressons dans la suite qu'aux variétés analytiques complexes  $W_n$  *normales* au sens suivant :

**DÉFINITION.** — Une variété analytique complexe  $W_n$  est dite normale si sa forme de Bergmann  $K(z, \bar{z})$  est différente de zéro en tout point  $z$  de  $W_n$ .

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après le paragraphe 8 a, qu'en tout point  $z$  de  $W_n$  on ait  $F'(z) \neq F$ , c'est-



à-dire qu'il existe un élément tel que  $\alpha(z) \neq 0$ . Le noyau  $k$  est alors toujours strictement positif.

La variété  $W_n$  étant supposée normale, étudions les quantités définies, sur les différents voisinages de coordonnées locales, par la formule :

$$(11,4) \quad (t_U)_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\bar{\beta}} \log k_U.$$

Si  $z \in U \cap V$ , on a avec les notations précédentes :

$$(t_V)_{\lambda\bar{\mu}'} = \delta_{\lambda\bar{\mu}'} \log k_V.$$

Or d'après (11,2) :

$$\log k_V = \log k_U + \log J_V^U + \log \bar{J}_V^U.$$

Par dérivation il vient :

$$\delta_{\lambda\bar{\mu}'} \log k_V = \delta_{\lambda\bar{\mu}'} \log k_U = A_{\lambda'}^{\alpha} \cdot A_{\bar{\mu}'}^{\bar{\beta}} \delta_{\alpha\bar{\beta}} \log k_U.$$

Il en résulte :

$$(11,5) \quad (t_V)_{\lambda\bar{\mu}'}(z) = A_{\lambda'}^{\alpha} \cdot A_{\bar{\mu}'}^{\bar{\beta}} (t_U)_{\alpha\bar{\beta}}(z) \quad (z \in U \cap V).$$

On voit que les (11,4) sont les composantes d'un *tenseur covariant symétrique*  $t$  de  $W_n$  de type (1,1) par rapport à la structure complexe. A ce tenseur  $t$ , on donne le nom de *tenseur de Bergmann de la variété complexe normale*  $W_n$ .

Du théorème du paragraphe 10, il résulte que si  $W_n$  et  $W_p'$  sont deux variétés complexes normales,  $W_n \times W_p'$  est normale et admet pour tenseur de Bergmann la somme naturelle des tenseurs de Bergmann des deux variétés facteurs.

c) Soit  $\mu$  une *transformation holomorphe* de la variété normale  $W_n$ ; si  $z \in U$  admet les coordonnées complexes  $\{z^{\alpha}\}$ ,  $\zeta = \mu(z) \in \mu U$  les coordonnées complexes  $\{\zeta^{\lambda'}\}$ , les  $\zeta^{\lambda'}$  sont des fonctions holomorphes locales, à jacobien  $J(\mu)$  non nul des  $z^{\alpha}$ .

L'invariance par  $\mu$  du noyau  $k$  de Bergmann se traduit par la relation :

$$(11,6) \quad k_{\mu U}[\mu(z), \overline{\mu(z)}] J(\mu) \overline{J(\mu)} = k_U(z, \bar{z}).$$

Étudions l'image réciproque par  $\mu$  du tenseur covariant  $t$ . Il vient :

$$[(\mu^* t)_U]_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \frac{\delta \zeta^{\lambda'}}{\delta z^{\alpha}} \frac{\delta \bar{\zeta}^{\bar{\mu}'}}{\delta \bar{z}^{\bar{\beta}}} \delta_{\lambda\bar{\mu}'} \log k_{\mu U}[\mu(z), \overline{\mu(z)}].$$

De (11,6) il résulte :

$$[(\mu^*t)_U]_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \delta_{\alpha\bar{\beta}} \log k_{\mu U}[\mu(z), \overline{\mu(z)}] = \delta_{\alpha\bar{\beta}} \log k_U(z, \bar{z})$$

c'est-à-dire :

$$(11,7) \quad [(\mu^*t)_U]_{\alpha\bar{\beta}}(z) = [t_U]_{\alpha\bar{\beta}}(z).$$

Nous aboutissons ainsi au théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Le tenseur de Bergmann d'une variété complexe normale  $W_n$  est invariant par toute transformation holomorphe  $\mu$  de la variété  $W_n$  :*

$$\mu^*t = t.$$

### 12. La 2-forme $\tau$ .

a) A tout tenseur symétrique de type (1,1) d'une variété analytique complexe, on peut associer une 2-forme de même type. Au tenseur  $t$  de Bergmann, nous associons ainsi la 2-forme  $\tau$  définie localement par

$$(12,1) \quad \tau_U = - (2\pi)^{-1} i (t_U)_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}$$

où  $U$  est un domaine de coordonnées locales. D'après la définition de  $t$ , il est clair que la 2-forme réelle  $\tau$  est fermée

$$(12,2) \quad d\tau = 0.$$

Nous nous proposons d'étudier la classe de cohomologie de degré 2 définie par  $\tau$ .

b) Supposons  $W_n$  munie d'une métrique  $ds^2$  hermitienne, définie positive, auxiliaire. Cette métrique peut s'écrire localement sur  $U$  :

$$(12,3) \quad ds^2 = 2g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha dz^{\bar{\beta}}.$$

Introduisons la connexion canonique complexe ( $\omega_\beta^\alpha, \omega_{\bar{\beta}}^\alpha = 0$ ) de Chern définie par cette métrique. Relativement aux coordonnées locales  $\{z^\alpha\}$  sur  $U$ , cette connexion admet les coefficients  $\Gamma_{\beta k}^\alpha, \Gamma_{\bar{\beta} k}^\alpha$  ( $k = 1, \dots, 2n$ ) avec (Lichnerowicz [12], pp. 243-247)

$$\omega_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta k}^\alpha dz^k, \quad \omega_{\bar{\beta}}^\alpha = \Gamma_{\bar{\beta} k}^\alpha dz^k = 0$$

où :

$$(12,4) \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = g^{\alpha\bar{\rho}} \partial_{\gamma} g_{\beta\bar{\rho}}, \quad \Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^{\alpha} = 0$$

et

$$(12,5) \quad \Gamma_{\beta k}^{\alpha} = 0.$$

Par complexe conjugaison, on a :

$$\Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} = g^{\bar{\alpha}\rho} \partial_{\bar{\gamma}} g_{\beta\bar{\rho}}, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{\bar{\alpha}} = 0$$

et

$$\Gamma_{\beta k}^{\bar{\alpha}} = 0.$$

La courbure de la connexion est définie sur U par les 2-formes locales :

$$(12,6) \quad \Omega_{\beta}^{\alpha} = d\omega_{\beta}^{\alpha} + \omega_{\bar{\rho}}^{\alpha} \wedge \omega_{\beta}^{\bar{\rho}}$$

qui s'écrivent

$$(12,7) \quad \Omega_{\beta}^{\alpha} = R_{\beta, \lambda\bar{\mu}}^{\alpha} dz^{\lambda} \wedge dz^{\bar{\mu}}$$

où les  $R_{\beta, \lambda\bar{\mu}}^{\alpha}$  sont les composantes du tenseur de courbure. D'après une formule classique, ces composantes ont pour valeur :

$$R_{\beta, \lambda\bar{\mu}}^{\alpha} = \partial_{\lambda} \Gamma_{\beta\bar{\mu}}^{\alpha} - \partial_{\bar{\mu}} \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} + \Gamma_{k\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\beta\bar{\mu}}^k - \Gamma_{k\bar{\mu}}^{\alpha} \Gamma_{\beta\lambda}^k$$

soit d'après (12,4) et (12,5)

$$(12,8) \quad R_{\beta, \lambda\bar{\mu}}^{\alpha} = -\partial_{\bar{\mu}} \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} = -\partial_{\bar{\mu}} (g^{\alpha\bar{\rho}} \partial_{\lambda} g_{\beta\bar{\rho}}).$$

De (12,6) on déduit par contraction :

$$(12,9) \quad \psi_U = (2\pi)^{-1} i \Omega_{\alpha}^{\alpha} = d[(2\pi)^{-1} i \omega_{\alpha}^{\alpha}].$$

Les  $\psi_U$  définissent sur  $W_n$  une 2-forme réelle fermée  $\psi$ . On sait que  $\psi$  appartient à la première classe de cohomologie de Chern  $C_1(W_n)$ .

De (12,8) on déduit :

$$R_{\alpha, \lambda\bar{\mu}}^{\alpha} = -\partial_{\bar{\mu}} (g^{\alpha\bar{\rho}} \partial_{\lambda} g_{\alpha\bar{\rho}}) = -\partial_{\lambda\bar{\mu}} \log \sqrt{g}$$

où  $g$  est le discriminant de la métrique. On obtient ainsi pour définir  $\psi$  :

$$(12,10) \quad \psi_U = -(2\pi)^{-1} i \partial_{\lambda\bar{\mu}} \log \sqrt{g} dz^{\lambda} \wedge dz^{\bar{\mu}}.$$

c) Nous nous proposons de comparer les classes de cohomologie de  $\tau$  et  $\psi$ ;  $\sqrt{g}$  définit sur  $W_n$  une densité scalaire de poids 1. Posons :

$$k = f\sqrt{g}$$

où  $f$  est un scalaire strictement positif. Par dérivation, il vient :

$$\partial_{\alpha\bar{\beta}} \log k_U = \partial_{\alpha\bar{\beta}} \log \sqrt{g} + \partial_{\alpha\bar{\beta}} \log f.$$

Ainsi sur le domaine  $U$  :

$$(12,11) \quad \tau_U = \psi_U - (2\pi)^{-1} i \partial_{\alpha\bar{\beta}} \log f dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}.$$

Soit  $M$  le classique opérateur sur les formes, défini pour les formes de type  $(p, q)$  par :

$$M\alpha_{p,q} = (p - q)i\alpha_{p,q}.$$

On en déduit sur  $U$  :

$$Md \log f = i\partial_\alpha \log f dz^\alpha - i\partial_{\bar{\beta}} \log f dz^{\bar{\beta}}.$$

Par différentiation extérieure, il vient :

$$dM d \log f = - 2i\partial_{\alpha\bar{\beta}} \log f dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}.$$

La formule (12,11) peut ainsi s'écrire sur  $W_n$  :

$$(12,12) \quad \tau = \psi + d[(4\pi)^{-1} M d \log f]$$

et l'on voit que  $\tau$  et  $\psi$  appartiennent à la même classe de cohomologie. Nous sommes ainsi conduits au théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Si  $W_n$  est une variété complexe normale, la 2-forme  $\tau$  définie par (12,1) à partir du tenseur de Bergmann appartient à la classe de Chern  $C_1(W_n)$  de la variété.*

### 13. Expression du tenseur de Bergmann.

Selon Kobayashi [7] proposons-nous d'indiquer une expression du tenseur de Bergmann en un point  $z$  de  $W_n$ , en termes d'une base orthonormée de  $F$  adaptée à  $z$ .

a) Soit d'abord  $\{\beta_\Lambda\}$  une base orthonormée arbitraire de  $F$ .

Sur un domaine  $U$  de coordonnées locales  $\{z^\alpha\}$ , nous avons posé :

$$(\beta_A)_U(z) = (b_A)_U(z) dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \quad (z \in U)$$

et

$$(13,1) \quad k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} (b_A)_U(z) \overline{(b_A)_U(z)}.$$

L'étude du paragraphe 6 nous permet de dériver (13,1) terme à terme. Il vient ainsi

$$(13,2) \quad \begin{aligned} \partial_\alpha k_U(z, \bar{z}) &= \sum_{A=0}^{\infty} \partial_\alpha (b_A)_U(z) \overline{(b_A)_U(z)}, \\ \partial_{\bar{\beta}} k_U(z, \bar{z}) &= \sum_{A=0}^{\infty} (b_A)_U(z) \partial_{\bar{\beta}} \overline{(b_A)_U(z)} \end{aligned}$$

et par suite

$$(13,3) \quad \partial_{\alpha\bar{\beta}} k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} \partial_\alpha (b_A)_U(z) \partial_{\bar{\beta}} \overline{(b_A)_U(z)}.$$

Or

$$\partial_{\bar{\beta}} \log k_U(z, \bar{z}) = \frac{\partial_{\bar{\beta}} k_U(z, \bar{z})}{k_U(z, \bar{z})}$$

et ainsi :

$$\partial_{\alpha\bar{\beta}} \log k_U(z, \bar{z}) = \frac{\partial_{\alpha\bar{\beta}} k_U(z, \bar{z})}{k_U(z, \bar{z})} - \frac{\partial_\alpha k_U(z, \bar{z}) \partial_{\bar{\beta}} k_U(z, \bar{z})}{k_U^2(z, \bar{z})}.$$

Il résulte de (13,2) et (13,3) :

$$(13,4) \quad (t_U)_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \frac{\sum_{A=0}^{\infty} \partial_\alpha (b_A)_U(z) \partial_{\bar{\beta}} \overline{(b_A)_U(z)}}{k_U(z, \bar{z})} - \frac{\sum_{A=0}^{\infty} \partial_\alpha (b_A)_U(z) \overline{(b_A)_U(z)} \sum_{B=0}^{\infty} (b_B)_U(z) \partial_{\bar{\beta}} \overline{(b_B)_U(z)}}{k_U^2(z, \bar{z})}.$$

b) Soit maintenant  $\{\alpha_A\}$  une base orthonormée de  $F$  adaptée au point  $z$  envisagé. Avec les notations du paragraphe 8, on a :

$$(a_0)_U(z) \neq 0, \quad (a_1)_U(z) = \cdots = (a_A)_U(z) = \cdots = 0$$

et

$$(13,5) \quad k_U(z, \bar{z}) = (a_0)_U(z) \overline{(a_0)_U(z)}.$$

Écrite dans cette base particulière, la formule (13,4) devient :

$$(t_U)_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})} \partial_\alpha(a_0)_U(z) \partial_{\bar{\beta}}(\bar{a}_0)_U(\bar{z}) + \frac{1}{k_U(z, \bar{z})} \left( \sum_{A=1}^{\infty} \partial_\alpha(a_A)_U(z) \partial_{\bar{\beta}}(\bar{a}_A)_U(\bar{z}) \right) - \frac{1}{k_U^2(z, \bar{z})} (a_0)_U(z) (\bar{a}_0)_U(\bar{z}) \partial_\alpha(a_0)_U(z) \partial_{\bar{\beta}}(\bar{a}_0)_U(\bar{z}).$$

D'après (13,5), les premiers et derniers termes du second membre se détruisent et il vient :

$$(13,6) \quad (t_U)_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})} \left( \sum_{A=1}^{\infty} \partial_\alpha(a_A)_U(z) \partial_{\bar{\beta}}(\bar{a}_A)_U(\bar{z}) \right).$$

Désignons par  $V = (V_U^\alpha, V_U^{\bar{\beta}})$  un vecteur en  $z \in W_n$ . Le tenseur  $t$  de Bergmann définit en ce point la forme hermitienne

$$t(z, V) = (t_U)_{\alpha\bar{\beta}}(z) V_U^\alpha V_U^{\bar{\beta}}$$

qui s'écrit d'après (13,6)

$$(13,7) \quad t(z, V) = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})} \left[ \sum_{A=0}^{\infty} \left| V_U^\alpha \partial_\alpha(a_A)_U(z) \right|^2 \right].$$

D'après (13,7) le tenseur  $t$  définit ainsi sur  $W_n$  une forme hermitienne positive.

#### 14. Rang du tenseur de Bergmann.

Nous nous proposons d'interpréter le rang en  $z$  du tenseur  $t$  de Bergmann ou de la forme hermitienne correspondante.

a) Désignons par  $\mathcal{L}(X)$  l'opérateur de transformation infinitésimale par un champ de vecteurs  $X$  arbitraire de la variété  $W_n$ . Nous introduisons dans la suite le sous-espace  $F''(z)$  de  $F'(z)$  défini par les éléments  $\alpha \in F'(z)$  tels que :

$$(14,1) \quad [\mathcal{L}(X)\alpha](z) = 0$$

pour tout champ  $X$ . Si,  $U$  étant un domaine de coordonnées locales contenant  $z$ ,

$$\alpha_U = a_U dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$$

on a, d'après une formule classique concernant les transformations infinitésimales :

$$(14,2) \quad \{[\mathfrak{L}(X)\alpha]_{n,0}\}_U = (X_U^\alpha \partial_\alpha a_U + \partial_\alpha X_U^\alpha a_U) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n.$$

Comme  $a_U(z) = 0$ ,  $\mathfrak{L}(X)\alpha$  a pour composante au point  $z$ ,  $[X_U^\alpha \partial_\alpha a_U](z)$ . Ainsi les éléments de  $F''(z)$  sont les éléments de  $F'$  tels que :

$$(14,3) \quad a_U(z) = 0, \quad [\partial_\alpha a_U](z) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

b) Désignons par  $V(z)$  l'orthocomplément de  $F''(z)$  dans  $F'(z)$  et soit  $\{\alpha_B\}$  ( $B = 1, \dots, p$ ) un système orthonormé d'éléments de  $V(z)$ . Supposons qu'il existe des nombres complexes  $\{C^B\}$  ( $B = 1, \dots, p$ ) tels que :

$$\sum_{B=1}^p C^B [\partial_\alpha (a_B)_U](z) = 0.$$

On en déduit que l'élément de  $V(z)$  :

$$\alpha = \sum_{\beta=1}^p C^\beta \alpha_\beta$$

appartient aussi à  $F''(z)$ , donc est identiquement nul et  $C^B = 0$  ( $B = 1, \dots, p$ ). Ainsi la matrice  $p \times n$  d'éléments  $\{[\partial_\alpha (a_B)_U](z)\}$  est de rang  $p$  et nécessairement  $p$  est inférieur ou égal à  $n$ . Il en résulte que :

$$r(z) = \dim V(z) \leq n.$$

c) Cela posé, prenons pour base orthonormée de  $F'(z)$  une base orthonormée  $\{\alpha_A\}$  ( $A = 1, \dots, r(z)$ ) de  $V(z)$  complétée par une base orthonormée de  $F''(z)$ . La formule (13,6) s'écrit alors :

$$(14,4) \quad (t_U)_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})} \left( \sum_{A=1}^{r(z)} \partial_\alpha (a_A)_U(z) \partial_{\bar{\beta}} (\bar{a}_A)_U(\bar{z}) \right)$$

et la formule (13,7) :

$$(14,5) \quad t(z, V) = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})} \left[ \sum_{A=1}^{r(z)} |V_U^\alpha \partial_\alpha (a_A)_U(z)|^2 \right]$$

où les  $r(z)$  carrés mis en évidence sont indépendants. Ainsi  $t$  ou  $\tau$  est au point  $z$  de rang  $r(z)$ . Nous énonçons

THÉORÈME. — *Le rang du tenseur de Bergmann ou de la forme associée  $\tau$  en un point  $z$  de  $W_n$  est égal à la dimension  $r(z)$  de l'orthocomplément  $V(z)$  de  $F''(z)$  dans  $F'(z)$ .*

d) Choisissons un point  $z_0$  de  $W_n$ ;  $\tau^{r(z_0)}$  étant différent de 0 en  $z_0$ , et cette forme étant analytique réelle, elle ne peut être identiquement nulle sur aucun ouvert connexe de  $W_n$ , sinon, d'après l'analyticité, elle serait identiquement nulle sur  $W_n$ . Ainsi le support  $S(\tau^{r(z_0)})$  de la forme  $\tau^{r(z_0)}$  est toute la variété :

$$S(\tau^{r(z_0)}) = W_n.$$

Nous appelons *rang global du tenseur de Bergmann*, ou de la forme associée  $\tau$ , le plus grand entier  $r$  tel que

$$S(\tau^r) = W_n.$$

Il est clair que :

$$r = \text{Max}_{z \in W_n} r(z).$$

**15. Transformations infinitésimales holomorphes complètes.**

a) Une transformation infinitésimale  $X$  de  $W_n$  est dite *holomorphe* si elle laisse invariant le champ  $\mathfrak{J}$  d'opérateurs attaché à la structure complexe (paragraphe 3), c'est-à-dire si

$$(15,1) \quad \mathcal{L}(X)\mathfrak{J} = 0.$$

Dans un domaine  $U$  de coordonnées locales complexes,  $\mathfrak{J}$  a pour composantes relativement aux coordonnées :

$$\mathfrak{J}_\beta^\alpha = i\delta_\beta^\alpha, \quad \mathfrak{J}_\beta^{\bar{\alpha}} = -i\delta_\beta^{\bar{\alpha}}, \quad \mathfrak{J}_\beta^\beta = \mathfrak{J}_\beta^{\bar{\beta}} = 0.$$

On en déduit que pour tout  $X$  :

$$[\mathcal{L}(X)\mathfrak{J}]_\beta^\alpha = 0, \quad [\mathcal{L}(X)\mathfrak{J}]_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} = 0$$

et

$$[\mathcal{L}(X)\mathfrak{J}]_{\bar{\beta}}^\alpha = X^j \delta_j \mathfrak{J}_\beta^\alpha - \partial_j X_\beta^\alpha \mathfrak{J}_\beta^j + \partial_{\bar{\beta}} X_\beta^j \mathfrak{J}_j^\alpha \quad (j = 1, 2, \dots, 2n)$$

soit

$$[\mathcal{L}(X)\mathfrak{J}]_{\bar{\beta}}^\alpha = 2i\delta_{\bar{\beta}}^\alpha X_\beta^\alpha.$$

Par suite, pour que  $X$  définisse *une transformation infinitésimale holomorphe*, il faut et il suffit que, dans tout domaine de coordonnées locales complexes, les composantes  $\{X_\beta^\alpha\}$  soient loca-



lement des fonctions holomorphes. Si  $X$  est holomorphe et si  $\alpha$  est une  $n$ -forme holomorphe,  $\mathcal{L}(X)\alpha$  est aussi une  $n$ -forme holomorphe.

On notera que si  $X$  définit une transformation infinitésimale holomorphe, il en est de même pour le champ de vecteurs  $\mathfrak{J}X$ .

b) Une transformation infinitésimale  $X$  de  $W_n$  est dite *complète* si elle engendre un groupe à un paramètre  $\exp(uX)$  de transformations globales de la variété  $W_n$ . Pour que ce groupe laisse invariant un objet géométrique, il faut et il suffit qu'il en soit de même pour la transformation infinitésimale  $X$ . En particulier, si  $X$  est une *transformation infinitésimale holomorphe complète*, le groupe, à un paramètre correspondant laisse  $\mathfrak{J}$  invariant et par suite se compose de transformations holomorphes de  $W_n$ .

Pour une telle transformation infinitésimale, les transformations holomorphes  $\exp(uX)$  laissent invariants la 2-forme  $\tau$  et le noyau  $k$  de Bergmann. On en déduit :

$$(15,2) \quad \mathcal{L}(X)\tau = 0$$

et

$$(15,3) \quad \mathcal{L}(X)k = 0.$$

Si  $i(X)$  est l'opérateur de produit intérieur par  $X$ , on sait que pour une forme  $\tau$  :

$$\mathcal{L}(X)\tau = (di(X) + i(X)d)\tau.$$

La forme  $\tau$  étant fermée, (15,2) se traduit par :

$$di(X)\tau = 0.$$

Ainsi, si  $X$  est une transformation infinitésimale holomorphe complète,  $i(X)\tau$  est une 1-forme fermée.

Explicitons maintenant (15,3) dans un domaine  $U$  de coordonnées locales. Pour la densité scalaire  $k$ , on a :

$$[\mathcal{L}(X)k]_U = X_U^i \partial_j k_U + \partial_j X_U^i k_U$$

(15,3) peut donc se traduire localement par :

$$X_U^i \partial_j \log k_U + \partial_j X_U^i = 0.$$

Soit en distinguant les deux types d'indices :

$$(15,4) \quad (X_U^\alpha \partial_\alpha \log k_U + \partial_\alpha X_U^\alpha) + (X_U^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \log k_U + \partial_{\bar{\alpha}} \bar{X}_U^{\bar{\alpha}}) = 0.$$

c) Nous nous proposons d'établir un théorème important concernant les transformations infinitésimales complètes holomorphes  $X$  telles que la transformation infinitésimale holomorphe  $\mathfrak{J}X$  soit aussi complète. S'il en est ainsi, la relation (15,4) appliquée à  $\mathfrak{J}X$  s'écrit :

$$i(X_U^\alpha \partial_\alpha \log k_U + \partial_\alpha X_U^\alpha) - i(\bar{X}_U^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} \log k_U + \partial_{\bar{\alpha}} \bar{X}_U^\alpha) = 0.$$

Il en résulte que dans ce cas :

$$(15,5) \quad X_U^\alpha \partial_\alpha \log k_U + \partial_\alpha X_U^\alpha = 0.$$

Compte tenu du caractère holomorphe des  $X_U^\alpha$ , il vient par dérivation en  $z^{\bar{\beta}}$  :

$$(15,6) \quad X_U^\alpha (t_U)_{\alpha \bar{\beta}} = 0$$

qui traduit localement la relation :

$$(15,7) \quad i(X)t = 0$$

équivalente à :

$$i(X)\tau = 0.$$

d) Un point  $z$  de  $W_n$  étant arbitrairement choisi, soit  $\{\alpha_A\}$  une base orthonormée de  $F$  adaptée à  $z$ .

De (15,7), il résulte

$$t(z, X(z)) = 0$$

et d'après l'expression (13,7) de la forme hermitienne définie par  $t$ , on a en  $z$  :

$$[X_U^\alpha \partial_\alpha (a_A)_U](z) = 0 \quad (A = 1, \dots, \infty)$$

qui, d'après (14,2), exprime que :

$$[\mathcal{L}(X)\alpha_A](z) = 0 \quad (A = 1, \dots, \infty).$$

Ainsi si  $\gamma \in F'(z)$ , on a :

$$(15,8) \quad [\mathcal{L}(X)\gamma](z) = 0.$$

Explicitons maintenant la formule (15,5) en termes de la base orthonormée de  $F$  adaptée à  $z$  choisi. Il vient :

$$X_U^\alpha(z) \left[ \sum_{A=0}^{\infty} \partial_\alpha (a_A)_U(z) (\bar{a}_A)_U(\bar{z}) \right] + \partial_\alpha X_U^\alpha(z) \left[ \sum_{A=0}^{\infty} (a_A)_U(z) (\bar{a}_A)_U(\bar{z}) \right] = 0.$$

Soit, compte tenu des propriétés de la base adaptée :

$$[X_U^\alpha \partial_\alpha (a_0)_U + \partial_\alpha X_U^\alpha (a_0)_U](z)(\bar{a}_0)_U(\bar{z}) = 0$$

où  $(\bar{a}_0)_U(\bar{z})$  est différent de zéro. Ainsi :

$$[X_U^\alpha \partial_\alpha (a_0)_U + \partial_\alpha X_U^\alpha (a_0)_U](z) = 0$$

c'est-à-dire, d'après (14,2),

$$[\mathcal{L}(X)\alpha_0](z) = 0.$$

Si  $\beta$  est un élément arbitraire de  $F$ , on a d'après (5,2) :

$$\beta = c\alpha_0 + \gamma \quad \{c \in \mathbb{C}, \gamma \in F'(z)\}$$

et par suite :

$$[\mathcal{L}(X)\beta](z) = c[\mathcal{L}(X)\alpha_0](z) + [\mathcal{L}(X)\gamma](z) = 0.$$

Ainsi en tout point de la variété  $W_n$ ,  $\mathcal{L}(X)\beta = 0$ . Nous énonçons :

**THÉORÈME.** — *Si  $X$  est une transformation infinitésimale holomorphe complète de la variété complexe normale  $W_n$  et si  $\mathcal{J}X$  est aussi complète, on a :*

$$(15,9) \quad i(X)\tau = 0$$

*et toute  $n$ -forme holomorphe  $\beta$  de carré intégrable est invariante par  $X$  :*

$$(15,10) \quad \mathcal{L}(X)\beta = 0 \quad (\beta \in F).$$

e) De ce théorème résultent immédiatement deux corollaires intéressants. Supposons que  $\tau^n$  ne soit pas identiquement nul sur  $W_n$ , c'est-à-dire que  $\tau$  admette un rang global égal à  $n$  au sens du paragraphe 14. Soit alors  $U$  un domaine de  $W_n$  sur lequel  $\tau^n$  ne s'annule pas. Si  $X$  et  $\mathcal{J}X$  définissent deux transformations infinitésimales holomorphes complètes, il résulte du théorème précédent que  $X$  est nécessairement identiquement nul sur  $U$  et, par analyticité, est identiquement nul sur  $W_n$ .

Supposons en particulier que la classe de Chern  $C_1(W_n)$  soit telle que  $C_1(W_n)^n \neq 0$ ; la forme  $\tau^n$  appartient à  $C_1(W_n)^n$  et par suite ne s'annule pas identiquement sur  $W_n$ . On se trouve donc ramené à la situation précédente. Nous énonçons

COROLLAIRE 1. — Si  $\tau^n$  n'est pas identiquement nul, en particulier si  $C_1(W_n)^n \neq 0$ , il ne peut exister de transformation infinitésimale holomorphe complète  $X$  non nulle telle que  $\mathfrak{J}X$  soit aussi complète.

Ce corollaire répond en particulier à une question de Kobayashi ([7], p. 274) et constitue une généralisation du théorème classique d'Henri Cartan [5] concernant les domaines bornés de  $C^n$ . Dans ce cas, en effet, le tenseur  $t$  est partout de rang  $n$ .

f) Supposons compacte la variété complexe normale  $W_n$ .

D'après les propriétés classiques des 2-formes, on a

$$\int_{W_n} \tau^n \geq 0$$

l'intégrale n'étant nulle que si  $\tau^n$  est identiquement nulle. S'il n'en est pas ainsi,  $\tau^n$  est nécessairement non holomorphe à zéro sur  $W_n$  et  $C_1(W_n)^n \neq 0$ . Ainsi, pour que  $C_1(W_n)^n$  soit différent de zéro, il faut et il suffit que  $\tau^n$  soit non identiquement nulle.

Sous l'hypothèse de compacité de  $W_n$ , le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de  $W_n$  est un groupe de Lie complexe, d'après un théorème classique de Bochner et Montgomery. Toute transformation infinitésimale de  $W_n$  est ici complète. Si  $X$  est une transformation infinitésimale holomorphe,  $X$  et  $\mathfrak{J}X$  sont toutes deux holomorphes complètes. On en déduit :

COROLLAIRE 2. — Soit  $W_n$  une variété complexe normale compacte. Si  $X$  est une transformation infinitésimale holomorphe de  $W_n$ , on a

$$(15,11) \quad i(X)\tau = 0$$

et

$$(15,12) \quad \mathfrak{L}(X)\alpha = 0$$

pour toute  $n$ -forme holomorphe  $\alpha$ . (15,10) et (15,12) tiennent pour toute variété complexe comme on le voit par un raisonnement analogue à celui du corollaire 1.

Il est d'ailleurs immédiat d'établir (15,12) directement. Si  $C_1(W_n)^n \neq 0$ , le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de  $W_n$  est discret d'après (15,11). Il est même sans doute fini en accord avec un théorème de Kobayashi [8].

### 16. Cas d'un espace homogène complexe.

Supposons que  $W_n = G/H$  soit un *espace homogène complexe*;  $G$  est ainsi un groupe de transformations holomorphes de  $W_n$  opérant transitivement sur cette variété. Soit  $X$  une transformation infinitésimale de  $W_n$  *holomorphe et invariante par  $G$* . Il est aisé de montrer que  $X$  est nécessairement complète.

En effet soit  $z_0$  un point choisi de  $W_n$  et supposons que  $\exp(uX)z_0$  soit défini pour  $|u| < \varepsilon$ . Si  $z$  est un point arbitraire de  $W_n$ , il existe un élément  $\mu$  de  $G$  tel que  $z = \mu(z_0)$ . Alors :

$$\exp(uX)z = \mu[\exp(uX)z_0]$$

est aussi défini pour  $|u| < \varepsilon$ , puisque  $X$  est invariant par  $G$ . Il en résulte que la transformation infinitésimale  $X$  est complète.

La transformation infinitésimale holomorphe  $\mathfrak{J}X$  est aussi *invariante par  $G$* , donc aussi complète.

Du théorème du paragraphe 15, on déduit ainsi :

**THÉORÈME.** — *Soit  $W_n = G/H$  espace homogène complexe, supposé variété complexe normale. Si  $X$  est une transformation infinitésimale holomorphe de  $W_n$  invariante par  $G$ , on a*

$$i(X)\tau = 0$$

et

$$\mathfrak{L}(X)\alpha = 0 \quad (\alpha \in F).$$

*Il en est en particulier ainsi si  $X$  est un élément de l'algèbre de Lie du centre de  $G$ . En particulier si  $\tau^n$  n'est pas nulle, le centre de  $G$  est nécessairement discret (Koszul).*

## III. IMMERSION D'UNE VARIÉTÉ COMPLEXE NORMALE.

### 17. Définition de l'immersion $j$ dans $P(F^*)$ .

a) Désignons par  $F^*$  l'espace de Hilbert dual de  $F$  et rapportons-le à une base orthonormée  $\{\lambda^A\}$  ( $A = 0, 1, \dots$ ). Un élé-

ment  $\lambda$  de  $F^*$  peut s'écrire :

$$(17,1) \quad \lambda = \sum_{A=0}^{\infty} c_A \lambda^A \quad (c_A \in \mathbb{C})$$

avec

$$(17,2) \quad \sum_{A=0}^{\infty} |c_A|^2 < \infty.$$

Introduisons dans  $F^*$  la relation d'équivalence  $r$  définie de la manière suivante : si  $\lambda, \lambda' \in F^*$ ,  $\lambda'$  est dit équivalent à  $\lambda$  au sens de  $r$ , s'il existe un nombre complexe  $c \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda' = c\lambda$ . L'espace quotient de  $F^* - \{0\}$  par la relation d'équivalence  $r$  est l'espace projectif complexe  $P(F^*)$ , en général de dimension infinie.

Soit  $S(F^*)$  la sphère de  $F^*$  centrée à l'origine et de rayon 1, lieu des points (17,1) tels que :

$$\sum_{A=0}^{\infty} |c_A|^2 = 1.$$

L'espace  $P(F^*)$  peut être considéré comme espace quotient de  $S(F^*)$  par la restriction à cette sphère de la relation d'équivalence  $r$ ; chaque classe d'équivalence dans  $S(F^*)$  est alors un cercle. Il est bien connu que  $P(F^*)$  admet une structure uniforme et une « structure différentiable généralisée » naturelles déduites de celles de  $F$  par l'intermédiaire du sous-espace  $S(F^*)$  de  $F^*$ .

b) On sait que, dans le cas de dimension finie, l'espace projectif complexe admet une métrique kählerienne canonique, dite métrique de Fubini. Il est aisé d'étendre à la présente situation les raisonnements concernant cette métrique. Appliquons l'inégalité de Schwarz au produit scalaire au sens de  $F^*$

$$\bar{\lambda} \frac{d\lambda}{du}$$

où  $\lambda \in S(F^*)$  et où  $\frac{d\lambda}{du}$  est un vecteur tangent. Il vient :

$$\left| \bar{\lambda} \frac{d\lambda}{du} \right|^2 \leq |\lambda|^2 \left| \frac{d\lambda}{du} \right|^2 = \left| \frac{d\lambda}{du} \right|^2.$$

Il en résulte que la métrique définie sur  $S(F^*)$  par :

$$(17,3) \quad d\sigma^2 = d\lambda \, d\bar{\lambda} - (\bar{\lambda} \, d\lambda) (\lambda \, d\bar{\lambda})$$

est bien définie positive. Elle peut s'écrire plus explicitement :

$$(17,4) \quad d\sigma^2 = \sum_{A=0}^{\infty} dc_A \, d\bar{c}_A - \left( \sum_{A=0}^{\infty} \bar{c}_A \, dc_A \right) \left( \sum_{B=0}^{\infty} c_B \, d\bar{c}_B \right).$$

On démontre, comme dans le cas d'un espace projectif de dimension finie, que  $d\sigma^2$  passe au quotient sur  $P(F^*)$ , et définit sur cet espace une « métrique de Fubini »  $ds^2$  pour laquelle  $P(F^*)$ , muni de sa structure uniforme, est un espace métrique complet. Nous désignons par  $g$  le tenseur métrique sur  $P(F^*)$  associé à la métrique  $ds^2$ .

c) Nous notons  $B(\alpha, \lambda)$  ( $\alpha \in F, \lambda \in F^*$ ) la forme bilinéaire de dualité entre  $F$  et  $F^*$ .

Soit  $U$  un domaine de coordonnées locales de la variété complexe normale  $W_n$ . Considérons l'application  $\hat{j}_U$  de  $U$  dans  $F^*$  construite de la manière suivante : à tout point  $z \in U$ , nous faisons correspondre la forme linéaire  $\lambda_U = \hat{j}_U(z)$  sur  $F$ , élément de  $F^*$ , définie avec les notations antérieures par :

$$(17,5) \quad B(\alpha, \lambda_U) = a_U(z).$$

Dire que  $W_n$  est normale revient à dire que  $\lambda_U = \hat{j}_U(z)$  ne coïncide jamais avec l'élément nul de  $F^*$ . Ainsi  $\lambda_U \in F^* - \{0\}$ . Si  $V$  est un autre domaine de coordonnées locales et si  $z \in U \cap V$ , il correspond à ce point, considéré comme appartenant à  $V$ , l'élément  $\lambda_V = \hat{j}_V(z)$  de  $F^* - \{0\}$  défini par :

$$B(\alpha, \lambda_V) = a_V(z) \quad (\alpha \in F).$$

Or nous savons que :

$$a_V(z) = J_V^U(z) a_U(z).$$

Il en résulte :

$$(17,6) \quad \hat{j}_V(z) = J_V^U(z) \hat{j}_U(z).$$

Considérons maintenant les applications  $r \circ \hat{j}_U$  et  $r \circ \hat{j}_V$  respectivement de  $U$  et  $V$  dans  $P(F^*)$ . D'après (17,6), il vient :

$$(17,7) \quad [r \circ \hat{j}_V](z) = [r \circ \hat{j}_U](z).$$

De (17,7) on déduit que les  $r \circ \hat{j}_U$  définissent une application canonique globale ou *immersion canonique* <sup>(1)</sup>  $j$  de la variété complexe normale  $W_n$  dans  $P(F^*)$ ;  $j$  est manifestement continue.

**18. Interprétation du tenseur de Bergmann.**

a) Supposons l'espace de Hilbert  $F$  rapporté à une base orthonormée  $\{\beta_A\}$  et  $F^*$  à la base duale  $\{\lambda^B\}$ . On a

$$(18,1) \quad B(\beta_A, \lambda^B) = \delta_A^B.$$

Reprenons le domaine  $U$  de coordonnées locales. Si  $z \in U$ , l'élément de  $F^*$

$$(18,2) \quad \hat{j}_U(z) = \lambda_U = \sum_{B=0}^{\infty} c_B \lambda^B$$

a des composantes  $c_B$  qu'il est aisé d'évaluer. On a immédiatement :

$$B(\beta_A, \lambda_U) = B\left(\beta_A, \sum_{B=0}^{\infty} c_B \lambda^B\right) = \sum_{B=0}^{\infty} c_B B(\beta_A, \lambda^B)$$

soit d'après (18,1) :

$$B(\beta_A, \lambda_U) = c_A.$$

Or, d'après (17,5) qui définit  $\lambda_U$ ,

$$B(\beta_A, \lambda_U) = (b_A)_U(z).$$

Nous obtenons ainsi :

$$(18,3) \quad c_A = (b_A)_U(z).$$

L'espace  $F^*$  admet une structure analytique complexe généralisée, en un sens évident, et, par passage au quotient sur  $F^* - \{0\}$ , il en est de même pour  $P(F^*)$ . D'après (18,3) les composantes de  $\hat{j}_U(z)$  sont des fonctions holomorphes locales des coordonnées  $\{z^a\}$  dans  $U$ . Par passage au quotient par  $r$ , on voit que l'immersion canonique  $j$  est une application analytique complexe de  $W_n$  dans  $P(F^*)$ .

b) Proposons-nous d'évaluer le tenseur  $j^*g$  de  $W_n$ , image réciproque par  $j$  du tenseur métrique de  $P(F^*)$ . Comme

$$k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} |(b_A)_U(z)|^2$$

<sup>(1)</sup> Immersion n'est pas pris au sens de Chevalley qui correspondrait à la situation du paragraphe 19 c.



il en résulte que  $\hat{j}_U(z) = \lambda_U$  est équivalent par  $r$  à l'élément de  $S(F^*)$  de composantes :

$$(18,4) \quad c_A = \frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})}.$$

De (17,4) et (18,4), on déduit :

$$(j^* ds^2)_U = \sum_{A=0}^{\infty} d \frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} \cdot d \frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} \\ - \left[ \sum_{A=0}^{\infty} \frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} d \frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} \right] \cdot \left[ \sum_{B=0}^{\infty} \frac{(b_B)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} d \frac{(\bar{b}_B)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} \right].$$

Or

$$d \frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} = \frac{1}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} \left[ d(b_A)_U(z) - \frac{1}{2} (b_A)_U(z) \frac{dk_U(z, \bar{z})}{k_U(z, \bar{z})} \right].$$

Il en résulte :

$$\sum_{A=0}^{\infty} d \frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} \cdot d \frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})} \sum_{A=0}^{\infty} d(b_A)_U(z) d(\bar{b}_A)_U(\bar{z}) \\ - \frac{1}{2} \frac{dk_U(z, \bar{z})}{k_U^2(z, \bar{z})} \sum_{A=0}^{\infty} [(\bar{b}_A)_U(\bar{z}) d(b_A)_U(z) + (b_A)_U(z) d(\bar{b}_A)_U(\bar{z})] \\ + \frac{1}{4} \frac{dk_U^2(z, \bar{z})}{k_U^3(z, \bar{z})} \sum_{A=0}^{\infty} (b_A)_U(z) (\bar{b}_A)_U(\bar{z}).$$

On obtient ainsi :

$$(18,5) \quad \sum_{A=0}^{\infty} d \frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} d \frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} \\ = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})} \sum_{A=0}^{\infty} d(b_A)_U(z) d(\bar{b}_A)_U(\bar{z}) - \frac{1}{4} \frac{dk_U^2(z, \bar{z})}{k_U^3(z, \bar{z})}.$$

D'autre part :

$$\sum_{A=0}^{\infty} \frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} d \frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})} \sum_{A=0}^{\infty} (\bar{b}_A)_U(\bar{z}) d(b_A)_U(z) \\ - \frac{1}{2} \frac{dk_U(z, \bar{z})}{k_U(z, \bar{z})}.$$

Il en résulte par produit par l'expression complexe conjuguée :

$$\left| \sum_{A=0}^{\infty} \frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} d \frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} \right|^2$$

$$= \frac{1}{k_U^2(z, \bar{z})} \left[ \sum_{A=0}^{\infty} (\bar{b}_A)_U(\bar{z}) d(b_A)_U(z) \right] \left[ \sum_{B=0}^{\infty} (b_B)_U(z) d(\bar{b}_B)_U(\bar{z}) \right]$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{dk_U^2(z, \bar{z})}{k_U^2(z, \bar{z})} - \frac{1}{2} \frac{dk_U(z, \bar{z})}{k_U^2(z, \bar{z})} \sum_{A=0}^{\infty} [(\bar{b}_A)_U(\bar{z}) d(b_A)_U(z) + (b_A)_U(z) d(\bar{b}_A)_U(\bar{z})]$$

soit

$$(18,6) \quad \left| \sum_{A=0}^{\infty} \frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} d \frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} \right|^2$$

$$= \frac{1}{k_U^2(z, \bar{z})} \left[ \sum_{A=0}^{\infty} (\bar{b}_A)_U(\bar{z}) d(b_A)_U(z) \right] \left[ \sum_{B=0}^{\infty} (b_B)_U(z) d(\bar{b}_B)_U(\bar{z}) \right]$$

$$- \frac{1}{4} \frac{dk_U^2(z, \bar{z})}{k_U^2(z, \bar{z})}$$

De (18,5) et (18,6) on déduit :

$$(j^* ds^2)_U = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})} \sum_{A=0}^{\infty} d(b_A)_U(z) d(\bar{b}_A)_U(\bar{z})$$

$$- \frac{1}{k_U^2(z, \bar{z})} \left[ \sum_{A=0}^{\infty} (\bar{b}_A)_U(\bar{z}) d(b_A)_U(z) \right] \left[ \sum_{B=0}^{\infty} (b_B)_U(z) d(\bar{b}_B)_U(\bar{z}) \right]$$

On obtient ainsi :

$$(18,7) \quad ((j^* g)_{\alpha\bar{\beta}})_U = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})} \sum_{A=0}^{\infty} \partial_{\alpha}(b_A)_U(z) \partial_{\bar{\beta}}(\bar{b}_A)_U(\bar{z})$$

$$- \frac{1}{k_U^2(z, \bar{z})} \left[ \sum_{A=0}^{\infty} (\bar{b}_A)_U(\bar{z}) \partial_{\alpha}(b_A)_U(z) \right] \left[ \sum_{B=0}^{\infty} (b_B)_U(z) \partial_{\bar{\beta}}(\bar{b}_B)_U(\bar{z}) \right]$$

c'est-à-dire d'après la formule (13,4)

$$j^* g = t.$$

Nous énoncerons :

**THÉORÈME.** — Si  $W_n$  est une variété complexe normale, son tenseur de Bergmann  $t$  est l'image réciproque  $t = j^* g$  du tenseur métrique  $g$  de  $P(F^*)$  par l'immersion canonique  $j$  de  $W_n$  dans  $P(F^*)$ .

### 19. Propriétés de l'immersion canonique $j$ .

a) Proposons-nous d'étudier les couples de points  $z, z'$  de  $W_n$  tels que :

$$(19,1) \quad j(z) = j(z').$$

S'il en est ainsi soit  $\gamma$  un élément de  $F'(z)$ . Si  $U$  est un domaine de coordonnées locales contenant  $z$ , on a :

$$B(\gamma, \hat{j}_U(z)) = 0.$$

De l'hypothèse faite, il résulte que si  $V$  est un domaine de coordonnées locales contenant  $z'$ , on a :

$$B(\gamma, \hat{j}_V(z')) = 0$$

et par suite  $\gamma \in F'(z')$ . Ainsi  $F'(z) \subset F'(z')$  et de même  $F'(z') \subset F'(z)$ . On en déduit que  $F'(z) = F'(z')$ .

Réciproquement supposons seulement que :

$$(19,2) \quad F'(z) \subset F'(z').$$

On sait que si  $\alpha_0$  est un élément de  $F$  normé et orthogonal à  $F'(z)$ , tout élément  $\alpha$  de  $F$  peut s'écrire

$$\alpha = c\alpha_0 + \gamma \quad (c \in \mathbb{C}, \gamma \in F'(z) \subset F'(z')).$$

On en déduit, avec les mêmes notations que précédemment,

$$B(\alpha, \hat{j}_U(z)) = cB(\alpha_0, \hat{j}_U(z)), \quad B(\alpha_0, \hat{j}_U(z)) \neq 0$$

et

$$B(\alpha, \hat{j}_V(z')) = cB(\alpha_0, \hat{j}_V(z')).$$

Il en résulte

$$(19,3) \quad B(\alpha, \hat{j}_V(z')) = hB(\alpha, \hat{j}_U(z))$$

où  $h$  est le nombre complexe :

$$h = \frac{B(\alpha_0, \hat{j}_V(z'))}{B(\alpha_0, \hat{j}_U(z))}$$

qui est indépendant de l'élément  $\alpha$  de  $F$ ; la relation (19,3) exprime que :

$$j(z') = j(z).$$

Nous obtenons :

THÉORÈME. — Si  $j$  est l'immersion canonique de  $W_n$  dans  $P(F^*)$ , pour que, pour  $z, z' \in W_n$ :

$$j(z) = j(z')$$

il faut et il suffit que :

$$F'(z) \subset F'(z')$$

et l'on a alors  $F'(z) = F'(z')$ .

b) On définit, comme dans le cas des espaces de dimension finie, l'application linéaire  $j'$  tangente à  $j$ . En chaque point  $z$  de  $W_n$ , elle définit un endomorphisme de l'espace vectoriel tangent à  $W_n$  en  $z$  dans l'espace tangent à  $P(F^*)$  en  $j(z)$ . Des deux théorèmes précédents, on déduit aisément des propriétés de  $j$  et  $j'$ .

Si  $V_z$  est un vecteur tangent en  $z \in W_n$ , on a d'après le théorème du paragraphe 18 :

$$t(z, V_z) = g(j(z), j'(V_z))$$

où au second membre figure la forme hermitienne définie positive déterminée par  $g$ . D'après cette relation, pour qu'un champ  $X$  de vecteurs de  $W_n$  vérifie  $i(X)t = 0$ , il faut et il suffit que  $j'(X) = 0$ . Le rang  $r(z)$  du tenseur de Bergmann en  $z$  est égal au rang de  $j'$  en ce point.

Étudions en particulier à quelle condition le tenseur de Bergmann est identiquement nul. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que  $j'$  soit identiquement nul, c'est-à-dire que  $j = \text{const.}$  ou que  $j(W_n)$  soit réduit à un point. Ainsi, pour que  $t$  soit nul, il faut et il suffit d'après le théorème précédent que  $F'(z)$  soit le même sous-espace  $F'$  de  $F$  en tout point  $z$  de  $W_n$ . Mais les éléments  $\gamma$  de  $F'$  sont alors identiquement nuls et par suite  $F' = 0$ . S'il en est ainsi, l'espace  $F$  est de dimension 1 et admet pour éléments les  $n$ -formes holomorphes de carrés intégrables  $\alpha = c\alpha_0$  où  $c \in \mathbb{C}$  et où  $\alpha_0$  est normée et non nulle en tout point de  $W_n$ . La forme de Bergmann de  $W_n$  s'écrit dans ce cas :

$$K = \alpha_0 \wedge \bar{\alpha}_0.$$

Réciproquement s'il en est ainsi, il est clair que le tenseur de Bergmann est nul. Nous obtenons ainsi le corollaire suivant, qu'il est aisé d'établir par voie directe.

**COROLLAIRE.** — *Pour que le tenseur de Bergmann d'une variété complexe normale  $W_n$  soit identiquement nul, il faut et il suffit que  $\dim P(F^*) = 0$ . On a alors  $F = \{\alpha = c\alpha_0\}$  où  $c \in \mathbb{C}$  et où  $\alpha_0$  est une  $n$ -forme holomorphe normée, non nulle en tout point de  $W_n$ .*

c) Pour que le tenseur  $t$  soit partout de rang  $n$ , il faut et il suffit qu'il en soit de même pour  $j'$ , c'est-à-dire que  $j'$  soit toujours régulière : si  $V_z$  est un vecteur en un point  $z$  de  $W_n$ , la relation :

$$j'(z, V_z) = 0$$

implique toujours :

$$V_z = 0.$$

S'il en est ainsi, la forme hermitienne déterminée par  $t$  est définie positive et détermine une métrique kählerienne sur  $W_n$  qui est la « métrique canonique de Bergmann ». C'est le cas étudié principalement par Kobayashi (hypothèse  $A_2$  dans sa terminologie).

d) Étudions à quelle condition l'immersion canonique  $j$  est injective. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que :

$$j(z') = j(z)$$

implique

$$z' = z$$

ou que  $F'(z') = F'(z)$  implique  $z' = z$ . Supposons  $z' \neq z$ ; d'après le a) de ce paragraphe, on ne peut avoir  $F'(z') \subset F'(z)$ , sinon  $j(z') = j(z)$  et  $z' = z$ . Ainsi si  $j$  est injective, il existe au moins un élément  $\alpha \in F'(z')$  n'appartenant pas à  $F'(z)$  donc tel que  $\alpha(z) \neq 0$ .

Inversement supposons  $W_n$  telle que, pour tout couple  $(z, z')$  de points de  $W_n$  ( $z \neq z'$ ), il existe un élément  $\alpha$  de  $F$  tel que :

$$\alpha(z) \neq 0, \quad \alpha(z') = 0.$$

La variété  $W_n$  est automatiquement normale et  $j$  est injective puisque  $F'(z') = F'(z)$  implique  $z' = z$ . Nous énonçons :

**THÉORÈME.** — *Pour que l'immersion canonique  $j$  soit injective, il faut et il suffit que la variété complexe  $W_n$  admette la propriété suivante : pour tout couple de points  $(z, z')$  de  $W_n$  ( $z \neq z'$ ), il existe*

une forme  $\alpha$  de  $F$  telle que :

$$(19,4) \quad \alpha(z) \neq 0, \quad \alpha(z') = 0.$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse où  $j$  est injective. Alors  $j'$  ne peut être singulière sur aucun domaine  $U$  de  $W_n$ . En effet s'il en était ainsi, il existerait un champ de vecteurs  $X$  sur  $U$ , différent de zéro en un point  $z_0$  de  $U$  et tel que  $j'(X)$  soit nul sur  $U$ . Faisons agir  $\exp(UX)$  sur le point  $z_0$ . Pour  $|u| < \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est un nombre positif convenable, on a :

$$\exp [uj'(X)]j(z_0) = j [\exp (uX)z_0].$$

Comme  $j'(X) = 0$  sur  $U$ , le premier membre, donc le second, est égal à  $j(z_0)$ ; l'application  $j$  étant supposée injective :

$$j [\exp (uX)z_0] = j(z_0) \quad |u| < \varepsilon$$

entraîne

$$\exp (uX)z_0 = z_0 \quad |u| < \varepsilon.$$

Il résulte que  $X(z_0)$  est nécessairement nul, ce qui implique contradiction. Le tenseur de Bergmann est de rang global  $n$  sur  $W_n$ .

Ainsi si l'immersion  $j$  est injective, le support de  $\tau^n$  coïncide avec  $W_n$ . Dans ce cas, la transformation infinitésimale holomorphe  $X$  et son image  $\mathfrak{J}X$  ne peuvent être simultanément complètes. En particulier si  $W_n$  est normale compacte et  $j$  injective, le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de  $W_n$  est réduit à l'identité.

## 20. Cas d'un espace homogène complexe compact.

Supposons que  $W_n = G/H$  ( $G$  connexe effectif) soit un espace homogène complexe compact. Pour une variété  $W_n$  compacte, nous désignons, selon une notation classique, par  $b_{n,0}(W_n)$  la dimension (finie) de l'espace  $F$  des  $n$ -formes holomorphes sur cette variété.

D'après (15,12) toute  $n$ -forme holomorphe  $\alpha$  de la variété compacte  $W_n$  est invariante par le groupe transitif  $G$  de transformations holomorphes. Par suite  $\alpha$  ne peut s'annuler en aucun point  $z$  de  $W_n$  sans être identiquement nulle. Il en résulte que  $F'(z) = 0$  pour tout  $z$ .

On voit ainsi que, ou bien la variété  $W_n$  n'est pas normale :

$$b_{n,0}(W_n) = 0$$

et  $K$  est identiquement nulle, ou bien la variété est normale :

$$b_{n,0}(W_n) = 1$$

et  $\dim P(F^*) = 0$ , le tenseur de Bergmann  $t$  est nul. Ainsi :

**THÉORÈME.** — *Si  $W_n = G/H$  est un espace homogène complexe compact, ou bien  $b_{n,0}(W_n) = 0$  et le noyau de Bergmann est nul, ou bien  $b_{n,0}(W_n) = 1$  et le tenseur de Bergmann est nul. Si  $C_1(W_n) \neq 0$ , c'est le premier cas qui se produit.*

### 21. Transformations holomorphes et immersion $j$ .

a) Reprenons une variété complexe normale  $W_n$  arbitraire et soit  $\mu$  une transformation holomorphe de  $W_n$ . A tout élément  $\alpha$  de  $F$ ,  $\mu$  fait correspondre l'élément  $\mu^*\alpha$  de  $F$  et opère ainsi sur  $F$ . Il en résulte que la transformation  $\mu$  opère aussi naturellement sur l'espace  $F^*$  dual de  $F$ . A tout élément  $\lambda$  de  $F^*$  correspond ainsi l'élément noté  $\hat{\mu}\lambda$  défini de la manière suivante : quel que soit  $\alpha \in F$

$$(21,1) \quad B(\alpha, \hat{\mu}\lambda) = B(\mu^*\alpha, \lambda).$$

Si  $\lambda \in F^* - \{0\}$ , il en est de même pour  $\hat{\mu}\lambda$ .

Si  $\lambda' = c\lambda$ , on a :

$$B(\alpha, \hat{\mu}(c\lambda)) = B(\mu^*\alpha, c\lambda) = cB(\mu^*\alpha, \lambda) = cB(\alpha, \hat{\mu}\lambda)$$

soit

$$B(\alpha, \hat{\mu}(c\lambda)) = B(\alpha, c\hat{\mu}\lambda).$$

Ainsi :

$$\hat{\mu}(c\lambda) = c\hat{\mu}\lambda$$

et par passage au quotient, on voit que  $\mu$  opère naturellement, par une transformation notée  $\tilde{\mu}$ , sur l'espace projectif complexe  $P(F^*)$ ;  $\tilde{\mu}$  est manifestement une isométrie de  $P(F^*)$ .

$\mu^*$  respecte la structure analytique de  $F$  : si  $\{\beta_A\}$  est une base orthonormée de  $F$ ,  $\mu^*\alpha$  a les mêmes composantes dans la base orthonormée  $\{\mu^*\beta_A\}$  que  $\alpha$  dans la base  $\{\beta_A\}$ . Par suite  $\hat{\mu}$  respecte la structure analytique de  $F^*$  et il en est de même

par passage au quotient pour  $\tilde{\mu}$  et la structure analytique de  $P(F^*)$ . Ainsi  $\tilde{\mu}$  est une *transformation holomorphe* de  $P(F^*)$ .

b) Étudions la relation existant entre  $\mu, j$  et  $\tilde{\mu}$ . Soit  $U$  un domaine de coordonnées locales  $\{\zeta^\alpha\}$  de  $W_n$ . Si  $\alpha \in F$  et si  $\zeta \in U$  :

$$(21,2) \quad \alpha_U(\zeta) = a_U(\zeta) d\zeta^1 \wedge \dots \wedge d\zeta^n.$$

Si  $\zeta = \mu(z)$  (avec  $z \in \mu^{-1}U$ ), on peut écrire (21,2) sous la forme :

$$\alpha_U\{\mu(z)\} = a_U\{\mu(z)\} d\zeta^1 \wedge \dots \wedge d\zeta^n$$

et la forme  $\hat{j}_U\{\mu(z)\} \in F^*$  est définie par :

$$(21,3) \quad B(\alpha, \hat{j}_U\{\mu(z)\}) = a_U\{\mu(z)\} \quad z \in \mu^{-1}U.$$

Évaluons d'autre part :

$$(21,4) \quad B(\alpha, \hat{\mu}\{\hat{j}_{\mu^{-1}U}(z)\}) = B(\mu^*\alpha, \hat{j}_{\mu^{-1}U}(z)).$$

Nous avons vu que, avec les notations du paragraphe 4, *b* :

$$[\mu^*\alpha]_{\mu^{-1}U}(z) = a_U\{\mu(z)\} \{J(\mu)\}_z dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$$

où les  $\{z^\alpha\}$  sont les coordonnées locales de  $z$  dans  $\mu^{-1}U$ . Il en résulte

$$B(\alpha, \hat{\mu}\{\hat{j}_{\mu^{-1}U}(z)\}) = \{J(\mu)\}_z a_U\{\mu(z)\}.$$

Ainsi pour tout  $\alpha \in F$

$$B(\alpha, \hat{\mu}\{\hat{j}_{\mu^{-1}U}(z)\}) = \{J(\mu)\}_z B(\alpha, \hat{j}_U\{\mu(z)\})$$

ce qui exprime que :

$$\hat{\mu}\{\hat{j}_{\mu^{-1}U}(z)\} = \{J(\mu)\}_z \hat{j}_U\{\mu(z)\}.$$

Par passage au quotient à  $P(F^*)$  au moyen de la relation *r*, il vient :

$$(21,5) \quad \tilde{\mu} \circ j = j \circ \mu.$$

Si  $z \in W_n$ , (21,5) donne :

$$\tilde{\mu}\{j(z)\} = j\{\mu(z)\}.$$

Par suite la transformation  $\tilde{\mu}$  holomorphe laisse invariant  $j(W_n)$ .



c) Désignons par  $X$  une transformation infinitésimale *holomorphe complète* de  $W_n$  qui engendre un groupe à un paramètre  $\exp(uX)$  de transformations holomorphes de cette variété. A ce groupe correspond le groupe à un paramètre  $[\exp(uX)]^{-1}$  de transformations holomorphes de  $P(F^*)$ . Ce dernier groupe est engendré par un champ de vecteurs  $\tilde{X}$  de  $P(F^*)$ . De (21,5) on déduit :

$$\exp(u\tilde{X}) \circ j = j \circ \exp(uX).$$

Si  $z_0$  est un point de  $W_n$ , on a :

$$j[\exp(uX)z_0] = \exp(u\tilde{X})j(z_0).$$

On en déduit par dérivation en  $u$  :

$$(21,6) \quad j(z_0, X(z_0)) = \tilde{X}\{j(z_0)\}.$$

D'après (21,6), les images par  $j'$  des différents vecteurs du champ  $X$  aux différents points de  $W_n$  qui se projettent au même point de  $j(W_n)$ , coïncident. Ainsi :

**THÉORÈME.** — *Toute transformation infinitésimale  $X$  holomorphe complète de la variété complexe normale  $W_n$  est projetable sur  $j(W_n)$  par l'immersion canonique  $j$  et la projection  $j'(X)$  est la restriction de  $\tilde{X}$  à  $j(W_n)$ .*

d) Soit  $Y$  un champ de vecteurs de  $W_n$  tel que :

$$(21,7) \quad i(Y)\tau = 0$$

ou — ce qui est équivalent — tel que  $j'(Y) = 0$ .

Si  $\mu$  est une transformation holomorphe de  $W_n$ , il résulte de l'invariance de  $\tau$  par  $\mu$  :

$$(21,8) \quad i(\mu Y)\tau = 0.$$

Si  $X$  est une transformation infinitésimale holomorphe complète de  $W_n$ , on a de même, puisque  $\mathcal{L}(X)\tau = 0$  :

$$i(\mathcal{L}(X)Y)\tau = 0$$

c'est-à-dire

$$(21,9) \quad i([X, Y])\tau = 0.$$

Plus généralement (voir théorème précédent) soit  $X$  une transformation infinitésimale de  $W_n$  *projetable sur  $j(W_n)$  par  $j$*  ;

Y étant aussi projetable puisque  $j(Y) = 0$ , le crochet  $[X, Y]$  est projetable et l'on a :

$$j'([X, Y]) = [j'(X), j'(Y)] = 0.$$

Ainsi

$$(21,10) \quad i([X, Y])\tau = 0.$$

Considérons en particulier une algèbre de Lie L de transformations infinitésimales de  $W_n$  projetable par  $j$ . Le sous-espace de L défini par les transformations infinitésimales Y telles que  $i(Y)\tau = 0$  est un idéal de L. Si G est un groupe de Lie de transformations holomorphes de  $W_n$ , les transformations infinitésimales Y de l'algèbre de Lie  $\underline{G}$  de G qui annulent  $\tau$  forment un idéal I de  $\underline{G}$ .

**22. Transformations holomorphes induisant l'identité sur  $j(W_n)$ .**

a) Étudions les transformations holomorphes  $\nu$  de la variété complexe normale  $W_n$  telles que la restriction de  $\tilde{\nu}$  à  $j(W_n)$  se réduise à l'identité. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour tout  $z \in W_n$

$$(22,1) \quad \tilde{\nu}\{j(z)\} = j(z).$$

Soit U un domaine de coordonnées locales de  $W_n$ . La relation (22,1) peut se traduire de la manière suivante: il existe sur chaque U une fonction  $\varphi_{U,\nu}$  ne s'annulant pas telle que :

$$\hat{\nu}\{\hat{j}_U(z)\} = \varphi_{U,\nu}(z)\hat{j}_U(z) \quad (z \in U).$$

On doit donc avoir pour tout élément  $\alpha$  de F :

$$B(\alpha, \hat{\nu}\{\hat{j}_U(z)\}) = B(\alpha, \varphi_{U,\nu}(z)\hat{j}_U(z))$$

soit :

$$B(\nu^*\alpha, \hat{j}_U(z)) = \varphi_{U,\nu}(z)B(\alpha, \hat{j}_U(z)).$$

D'après la définition des  $\hat{j}_U$ , si sur U :

$$\alpha_U = a_U dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$$

on a :

$$B(\alpha, \hat{j}_U(z)) = a_U(z)$$

et

$$B(\nu^*\alpha, \hat{j}_U(z)) = a_{\nu U}(\nu z)J(\nu)_z.$$

Il en résulte :

$$a_{\nu U}(\nu z) J(\nu)_z dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n = \varphi_{U, \nu}(z) a_U(z) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$$

qui exprime que, sur  $U$  :

$$(\nu^* \alpha)_U = \varphi_{U, \nu} \alpha_U \quad (\varphi_{U, \nu}(z) \neq 0 \text{ pour } z \in U).$$

En introduisant un recouvrement de  $W_n$ , par des domaines de coordonnées locales, on voit que les transformations holomorphes  $\nu$  étudiées sont telles qu'il existe sur  $W_n$  une fonction  $\varphi_\nu$  ne s'annulant pas telle que, pour tout  $\alpha \in F$ ,

$$(22,2) \quad \nu^* \alpha = \varphi_\nu \alpha.$$

D'après (22,2),  $\varphi_\nu$  est une *fonction holomorphe* sur  $W_n$ .

La transformation holomorphe  $\nu$  de  $W_n$  doit laisser invariante la  $2n$ -forme de Bergmann :

$$K = \sum_{A=0}^{\infty} \beta_A \wedge \bar{\beta}_A$$

où  $\{\beta_A\}$  est une base orthonormée de  $F$ . Or d'après (22,2) :

$$\nu^* K = \sum_{A=0}^{\infty} \nu^* \beta_A \wedge \overline{\nu^* \beta_A} = \varphi_\nu \bar{\varphi}_\nu \sum_{A=0}^{\infty} \beta_A \wedge \bar{\beta}_A$$

soit :

$$\nu^* K = |\varphi_\nu|^2 K.$$

Il en résulte que la fonction holomorphe  $\varphi_\nu$  est de module 1 et par suite se réduit à une constante;

$$\varphi_\nu = \exp(i\theta(\nu)) \quad (\theta(\nu) \in \mathbb{R}).$$

Ainsi les transformations  $\nu$  étudiées sont les transformations holomorphes telles que, pour tout  $\alpha \in F$

$$(22,3) \quad \nu^* \alpha = \exp(i\theta(\nu)) \alpha.$$

Il est aisé de voir que les transformations holomorphes  $\nu$  satisfaisant à la condition (22,3) sont telles que  $\tilde{\nu}$  n'est autre que l'identité sur  $P(F)^*$  tout entier. En effet si  $\lambda \in F^*$ , on a pour tout  $\alpha$  :

$$B(\alpha, \tilde{\nu} \lambda) = B(\nu^* \alpha, \lambda) = \exp(i\theta(\nu)) B(\alpha, \lambda) = B(\alpha, \exp(i\theta(\nu)) \lambda).$$

On en déduit que pour tout  $\lambda$  :

$$\tilde{\nu}\lambda = \exp(i\theta(\nu))\lambda$$

et par passage à  $P(F^*)$

$$\tilde{\nu} = \text{Id.}$$

Si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux transformations holomorphes de  $W_n$  telles que les restrictions de  $\tilde{\mu}_1$  et  $\tilde{\mu}_2$  à  $j(W_n)$  coïncident, la restriction à  $j(W_n)$  de  $\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2^{-1}$  est l'identité et par suite  $\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2^{-1} = \text{Id.}$  sur  $P(F^*)$ . Nous obtenons ainsi :

**THÉORÈME.** — 1° *Pour qu'une transformation holomorphe  $\nu$  de  $W_n$  induise l'identité sur  $j(W_n)$ , il faut et il suffit qu'il existe une constante réelle  $\theta(\nu)$  telle que, pour tout  $\alpha \in F$  :*

$$\nu^*\alpha = \exp(i\theta(\nu))\alpha.$$

2° *Deux transformations holomorphes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de  $W_n$  telles que les restrictions de  $\tilde{\mu}_1$  et  $\tilde{\mu}_2$  à  $j(W_n)$  coïncident sont telles que  $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$  sur  $P(F^*)$ .*

En particulier, d'après le 1° toute transformation holomorphe  $\nu$  laissant invariantes les  $n$ -formes d'éléments de  $F$  induit l'identité sur  $P(F^*)$ .

b) Soit  $X$  une transformation infinitésimale holomorphe complète telle que le groupe à un paramètre  $\exp(uX)$  qu'elle engendre induise l'identité sur  $j(W_n)$ . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le champ  $j'(X)$  de  $j(W_n)$  soit nul ou que :

$$(22,4) \quad i(X)\tau = 0.$$

S'il en est ainsi  $\exp(uX) = \text{Id.}$  sur  $P(F^*)$  et par suite  $\tilde{X} = 0$ .

D'après (22,3), pour tout  $\alpha \in F$

$$\exp(uX)^*\alpha = \exp[i\theta(u)]\alpha$$

où  $\theta(u)$  est une fonction à valeurs réelles dérivable. Il en résulte :

$$\frac{\exp(uX)^*\alpha - \alpha}{u} = \frac{\exp[i\theta(u)] - 1}{u} \alpha.$$

En prenant la limite des deux membres pour  $u = 0$ , il vient :

$$(22,5) \quad \mathcal{L}(X)\alpha = ih\alpha \quad (h \in \mathbb{R})$$

et inversement :

$$(22,6) \quad \exp(uX)^*\alpha = \exp(ihu)\alpha.$$

Nous obtenons ainsi le corollaire suivant que l'on pourrait établir par voie directe.

**COROLLAIRE.** — 1° *Pour qu'une transformation infinitésimale holomorphe complète X de  $W_n$  vérifie*

$$i(X)\tau = 0$$

*il faut et il suffit qu'il existe une constante réelle h telle que, pour tout  $\alpha \in F$  :*

$$\mathcal{L}(X)\alpha = ih\alpha.$$

2° *Si deux transformations infinitésimales  $X_1$  et  $X_2$  holomorphes complètes de  $W_n$  sont telles que :*

$$i(X_1)\tau = i(X_2)\tau$$

*on a  $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$  sur  $P(F^*)$ .*

Si  $h = 0$ ,  $\mathcal{L}(X)\alpha = 0$  implique  $\mathcal{L}(JX)\alpha = 0$  et  $JX$  laisse invariant le noyau de Bergmann. C'est la situation que nous avons analysée antérieurement (voir paragraphe 15).

c) Supposons que  $W_n = G/H$  ( $G$  effectif) soit un *espace homogène complexe*, supposé variété complexe normale ( $F \neq 0$ ). Si  $\mu \in G$ ,  $\tilde{\mu}$  appartient à un groupe  $\tilde{G}$  d'isométries holomorphes de  $P(F^*)$  homomorphe à  $G$ . Si  $z, z' \in W_n$ , il existe  $\mu \in G$  tel que  $z' = \mu(z)$ . De (21,5) on déduit :

$$\tilde{\mu}\{j(z)\} = j\{\mu(z)\}$$

soit

$$\tilde{\mu}\{j(z)\} = j(z').$$

Ainsi  $\tilde{G}$  opère transitivement sur  $j(W_n)$  et  $j(W_n)$  peut être identifié à l'espace homogène  $\tilde{G}/\tilde{H}$  <sup>(2)</sup>.

Le noyau  $K$  de l'homomorphisme  $G \rightarrow \tilde{G}$  est défini par le sous-groupe des éléments  $\nu$  de  $G$  tels que  $\tilde{\nu} = \text{Id}$ . Il existe alors une constante réelle  $\theta(\nu)$  telle que, pour tout  $\alpha \in F$  :

$$(22,7) \quad \nu^*(\alpha) = \exp(i\theta(\nu))\alpha.$$

On vérifie directement que  $K$  est sous-groupe invariant

(2) Nous étudierons ailleurs la fibration correspondante.

dans  $G$  : si  $\mu \in G$  et si  $\nu \in K$ , on a en appliquant (22,7) à l'élément  $\mu^*\alpha$  de  $F$  :

$$\mu^{-1*}\nu^*\mu^*\alpha = \exp(i\theta(\nu))\mu^{-1*}\mu^*\alpha = \exp(i\theta(\nu))\alpha.$$

On voit de même que  $K$  admet en particulier comme sous-groupe le sous-groupe  $J$  invariant dans  $G$ , défini par les éléments  $\nu$  de  $G$  tels que, pour tout  $\alpha \in F$  :

$$\nu^*\alpha = \alpha.$$

#### IV. GROUPES DISCONTINUS UNIFORMES.

##### 23. Notion de groupe discontinu uniforme.

a) Étant donné une variété complexe  $W_n$ , considérons un groupe discret  $D$  de transformations holomorphes de  $W_n$ . Ce groupe  $D$  définit dans  $W_n$  une relation d'équivalence :  $z$  et  $z'$  sont congrus modulo  $D$  s'il existe un élément  $\mu$  de  $D$  tel que  $z' = \mu(z)$ . Nous supposons que  $D$  satisfait aux deux hypothèses suivantes :

1) Soient  $z, z'$  deux points de  $W_n$  *non congrus modulo*  $D$ . Il existe alors un voisinage  $U$  de  $z$  et un voisinage  $U'$  de  $z'$  tels que, pour tout  $\mu \in D$

$$U \cap \mu(U') = \emptyset.$$

2) Si  $z_0$  est un point quelconque de  $W_n$ , le seul élément de  $D$  qui laisse  $z_0$  fixe est l'identité  $e$  et il existe un voisinage  $V$  de  $z_0$  tel que si  $z \in V$  et  $\mu(z) \in V$  ( $\mu \in D$ ), on ait nécessairement  $\mu = e$ .

Lorsqu'il en est ainsi, l'espace-quotient  $W_n/D$  admet une structure naturelle de variété complexe de dimension  $n$  (sans singularité);  $W_n$  est un revêtement de  $W_n/D$ . Si de plus *la variété*  $W_n/D$  *est compacte*, nous dirons que *le groupe*  $D$  *est un groupe discontinu uniforme* de transformations holomorphes de  $W_n$ .

C'est le cas que nous envisageons ici.

b) A l'hypothèse 2, il est possible de substituer l'hypothèse plus générale suivante :

2') Si  $z_0$  est un point quelconque de  $W_n$ , le sous-groupe d'iso-

tropie  $D(z_0)$  de  $D$  relatif à  $z_0$  est fini et il existe un voisinage  $V$  de  $z_0$ , stable par  $D(z_0)$  ( $\mu_0(V) \subset V$  pour tout  $\mu_0 \in D(z_0)$ ) tel que si  $z \in V$  et  $\mu(z) \in V$  ( $\mu \in D$ ), on ait nécessairement  $\mu \in D(z_0)$ .

S'il en est ainsi, l'espace-quotient  $W_n/D$  est ce qu'on nomme une  $V$ -variété (Satake, Baily). Un certain nombre de résultats établis ici s'étendent au cas des  $V$ -variétés compactes.

c)  $D$  étant un groupe discontinu uniforme de transformations holomorphes de  $W_n$ , désignons par  $p$  la projection canonique :

$$p : W_n \rightarrow W_n/D.$$

Pour tout élément  $\mu$  de  $D$ , on a :

$$(23,1) \quad p \circ \mu = p.$$

En passant aux applications linéaires tangentes, il vient pour  $\mu \in D$

$$(23,2) \quad p' \circ \mu' = p'.$$

#### 24. Transformations infinitésimales holomorphes invariantes par $D$ .

a) Soit  $W_n$  une variété complexe admettant un groupe discontinu uniforme  $D$ .

Supposons que  $X$  soit une transformation infinitésimale de  $W_n$  invariante par  $D$ . Si  $z \in W_n$ , on a pour tout  $\mu \in D$

$$(24,1) \quad X[\mu(z)] = \mu'X(z) \quad (\mu \in D).$$

De (23,2) il résulte :

$$p'X[\mu(z)] = p'\mu'X(z) = p'X(z).$$

On en déduit que le champ de vecteurs  $X$  est projectable sur  $W_n/D$  par  $p$ . Nous désignons par  $p'(X)$  sa projection. Inversement tout champ  $Y$  de  $W_n/D$  se remonte en un champ  $X$  de  $W_n$  invariant par  $D$ .

De la compacité de  $W_n/D$ , il résulte qu'une telle transformation infinitésimale  $X$  est toujours complète. En effet sur la variété compacte  $W_n/D$ , la transformation infinitésimale  $p'(X)$  est complète. D'autre part supposons que pour  $z_0 \in W_n$ ,  $\exp(uX)z_0$  est défini pour  $|u| < \varepsilon$ . Si  $\mu \in D$  :

$$\exp(uX)\mu(z_0) = \mu[\exp(uX)z_0]$$

est aussi défini pour  $|u| < \varepsilon$ . En combinant ces deux remarques, on voit qu'il existe un nombre positif  $\varepsilon$  tel que  $\exp(uX)z$  soit défini pour tout  $z$  et pour  $|u| < \varepsilon$ . Par suite  $X$  est complète.

b) Considérons la transformation infinitésimale  $\mathfrak{J}X$  de  $W_n$ . Tout élément  $\mu$  de  $D$  étant holomorphe, on a pour  $z \in W_n$ :

$$\mathfrak{J}_{\mu(z)} \circ \mu' = \mu' \circ \mathfrak{J}_z \quad (\mu \in D).$$

De (24,1) il résulte :

$$\mathfrak{J}_{\mu(z)}X[\mu(z)] = \mathfrak{J}_{\mu(z)}\mu'X(z) = \mu'\mathfrak{J}_zX(z)$$

et  $\mathfrak{J}X$  est aussi *invariante par D*. Par suite, si  $X$  est de plus *holomorphe*, les deux transformations infinitésimales  $X$  et  $\mathfrak{J}X$  sont holomorphes et complètes. Du théorème du paragraphe 15, il résulte ainsi :

**THÉORÈME.** — *Soit  $W_n$  une variété complexe admettant un groupe discontinu uniforme  $D$  de transformations holomorphes.*

1° *Toute transformation infinitésimale holomorphe  $X$  de  $W_n$  invariante par  $D$  est telle que  $X$  et  $\mathfrak{J}X$  sont toutes deux holomorphes complètes.*

2° *Si  $W_n$  est en outre normale, toute transformation infinitésimale holomorphe  $X$  de  $W_n$  invariante par  $D$  est telle que :*

$$i(X)\tau = 0$$

*et laisse invariante toute  $n$ -forme holomorphe de carré intégrable.*

c) Supposons toujours  $W_n$  normale;  $D$  se composant de transformations holomorphes, le noyau  $k$  de Bergmann et la 2-forme  $\tau$  de  $W_n$  sont invariants par  $D$ . Par passage au quotient,  $\tau$  définit une 2-forme fermée  $\tilde{\tau}$  de type  $(1, 1)$  sur la variété  $W_n/D$ . Aux points correspondants,  $\tau$  et  $\tilde{\tau}$  ont même rang.

Soit  $g$  une métrique hermitienne auxiliaire sur  $W_n/D$ ; l'image réciproque par  $p$  de  $\sqrt{g}$  définit sur  $W_n$  un noyau invariant par  $D$ . Posons :

$$(24,2) \quad k = fp^*\sqrt{g}$$

$f$  est un scalaire de  $W_n$  strictement positif invariant par  $D$ , donc est l'image réciproque  $f = p^*\tilde{f}$  d'un scalaire  $\tilde{f}$  strictement



positif de  $W_n/D$ . Un calcul identique à celui du paragraphe 12 donne sur la variété  $W_n/D$  :

$$(24,3) \quad \bar{\tau} = \psi = d[(4\pi)^{-1}Md \log \bar{f}]$$

où  $\psi$  est la 2-forme de Chern associée à la métrique de  $W_n/D$ . Ainsi  $\bar{\tau}$  appartient à la classe de Chern  $C_1(W_n/D)$ .

Pour que  $\tau^n$  ne soit pas identiquement nul, il faut et il suffit que  $\bar{\tau}^n$  ne le soit pas, c'est-à-dire d'après la compacité de  $W_n/D$ , que  $C_1(W_n/D)^n$  soit différent de zéro (voir paragraphe 15, f). Nous obtenons ainsi :

**COROLLAIRE.** — Si  $W_n$  normale admet un groupe discontinu uniforme  $D$  de transformations holomorphes et si  $C_1(W_n/D)^n \neq 0$  (ou  $\tau^n \neq 0$ ) il n'existe pas sur  $W_n$  de transformation infinitésimale holomorphe non nulle invariante par  $D$ .

Soit  $G$  un groupe de Lie, contenant  $D$ , de transformations holomorphes de  $W_n$ . L'algèbre de Lie du centre de  $G$  se compose de transformations infinitésimales holomorphes commutant avec  $D$ . Par suite, sous les hypothèses du corollaire précédent, le centre de tout groupe de Lie contenant  $D$  de transformations holomorphes de  $W_n$  est discret.

Ce résultat constitue une extension d'un théorème de Kobayashi (théorème 5-5 de [7]).

## 25. Classe $C_1$ de Chern et courbure dans le cas kählerien.

Dans la suite, nous admettons que la variété compacte  $W_n/D$  envisagée admet une métrique kählerienne  $g$ . Nous désignons par  $F$  la 2-forme fondamentale associée. Sur un domaine  $U$  de coordonnées locales  $\{z^\alpha\}$  de  $W_n/D$ , on a :

$$[ds^2]_U = 2g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha dz^{\bar{\beta}}$$

et la 2-forme  $F$  s'écrit :

$$F_U = ig_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}.$$

a) A côté de l'opérateur  $M$  (voir paragraphe 12) sur les formes, nous introduisons l'opérateur  $\Lambda = i(F)$  et rappelons la formule de commutation (Lichnerowicz, [12], p. 272).

$$(25,1) \quad d\Lambda - \Lambda d = \delta M - M\delta$$

où  $d$  est l'opérateur de différentiation extérieure et  $\delta$  celui de codifférentiation. Si  $\beta$  est une 1-forme sur  $W_n/D$ , on a manifestement :

$$M\delta\beta = 0, \quad \Lambda\beta = 0$$

et il résulte de (25,1)

$$(25,2) \quad \Lambda d\beta = -\delta M\beta.$$

Soit  $\eta$  la  $2n$ -forme élément de volume définie sur  $W_n/D$  par la métrique. Par intégration de (25,2) sur  $W_n/D$ , on a :

$$\int_{W_n/D} (\Lambda d\beta)\eta = -\int_{W_n/D} (\delta M\beta)\eta.$$

Soit, d'après la formule de Stokes :

$$(25,3) \quad \int_{W_n/D} (\Lambda d\beta)\eta = 0$$

pour toute 1-forme  $\beta$  de  $W_n/D$ .

b) Cela posé, partons de la formule (24,3) que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\tilde{\tau} = \psi + d\beta$$

où  $\beta$  est une 1-forme de  $W_n/D$ . On en déduit :

$$\Lambda\psi = \Lambda\tilde{\tau} - \Lambda d\beta.$$

Par intégration sur  $W_n/D$  et compte tenu de (25,3), il vient :

$$(25,4) \quad \int_{W_n/D} (\Lambda\psi)\eta = \int_{W_n/D} (\Lambda\tilde{\tau})\eta.$$

Sur un domaine  $U$  de coordonnées locales de  $W_n/D$ ,  $\psi$  est donné ici par (voir (12,9))

$$\psi_U = (2\pi)^{-1}iR_{\alpha, \lambda\bar{\mu}}^{\alpha} dz^{\lambda} \wedge dz^{\bar{\mu}} = (2\pi)^{-1}iR_{\lambda\bar{\mu}} dz^{\alpha} \wedge dz^{\bar{\mu}}$$

où  $R_{\lambda\bar{\mu}}$  désigne le tenseur de Ricci de la connexion kählerienne (voir Lichnerowicz [12]). On en déduit :

$$[\Lambda\psi]_U = (2\pi)^{-1}F^{\lambda\bar{\mu}}iR_{\lambda\bar{\mu}} = - (2\pi)^{-1}ig^{\lambda\bar{\mu}}iR_{\lambda\bar{\mu}} = (2\pi)^{-1}g^{\lambda\bar{\mu}}R_{\lambda\bar{\mu}}.$$

Il vient ainsi :

$$(25,3) \quad [\Lambda\psi] = (4\pi)^{-1}R$$

où  $R$  est la courbure scalaire de la variété kählerienne. De même, l'expression locale de  $\tilde{\tau}$  étant la même que celle de  $\tau$  :

$$[\Lambda\tilde{\tau}]_U = - (2\pi)^{-1} F^{\lambda\bar{\mu}} t_{\lambda\bar{\mu}} = - (2\pi)^{-1} g^{\lambda\bar{\mu}} t_{\lambda\bar{\mu}}.$$

Il en résulte :

$$(25,6) \quad \Lambda\tilde{\tau} = - (4\pi)^{-1} \text{Tr } t$$

où  $\text{Tr } t$  est la trace du tenseur de Bergmann relativement à la métrique envisagée. D'après le caractère positif de  $t$ , sa trace est positive ou nulle et n'est nulle que si le tenseur de Bergmann  $t$  est nul. La relation (25,4) s'écrit ainsi :

$$(25,7) \quad \int_{W_n/D} R\eta = \int_{W_n/D} (\text{Tr } t)\eta \leq 0$$

l'égalité n'étant atteinte que si le tenseur de Bergmann de  $W_n$  est identiquement nul.

c) Supposons  $C_1(W_n/D) = 0$ . Il existe alors sur la variété  $W_n/D$  une 1-forme  $\beta$  telle que :

$$\tilde{\tau} = d\beta.$$

Il en résulte d'après (25,3) :

$$\int_{W_n/D} (\Lambda\tilde{\tau})\eta = 0$$

soit :

$$\int_{W_n/D} [\text{Tr } t]\eta = 0$$

et par suite  $t = 0$ . Nous obtenons ainsi :

**THÉORÈME.** — *Si la variété complexe normale  $W_n$  admet un groupe discontinu uniforme  $D$  de transformations holomorphes et si  $W_n/D$  est kählerienne, pour que la classe de Chern  $C_1(W_n/D)$  soit nulle, il faut et il suffit que le tenseur de Bergmann de  $W_n$  soit nul ou que :*

$$\int_{W_n/D} R\theta = 0.$$

**26. Transformations infinitésimales holomorphes et isométries infinitésimales dans le cas kählerien.**

a) Plaçons-nous dans les mêmes hypothèses :  $W_n$  normale admet un groupe discontinu uniforme  $D$  de transformations holomorphes et la variété  $W_n/D$  est kählerienne.

Soit  $X$  une transformation infinitésimale holomorphe de  $W_n$  invariante par  $D$ . Par abus de langage, nous l'identifierons avec sa projection et dirons encore que  $X$  est une transformation infinitésimale holomorphe de  $W_n/D$ . Nous avons vu que  $X$  est complète sur  $W_n$  ainsi que  $\mathcal{J}X$ . Sur un domaine  $U$  de coordonnées locales de  $W_n$ ,  $X$  vérifie ainsi la relation (15,5), soit :

$$(26,1) \quad \partial_\alpha X_{\bar{v}}^\alpha + X_{\bar{v}}^\alpha \partial_\alpha \log k_U = 0$$

où  $k$  est le noyau de Bergmann de  $W_n$ . Or d'après (24,2) :

$$k_U = f[p^*\sqrt{g}]_U$$

où  $f > 0$  est invariant par  $D$ . Sur  $pU$ , la projection de  $X$  admet toujours comme composantes les  $X_{\bar{v}}^\alpha$  et (26,1) peut s'écrire :

$$(26,2) \quad \partial_\alpha X_{\bar{v}}^\alpha + X_{\bar{v}}^\lambda \partial_\lambda \log [\sqrt{g}]_U + X_{\bar{v}}^\alpha \partial_\alpha \log \tilde{f} = 0.$$

Or dans la connexion kählerienne envisagée :

$$\partial_\lambda \log [\sqrt{g}]_U = (\Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha)_U$$

et par suite, si  $\nabla$  est l'opération de dérivation covariante dans la connexion kählerienne :

$$\nabla_\alpha X_{\bar{v}}^\alpha = \partial_\alpha X_{\bar{v}}^\alpha + (\Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha)_U X_{\bar{v}}^\lambda = \partial_\alpha X_{\bar{v}}^\alpha + X_{\bar{v}}^\lambda \partial_\lambda \log [\sqrt{g}]_U.$$

Pour simplifier les notations, nous posons :

$$\log \tilde{f} = \varphi$$

où  $\varphi$  est un scalaire réel de  $W_n/D$ . Nous pouvons ainsi mettre (26,2) sous la forme :

$$(26,3) \quad \nabla_\alpha X_{\bar{v}}^\alpha + X_{\bar{v}}^\alpha \partial_\alpha \varphi = 0$$

ou sous la forme complexe conjuguée :

$$(26,4) \quad \nabla_{\bar{\alpha}} X_{\bar{v}}^{\bar{\alpha}} + X_{\bar{v}}^{\bar{\alpha}} \delta_{\bar{\alpha}} \varphi = 0.$$

Soit  $\xi$  la 1-forme de  $W_n/D$  associée à  $p'(X)$  par la dualité définie par la métrique. Par abus de langage, nous dirons que  $\xi$  définit une transformation infinitésimale holomorphe de  $W_n/D$  ou une transformation infinitésimale holomorphe de  $W_n$  invariante par  $D$ . Par décomposition selon les types, on a :

$$\xi = \xi_{(1,0)} + \xi_{(0,1)}.$$

La relation (26,4) peut s'écrire :

$$-\nabla^{\alpha}(\xi_{\bar{v}})_{\alpha} = \delta^{\alpha}\varphi(\xi_{\bar{v}})_{\alpha}$$

soit, sous forme intrinsèque :

$$(26,5) \quad \delta' \xi_{(1,0)} = i(d\varphi)\xi_{(1,0)}$$

où  $d'$  et  $d''$  sont les parties respectivement de type  $(1,0)$  et  $(0,1)$  de  $d$ ,  $\delta'$  et  $\delta''$  les parties respectivement de type  $(-1,0)$  et  $(0,-1)$  de  $\delta$ .

b) Sur la variété kählerienne compacte  $W_n/D$ , décomposons la forme  $\xi_{(1,0)}$  selon la décomposition de  $G$ . de Rham. On sait (Lichnerowicz [13], [14]) que :

$$(26,6) \quad \xi_{(1,0)} = d'\rho + h_{(1,0)}$$

où  $\rho$  est un scalaire complexe et où  $h_{(1,0)}$  est une 1-forme holomorphe de  $W_n/D$  qui est la partie harmonique de  $\xi_{(1,0)}$  et vérifie :

$$(26,7) \quad d'h_{(1,0)} = 0, \quad \delta'h_{(1,0)} = 0.$$

Si l'on introduit le produit scalaire global de formes de  $W_n/D$ , il vient :

$$\langle \xi_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle = \langle d'\rho, h_{(1,0)} \rangle + \langle h_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle$$

soit d'après (26,7)

$$\langle \xi_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle = \langle h_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle$$

On obtient ainsi :

$$(26,8) \quad \langle h_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle = \int_{W_n/D} i(\xi)h_{(1,0)}\eta.$$

Notons que  $i(\xi)h_{(1,0)}$  est une fonction holomorphe sur la variété complexe compacte  $W_n/D$  et par suite se réduit à une constante :

$$(26,9) \quad i(\xi)h_{(1,0)} = C$$

(26,8) s'écrit donc :

$$\langle h_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle = C \int_{W_n/D} \eta$$

et pour que  $h_{(1,0)}$  soit nul il faut et il suffit que la constante  $C = i(\xi)h_{(1,0)}$  soit nulle.

Cela posé, la relation (26,5) s'écrit puisque  $\delta'h_{(1,0)} = 0$

$$\delta' d'\rho = i(d\varphi)\xi_{(1,0)}.$$

Mais sur une variété kählerienne, on a pour le Laplacien

$$\Delta = 2(d'\delta' + \delta'd').$$

Nous obtenons ainsi pour les formes  $\xi$  qui définissent une transformation infinitésimale holomorphe de  $W_n/D$  :

$$(26,10) \quad \Delta\rho = 2i(d\varphi)(d'\rho + h_{(1,0)}).$$

c) Supposons en particulier que  $\xi$  définisse une isométrie infinitésimale de  $W_n/D$ . On sait (voir Lichnerowicz [14]) que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que  $\rho$  soit imaginaire pur. Nous posons  $\rho = iu$  où  $u$  est à valeurs réelles.

Si  $\xi$  est sans partie harmonique ( $h_{(1,0)} = 0$ ), (26,10) s'écrit :

$$\Delta u = 2i(d\varphi) d'u.$$

Par passage à la relation complexe conjuguée on a :

$$\Delta u = 2i(d\varphi) d''u.$$

Par addition membre à membre de ces deux relations, il vient :

$$(26,11) \quad \Delta u - i(d\varphi) du = 0.$$

Ainsi le scalaire réel  $u$  vérifie sur la variété compacte  $W_n/D$  l'équation à coefficients réels de type elliptique (26,11). Il atteint sur cette variété son maximum et, d'après le théorème classique d'E. Hopf, il se réduit nécessairement à une constante. Il en résulte que, sous les hypothèses faites,  $\xi = 0$ .

d) Nous avons supposé au c) que  $\xi$  est à partie harmonique nulle. Il existe un certain nombre de cas où nous sommes assurés qu'il en est ainsi. Nous désignons par  $G$  le groupe des isométries de la métrique kählerienne envisagée sur  $W_n/D$  et par  $G_0$  la composante connexe de l'identité de  $G$ .

1° Soit  $H$  le groupe des isométries de  $W_n/D$  qui laissent invariant un point  $p_{z_0}$  de cette variété (groupe d'isotropie). Si  $\xi$  définit, par la dualité définie par la métrique, un élément de l'algèbre de Lie  $\underline{H}$  de  $H$ ,  $\xi$  s'annule en  $p_{z_0}$  et, d'après le  $b$ , est à partie harmonique nulle.

Il en résulte que  $\underline{H} = 0$  et que le groupe  $H$ , discret et compact, est nécessairement fini.

2° Si  $\underline{G}$  est l'algèbre de Lie de  $G$  ou  $G_0$ , on sait (voir Lichnerowicz [14]) que l'idéal dérivé  $[\underline{G}, \underline{G}]$  de  $G$  est défini par des formes  $\xi$  à partie harmonique nulle. Il en résulte :

$$[\underline{G}, \underline{G}] = 0$$

et le groupe  $G_0$  est nécessairement abélien.

3° Supposons que la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(W_n/D)$  de la variété compacte  $W_n/D$  soit différente de zéro. Tout champ de vecteurs ou toute 1-forme de cette variété admet alors nécessairement un zéro et, d'après le  $b$ , la constante  $C$  est nulle pour toute 1-forme  $\xi$  définissant un élément de  $\underline{G}$ . Il en résulte que  $\underline{G} = 0$  et que par suite le groupe  $G$  discret et compact est nécessairement fini. Il en est de même trivialement si  $b_1(W_n/D) = 0$ .

Nous énonçons :

**THÉORÈME.** — *Soit  $W_n$  une variété complexe normale admettant un groupe discontinu uniforme  $D$  de transformations holomorphes. Pour  $W_n/D$  et pour toute métrique kählerienne de cette variété, le groupe d'isotropie  $H$  des isométries est fini et le plus grand groupe connexe  $G_0$  d'isométries est abélien.*

*Si, de plus,  $b_1(W_n/D) = 0$  ou  $\chi(W_n/D) \neq 0$ , le groupe  $G_0$  est réduit à l'identité <sup>(3)</sup>.*

<sup>(3)</sup> Ajouté en épreuves. De ce théorème, il résulte par un raisonnement classique que, pour  $W_n/D$ , le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes est résoluble.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. L. BAILY, The decomposition theorem for  $V$ . manifolds, *Amer. J. Math.*, 78 (1956), 862-888.
- [2] S. BERGMANN, Über die Kernfunction eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande, *J. Reine Angew. Math.*, 169 (1933), 1-42 et 172 (1935), 89-128.
- [3] S. BERGMANN, Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes, *Mem. Sci. Math.*, Paris, 106 (1947).
- [4] E. CARTAN, Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de  $n$  variables complexes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11 (1935), 116-162.
- [5] H. CARTAN, Sur les groupes de transformations analytiques, *Actual. Scient.*, 198 (1935).
- [6] H. CARTAN, Variétés analytiques complexes et cohomologie, *Coll. sur les fonctions de plusieurs variables*, Bruxelles (1953).
- [7] S. KOBAYASHI, Geometry of bounded domains, *Transl. of Amer. Math. Soc.*, 92 (1959), 267-290.
- [8] S. KOBAYASHI, On the automorphism group of a certain class of algebraic manifolds, *Tohoku Math. J.*, 11 (1959), 184-190.
- [9] S. KOBAYASHI, On compact Kähler manifolds with positive definite Ricci tensor, *Ann. of Math.*, 74 (1961), 570-573.
- [10] J. L. KOZUL, Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, *Canad. J. Math.*, 7, (1955), 562-576.
- [11] A. LICHNEROWICZ, Espaces homogènes kähleriens, *Actes Coll. Inst. Géom. diff.*, Strasbourg (1953). Sur les groupes d'automorphismes de certaines variétés kählériennes, *C..R. Acad. Sc.*, 239 (1954), 1344.
- [12] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Rome (1955).
- [13] A. LICHNEROWICZ, Sur les transformations analytiques des variétés kählériennes compactes, *C. R. Acad. Sc.*, 244 (1957), 3011 et 247 (1958), 855.
- [14] A. LICHNEROWICZ, Isométries et transformations analytiques d'une variété kählérienne compacte, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 427-437.
- [15] I. SATAKE, On a generalization of the notion of manifold, *Proc. Nat. Acad. U.S.A.*, 42 (1956), 359-363.

Manuscrit reçu en mars 1965.

André LICHNEROWICZ,  
6, avenue Paul-Appell,  
Paris (14<sup>e</sup>).

---