ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAUL KRÉE

Remarques relatives à certains ensembles convexes plans liés à des espaces L^p

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 2 (1965), p. 313-323

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_313_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 2 (1965), 313-323.

REMARQUES RELATIVES A CERTAINS ENSEMBLES CONVEXES PLANS LIÉS A DES ESPACES L^p

par Paul KRÉE

Introduction.

On se donne un espace X avec une mesure μ positive et une fonction numérique $\varpi : X \to \mathbf{R}$, strictement positive μ $p.p.$ (presque partout relativement à la mesure μ), (P) désigne un plan réel : les coordonnées du point courant m de ce plan sont notées $\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$, les axes sont rectangulaires.

(D) désigne le demi plan droit où $\frac{1}{p} \geqslant 0$;

(B) désigne la bande verticale où $0 \leqslant \frac{1}{p} \leqslant 1$.

A toute fonction mesurable $f : X \to \mathbf{R}$, on associe la partie D_f du demi plan (D) formée par les points $m\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ tels que $f\varpi^\alpha$ soit de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable soit

$$(1) \qquad \|f\|^p_{p,\, \alpha p} = \int_{x \in X} |f(x)\varpi(x)|^p \, d\mu(x) < \infty$$

D_f est toujours un ensemble convexe.

En effet :

— Si $m_0\left(\frac{1}{p_0}, \alpha_0\right)$ et $m_1\left(\frac{1}{p_1}, \alpha_1\right)$ sont dans (B) et si $\theta \in [0, 1]$ on pose

$$(2) \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

$$(3) \qquad \alpha_\theta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$$

et l'on écrit

$$(4) \qquad \|f\|_{p_\theta,\, \alpha_\theta p_\theta} = \|f\varpi^{\alpha_\theta}\|_{p_\theta} = \|\underbrace{f^{1-\theta}\varpi^{(1-\theta)\alpha_0}}\underbrace{f^\theta\varpi^{\theta\alpha_1}}\|_{p_\theta}$$

et on majore le dernier membre en utilisant l'inégalité de Hölder.

— Si m_0 et m_1 sont quelconques dans (D), on se ramène au cas précédent en utilisant 1A5 pour amener par la transformation (10) le segment m_0m_1 dans la bande (B).

Mais réciproquement, si l'on se donne un convexe du demi plan (D), ainsi que X et ϖ, existe-t-il une f: $X \to \mathbf{R}$ qui admette ce convexe comme domaine D_f? Nous donnerons une réponse à cette question dans le cas où :

$$(5) \qquad \left| \begin{array}{l} X = \text{la demi droite } [1, +\infty[\\ d\mu(x) = \dfrac{dx}{x} \\ \varpi(x) = x \end{array} \right.$$

Et la réponse ne sera partielle en ce sens que l'on ne caractérisera que l'intérieur de D_f.

Ensuite nous en déduirons la réponse dans d'autres cas.

1. Examen du cas (5).

On peut se limiter à des fonctions f positives. On étudie d'abord l'application $f \to D_f$ (§ 1.A). Puis on aborde la recherche d'une f ayant un D_f donné. On traite d'abord le cas où D_f est l'intersection du demi plan (D) avec un demi plan ouvert en donnant deux précisions supplémentaires (relatives au support de f et à $\|f\|_{p,\alpha p}$). Puis on traite le cas général, en utilisant la propriété 1.A.3 et le fait que tout convexe permis est à sa frontière près, une intersection dénombrable de demi plans.

1.A. *Propriétés de l'application* $f \to D_f$.

1.A.1. Elle est décroissante

$$(6) \qquad 0 \leqslant f \leqslant f' \Longrightarrow D_{f'} \supseteq D_f.$$

1.A.2. L'inégalité (où a et b sont des nombres positifs)

$$|a + b|^p \leqslant |2a|^p + |2b|^p$$

montre que :

$$(7) \qquad D_f \cap D_{f'} \subseteq D_{f+f'}.$$

1.A.3. Si $\inf(f, f') = 0$

on a :

$$(8) \qquad \|f\|^p_{p,\alpha p} + \|f'\|^p_{p,\alpha p} = \|f + f'\|^p_{p,\alpha p}$$

d'où

$$\text{(9)} \qquad D_f \cap D_{f'} = D_{f+f'}.$$

Mais si l'on considère une famille non finie (f_i) de fonctions à supports disjoints on peut seulement affirmer que :

$$\text{(9 \textit{bis})} \qquad D_{\sum_i f_i} \subseteq \bigcap_i D_{f_i}.$$

1.A.4. D_f ne change pas si f subit les modifications suivantes :

a) translation sur la variable : $f(.) \to f(. + C)$;

b) homothétie sur f ou sur x;

c) addition d'une fonction bornée à support compact.

1.A.5. Si f est élevée à une puissance β positive, D_f subit une homothétie de rapport β.

$$\text{(10)} \qquad D_{f^\beta} = \beta D_f.$$

1.A.6. Remplaçons f par

$$g = f\varpi^\beta \quad \beta \text{ réel.}$$

Alors

$$\text{(11)} \qquad \|g\|_{p,\alpha p}^p = \|f\|_{p,(\alpha+\beta)p}^p.$$

Donc D_g se déduit de D_f par une translation $-\beta$ suivant la direction $O\alpha$.

1.A.7. Remplaçons $d\mu(x)$ par $\varpi^\beta(x)\, d\mu(x)$. Alors on voit que D_f subit la transformation affine :

$$\left(\frac{1}{p}, \alpha\right) \to \left(\frac{1}{p}, \alpha - \frac{\beta}{p}\right).$$

1.A.8. De même, posant :

$$g(x) = f(x^\beta) \qquad \text{avec} \qquad \beta > 0$$

on voit que D_g se déduit de D_f par une affinité ayant pour axe, l'axe $\frac{1}{p}$, de rapport β, suivant l'axe $O\alpha$.

1.A.9. On a dans notre cas particulier

$$\text{(12)} \qquad \varpi(x) = x \geqslant 1.$$

Alors si

$$(13) \qquad m_0\left(\frac{1}{p_0}, \alpha_0\right) \quad \text{est dans} \quad D_f$$

on a encore

$$(14) \qquad \left(\frac{1}{p_0}, \alpha\right) \quad \text{dans } D_f \text{ si} \quad \alpha < \alpha_0.$$

1.A.10. On a dans notre cas particulier

$$(15) \qquad \int_1^\infty \varpi(x)^{\alpha p}\frac{dx}{x} < \infty \qquad \text{si} \qquad \alpha < 0.$$

Alors si D_f contient $m_0\left(\frac{1}{p_0}, \alpha_0\right)$, l'adhérence $\overline{D}_f$ de D_f contient aussi les points $\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ de (D) avec $\alpha < \alpha_0$ et $\frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{p_0}$.

Preuve. — Avec 1.A.6 on peut supposer $\alpha_0 = 0$. Puis avec 1.A.5 on peut se limiter à $\frac{1}{p} \leqslant 1$. Cela résulte alors de l'inégalité de Hölder

$$(16) \qquad \int_1^\infty f(x)x^\alpha\frac{dx}{x} \leqslant \left(\int_1^\infty f^p(x)\frac{dx}{x}\right)^{1/p}\left(\int_1^\infty x^{\alpha p'}\frac{dx}{x}\right)^{1/p'}$$

avec

$$(17) \qquad 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}.$$

Remarque. — Notons que si $(f_k)_k$ est une suite de fonctions tendant μ *p.p.* vers f, cela n'entraîne pas que D_{f_k} « tende » vers D_f : considérer par exemple f localement bornée et la suite f_k :

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.B. *Un lemme.*

On cherche maintenant une f telle que D_f soit l'intersection de (D) avec un demi plan ouvert et l'on donne des précisions sur f que nous utiliserons plus tard.

Lemme. — *On se donne une droite* (d) *du plan* (P) *d'équation*

$$(18) \qquad \alpha = \frac{A}{p} + B \qquad \textit{avec} \qquad A \geqslant 0.$$

1) *Il existe une* $f : X \to \mathbf{R}^+$, *telle que* D_f *soit l'intersection de* (D) *avec le demi plan ouvert situé sous* (*d*).

2) *Quel que soit l'entier positif n, et une succession de segments de* X *de longueur* 1, *dont les extrémités gauches (ou droites ! !) forment une progression arithmétique de raison* 2^n, *il existe une fonction f à support dans cette succession et ayant les propriétés du* 1).

3) *Quel que soit* $\lambda \geqslant 1$, *il existe une* $\tilde{f}$ *satisfaisant aux conditions du* 2) *et en plus à celle-ci : pour tout point* $\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ *de* $D_{\tilde{f}}$ *on a :*

$$\|\tilde{f}\|_{p,\alpha p}^p \leqslant \frac{2+2^n}{\lambda\left(A - \frac{\alpha - B}{1/p}\right)}. \tag{19}$$

Preuve. — Avec la propriété 1.A.6. et la relation (11), on voit qu'on peut supposer $B = 0$.

On se fixe (pour l'instant de façon arbitraire) deux nombres

$$\lambda \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \mu \leqslant 0$$

k étant un entier $\geqslant 1$, I_k désigne l'intervalle $[k^\lambda, k^\lambda + k^\mu]$.

On considère f, fonction caractéristique de la réunion des I_k.

$$\|f\|_{p,\alpha p}^p = \sum_{k>1} \int_{k^\lambda}^{k^\lambda + k^\mu} \frac{x^{\alpha p}}{x}\, dx \sim \sum_{k\geqslant 1} k^\nu$$

avec

$$\nu = \mu + (\alpha p - 1)\lambda$$

(la formule des accroissements finis montre que le terme négligé est majoré par $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\nu-1}$). $\|f\|_{p,\alpha p}^p$ est donc fini si et seulement si :

$$\alpha < \frac{1}{p}\,\frac{\lambda - \mu - 1}{\lambda}. \tag{21}$$

On voit alors que : quel que soit $A \geqslant 0$, quel que soit $\lambda \geqslant 1$ (arbitrairement grand par exemple), on peut choisir μ de façon que

$$\frac{\lambda - \mu - 1}{\lambda} = A.$$

2) Je modifie un peu f en $\tilde{f}$ de la façon suivante. $\tilde{f}$ est la fonction caractéristique de la réunion des intervalles $\tilde{I}_k . \tilde{I}_k$

est un intervalle égal à I_k, et il est déduit de I_k en le déplaçant de 2^n au plus, de façon à l'amener dans un segment de la succession donnée.

La formule des accroissements finis montre encore que :

$$\left| \|f\|^p_{p,\alpha p} - \|\tilde{f}\|^p_{p,\alpha p} \right| \quad \text{est majoré par} \quad 2^n \sum_{k \geqslant 1} k^{\nu - 1}.$$

3) Le point $\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ étant situé en dessous de (d), on a :

$$\|f\|^p_{p,\alpha p} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k^{\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} k^{\nu-1} + 2^n \sum_{k=1}^{\infty} k^{\nu-1} \leqslant (2+2^n) \int_1^{\infty} x^{\nu}\, dx$$
$$\leqslant - \frac{2+2^n}{\mu + \lambda\alpha p - \lambda + 1} = \frac{2+2^n}{\lambda\left(A - \frac{\alpha}{1/p}\right)}.$$

Nous pouvons alors en déduire la :

1.C. *Caractérisation de l'intérieur de* D_f.

Proposition. — *Dans le cas particulier* (5), *quel que soit le convexe* (O) *de* (P), *ouvert dans* (P), *stable par toute translation à droite et vers le bas*, soit

$$\left(\frac{1}{p_0}, \alpha_0\right) \text{ dans } (0) \Longrightarrow \left(\frac{1}{p}, \alpha\right) \text{ dans } (0) \text{ si } \left|\begin{array}{l} \alpha \leqslant \alpha_0 \\ \text{et } \dfrac{1}{p} \geqslant \dfrac{1}{p_0} \end{array}\right.$$

alors il existe une fonction f : $X \to \mathbf{R}$, *telle que* (O) *soit l'intérieur de* D_f.

Preuve. — *a*) Si (O) est tout le demi plan (P) on prend $f = 0$.

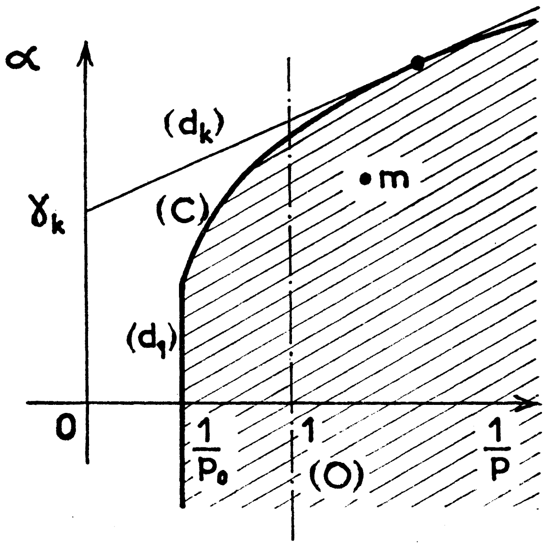
b) Sinon, (O) est limité au-dessus par un arc de courbe (C) et éventuellement (c'est le cas de la figure) à gauche par une demi droite portée par une verticale (d) où $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} > 0$.

Considérant une famille dénombrable de points dense sur (C) et la famille dénombrable $(d_n)_{n \geqslant 2}$ des droites qui portent les 1/2 tangentes à (C) en ces points, (O) apparaît, à quelques points frontières près, comme l'intersection des demi plans situés à droite de (d_1), et sous les droites $(d_n)_{n \geqslant 2}$.

On cherche alors à appliquer (9 *bis*) en prenant

$$f = f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n \tag{22}$$

les fonctions $(f_n)_{n \geqslant 2}$ étant celles du lemme. Il faut d'abord fabriquer une suite infinie de successions infinies et disjointes d'intervalles équidistants de longueur 1.



Il suffit de prendre la partition suivante de X en segments de longueur 1 :

— la succession de pas 2^1 des intervalles $[1, 2[$, $[3, 4[$, $[5, 6[$, $[7, 8[$ ...

— la succession de pas 2^2 des intervalles $[2, 3[$, $[6, 7[$, $[10, 11[$ ...

— la succession de pas 2^3 des intervalles $[4, 5[$, $[12, 13[$, $[20, 21[$ ...

On prend alors $f_n (n \geqslant 2)$ à support dans la $n^{\text{ième}}$ succession définie par le lemme, (λ est indéterminé pour l'instant) et dont le domaine est limité au-dessus par la droite d_n.

f_1 a une définition particulière qui dépend de la présence éventuelle de (d_1) sur le bord de (O) :

si (d_1) existe on prend

$$f_1(x) = \begin{cases} e^n & \text{si} \quad 2n - 1 \leqslant x \leqslant 2n - 1 + e^{-np_0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sinon

$$f_1(x) = 0.$$

Montrons à présent qu'en prenant $\lambda_n = 2^{2^n}$ par exemple, on a dans (9 *bis*) l'égalité des 2 membres.

Il suffit de montrer pour cela, que pour tout $m\left(\frac{1}{p}, \alpha\right)$ dans (O) on a :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \|\tilde{f}_n\|_{p,\alpha p} < \infty. \tag{23}$$

Cela résulte de la majoration (20) et du fait que pour m fixé et (d_n) variable, la parenthèse du dénominateur de (19) est uniformément minorée (ça se voit par exemple en l'interprétant géométriquement comme la différence des pentes des droites (d_k) et $\gamma_k m$, γ_k étant défini comme étant l'intersection de (d_k) avec $O\alpha$.

Remarque. — Pour faire converger la série (23) on pourrait aussi garder λ constant et remplacer les f_n par $2^{-2^n}f_n$ ce qui a pour effet de diminuer les nombres $\|f_n\|$ sans modifier D_{f_n}, mais cela ne permet pas de se passer de la majoration (19).

1.D *Remarques à propos de la frontière de* D_f.

Si l'on considère au lieu de la fonction f définie par (20)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\log x)^l} & \text{si } x \text{ appartient à un des intervalles } I_k. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

on a pour cette fonction

$$\|f\|_{p,\alpha p}^p = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k^\lambda}^{k^\lambda + k^\mu} \frac{x^{\alpha p - 1}\, dx}{(\log x)^{lp}} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\mu + (\alpha p - 1)}}{(\log k)^{lp}}$$

Cette série converge :

— ou bien si $\mu + (\alpha p - 1)\lambda < -1$;

— ou bien si $\mu + (\alpha p - 1)\lambda = -1$ et $l_p > 1$.

Ce qui signifie que f a pour domaine D_f l'intersection de (D) avec la réunion :

— d'un demi plan ouvert;

— d'une demi droite située sur le bord de ce demi plan.

On pourrait utiliser de telles fonctions pour construire des f admettant des D_f fermés.

2. Extensions à d'autres cas.

Nous nous limiterons à quelques observations.

2.A. Les propriétés 1.A.1 à 1.A.7 sont générales. Les propriétés 1.A.9 et 1.A.10 résultent des hypothèses (12) et (13). On voit de même que si $\varpi(x) \leqslant 1$ alors D_f est stable par toute translation vers le haut.

2.B. Dans le cas d'un espace X localement compact et d'un poids ϖ continu, on « voit » que ce qui importe, c'est le comportement de ϖ à l'infini et au voisinage des points où il s'annule. Ainsi si l'on fait une partition finie de X

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

telle que l'intérieur de chaque X_i contient un ensemble de zéros de ϖ ou le voisinage de l'infini, en posant

$$f_i = \begin{cases} f & \text{sur} \quad X_i \\ 0 & \text{sur} \quad X - X_i \end{cases}$$

on a avec 1.A.3.

$$D_f = \bigcap_{i=1}^{n} D_{f_i}$$

et l'on est ramené à des cas plus simples.

Exemple 1.

$$\left| \begin{aligned} X &= \mathbf{R}^+ \\ d\mu(x) &= \frac{dx}{x} \\ \varpi(x) &= x. \end{aligned} \right.$$

Soit $\qquad X_1 = [1, +\infty[\qquad$ et $\qquad X_2 = [0, 1[$

D_{f_1} a été étudié et caractérisé, à sa frontière près) au § 1.

L'étude analogue pour D_{f_2} s'en déduit facilement car en faisant le changement de variable :

$$x = \frac{1}{u}.$$

Posant :
$$g_2(u) = f_2\left(\frac{1}{u}\right)$$

g est une fonction définie sur X_1 et D_{f_2} est le symétrique par rapport au 1er axe de D_{g2}.

D'où une caractérisation des D_f (à leurs frontières près) dans ce cas. Ce sont des intersections :

— D'un convexe de (D) stable par translations à droite ou vers le bas;

— D'un convexe de (D) stable par translation à droite vers le haut.

Ce sont donc tous les convexes de (D) stables par translation à droite.

Exemple 2.

Transposition évidente de ces constatations pour

$$\left|\begin{aligned} X &= \mathbf{R}^n \\ d\mu(x) &= \frac{dx}{|x|^n} \\ \varpi(x) &= |x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}. \end{aligned}\right.$$

Avec 1.A.7, on a également la réponse si l'on remplace ci-dessus

$$\frac{dx}{|x|^n} \qquad \text{par} \qquad dx.$$

2.C. *Dans le cas de :*

$$\left|\begin{aligned} X &= \mathbf{Z}^+ = \{1, 2, \ldots n \ldots\} \\ u &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n} \\ \varpi(n) &= n. \end{aligned}\right.$$

On voit que les raisonnements du § 1 se transposent de la façon suivante.

On constate d'abord que D_f est stable par toute translation suivant la direction de la bissectrice du 3e angle formé par les axes; cela résulte de 1.A.5, 1.A.6 et de :

$$\|f\|_{1,1} = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|n.\frac{1}{n} < \infty \Longrightarrow f(n) \to 0 \Longrightarrow \|f\|_{\infty,0} < \infty.$$

Le lemme du § 1 B se transpose mais il faut supposer en plus :

$$0 \leqslant A \leqslant 1$$

(d'ailleurs dans sa démonstration on remplace (20) par :

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un entier } k \text{ avec } n = [k^\lambda] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui « revient » à faire $\mu = 0$ dans (20).

λ n'étant plus arbitraire on a toujours (19) : on transpose alors le § 1.C en utilisant la remarque terminant ce paragraphe. Et l'on obtient que tout convexe de (D) stable par toute translation de direction celles du 1er axe ou de la 3^e bissectrice est (à sa frontière près peut-être), un domaine D_f et réciproquement.

Manuscrit reçu le 8 décembre 1964.

Paul Krée,
Service de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose,
Nice (A.-M.).