ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

A. C. ALLAMIGEON

Propriétés globales des espaces de Riemann harmoniques

Annales de l'institut Fourier, tome 15, n° 2 (1965), p. 91-132

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_91_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 2 (1965), 91-132.

PROPRIÉTÉS GLOBALES DES ESPACES DE RIEMANN HARMONIQUES

par André-Claude ALLAMIGEON

Introduction.

Il y a deux ans, André Allamigeon, jeune chercheur plein de promesses, disparaissait dans des circonstances tragiques. Il laissait quelques notes à l'Académie des Sciences annonçant des résultats importants concernant la théorie des espaces harmoniques et le manuscrit d'une thèse aux trois quarts achevée sur ce sujet. T. J. Willmore, de l'Université de Durham, un des grands spécialistes de la théorie des espaces harmoniques, a bien voulu consacrer de longues semaines à la remise en ordre du manuscrit laissé par Allamigeon. Avec toute sa science, il a même réussi, à partir de brouillons, à rédiger et à compléter certains fragments qui n'avaient pas encore trouvé leur forme définitive. Le présent mémoire doit beaucoup à son intelligence et à son amical dévouement. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de la gratitude de toute l'école de géométrie différentielle française.

La notion toute naturelle d'espace harmonique est née des travaux de Ruse autour des années 40. Un espace différentiable « à métrique quadratique » (de signature quelconque) est dit harmonique si grosso modo le laplacien associé à la métrique admet une solution élémentaire ne dépendant que de l'arc géodésique. Il fut établi très tôt (A. Lichnerowicz et A. G. Walker) que tout espace localement harmonique de signature hyperbolique normal est trivial, c'est-à-dire à courbure constante. La théorie locale et globale des espaces harmoniques riemanniens (c'est-à-dire de signature elliptique) s'est au contraire révélée riche en difficultés et en intérêt. A partir des espaces homogènes symétriques compacts de rang un, Willmore a exhibé le premier des exemples non triviaux d'espaces riemanniens globalement harmoniques.

La détermination générale des espaces riemanniens globalement harmoniques demeure encore un problème ouvert. Mais le présent mémoire d'Allamigeon, consacré à l'étude des propriétés de leurs géodésiques, lui fait faire un pas qui peut être décisif. Je me bornerai à signaler les résultats essentiels. La proposition 1.1 et le théorème 1 conduisent à mettre en évidence une propriété des espaces riemanniens complets globalement harmoniques qui sera étudiée pour elle-même et à définir les espaces riemanniens « de type $\mathcal{F}(\lambda)$ » à l'analyse desquels est consacré le § 3 (Corollaire de la proposition 3.1 et proposition 3.2). L'étude de leur revêtement universel conduit à définir les espaces riemanniens » de type $\mathcal{A}(\lambda)$ » qui fait l'objet du § 4. Dans un tel espace V_n toute géodésique est injectivement périodique de longueur fixe 2, par une normalisation convenable. On en déduit que λ est nécessairement 0, 1, 3, 7 ou n-1 et que la cohomologie des espaces $\mathcal{A}(\lambda)$ est celle d'un espace homogène symétrique compact de rang un (proposition 4.3.). Il s'agit d'un cas particulier d'un théorème de Bott pour lequel une démonstration autonome est donnée. Le cas des espaces $\mathcal{A}(0)$ et $\mathcal{A}(n\text{-}1)$ conduit à des résultats remarquablement précis (proposition 4.5).

Comme il avait été conjecturé antérieurement, il apparaît avec encore plus de vraisemblance que les espaces riemanniens compacts globalement harmoniques présentent un lien étroit avec les espaces symétriques de rang un.

André Lichnerowicz.

TABLE DES MATIÈRES

1. PRÉLIMINAIRES.

1.1. Définitions et notations.

Par *variété différentiable,* nous entendrons toujours une variété de classe C^∞, et par *variété analytique* une variété analytique réelle; de plus une telle variété sera toujours supposée *séparée, connexe* et *dénombrable à l'infini,* bien que cela ne soit pas toujours nécessaire pour les démonstrations. Nous désignerons par $T(V)$ l'espace fibré tangent d'une variété V et par $T_x(V)$ l'espace tangent au point $x \in V$. Un *système de coordonnées* sera toujours supposé de même classe que la variété.

Un *espace à connexion affine* est la donnée d'une variété différentiable V_n et d'une connexion sur l'espace des repères linéaires $\mathcal{E}(V_n)$.

Un espace à métrique quadratique est la donnée d'une variété différentiable V_n, et d'un champ C^∞ de formes quadratiques non dégénérées, $Q: T(V_n) \to \mathbf{R}$; l'espace est dit de Riemann si Q est définie positive, de Lorenz si Q est hyperbolique normale (un carré positif, $(n\text{-}1)$ carrés négatifs); il est dit analytique si V_n et Q le sont. La forme bilinéaire symétrique polaire est le *produit scalaire* et sera notée $(u.v)$, (où u et v sont deux vecteurs de même origine).

Le produit scalaire de deux champs de vecteurs ou de deux formes différentielles (1) extérieures se notera de la même manière. Si $\dim (V_n) = n$ l'élément de volume τ sera la n-forme différentielle impaire définie, pour un système de coordonnées quelconques, par

$$(1,1) \qquad \tau = |\det (g_{\alpha\beta})|^{1/2}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

où $g_{\alpha\beta} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$; on définit comme dans le cas riemannien (2)

(1) Voir [3], p. 181.
(2) Voir [3], p. 179.

l'opérateur $\ast$ sur les formes différentielles : si α et β sont de même degré et de parités différentes.

$$(1,2) \qquad \alpha \wedge \ast\, \theta = (\alpha . \beta)\tau ;$$

notons toutefois la formule suivante, qui fait intervenir la signature de la métrique : si α est de degré p et si n_2 est le nombre de carrés négatifs de la métrique :

$$(1,3) \qquad \ast \ast \alpha = (-1)^{p(n-p)+n_2}\, \alpha.$$

Un espace à métrique quadratique est muni canoniquement d'une structure d'espace à connexion affine, sans torsion et tel que Q soit invariant par transport parallèle.

Soit g un segment géodésique; $Q\left(\frac{dg}{dt}\right)$ est une constante appelée écart de g. Si W est un entourage normal, nous introduirons sur W la fonction « demi-écart » :

$$(1,4) \qquad A(x, y) = \frac{1}{2} Q(u), \quad \text{où} \quad \operatorname{Exp}(u) = (x, y) ;$$

et, si $x_0 \in V_n$, la fonction A_{x_0} définie sur W_{x_0}

$$A_{x_0}(x) = A(x_0, x).$$

A est fonction symétrique de x et y; elle est C^∞, et analytique si V est analytique. Un calcul variationnel classique montre que si $u \in T_x(V)$, $v \in T_y(V)$, pour $(x, y) \in W$:

$$(1,5) \qquad dA(u, v) = -(u.\xi) - (v.\zeta),$$

où $\xi \in W$, $\zeta \in W$ et $\operatorname{Exp} \xi = (x, y)$, $\operatorname{Exp} \zeta = (y, x)$; en particulier, si Y est le champ de vecteurs sur W_{x_0} :

$$Y = d \operatorname{Exp}_{x_0} Y, \qquad Y_u = u ;$$

$$(1,6) \qquad dA_{x_0}(u) = (Y . u).$$

En coordonnées normales d'origine x_0 [3] :

$$A_{x_0}(x) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(x_0)\, \xi^\alpha(x)\, \xi^\beta(x),$$

et (1,6) donne :

$$g_{\alpha\beta}(x_0)\, \xi^\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x)\, \xi^\alpha(x),$$

formule qui caractérise les systèmes de coordonnées normales.

[3] Dans les formules en coordonnées locales, sauf mention expresse du contraire, nous appliquons la convention d'Einstein sur les indices.

1.2. L'équation de Laplace et les espaces harmoniques.

Le *Laplacien* d'un espace à métrique quadratique est l'opérateur différentiel sur les fonctions défini par ([4])

$$(1,7) \qquad \Delta_2\varphi = * \, d * d\varphi.$$

Dans le domaine d'un système de coordonnées $\xi^1, \ldots \xi^n$,

$$(1,8) \qquad \Delta_2\varphi = \nabla^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^\alpha} = g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^\alpha\partial\xi^\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^\rho}\right),$$

où $g^{\alpha\beta} = (d\xi^\alpha . d\xi^\beta)$, et $\Gamma^\rho_{\alpha\beta}$ sont les coefficients de Christoffel; si l'on pose $\eta = |\det(g_{\alpha\beta})|^{1/2}$, on peut aussi écrire

$$(1,9) \qquad \Delta_2\varphi = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\,\eta\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^\beta}\right).$$

Si F est une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et C^2 :

$$(1,10) \quad \Delta_2(F \circ \varphi) = (d\varphi . d\varphi) \times F'' \circ \varphi + \Delta_2\varphi \times F' \circ \varphi;$$

Prenons le cas de la fonction A_{x_0} : d'après la formule (1,6), $(dA_{x_0} . dA_{x_0}) = 2\,A_{x_0}$,

$$(1,11) \quad \Delta_2(F \circ A_{x_0}) = 2A_{x_0} \times F'' \circ A_{x_0} + \Delta_2 A_{x_0} \times F' \circ A_{x_0}.$$

Une fonction φ d'une variété U dans une autre V est dite fonction (resp. fonction C^r, C^∞, analytique) de ψ : $U \to V$, s'il existe une application (resp. application C^r, C^∞, analytique) Φ, d'un voisinage de $\psi(U)$ dans V, telle que

$$\varphi = \Phi \circ \psi.$$

DÉFINITION 1.1. — *Un espace à métrique quadratique* V_n *est dit harmonique en* $x_0 (x_0 \in V_n)$ *s'il existe un voisinage normal,* W_{x_0} *de* x_0 *et une fonction* φ *de* $W^*_{x_0} \to \mathbf{R}$ *telle que*

a) φ *est non localement constante,*

b) φ *est fonction de* A_{x_0},

c) φ *est* C^2 *et* $\Delta_2\varphi = 0$.

Un espace harmonique est un espace à métrique quadratique qui est harmonique en chacun de ses points.

([4]) C'est l'opposé du Laplacien de de Rham.

Une fonction telle que φ sera dite potentiel central, de centre x_0, sur W_{x_0}. Un espace localement euclidien à n dimensions est harmonique, car il admet le potentiel central :

$$\varphi(x) = |A_{x_0}(x)|^{1-\frac{n}{2}}.$$

Définition 1.2. — *Un espace à métrique quadratique est dit* simplement harmonique en x_0, *s'il admet dans un voisinage normal le potentiel central* $|A_{x_0}(x)|^{1-\frac{n}{2}}$ (où $n = \dim (V_n)$). *Un espace* simplement harmonique *est un espace à métrique quadratique simplement harmonique en chacun de ses points.*

Un espace à métrique quadratique de dimension 1, étant localement euclidien, est simplement harmonique.

Proposition 1.1. — *Soit V_n un espace à métrique quadratique. Supposons V_n harmonique en x_0, et soit φ un potentiel central; alors φ est fonction C^∞ de A_{x_0} sur $W^*_{x_0}$ et $\Delta_2 A_{x_0}$ est fonction C^∞ de A_{x_0} sur W_{x_0}. Inversement, si $\Delta_2 A_{x_0}$ est fonction C^∞ de A_{x_0} sur un voisinage normal de x_0, V_n est harmonique en x_0.*

Proposition 1.2. — *Soit V_n un espace analytique à métrique quadratique; pour que V_n soit harmonique en x_0, il suffit que la fonction φ vérifiant les conditions a, b, c de la définition* 1.1 *soit définie sur un ouvert* U *de W_{x_0}; s'il en est ainsi, et quel que soit le voisinage normal W_{x_0}, φ se prolonge en un potentiel central sur W_{x_0}, fonction analytique de A_{x_0} sur $W^*_{x_0}$, et $\Delta_2 A_{x_0}$ est fonction analytique de A_{x_0} sur W_{x_0}.*

1.3. L'invariant de Ruse.

Soit V_n un espace à connexion affine de dimension n; supposons qu'il existe sur l'espace d'un revêtement $(\tilde{V}_n, p)$ (où $\tilde{V}_n$ est muni de la connexion induite par p), une n-forme différentielle paire $\tilde{\tau}$ invariante par transport parallèle et non identiquement nulle : il suffit pour cela que le groupe d'holonomie restreint en un point $x_0 \in V_n$ soit contenu dans $\mathrm{Sl}(T_{x_0}(V_n))$. Une telle forme est unique à un facteur constant près sur $\tilde{V}_n$; $\tilde{\tau}$ sera *appelé élément de volume local de* V_n. Le cas où l'on a un *élément de volume*, n-forme *impaire sur* V_n, peut être considéré comme un cas particulier de la circonstance précédente, en prenant pour $\tilde{V}_n$, soit V_n lui-même, soit le revêtement orientable à deux feuillets de V_n. Sur tout ouvert simplement connexe de V_n, on déduit de l'existence de $\tilde{\tau}$, l'existence d'une n-forme paire τ, invariante par transport parallèle, et bien déterminée à un facteur constant près; il en est de même sur un ouvert qui est voisinage normal de l'un de ses points.

Si $\tilde{x}_0 \in \tilde{V}_n$, le n-covecteur $\tilde{\tau}_{\tilde{x}_0}$ définit sur $T_{\tilde{x}_0}(\tilde{V}_n)$ une n-forme différentielle invariante par translation, soit $\tilde{\tau}^{\tilde{x}_0}$. Soit $\tilde{\mathfrak{U}}_{\tilde{x}_0}$ le domaine de définition de $\mathrm{Exp}_{\tilde{x}_0}$; nous poserons

$$\mathrm{Exp}^*_{\tilde{x}_0}(\tilde{\tau}) = \tilde{\mathfrak{R}} \times \tilde{\tau}^{\tilde{x}_0}, \tag{1,12}$$

où $\tilde{\mathfrak{R}}$ est une fonction C^∞ (ou analytique) $\tilde{\mathfrak{R}} = \tilde{\mathfrak{U}}_{\tilde{x}_0} \to \mathbf{R}$; grâce au diagramme commutatif, où $x_0 = p(\tilde{x}_0)$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}_n & \xleftarrow{\mathrm{Exp}_{\tilde{x}_0}} & \tilde{\mathfrak{U}}_{\tilde{x}_0} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (dp)_{\tilde{x}_0}} \\ V_n & \xleftarrow{\mathrm{Exp}_{x_0}} & \mathfrak{U}_{x_0} \end{array} \tag{1,13}$$

on voit que la fonction $\mathfrak{R} : \mathfrak{U}_{x_0} \to \mathbf{R}$, telle que

$$\mathfrak{R}(dp\,\tilde{u}) = \tilde{\mathfrak{R}}(\tilde{u}), \tag{1,14}$$

ne dépend ni du choix du revêtement $\tilde{V}_n$, ni du choix de $\tilde{x}$, ni du choix de $\tilde{x}_0$ dans $p^{-1}(x_0)$.

DÉFINITION 1.3. — *Soit g un segment géodésique orienté de V_n; l'invariant de Ruse de g est le nombre*

$$\rho(g) = \mathfrak{R}\left(\frac{dg}{dt}(0)\right). \tag{1,15}$$

Soit W un entourage normal; si $(x, y) \in W$ l'invariant de Ruse du couple (x, y) est

$$\rho(x, y) = \mathfrak{R}(\mathrm{Exp}^{-1}(x, y)). \tag{1,16}$$

$\rho(x, y)$ est une fonction C^∞, analytique si V_n est analytique, jamais nulle, et égale à 1 sur la diagonale. Sur le voisinage normal W_{x_0}, prenons des coordonnées normales $\xi^1, \ldots, \xi^n$;

posons

$$\tau = \eta \, d\xi^1 \wedge \cdots \wedge d\xi^n;$$

alors, d'après (1,12) et (1,15),

$$(1,17) \qquad \rho(x_0, x) = \frac{\eta(x)}{\eta(x_0)}.$$

Supposons maintenant que V_n soit un *espace à métrique quadratique*. Soit (ξ^α) un système de coordonnées de domaine U tel que $U \times U \subset W$; définissons sur $U \times U$ un système de coordonnées en posant, si $(x, y) \in U + U$:

$$x^\alpha = \xi^\alpha(x), \qquad y^\alpha = \xi^\alpha(y);$$

nous poserons $\eta(x) = |\det(g_{\alpha\beta}(x))|^{\frac{1}{2}}$ et

$$(1,18) \qquad J(x, y) = \left| \det\left(\frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right) \right|.$$

Proposition 1.3. — *Soit* (ξ^α) *un système de coordonnées dont le domaine* U *est tel que* $U \times U \subset W$; *alors si* $(x, y) \in U \times U$,

$$(1,19) \qquad \rho(x, y) = \frac{\eta(x) \times \eta(y)}{J(x, y)}.$$

En effet, soit $(\bar\xi^\alpha)$ un deuxième système de coordonnées de domaine $\overline{U}$ tel que $U \cap \overline{U}$ soit non vide et $\overline{U} \times \overline{U} \subset W$; définissons de la même façon les fonctions $\bar\eta$ et $\bar J$ et posons, si $x \in U \cap \overline{U}$,

$$\mathcal{A}(x) = \det\left(\frac{\partial \bar\xi^\alpha}{\partial \xi^\beta}(x)\right);$$

d'après les formules de changement de coordonnées :

$$\frac{\bar\eta(x) \times \bar\eta(y)}{\bar J(x, y)} = \frac{|\mathcal{A}(x)| \times |\mathcal{A}(y)|}{\mathcal{A}(x) \times \mathcal{A}(y)} \times \frac{\eta(x) \times \eta(y)}{J(x, y)} = \frac{\eta(x) \times \eta(y)}{J(x, y)};$$

Soit maintenant $x_0 \in U$, et prenons pour $(\bar\xi^\alpha)$ des coordonnées normales d'origine x_0 dans $W_{x_0} \supset U$; d'après la formule (1,5) :

$$(d_x A)_{(x_0, y)} = -\bar g_{\alpha\beta}(x_0) \bar\xi^\alpha d\bar\xi^\beta$$

donc

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \bar x^\alpha \partial \bar y^\beta}(x_0, y) = -\bar g_{\alpha\beta}(x_0)$$

et
$$\frac{\eta(x_0)\times\eta(y)}{J(x, y)} = \frac{\bar{\eta}(x_0)\,\bar{\eta}(y)}{\bar{\eta}(x_0)^2} = \frac{\bar{\eta}(y)}{\bar{\eta}(x_0)} = \rho(x_0, y).$$

Proposition 1.4. — *Soit* V_n *un espace à métrique quadratique; il existe un entourage normal* W *tel que, si* $(x, y) \in W$, *alors* $(y, x) \in W$ *et* $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Si V_n *est analytique, soit* g *un segment géodésique orienté et* $\hat{g}$ *le segment opposé, alors* $\rho(g) = \rho(\hat{g})$.

Soit W_1 un entourage normal; c'est un voisinage de la diagonale dans $V_n \times V_n$, donc il contient un ouvert W_2 de la forme $U(U_i \times U_i)$, où les U_i forment un recouvrement ouvert de V_n; nous prendrons pour W un voisinage de la diagonale contenu dans W_2 et tel que $\mathrm{Exp}^{-1}(W)$ soit étoilé. Si $(x, y) \in W$, il existe un ouvert U_i tel que $(x, y) \in U_i \times U_i$; or U_i est voisinage normal de chacun de ses points, et c'est donc le domaine d'un système de coordonnées (ξ^α); d'après la proposition 1.3 :
$$\rho(x, y) = \frac{\eta(x)\times\eta(y)}{J(x, y)} = \rho(y, x).$$

Supposons maintenant V_n analytique; la fonction $\mathcal{R}$ est alors analytique sur $\mathcal{U}$($\mathcal{U} \subset T(V_n)$ est le domaine de définition de Exp). Si $u = \frac{dg}{dt}(0)$, posons $\sigma u = \frac{d\hat{g}}{dt}(0)$; σ est un automorphisme analytique de $\mathcal{U}$, car si X désigne le champ de vecteurs analytique sur $T(V_n)$ dont la valeur en u est le vecteur horizontal X_u tel que $dp(X_u) = u$, alors,
$$-\sigma u = \exp(X)\, u;$$
les applications $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \circ \sigma$ étant analytiques et identiques sur $\mathcal{W}$ sont identiques sur $\mathcal{U}$, qui est connexe.

Champs de Jacobi. — Considérons sur un espace à connexion affine V_n une géodésique $\gamma : I \to V_n$; (I étant un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$). Une variation de γ sera une application C^∞, $\Gamma : I \times \mathbf{R} \to V_n$ telle que

a) $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, l'application $G_\alpha : t \to G(t, \alpha)$ est une géodésique,

b) $G_0 = \gamma$.

Un champ de vecteurs le long de γ est une application $X : I \to T(V_n)$, C^∞ et telle que $X(t) \in T_{\gamma(t)}(V_n)$; *un champ de*

Jacobi de γ est un champ de vecteurs X le long de γ tel qu'il existe une variation G de γ pour laquelle :

$$X(t) = \frac{\partial G}{\partial \alpha}(t, 0).$$

Pour qu'un champ de vecteurs le long de γ *soit un champ de Jacobi, il faut et il suffit qu'il soit solution de l'équation différentielle* (5) :

$$(1,20) \quad \left(\frac{\nabla}{dt}\right)^2 X + S\left(\frac{\nabla X}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right) + R\left(X, \frac{d\gamma}{dt}\right) \cdot \frac{d\gamma}{dt} + \nabla S\left(X, \frac{d\gamma}{dt}\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$$

où S désigne le tenseur de torsion de la connexion.

En particulier, il existe un champ de Jacobi et un seul correspondant à des valeurs initiales données $X(t_0)$ et $\frac{\nabla}{dt} X(t_0)$; si $X(t_0) = 0$, on peut choisir la variation G telle que

$$G(t_0, \alpha) = \gamma(t_0).$$

Proposition 1.5. — *Soit* V_n *un espace à connexion affine possédant un élément de volume local; soit* γ *une géodésique et soit* g_t *le segment géodésique orienté :*

$$\forall s \in [0, 1], \qquad g_t(s) = \gamma(st);$$

soient $X_1, \ldots, X_n$, *n champs de Jacobi linéairement indépendants, et s'annulant pour* $t = 0$, *alors*

$$(1,21) \quad \tau(X_1(t), \ldots, X_n(t)) = t^n \times \rho(g_t) \times \tau\left(\frac{\nabla X_1}{dt}(0), \ldots \frac{\nabla X_n(0)}{dt}\right).$$

(même si τ n'est pas défini dans un ouvert contenant γ (I); il peut être défini le long de γ par un relèvement de γ dans $\tilde{V}_n$).

Soit G une variation de γ telle que $G(0, \alpha) = \gamma(0) = x_0$; G est de la forme :

$$G(t, \alpha) = \mathrm{Exp}_{x_0}(t \times w(\alpha));$$

(5) Résultat classique dans le cas Riemannien : voir par exemple, [4], p. 77.

un champ de Jacobi X_i est donc l'image d'un champ Y_i le long du chemin $t \to tu \left(\text{où } u = \frac{d\gamma}{dt}(0) \right)$ (6) : $X_i = d\,\mathrm{Exp}_{x_0}(Y_i)$,

$$Y_i(t) = tw_i;$$

d'autre part si $(u^\alpha(t))$ représentent les coordonnées d'un champ X_i dans un domaine de coordonnées contenant x_0 :

$$\frac{\nabla u^\alpha}{dt}(0) = \left(\frac{du^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\rho} u^\rho \frac{d\xi^\beta}{dt} \right)_{t=0} = \frac{du^\alpha}{dt}(0)$$

donc :

$$\frac{\nabla}{dt} X_i(0) = d\,\mathrm{Exp}_{x_0}\left(\frac{d}{dt}(tw_i)_{t=0} \right) = d\,\mathrm{Exp}_{x_0}(w_i) = w_i.$$

Utilisant alors les formules (1,12) et (1,15) :

$$\begin{aligned} \tau(X_1(t), \ldots, X_n(t)) &= (\mathrm{Exp}^*_{x_0} \tau_{\gamma(t)})(tw_1, \ldots, tw_n) \\ &= t^n \times \mathcal{B}\left(t \times \frac{d\gamma}{dt}(0) \right) \times \tau_{x_0}(w_1, \ldots, w_n) \\ &= t^n \times \rho(g_t) \times \tau\left(\frac{\nabla X_1}{dt}(0), \ldots, \frac{\nabla X_n(0)}{dt} \right). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

1.4. Critère d'harmonicité.

THÉORÈME 1 ([6], p. 41). — *Pour qu'un espace à métrique quadratique V_n soit harmonique en un point x_0 (resp. simplement harmonique en x_0), il faut et il suffit qu'il existe un voisinage normal de x_0, W_{x_0}, tel que l'invariant de Ruse $\rho(x_0, x)$ soit fonction de $A_{x_0}(x)$ (resp. soit constant) pour $x \in W_{x_0}$; il est alors fonction C^∞ de A_{x_0} (resp. égal à 1). Si V_n est analytique et harmonique en x_0 (resp. simplement harmonique), quel que soit le segment géodésique orienté g, d'origine x_0, l'invariant de Ruse $\rho(g)$ est fonction analytique de l'écart de g (resp. constant et égal à 1).*

Soit V_n un espace harmonique, et pour tout $x_0 \in V_n$, soit W_{x_0} un voisinage normal de x_0 sur lequel est défini un potentiel central φ_{x_0} de centre x_0; on n'est pas assuré que la réunion

(6) L'image d'un champ de vecteurs Y le long d'un chemin par une application différentiable Φ est le champ de vecteur le long de $\Phi \circ c$ défini par la formule $(d\Phi(y))_t = d\Phi(y_t)$.

des ensembles $\{x_0\} \times W_{x_0}$ soit un voisinage de la diagonale dans $V_n \times V_n$; nous poserons donc la définition suivante :

Définition 1.4. — *Un espace à métrique quadratique sera dit régulièrement harmonique s'il existe un entourage normal* W *tel que pour tout point* $x_0 \in V_n$, *on puisse définir un potentiel central de centre* x_0 *sur* $W_{x_0} = \{x \in V_n | (x_0, x) \in V_n\}$.

Un espace analytique harmonique est régulièrement harmonique, tout entourage normal répondant à la question.

Encore, on a

Théorème 2. — *Soit* V_n *un espace régulièrement harmonique; alors il existe un entourage normal sur lequel l'invariant de Ruse* $\rho(x, y)$ *est fonction* C^∞ *de* $A(x, y)$. *De plus, si* V_n *est analytique, quel que soit le segment géodésique orienté g,* $\rho(g)$ *est fonction analytique de l'écart de g.*

2. POINTS CONJUGUÉS SUR UN ESPACE DE RIEMANN HARMONIQUE.

2.1. Définitions, notations.

Soit V_n un espace de Riemann; nous désignerons par $\|u\|$ la longueur d'un vecteur $u \in T(V_n)$; si $c:[a, b] \to V_n$ est un chemin continu, C^1 par morceaux, $L(c)$ désignera la *longueur de* c :

$$(2,1) \qquad L(c) = \int_a^b \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| dt;$$

et si $x \in V_n$ et $y \in V_n$, $r(x, y)$ désignera la *distance de* x *à* y, borne inférieure des longueurs des chemins d'origine x et d'extrémité y; nous poserons d'autre part :

$$(2,2) \qquad r_{x_0}(x) = r(x_0, x).$$

Deux géodésiques γ et γ' seront dites *équivalentes* s'il existe une transformation affine $\mu : t \to \alpha t + \beta$ telle que $\gamma' = \gamma \circ \mu$; contrairement à la définition posée au chapitre 1, un segment géodésique g sera la restriction d'une géodésique γ à un intervalle fermé borné $[a, b]$ quelconque; un deuxième segment géodésique g' sera dit *prolonger* g s'il est équivalent à un segment de la forme $\gamma | [b, c]$ (pour $c > b$) ou $\gamma | [c, a]$ (pour $a > c$); un segment géodésique g sera dit *minimal* si

$$L(g) = r(g(a), g(b)).$$

Soit γ une géodésique :

$\mathcal{E}(\gamma)$ désigne l'espace vectoriel des champs de Jacobi le long de γ : $\dim(\mathcal{E}(\gamma)) = 2n$; d'après (1,20) et les propriétés de symétrie et antisymétrie du tenseur de courbure, si $X \in \mathcal{E}(\gamma)$ et $Y \in \mathcal{E}(\gamma)$, il existe des constantes C et C′ telles que

$$\left(\frac{\nabla X}{dt} \cdot \frac{d\gamma}{dt}\right) = C, \tag{2,3}$$

$$\left(\frac{\nabla X}{dt} \cdot Y\right) - \left(\frac{\nabla Y}{dt} \cdot X\right) = C'; \tag{2,4}$$

$\overline{\mathcal{E}}(\gamma)$ est l'espace des champs de Jacobi tels que la constante C de (2,3) soit nulle, ou encore, tels qu'il existe une constante C″ pour laquelle :

$$\left(X \cdot \frac{d\gamma}{dt}\right) = C''; \tag{2,5}$$

$\dim(\overline{\mathcal{E}}(\gamma)) = 2n - 1$; un tel champ peut être obtenu à l'aide d'une variation $G(t, \alpha)$ de γ telle que, pour tout t et pour tout α,

$$\left\|\frac{\partial G}{\partial t}(t, \alpha)\right\| = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|; \tag{2,6}$$

$\mathcal{E}_{t_0}(\gamma)$ est l'espace des champs de Jacobi qui s'annulent en t_0 ; $\dim(\mathcal{E}_{t_0}(\gamma)) = n$; un tel champ peut être obtenu par une variation $G(t, \alpha)$ vérifiant pour tout α :

$$G(t_0, \alpha) = \gamma(t_0); \tag{2,7}$$

si $X \in \mathcal{E}_{t_0}(\gamma)$ et si $Y \in \mathcal{E}_{t_0}(\gamma)$, alors

$$\left(\frac{\nabla X}{dt} . Y\right) = \left(\frac{\nabla Y}{dt} . X\right); \tag{2,8}$$

$\overline{\mathcal{E}}_{t_0}(\gamma) = \mathcal{E}_{t_0}(\gamma) \cap \overline{\mathcal{E}}(\gamma)$; $\dim(\overline{\mathcal{E}}_{t_0}(\gamma)) = n - 1$; si $X \in \overline{\mathcal{E}}_{t_0}(\gamma)$, la constante C″ est nulle :

$$\left(X . \frac{d\gamma}{dt}\right) = 0; \tag{2,9}$$

$X \in \overline{\mathcal{E}}_{t_0}(\gamma)$ est équivalent à la condition :

$$X \in \mathcal{E}_{t_0}(\gamma), \qquad \exists t \neq t_0, \qquad \left(X(t) . \frac{d\gamma}{dt}(t)\right) = 0; \tag{2,10}$$

enfin X peut être obtenu par une variation de γ vérifiant à la fois (2,6) et (2,7) :

$$\mathcal{E}_{t_0, t_1}(\gamma) = \mathcal{E}_{t_0}(\gamma) \cap \mathcal{E}_{t_1}(\gamma); \tag{2,11}$$

d'après (2,10), l'on a :

$$(2,12) \qquad \mathcal{E}_{t_0, t_1}(\gamma) \subset \overline{\mathcal{E}}_{t_0}(\gamma);$$

nous appellerons d'autre part *indice du couple* (t_0, t_1) le nombre :

$$(2,13) \qquad \begin{gathered} \lambda(\gamma; t_0, t_1) = \dim (\overline{\mathcal{E}}_{t_1, t_0}(\gamma)), \\ \lambda(\gamma; t_0, t_1) \leqslant n - 1; \end{gathered}$$

t_0 et t_1 seront dits *conjugués sur* γ si $\lambda(\gamma; t_0, t_1) \neq 0$, et si $t_0 \neq t_1$; si $\gamma | [a, b]$ est minimal, il n'existe pas dans $]a, b[$ de couple de valeurs conjuguées.

Un espace de Riemann V_n est dit *complet* s'il vérifie une des trois conditions équivalentes suivantes (7).

a) *l'espace est complet en tant qu'espace métrique;*

b) *il existe un point* $x_0 \in V_n$ *tel que toute géodésique issue de* x_0 *soit définie sur* $]-\infty, +\infty[$;

c) *toute géodésique de* V_n *est définie sur* $]-\infty, +\infty[$.

Si V_n est complet, quels que soient x et y dans V_n, il existe un segment géodésique minimal qui les joint; en particulier, l'application Exp est *partout définie* sur $T(V_n)$ et est *surjective* sur $V_n \times V_n$. Dans la suite de ce numéro, V_n sera toujours supposé complet.

Une *demi-géodésique* g sera la restriction d'une géodésique à une demi-droite $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$; supposons par exemple que nous soyons dans le cas $[a, +\infty[$; nous appellerons alors *valeur de coupure* $t_c(g)$ la plus grande valeur de $t \in [a, +\infty]$ telle que $g | [a, t']$ soit minimal pour $t' < t$, et la *distance de coupure* $L_c(g)$ sera la longueur du segment géodésique $g | [a, t_c(g)]$ la *valeur singulière* $t_s(g)$ sera la plus petite valeur $t > a$ conjuguée de a sur g s'il en existe, et $+\infty$ s'il n'en existe pas, et la *distance singulière* sera la longueur du segment $g | [a, t_s(g)]$; l'on a évidemment

$$(2,14) \qquad t_c(g) \leqslant t_s(g);$$

enfin, l'indice $\lambda(g)$ de g sera défini par :

$$(2,15) \qquad \lambda(g) = \lambda(g; a, t_s(g))$$

(7) Voir par exemple [5], pp. 328-340, appendice; le fait que *b*) implique *a*), donc *c*) n'est pas explicitement mentionné, mais découle clairement de la démonstration.

si $t_s(g)$ est fini, et par

$$\lambda(g) = 0$$

si $t_s(g) = +\infty$.

Soit $x_0 \in V_n$; le lieu du point $g(t_s(g))$ pour toutes les demi-géodésiques d'origine x_0 se note R_{x_0} et se dénomme *lieu résiduel de* x_0; $t_s(g)$ est alors le plus petit des t (dans le cas où g est défini sur $[a, +\infty[$) tels que $g(t) \in R_{x_0}$; le complémentaire $\complement R_{x_0}$ est un voisinage normal maximal de x_0; si $x_1 \in \complement R_{x_0}$, il n'existe qu'un segment géodésique minimal (à équivalence près) d'origine x_0 et d'extrémité x_1.

Soit $u \in T_{x_0}(V_n)$; nous désignerons par γ^u la géodésique

$$\gamma^u(t) = \operatorname{Exp}_{x_0}(tu) \tag{2,16}$$

et par γ^u_+ (resp. γ^u_-) la demi-géodésique $\gamma^u|[0, +\infty[$ (resp. $\gamma^u|]-\infty, 0]$; nous poserons

$$\lambda(u) = \lambda(\gamma^u;\ 0, 1). \tag{2,17}$$

soit τ un vecteur tangent en u à $T_{x_0}(V_n)$ et soit $w(\tau)$ l'élément de $T_{x_0}(V_n)$ équipollent à τ; τ définit un champ de vecteurs x^τ, le long du chemin $t \to t.u$, où $x^\tau(t)$ est équipollent à $t.\tau$; nous poserons

$$X^\tau = d\operatorname{Exp}_{x_0} x^\tau; \tag{2,18}$$

$X^\tau \in \mathcal{E}_0(\gamma^u)$, et l'application $\tau \to X^\tau$ de $T^u(T_{x_0}(V_n))$ dans $\mathcal{E}_0(\gamma^u)$ est linéaire et bijective, comme on peut le voir, par exemple, grâce à la formule

$$\frac{\nabla X^\tau}{dt}(0) = w(\tau); \tag{2,19}$$

Θ_u désignera le noyau de $(d\operatorname{Exp}_{x_0})_u$: l'application $\tau \to X^\tau$ applique Θ_u sur $\mathcal{E}_{0,1}(\gamma^u)$; $\overline{T}^1(u)$ désigne le sous-espace de $T_{x_0}(V_n)$ équipollent à Θ_u:

$$\overline{T}^1(u) = \left\{\frac{\nabla X}{dt}(0), \qquad X \in \mathcal{E}_{0,1}(\gamma^u)\right\} \tag{2,20}$$

$T^1(u)$ est le sous-espace vectoriel engendré par u et $\overline{T}^1(u)$; $\overline{T}^2(u)$ (resp. $T^2(u)$) désigne l'orthogonal de $T^1(u)$ (resp. $\overline{T}^1(u)$); on a les relations suivantes :

$$\overline{T}^2(u) = \{X(0), \qquad X \in \overline{\mathcal{E}}_1(\gamma^u)\}, \tag{2,21}$$

$$T^2(u) = \{X(0), \qquad X \in \mathcal{E}_1(\gamma^u)\}. \tag{2,22}$$

En effet si $X \in \mathcal{E}_1(\gamma^u)$ et si $Y \in \mathcal{E}_{0,1}(\gamma^u)$

$$\left(\frac{\nabla y}{dt}(0).X(0)\right) = \left(\frac{\nabla X}{dt}(0).Y(0)\right) = 0;$$

mais de plus,

$$\begin{aligned}\dim(\{X(0),\ X \in \mathcal{E}_1(\gamma^u)\}) &= \dim(\mathcal{E}_1(\gamma^u)) - \dim(\mathcal{E}_{0,1}(\gamma^u)) \\ &= n - \dim(\overline{T}^1(u)) = \dim(T^2(u)),\end{aligned}$$

ce qui démontre (2,22), d'où l'on déduit immédiatement (2,21).

2.2. Cas d'un espace harmonique.

Généralisant la propriété des espaces harmoniques analytiques, nous poserons la définition suivante :

DÉFINITION 2.1. — *L'espace de Riemann* V_n *sera dit* globalement harmonique (*resp.* en x_0) *si, quel que soit le segment géodésique* (*resp. d'origine* x_0) g, *l'invariant de Ruse* $\rho(g)$ *est fonction* C^∞ *de la longueur de* g.

Un espace globalement harmonique est régulièrement harmonique, et un espace analytique harmonique est globalement harmonique. Nous poserons

$$\rho(g) = P^*(L(g)), \tag{2,23}$$

et nous aurons, pour $s \geqslant 0$ assez petit

$$P^*(s) = P\left(\frac{s^2}{2}\right). \tag{2,24}$$

où P est la fonction définie par la formule $\rho(x_0, x) = P(A_{x_0}(x))$ où A est la fonction « demi-écart »; ceci nous montre que l'on peut prolonger P^* en une fonction paire de s, définie sur tout $\mathbf{R}$; si γ est une géodésique d'origine x_0, et si $g_t = \gamma | [0, t]$ $(t \geqslant 0)$, ou $g_t = \gamma | [t, 0]$, $(t \leqslant 0)$:

$$\rho(g_t) = P^*\left(t.\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|\right).$$

PROPOSITION 2.1. — *Soit* V_n *un espace de Riemann complet, globalement harmonique (resp. en* x_0*); il existe* $L \in]0, +\infty]$

et λ *entier* $\geqslant 0$, *tels que, quelle que soit la demi-géodésique* γ_+ *(resp. d'origine* x_0*), alors*

$$L_s(\gamma_+) = L, \qquad \lambda(\gamma_+) = \lambda.$$

Supposons pour simplifier que $\left\| \frac{d\gamma_+}{dt} \right\| = 1$, et que γ_+ est la restriction d'une géodésique γ à $[0, +\infty[$; utilisons la formule (1,21); $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant n éléments indépendants de $\mathcal{E}_0(\gamma)$

$$(2{,}25) \quad \tau(X_1(t), \ldots, X_n(t)) = t^n P^*(t).\tau\left(\frac{\nabla X_1}{dt}(0), \ldots, \frac{\nabla X^n}{dt}(0)\right);$$

le premier membre s'annule si et seulement si $t = 0$, ou t est conjugué de 0; par conséquent, $L_s(\gamma_+)$ *est égal au plus petit zéro positif de la fonction* P^*, *ou à* $+\infty$ *si* P^* *n'a pas de zéro.*

Plaçons-nous maintenant dans le premier de ces deux cas, et soit L le plus petit zéro positif de P^*; soit $\overline{X}_i(t)$ le vecteur déduit de $X_i(t)$ par transport parallèle le long du segment $\gamma|[t, L]$; supposons que nous ayons choisi les X_i de telle sorte que $X_1, \ldots, X_\lambda$ forment une base de $\mathcal{E}_{0,L}(\gamma)$; alors :

$$\overline{X}_i(t) = (t - L)\frac{\nabla X_i}{dt}(L) + \sigma(t - L), \quad (1 \leqslant i \leqslant \lambda)$$
$$\overline{X}_i(t) = X_i(L) + \sigma(1), \qquad (\lambda < i \leqslant n);$$

donc

$$\tau(X_1(t), \ldots X_n(t)) = \tau(\overline{X}_1(t), \ldots, \overline{X}_n(t)) = (t - L)^\lambda \times \tau\left(\frac{\nabla X_1}{dt}(L), \ldots, \frac{\nabla X_\lambda}{dt}(L), X_{\lambda+1}(L), \ldots X_n(L)\right) + \sigma((t - L)^\lambda),$$

ce qui implique

$$P^*(t) = A \times (t - L)^\lambda + 0[(t - L)^\lambda]$$

où l'on a posé :

$$A = \frac{\tau\left(\frac{\nabla X_1}{dt}(L), \ldots, \frac{\nabla X_\lambda(L)}{dt}, X_{\lambda+1}(L), \ldots, X_n(L)\right)}{L^n \times \tau\left(\frac{\nabla X_1}{dt}(0), \ldots, \frac{\nabla X_n}{dt}(0)\right)};$$

pour montrer que λ ne dépend pas de γ, il suffit de montrer que A est fini et $\neq 0$:

$$a)\ \tau\left(\frac{\nabla X_1}{dt}(0), \ldots, \frac{\nabla X_n}{dt}(0)\right) \neq 0,$$ car les $\frac{\nabla X_i}{dt}(0)$ sont linéairement indépendants puisque les X_i le sont, et que les $X_i(0)$ sont nuls;

$$b)\ \tau\left(\frac{\nabla X_1}{dt}(L), \ldots, \frac{\nabla X_\lambda}{dt}(L), X_{\lambda+1}(L), \ldots, X_n(L)\right) \neq 0;$$

en effet, si l'on pose $u = -L \cdot \frac{d\gamma}{dt}(L)$, les $\frac{\nabla X_i}{dt}(L)$, pour $0 \leqslant i \leqslant \lambda$, forment une base de $\overline{T}^1(u)$ (formule (1,20)); d'autre part, les $X_j(L)$, $\lambda + 1 \leqslant j \leqslant n$, sont dans $T^2(u)$; ils sont linéairement indépendants puisque les X_j sont linéairement indépendants modulo $\mathcal{E}_L(\gamma)$; on a donc une base de $T_{\gamma(L)}(V_n)$, ce qui prouve notre assertion.

2.3. Les espaces harmoniques non compacts.

Théorème 2.1. — *Soit* V_n *un espace de Riemann complet, simplement connexe et globalement harmonique (resp. en* x_0*); si* V_n *n'est pas compact, alors l'application* Exp *(resp.* Exp_{x_0}*) est un difféomorphisme de* $T(V_n)$ *sur* $V_n \times V_n$ *(resp. de* $T_{x_0}(V_n)$ *sur* V_n*).*

En particulier, V_n est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$, et par deux points distincts ne passe qu'une géodésique (à une équivalence près).

Soit V_n vérifiant les hypothèses du théorème 2.1, et soit L le nombre défini dans la proposition 2.1; si $L < +\infty$, V_n est borné puisque, sur toute demi-géodésique γ_+ d'origine x_0, $L_c(\gamma_+) \leqslant L$, et que tout point de V_n est joint à x_0 par un segment minimal; donc si $L < +\infty$, V_n est compact. Si $L = +\infty$, l'application Exp_{x_0} est de rang n en tout point; le théorème est donc une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 2.2 (E. Cartan). — *Soit* V_n *un espace de Riemann complet; si* Exp_{x_0} *est une application différentiable partout régulière, alors c'est un revêtement.*

Munissons $T_{x_0}(V_n)$ de la métrique induite par Exp_{x_0}; pour la structure d'espace de Riemann ainsi définie, les droites issues de l'origine : $t \to t.u$, sont des géodésiques; comme $t.u$ est défini pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'espace est complet; on est donc conduit à démontrer le lemme :

LEMME 2.1. — *Soit* $\tilde{V}_n$, V_n *deux espaces de Riemann non vides et soit* $\mu : \tilde{V}_n \to V_n$, *une application différentiable telle que pour tout* $y \in \tilde{V}_n$, $(d\mu)_y$ *soit une isométrie de* $T_y(\tilde{V}_n)$ *sur* $T_{\mu y}(V_n)$; *alors si* $\tilde{V}_n$ *est complet,* $(\tilde{V}_n, \mu)$ *est un revêtement de* V_n.

Soit $\tilde{\gamma}$ une géodésique de $\tilde{V}_n$: $\mu \circ \tilde{\gamma}$ est une géodésique de V_n et elle est définie quel que soit $t \in \mathbf{R}$, ce qui prouve que V_n est complet; inversement soit $\tilde{x}$ un point de $\tilde{V}_n$ et soit γ une géodésique passant par $\mu\tilde{x}$, par exemple, $\gamma(0) = \mu\tilde{x}$; on peut « relever » γ en une géodésique $\tilde{\gamma}$ telle que

$$(2,26) \qquad \mu \circ \tilde{\gamma} = \gamma, \qquad \tilde{\gamma}(0) = \tilde{x},$$

puisque V_n est complet : il suffit de prendre pour $\tilde{\gamma}$ la géodésique telle que

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}(0) = (d\mu_{\tilde{x}})^{-1}\left(\frac{d\gamma}{dt}(0)\right);$$

en particulier, comme tout point $y \in V_n$ peut être joint par une géodésique à $\mu\tilde{x}$, $\mu^{-1}(y)$ n'est pas vide, donc μ est surjective.

Soit $x_0 \in V_n$, et soit W_{x_0} un voisinage normal de x_0, image bijective de $\mathcal{W}_{x_0} \subset T_{x_0}(V_n)$; nous allons construire un difféomorphisme φ de $\mu^{-1}(x_0) X W_{x_0}$ sur $\mu^{-1}(W_{x_0})$ tel que, $\forall \tilde{x}_0 \in \mu^{-1}(x_0)$, $\forall y \in W_{x_0}$

$$(2,27) \qquad \mu(\varphi(\tilde{x}_0, y)) = y,$$

ce qui démontrera le lemme; si Exp et $\widetilde{\text{Exp}}$ se rapportent respectivement à V_n et $\tilde{V}_n$, et si $\text{Exp}_{x_0}^{-1}$ est l'application de W_{x_0} sur w_{x_0} inverse de Exp_{x_0}, nous définirons

$$\varphi(\tilde{x}_0, y) = \widetilde{\text{Exp}}_{\tilde{x}_0} \circ (d\mu)_{\tilde{x}_0}^{-1} \circ \text{Exp}_{x_0}^{-1}(y);$$

φ est différentiable, et vérifie (2,27) à cause de la relation

$$\mu \circ \widetilde{\text{Exp}} = \text{Exp} \circ d\mu;$$

construisons l'application inverse ψ; si $\tilde{y} \in \mu^{-1}(W_{x_0})$,

$$\psi(\tilde{y}) = (\tilde{x}_0, y)$$

avec $y = \mu(\tilde{y})$ et $\tilde{x}_0$ défini ainsi : relevons la géodésique $\mathrm{Exp}_{x_0}(t.\mathrm{Exp}_{x_0}^{-1}(y))$ en une géodésique $\tilde{\gamma}$ telle que $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{y}$; nous posons alors $\tilde{x}_0 = \tilde{\gamma}(0)$; il est clair que ψ est l'application inverse de φ, et comme $\tilde{x}_0$ est fonction continue de $\tilde{y}$, ψ est différentiable.

C.Q.F.D.

3. LES ESPACES DE TYPE $\mathcal{F}(\lambda, L)$.

3.1. La fibration $\mathcal{C}$.

DÉFINITION 3.1. — *Un espace de Riemann* V_n *est dit de type* $\mathcal{F}(\lambda, L)$, *pour* $\lambda \in \mathbf{Z}$, $\lambda > 0$, *et* $L \in]0, +\infty[$, *si* V_n *est complet et si pour toute demi-géodésique* g *de* V_n, *on a*

$$L_s(g) = L, \qquad \lambda(g) = \lambda.$$

La proposition 2.1, jointe au théorème 1.1 exprime que :

Si un espace de Riemann complet, globalement harmonique admet un revêtement universel non homéomorphe à un espace numérique, alors il est de type $\mathcal{F}(\lambda, L)$.

En remplaçant la métrique par une métrique homothétique, nous pourrons toujours supposer que $L = 1$; sauf mention explicite du contraire, nous ferons toujours cette convention, et dirons alors que V_n est de type $\mathcal{F}(\lambda)$.

Soit $\mathcal{S}_{x_0}$ la sphère unité de $T_{x_0}(V_n)$; reprenons les notations du numéro 2.1 : si Θ_u est le noyau de l'application $(d\,\mathrm{Exp}_{x_0})_u$, pour $u \in \mathcal{S}_{x_0}$, Θ_u est tangent à $\mathcal{S}_{x_0}$: en effet, il est orthogonal à u, car il en est de même de $\overline{T}^1(u)$, puisque $\mathcal{E}_{0,1}(\gamma^u)$ est contenu dans $\overline{\mathcal{E}}_0(\gamma^u)$. Il en résulte que la restriction de Exp_{x_0} à $\mathcal{S}_{x_0}$ est de rang constant, égal à $n - \lambda - 1$; le champ de plans tangents ainsi défini sur $\mathcal{S}_{x_0}$

$$\Theta_{x_0} : u \to \Theta_u,$$

est alors un *système différentiel* C^∞, *complètement intégrable* [8], *et régulier* au sens de Reeb; l'espace des feuilles (c'est-à-dire des variétés intégrales connexes maximales), noté $\mathcal{S}_{x_0}/\Theta_{x_0}$, *est muni canoniquement d'une structure de variété différentiable telle que la projection canonique*

$$\Pi_{x_0} : \mathcal{S}_{x_0} \to \mathcal{S}_{x_0}/\Theta_{x_0}$$

[8] Distribution C^∞ involutive, suivant la terminologie de Chevalley.

soit différentiable et de rang constant $n - \lambda - 1$; de plus, $\mathrm{Exp}_{x_0}|\mathcal{S}_{x_0}$ se factorise en

$$\mathrm{Exp}_{x_0}|\mathcal{S}_{x_0} = \mathrm{E}_{x_0} \circ \Pi_{\Theta_{x_0}},$$

où E_{x_0} est une *application différentiable et régulière* de $\mathcal{S}_{x_0}/\Theta_{x_0}$ dans V_n; *a priori*, $\mathcal{S}_{x_0}/\Theta_{x_0}$ n'est pas nécessairement séparé, mais il en est ainsi car $\mathcal{S}_{x_0}$ est compact.

Désignons par $\mathcal{T}_u$, pour $u \in \mathcal{S}_{x_0}$, la feuille passant par u; c'est la composante connexe par arcs de u dans $\mathrm{Exp}_{x_0}^{-1}$ $(\mathrm{Exp}_{\tau_0}(u)) \cap \mathcal{S}_{x_0}$.

Proposition 3.1. — *Pour tout* $u \in \mathcal{S}_{x_0}$, $\mathcal{T}_u$ *est la section de* $\mathcal{S}_{x_0}$ *par le plan* $\mathrm{T}^1(u)$:

$$\mathcal{T}_u = \mathcal{S}_{x_0} \cap \mathrm{T}^1(u). \tag{3,1}$$

Corollaire. — $\mathcal{S}_{x_0}$ *est un espace fibré différentiable de base* $\mathcal{S}_{x_0}/\Theta_{x_0}$, *de projection* $\Pi_{\Theta_{x_0}}$, *de fibre type la sphère* S_λ, *et de groupe structural* $0(\lambda + 1)$ *opérant de manière naturelle sur* S_λ.

Démontrons tout d'abord le corollaire : l'application

$$u \to \mathrm{T}^1(u)$$

passant au quotient définit un plongement de $\mathcal{S}_{x_0}/\Theta_{x_0}$ dans la grassmannienne $\mathrm{G}_{\lambda+1,n}$; soit H le fibré principal image réciproque par ce plongement de la variété de Stiefel considérée comme fibrée au-dessus de $\mathrm{G}_{\lambda+1,n}$; H est l'espace des repères des plans $\mathrm{T}^1(u)$ (pour tout $u \in \mathcal{S}_{x_0}$), d'où une application différentiable, et *de rang constant*, de $\mathrm{H} \times \mathcal{S}_{\lambda+1}$ *sur* $\mathcal{S}_{x_0}$: à un repère z de $\mathrm{T}^1(u)$ et à $(x^1, \ldots, x^{\lambda+1})$ $(x^i \in \mathbf{R}, \sum_{i=1}^{\lambda+1} (x^i)^2 = 1)$, on fait correspondre $u' \in \mathrm{T}^1(u)$ dont les composantes par rapport à z sont $x^1, \ldots, x^{\lambda+1}$; on identifie ainsi $\mathcal{S}_{x_0}$ au fibré $(\mathrm{H}, \mathrm{S}_{\lambda+1})$ associé à H.

Passons à la démonstration de la proposition 3.1; soit $u \in \mathcal{S}_{x_0}$; reprenant la notation utilisée pour la démonstration de la proposition 1.4 du chapitre 1, posons

$$\sigma u = -\frac{d\gamma^u}{dt}(1); \tag{3,2}$$

Lemme 3.1. — *Le système différentiel* Θ *défini sur* $\mathcal{S}(\mathrm{V}_n) = \bigcup_{x_0 \in \mathrm{V}_n} \mathcal{S}_{x_0}$ *par les* Θ_{x_0} *est stable par* σ.

En effet, soit $x_0 = p(u)$ et $x_1 = p(\sigma u)$ (où p désigne la projection de $T(V_n)$ sur V_n); si $\tau \in \Theta_u$, alors $X^\tau \in \mathcal{E}_{0,1}(\nu^u)$ et

$$dp\,(d\sigma(\tau)) = d\,\mathrm{Exp}_{x_0}(\tau) = X^\tau(1) = 0;$$

mais ν^u et $\nu^{\sigma u}$ se correspondent par

$$\nu^{\sigma u}(t) = \nu^u(1-t),$$

et il est clair, en raisonnant sur une variation de ν^u, que si l'on identifie $\mathcal{E}(\nu^u)$ à $\mathcal{E}(\nu^{\sigma u})$ par la correspondance $t \to 1-t$, alors

$$X^\tau = X^{d\sigma(\tau)};$$

mais alors $X^{d\sigma(\tau)} \in \mathcal{E}_{0,1}(\nu^{\sigma u})$, autrement dit $d\sigma(\tau) = \Theta_{\sigma u}$, ce qui démontre le lemme.

Il résulte du lemme 3.1 *que si* $\mathcal{C}_u = \mathcal{C}_{u'}$, *alors* $\mathcal{C}_{\sigma u} = \mathcal{C}_{\sigma u'}$.

Soit $u \in T_{x_0}(V_n)$ et soit $\overline{u} = \Pi_{\Theta x_0}(u_0)$; il existe un voisinage ouvert $\overline{\mathfrak{U}}$ de $\overline{u}$ qui est régulièrement plongé dans V_n par Θ_{x_0}; si $U = \Pi_{x_0}^{-1}(\overline{u})$, u est donc un voisinage saturé de la fibre $\mathcal{C}_{u_0}$, tel que $U = \mathrm{Exp}_{x_0}(u)$ soit une sous-variété de V_n, régulièrement plongée et de dimension $n-1-\lambda$.

Lemme 3.2. — *Si* $u \in \mathfrak{U}$, *alors l'espace tangent à* U *en* $x = \mathrm{Exp}_{x_0}(u)$ *est* $\overline{T}^2(\sigma u)$.

En effet, d'après la formule (2,21)

$$\overline{T}^2(\sigma u) = \{X(1) \mid X \in \overline{\mathcal{E}}_0(\nu^u)\};$$

or si $X \in \overline{\mathcal{E}}_0(\nu^u)$, il existe une variation $G(t, \alpha)$ de ν^u telle que

$$G(0, \alpha) = x_0, \qquad \left\| \frac{\partial G}{\partial t}(t, \alpha) \right\| = 1;$$

d'autre part, pour α assez petit, $\dfrac{\partial G}{\partial t}(0, \alpha) \in \mathfrak{U}$, donc $G(1, \alpha) \in U$, et par conséquent $X(1) = \dfrac{\partial G}{\partial \alpha}(1, 0)$ est tangent à U; ainsi $\overline{T}^2(\sigma u)$ est contenu dans l'espace tangent à U, et comme

$$\dim(\overline{T}^2(\sigma u)) = n - (\lambda + 1) = \dim(U),$$

le lemme 3.2 est démontré.

Terminons la démonstration de la proposition 3.1: si $u \in T_{x_0}(V_n)$, $u' \in T_{x_0}(V_n)$, et $\mathcal{C}_u = \mathcal{C}_{u'}$, alors nous pouvons choisir $\mathcal{U}$ comme plus haut, contenant u et u', et puisque

$$\operatorname{Exp}_{x_0}(u) = \operatorname{Exp}_{x_0}(u')$$

alors, d'après le lemme 3.2

$$\overline{\mathrm{T}}^2(\sigma u) = \overline{\mathrm{T}}^2(\sigma u'),$$

donc :

$$\mathrm{T}^1(\sigma u) = \mathrm{T}^1(\sigma u'); \tag{3,3}$$

mais d'autre part, $\mathcal{C}_{\sigma u} = \mathcal{C}_{\sigma u'}$, et en appliquant (3,3) à σu et $\sigma u'$ au lieu de u et u', il vient

$$\mathrm{T}^1(u) = \mathrm{T}^1(u'). \tag{3,4}$$

Ceci dit, puisque $\Theta_u \subset \mathrm{T}^1(u)$, il résulte de là que $\mathcal{C}_u \subset \mathrm{T}^1(u)$, et comme $\mathcal{C}_u$ est une sous-variété de même dimension que $\mathcal{S}_{x_0} \cap \mathrm{T}^1(u)$, c'est un ouvert dans $\mathcal{S}_{x_0} \cap \mathrm{T}^1(u)$; mais $\mathcal{C}_u$ est fermé dans $\mathcal{S}_{x_0}$, puisque $\mathcal{S}_{x_0}/\Theta$ est séparé, et comme $\mathcal{S}_{x_0} \cap \mathrm{T}^1(u)$ est connexe, puisque $\dim(\mathrm{T}^1(u)) > 1$, il en résulte bien que

$$\mathcal{C}_u = \mathcal{S}_{x_0} \cap \mathrm{T}^1(u).$$

3.2. L'espace topologique $\mathcal{V}(\mathcal{C})$.

Soit $\mathcal{B}$ une boule fermée de dimension n, $\mathcal{S}$ le bord de $\mathcal{B}$, et $\mathcal{C}$ une fibration de $\mathcal{S}$, de fibre type la sphère S_λ et de groupe structural $0(\lambda + 1)$ $(0 \leqslant \lambda < n)$ (9); soit $\mathcal{R}$ la base de cette structure fibrée. Introduisons sur $\mathcal{B}$ la relation d'équivalence $\mathcal{C}^*$ ainsi définie :

a) si $u \in \mathcal{S}$, alors

$$u' \equiv u \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{C}^*) \Longleftrightarrow u' \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad u' \equiv u \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{C}); \tag{3,5, a}$$

b) si $u \notin \mathcal{S}$,

$$u' \equiv u \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{C}^*) \Longleftrightarrow u' = u. \tag{3,5, b}$$

L'espace topologique quotient $\mathcal{B}/\mathcal{C}^*$ sera noté $\mathcal{V}(\mathcal{C})$, et $\pi_{\mathcal{C}}$ désignera la projection canonique.

(9) Nous n'excluons ni le cas $\lambda = n - 1$, où la fibration $\mathcal{C}$ consiste en une seule fibre, ni le cas $\lambda = 0$, où S_0 est l'espace topologique formé de deux points, et la fibration $\mathcal{C}$ est définie par un automorphisme involutif sans points fixes de $\mathcal{S}$.

La relation d'équivalence $\mathcal{T}^*$ est *fermée:* car il en est ainsi de $\mathcal{T}$; par conséquent :

$\mathcal{V}(\mathcal{T})$ *est séparé, donc compact*;
$\pi_{\mathcal{T}}$ induit un homéomorphisme de $\mathcal{R}$ sur $\pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{S})$.

LEMME 3.3. — $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ *est une variété topologique de dimension n.*

Il suffit de démontrer que tout point $x \in \pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{S})$ possède un voisinage homéomorphe à $\mathbf{R}^n$; or soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathcal{S}$ saturé, contenant $\pi_{\mathcal{T}}^{-1}(x)$, tel que $\pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{U}) = \overline{\mathcal{U}}$ soit homéomorphe à $\mathbf{R}^{n-1-\lambda}$ et que la structure fibrée induite sur $\mathcal{U}$ soit triviale; soit ε un nombre positif inférieur à 1 et soit

$$(3,6) \qquad \mathcal{W} = \{ tu \in \mathcal{B} | u \in \mathcal{U}, \quad t \in]1-\epsilon\,, 1] \} ;$$

$\overline{\mathcal{W}} = \pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{W})$ est ouvert (car $\mathcal{W}$ est un ouvert saturé de $\mathcal{B}$) et contient x.

D'autre part, en posant $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathcal{W}$ est homéomorphe à

$$(3,7) \qquad \mathbf{R}_+ \times \mathcal{U} \approx \mathbf{R}^{n-\lambda-1} \times \mathbf{R}_+ \times \mathrm{S}_\lambda,$$

et la relation d'équivalence induite consiste en ceci : sur chaque $\{x\} \times \mathbf{R}_+ \times \mathrm{S}_\lambda$, (pour tout $x \in \mathbf{R}^{n-\lambda-1}$), on contracte en un point le « bord extérieur » $\{x\} \times \{0\} \times \mathrm{S}_\lambda$; ainsi W est homéomorphe à $\mathbf{R}^{n-\lambda-1} \times \mathrm{C}_\lambda$, où C_λ est le cône [10] de directrice S_λ; mais C_λ est homéomorphe à $\mathbf{R}^{\lambda+1}$, ce qui démontre le lemme.

Remarque. — Soit H l'espace fibré principal associé à la fibration $\mathcal{T}$; soit $(\mathrm{H}, \mathring{\mathrm{B}}_{\lambda+1})$ l'espace fibré associé dont la fibre type est la boule ouverte $\mathring{\mathrm{B}}_{\lambda+1}$, où $\mathrm{O}(\lambda+1)$ opère de façon naturelle; $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ *est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff de* $(\mathrm{H}, \mathring{\mathrm{B}}_{\lambda+1})$. En effet le complémentaire de l'origine dans $\mathcal{B}$ étant homéomorphe à $\mathcal{S} \times]0, 1]$, on peut prolonger $\mathcal{T}$ en une structure fibrée $\overline{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{B} - \{0\}$ homéomorphe à la structure fibrée $(\mathrm{H}, \mathrm{S}_\lambda \times]0, 1])$ (où $\mathrm{O}(\lambda+1)$ opère trivialement sur $]0, 1]$); sur chaque fibre $\pi_{\mathcal{T}}$ contracte le « bord extérieur » $\mathrm{S}_\lambda \times \{1\}$ en un point : on en déduit immédiatement un homéomorphisme $\psi_{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{V}(\mathcal{T}) - \{\pi_{\mathcal{T}}(0)\}$ avec l'espace fibré associé

[10] Le mot « cône » n'est pas pris ici exactement dans le sens classique en topologie; nous faisons jouer ici à l'intervalle semi-ouvert $[0, +\infty[$ le rôle que l'on fait jouer classiquement au segment $[0, 1]$.

à H, dont la fibre est le cône C_λ qui est bien homéomorphe à $\dot{B}_{\lambda+1}$, par un homéomorphisme compatible avec les opérations de $O(\lambda+1)$.

Explicitons l'homéomorphisme $\psi_{\mathfrak{T}}$: pour ceci, plongeons $(H, \dot{B}_{\lambda+1})$ dans le fibré en boules fermées $(H, B_{\lambda+1})$, dont le bord (H, S_λ) sera identifié à $\mathcal{S}$; on définit $\psi'_{\mathfrak{T}} : \mathcal{B} - \{0\} \to (H, \dot{B}_{\lambda+1})$ par (3,7) $\forall u \in \mathcal{S}$, $t \in]0, 1]$, $\psi'_{\mathfrak{T}}(tu) = (1-t)u$ où dans le deuxième membre, u est considéré comme un élément de (H, S_λ) ; $\psi_{\mathfrak{T}}$ est alors défini par le diagramme commutatif :

$$\text{(3,8)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{B} - \{0\} & \xrightarrow{\psi'_{\mathfrak{T}}} & (H, \dot{B}_{\lambda+1}) \\ {\scriptstyle \pi_{\mathfrak{T}}}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle \psi_{\mathfrak{T}}} & \\ \mathcal{V}(\mathfrak{T}) - \{\pi_{\mathfrak{T}}(0)\} & & \end{array}$$

Proposition 3.2. — *Il existe sur $\mathcal{V}(\mathfrak{T})$ une structure de variété différentiable, et une seulement, telle que $\pi_{\mathfrak{T}}|\mathcal{B} - \mathcal{S}$ et $\psi_{\mathfrak{T}}$ soient des applications différentiables de rang n ; de plus $\pi_{\mathfrak{T}}$ est alors différentiable sur tout $\mathcal{B}$, et de rang $n-\lambda$ sur $\mathcal{S}$.* $\pi_{\mathfrak{T}}|\mathcal{B} - \mathcal{S}$ et $\psi_{\mathfrak{T}}^{-1}$ étant des homéomorphismes définissent par transport de structure des structures différentiables sur $\mathcal{V}(\mathfrak{T}) - \mathcal{R}$ et $\mathcal{V}(\mathfrak{T}) - \{\pi_{\mathfrak{T}}(0)\}$; ces deux structures se raccordent sur $\mathcal{V}(\mathfrak{T}) - (\mathcal{R} \cup \{\pi_{\mathfrak{T}}(0)\})$, car $\psi'_{\mathfrak{T}} = \psi_{\mathfrak{T}} \circ \pi_{\mathfrak{T}}$ est un difféomorphisme sur $\mathcal{B} - (\mathcal{S} \cup \{0\})$; de plus, $\psi'_{\mathfrak{T}}$ est différentiable et de rang $n-\lambda$ le long de $\mathcal{S}$, le noyau de $(d\psi'_{\mathfrak{T}})_u$ étant Θ_u : choisissant en effet un système de coordonnées, en un point de $\mathcal{S}$, adapté à la fibration $\mathfrak{T}$ (c'est-à-dire tel que les fibres soient définies par les équations

$$x^i = a^i \quad i = \lambda + 1, \ldots, n-1$$

on en déduit sur $\mathcal{B}$ un système de coordonnées en prenant $x^0(tu) = 1 - t$, et sur $(H, B_{\lambda+1})$ un système de coordonnées « semi-polaires », ce qui nous ramène à étudier la fonction $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$:

$$(x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}) \\ \to \left(x^0 . \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{\lambda} (x^i)^2}, x^0 . x^1, \ldots, x^0 . x^\lambda, x^{\lambda+1}, \ldots x^{n-1}\right).$$

Désormais, la variété $\mathcal{V}(\mathfrak{T})$ sera toujours supposée munie de la structure différentiable définie par la proposition 3.2; la correspondance $\mathcal{T} \to \mathcal{V}(\mathcal{T})$ est *canonique*, autrement dit c'est un foncteur de la catégorie des fibrations différentiables de sphère par sphères, les morphismes étant les isomorphismes de fibres à groupe structural, dans la catégorie des variétés différentiables, les morphismes étant les difféomorphismes.

On peut encore définir la variété différentiable $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ de la façon suivante : on « recolle » les deux variétés à bord $\mathcal{B}$ et $(H, B_{\lambda+1})$ « le long de leurs bords »; ce procédé ne définit pas la structure différentiable de façon unique, mais on lève l'indétermination en imposant que les rayons de la boule se prolongent différentiablement selon les rayons des fibres de $(H, B_{\lambda+1})$.

Remarquons enfin que l'application canonique de la base $\mathcal{R}$ de la structure fibrée dans $\mathcal{V}(\mathcal{T})$ est un *plongement* (application différentiable régulière et injective).

3.3. Le revêtement universel d'un espace $\mathcal{F}(\lambda)$.

Soit V_n un espace de Riemann de type $\mathcal{F}(\lambda)$, x_0 un point de V_n, et soit $\mathcal{T}_{x_0}$ la fibration définie au numéro 3.1 sur la sphère unité $\mathcal{S}_{x_0}$; désignons par $\mathcal{B}_{x_0}$ la boule unité de $T_{x_0}(V_n)$; on peut définir une application E_{x_0} de $\mathcal{V}(\mathcal{T}_{x_0})$ dans V_n de façon que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_{x_0} \arrow[r, "\pi_{\mathcal{T}}"] \arrow[d, "\mathrm{Exp}_{x_0}"'] & \mathcal{V}_n(\mathcal{T}_{x_0}) \arrow[dl, "E_{x0}"] \\ V_n & \end{tikzcd} \tag{3,9}$$

PROPOSITION 3.3. — *Soit* V_n *un espace de Riemann de type* $\mathcal{F}(\lambda)$, *et soit* $x_0 \in V_n$; *le couple* $(\mathcal{V}_n(\mathcal{T}_{x_0}), E_{x_0})$ *est le revêtement universel* (11) *de* V_n.

E_{x_0} est évidemment continue, d'après la définition d'un espace topologique quotient; E_{x_0} est surjective, car la restriction $a\mathcal{B}_{x_0}$ de Exp_{x_0} est surjective : en effet tout point peut être joint à x_0 par un segment géodésique minimal, et un tel segment

(11) Au sens différentiable.

est de longueur au plus égale à un puisque

$$L_c(\gamma^+) \leqslant L_s(\gamma^+) = 1.$$

Supposons démontré que E_{x_0} *est un difféomorphisme local*; alors on en déduit que c'est un revêtement différentiable, d'après la propriété classique suivante :

Soient X *et* Y *deux espaces topologiques séparés*; *supposons* X *non vide, localement compact, connexe et localement connexe*; *soit* φ : $X \to Y$ *une application surjective, propre, qui est un homéomorphisme local*; *alors* (X, φ) *est un revêtement de* Y.

D'autre part, pour $\lambda > 0 \mathcal{V}(\mathcal{C})$ est simplement connexe; en effet, $\mathcal{R} = \pi_{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ est une sous-variété de $\mathcal{V}(\mathcal{C})$ de dimension inférieure à $n - 1$; donc tout lacet de $\mathcal{V}(\mathcal{C})$ est homotope à un lacet ne rencontrant pas $\mathcal{R}$; mais le complémentaire de $\mathcal{R}$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$, donc tout lacet est homotope à zéro.

Ainsi, la démonstration de la proposition 3.3 se ramène à celle du lemme suivant :

Lemme 3.4. — E_{x_0} *est un difféomorphisme local.*

Il faut démontrer que pour tout point $\tilde{u} \in \mathcal{V}(\mathcal{C}_{x_0})$, il existe un voisinage de $\tilde{u}$ appliqué difféomorphiquement sur un ouvert de V_n par E_{x_0}; soit π_{x_0} la projection canonique de $\mathcal{B}_{x_0}$ sur $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{x_0})$ et, soit $\mathcal{R}_{x_0} = \pi_{x_0}(\mathcal{S}_{x_0})$; l'assertion est évidente si $\tilde{u} \notin \mathcal{R}_{x_0}$.

Soit donc $\tilde{u} \in R_{x_0}$; on peut choisir un voisinage ouvert de $\tilde{u}$ dans $\mathcal{R}_{x_0}$, soit $\tilde{U}$, qui soit appliqué difféomorphiquement par E_{x_0} sur une sous-variété différentiable U, régulièrement plongée dans V_n (voir la démonstration de la proposition 3.1); si $\mathcal{U} = \pi_{x_0}^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$, on définira pour $0 < \varepsilon < 1$, comme dans la formule (3,6).

$$\mathcal{W} = \{tu \in \mathcal{B}_{x_0} | u \in \mathcal{U}, t \in]1 - \varepsilon, 1]\},$$

et $\tilde{\mathcal{W}} = \{\pi_{x_0}(\mathcal{W})$; $\tilde{\mathcal{W}}$ est un voisinage ouvert de $\tilde{u}$.

Désignons par N(U) le fibré normal de U, espace fibré des vecteurs normaux à U, et par $N_1(U)$ le sous-fibré des vecteurs de N(U) de longueur 1; d'après le lemme 3.2, σ applique $\mathcal{U}$ dans $N_1(U)$; d'après le lemme 3.1, $\sigma(\mathcal{C}_u) = \mathcal{C}_{\sigma u}$, ce qui montre que $\sigma(\mathcal{U}) = N_1(U)$, et comme σ est un difféomorphisme, $\sigma|\mathcal{U}$ est un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $N_1(U)$; en considérant $\mathcal{S}$

comme plongé dans $(H, B_{\lambda+1})$, on peut prolonger $\sigma|\mathfrak{U}$ en un isomorphisme de fibré à fibre vectorielle σ', du fibré induit par $(H, \mathbf{R}^{\lambda+1})$ au-dessus de $\tilde{\mathfrak{U}}$ dans $N(U)$; on en déduit une application différentiable, de $\tilde{\mathfrak{W}}$ dans $N(U)$.

$$(3,10) \qquad \tilde{\sigma} = \sigma' \circ \psi_{\mathfrak{T}x_0},$$

(où $\psi_{\mathfrak{T}x_0}$ est défini en (3,8)) qui est régulière et injective puisque les deux facteurs le sont; de plus $\tilde{\sigma}(\tilde{\mathfrak{W}})$ est un voisinage de la section nulle dans $N(\mathfrak{V})$.

D'après (3,7),

$$(3,11) \qquad \forall u \in \mathfrak{U}, \quad \forall t \in]1-\varepsilon, 1], \quad \sigma' \circ \psi'_{\mathfrak{T}x_0}(tu) = (1-t).\sigma u;$$

soit Exp_U l'application $N(\mathfrak{V}) \to V_n$:

$$(3,12) \qquad \forall x \in U, \quad \forall \nu \in N_x(\mathfrak{V}), \qquad \mathrm{Exp}_U(\nu) = \mathrm{Exp}_x(\nu),$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}_v \circ \sigma' \circ \psi'_{\mathfrak{T}x_0}(tu) &= \mathrm{Exp}\,((1-t)\sigma u) = \gamma^{\sigma u}(1-t) \\ &= \gamma^u(t) = \mathrm{Exp}_{x_0}(tu), \end{aligned}$$

et d'après (3,8) et (3,10), on en déduit

$$(3,13) \qquad E_{x_0}|\mathfrak{W} = \mathrm{Exp}_U \circ \tilde{\sigma}.$$

Ceci dit, si ε a été choisi assez petit, $\tilde{\sigma}(\tilde{\omega})$ est un voisinage assez petit de la section nulle, et Exp_U est régulière et injective sur $\tilde{\sigma}(\tilde{\omega})$; il en est alors de même de $E_{x_0}|\mathfrak{W}$ ce qui démontre le lemme.

Remarque. — Le fait que σ soit une bijection de $\mathfrak{U}$ sur $N(\mathfrak{V})$ exprime que *la famille des géodésiques normales à $\mathfrak{V}$ est identique à la famille des géodésiques tangentes en x_0 à $\mathfrak{U}$.*

4. LES ESPACES DE TYPE $\mathcal{A}(\lambda, L)$.

4.1. Définitions et Propriétés.

Soit V_n un espace de Riemann, soit L un nombre réel positif, et λ un entier $(0 \leqslant \lambda < n)$; soit x_0 un point de V_n, $\mathcal{S}_{x_0}(L)$ (resp. $\mathcal{B}_{x_0}(L)$) la sphère (resp. la boule fermée) de rayon L dans $T_{x_0}(V_n)$;

Définition 4.1. — V_n *est dit de type* $\mathcal{A}(\lambda, L)$ *en un point* x_0 *si les conditions suivantes sont réalisées :*

a) Exp_{x_0} *est défini sur tout* $\mathcal{B}_{x_0}(L)$ *et*

$$\mathrm{Exp}_{x_0}(\mathcal{B}_{x_0}(L)) = V_n;$$

b) *la restriction de* Exp_{x_0} *à* $\mathcal{B}_{x_0}(L) - \mathcal{S}_{x_0}(L)$ *est un difféomorphisme*;

c) Exp_{x_0} *est de rang* $n - \lambda$ *en tout point de* $\mathcal{S}_{x_0}(L)$.

Définition 4.2. — V_n *est dit de type* $\mathcal{A}(\lambda, L)$ *s'il est de type* $\mathcal{A}(\lambda, L)$ *en tout point* $x_0 \in V_n$.

Lorsque nous supposerons $L = 1$, nous dirons que l'espace est de type $\mathcal{A}(\lambda)$.

Un espace de type $\mathcal{A}(\lambda, L)$ est *compact* (en tant qu'image de $\mathcal{B}_{x_0}(L)$) donc *complet*. Si $\lambda > 0$, il résulte des conditions (*b*) et (*c*) que, pour toute demi-géodésique γ^+ issue de x_0,

$$L_s(\gamma^+) = L, \qquad \lambda(\gamma^+) = \lambda;$$

ainsi l'espace est de type $\mathcal{F}(\lambda, L)$, et de plus, il est simplement connexe, car $R_{x_0} = \mathrm{Exp}_{x_0}(\mathcal{S}_{x_0}(L))$ est de dimension $n - 1 - \lambda$ et son complémentaire est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$; compte tenu de la proposition 3.3 :

Pour qu'un espace de Riemann soit de type $\mathcal{A}(\lambda, L)$ *pour* $\lambda > 0$, *il faut et il suffit qu'il soit de type* $\mathcal{F}(\lambda, L)$ *et qu'il soit simplement connexe*; *tout espace de type* $\mathcal{F}(\lambda, L)$ *admet pour revêtement universel un espace de type* $\mathcal{A}(\lambda, L)$.

De façon générale, les conditions *a*) et *b*) de la définition 4.1 expriment que R_{x_0} *est le lieu résiduel de* x_0. En effet, d'après *a*) un segment d'origine x_0 et de longueur $> L$ ne peut être minimal; par contre, d'après *b*), deux segments d'origine x_0 et de longueurs $< L$ ont nécessairement des extrêmités distinctes, ce qui prouve que de tels segments sont minimaux, puisque l'espace est complet. Réciproquement, si le lieu résiduel de x_0 est la sphère de centre x_0 et de rayon L, ou, ce qui revient au même, si pour toute demi-géodésique γ^+ d'origine x_0, on a $L_c(\gamma^+) = L$, alors les conditions *a*) et *b*) sont vérifiées.

Proposition 4.1. — *Soit* V_n *un espace de type* $\mathcal{A}(\lambda)$ *et soit* x_0, *un point de* V_n;

a) V_n *est difféomorphe à un espace* $\mathcal{V}(\mathcal{T}_{x_0})$, *ou* $\mathcal{T}_{x_0}$ *est une fibration de* $\mathcal{S}_{x_0}$ *par des sphères* S_λ;

b) $R_{x_0} = \mathrm{Exp}_{x_0}(\mathcal{S}_{x_0})$ *est une sous-variété régulièrement plongée dans* V_n, *difféomorphe à la base de la fibration* $\mathcal{T}_{x_0}$;

c) *Si* γ *est une géodésique telle que* $\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = 1$, *alors, pour que* $\gamma(0) = x_0$, *il faut et il suffit que* $\frac{d\gamma}{dt}(1)$ *soit normal à* R_{x_0}.

Supposons d'abord $\lambda \neq 0$; (*a*) et (*b*) sont alors des conséquences de la proposition 3.2; (*c*) se déduit de ce que σ applique $\mathcal{S}_{x_0}$ *sur* $N(R_{x_0})$.

Supposons maintenant $\lambda = 0$; soit x un point de R_{x_0}; soit $\Gamma(x)$ l'ensemble des segments géodésiques tels que

$$(4.1) \qquad g(0) = x_0, \qquad g(1) = x, \qquad \left\|\frac{dg}{dt}\right\| = 1;$$

la condition *c*) de la définition (4.1) exprime que si $g \in \Gamma(x)$, les valeurs 0 et 1 ne sont pas conjuguées sur g; il résulte alors d'un lemme de Klingenberg que $\Gamma(x)$ se compose de deux éléments g_1 et g_2 tels que

$$\frac{dg_1}{dt}(1) = -\frac{dg_2}{dt}(1);$$

la correspondance entre $\frac{dg_1}{dt}(0)$ et $\frac{dg_2}{dt}(0)$ est évidemment un difféomorphisme involutif sur $\mathcal{S}_{x_0}$; donc la relation d'équivalence $\mathcal{C}_{x_0}$ définie sur $\mathcal{S}_{x_0}$ par

$$(4.2)\qquad u \equiv u' \ (\mathrm{mod}\ \mathcal{C}_{x_0}) \Longleftrightarrow \mathrm{Exp}_{x_0}(u) = \mathrm{Exp}_{x_0}(u'),$$

est une structure fibrée dont la fibre type est l'ensemble S_0 formé de deux points, et l'on en déduit que V_n est homéomorphe à $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{x_0})$; de plus, Exp_{x_0} étant de rang n sur $\mathcal{S}_{x_0}$, $\mathcal{S}_{x_0}/\mathcal{C}_{x_0}$ se plonge dans V_n, et son image étant R_{x_0}, ceci prouve b); enfin les vecteurs $\frac{dg_1}{dt}(1)$ et $\frac{dg_2}{dt}(1)$ sont nécessairement normaux à R_{x_0}, ce qui prouve c), et montre, comme dans la démonstration du lemme 3.4, que l'homéomorphisme $\mathcal{V}(\mathcal{C}_{x_0}) \to V_n$ est un difféomorphisme.

4.2. Propriétés des géodésiques.

LEMME 4.1. — *Soit V_n un espace de type $\mathcal{H}(\lambda)$, et soit $x_0 \in V_n$; pour toute géodésique γ telle que*

$$\gamma(0) = x_0, \qquad \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = 1,$$

l'arc $\gamma|[0, 2[$ est injectif et l'on a

$$(4.3)\qquad \gamma(2) = x_0.$$

Soit γ une telle géodésique; $\frac{d\gamma}{dt}(1)$ est normal à R_{x_0}, il en est de même de $-\frac{d\gamma}{dt}(1)$, donc, d'après l'assertion c) de la proposition 4.1, si γ' est la géodésique telle que $\frac{d\gamma'}{dt}(1) = -\frac{d\gamma}{dt}(1)$, alors $\gamma'(0) = x_0$; comme il est clair que

$$\gamma'(t) = \gamma(2 - t),$$

on a bien $\gamma(2) = x_0$; d'autre part, d'après l'hypothèse (b) de la définition 4.1, les segments $\gamma|[0, 1[$ et $\gamma'|[0, 1[$ sont injectifs et n'ont que le point x_0 en commun; de plus, pour $t \in [0, 2]$ l'un des segments $\gamma|[0, t]$ et $\gamma'|[t, 2]$ est minimal, donc, si de plus $t \neq 1$, comme on a aussi $2 - t \neq 1$, on ne peut avoir $\gamma(t) = \gamma(1)$, ce qui achève la démonstration du fait que $\gamma|[0, 2[$ est injectif.

Proposition 4.2. — *Si* V_n *est de type* $\mathcal{A}(\lambda)$, *toute géodésique est injectivement périodique de longueur* 2. *Si deux géodésiques* γ *et* γ' *non équivalentes ont en commun deux points* x_0 *et* x_1, *alors* $\lambda \neq 0$ *et*

$$x_1 \in R_{x_0}.$$

Soit γ une géodésique telle que $\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = 1$; choisissons pour x_0 le point $\gamma(t)$, alors, d'après le lemme 4.1

$$\gamma(t) = \gamma(t+2) \tag{4.4.}$$

ce qui montre que γ est périodique; comme l'arc $\gamma|[0, 2[$ est injectif, la période est nécessairement 2. Si γ' est une géodésique non équivalente à γ telle que $\left\|\frac{d\gamma'}{dt}\right\| = 1$, et si les hypothèses de la proposition sont vérifiées, on peut toujours supposer

$$\gamma(0) = \gamma'(0) = x_0, \qquad \gamma(t_1) = \gamma'(t'_1) = x_1,$$

et, en effectuant éventuellement sur l'une ou sur chacune des deux géodésiques un changement de paramètre

$$t \to t + 2k \qquad \text{ou} \qquad t \to 2k - t, \qquad k \in \mathbf{Z},$$

on peut se ramener au cas

$$0 < t_1 \leqslant 1, \qquad 0 < t'_1 \leqslant 1$$

mais deux segments de longueur < 1 ne peuvent avoir qu'un seul point en commun, donc

$$t_1 = t'_1 = 1;$$

de plus, ce cas, pour $\lambda = 0$ entraînerait que les géodésiques γ et γ' sont équivalentes, et la proposition est bien démontrée.

4.3. Topologie des espaces de type $\mathcal{A}(\lambda)$.

Les espaces étant homéomorphes aux espaces $\mathfrak{V}(\mathcal{C}_{x_0})$, leur étude topologique se ramène à l'étude des *fibrations d'une sphère* S_{n-1} *par des sphères* S_λ; rappelons quelques propriétés de ces fibrations, en écartant les cas triviaux : $\lambda = 0, \lambda = n - 1$

(F_1) S_λ *est parallélisable, ce qui implique que* $\lambda = 1$, 3 *ou* 7,
(F_2) n *est un multiple entier de* $\lambda + 1$

$$n = k(\lambda + 1); \tag{4.5}$$

(F_3) *L'anneau de cohomologie de la base de la structure fibrée, à coefficients entiers, est isomorphe à l'anneau gradué* $Z[X]/(X^k)$, X *étant un élément homogène de degré* $\lambda + 1$, *et* k *étant défini par la formule* (4,5).

(F_2) et (F_3) sont des conséquences classiques de la suite exacte de Gysin.

Proposition 4.3. — *Soit* V_n *un espace de type* $\mathcal{A}(\lambda)$, $\lambda \neq 0$;

a) $\lambda = 1, 3, 7$ *ou* $n - 1$,

b) $n = k(\lambda + 1)$, $k \in \mathbf{Z}$, *et si* $\lambda = 7$, $k = 1$ *ou* 2,

c) $H^*(V_n, Z)$ *est isomorphe à l'anneau gradué* $Z[X]/(X^{k+1})$, X *étant un élément homogène de degré* $\lambda + 1$.

Ce résultat peut encore être mis sous la forme suivante, compte tenu de ce que l'on verra au n° 4.4 sur les espaces de type $\mathcal{A}(0)$ ou $\mathcal{A}(n-1)$:

Tout espace de type $\mathcal{A}(\lambda)$ *admet la même cohomologie qu'un espace homogène symétrique compact de rang un, à savoir*

— *pour* $\lambda = 0$, $SO(n+1)/O(n)$,
— *pour* $\lambda = 1$, $SU(k+1)/U(k)$,
— *pour* $\lambda = 3$, $Sp(k+1)/Sp(k) \times Sp(1)$,
— *pour* $\lambda = 7$, $k = 2$, $F_4/SO(9)$,
— *pour* $\lambda = n - 1$, $S_n = SO(n+1)/SO(n)$.

On a évidemment un résultat analogue pour l'homologie.

La proposition 4.3 est un cas particulier d'un théorème de Bott, valable pour les espaces de Riemann dont toutes les géodésiques sont injectivement périodiques et de même longueur [12]. Mais dans le cas qui nous intéresse ici, la démonstration en est bien plus facile.

Tout d'abord *a*) provient de (F_1); d'autre part *b*) est une conséquence de *c*) d'après un résultat de Adem.

Démontrons donc *c*); utilisons la suite exacte de cohomologie

[12] R. Bott, On manifolds all of whose geodesics are closed, Annals of Mathematics, 60 (1954), 375-382.

relative (φ désignera l'injection de R_{x_0} dans V_n)

$$\begin{tikzcd} H^*(V_n \bmod R_{x_0}, Z) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^*(V_n, Z) \arrow[dl, "\varphi^*"] \\ & H^*(R_{x_0}, Z) & \end{tikzcd}$$

moyennant :

$$H^i(V_n \bmod R_{x_0}, Z) \approx H^i(\mathcal{B}_{x_0} \bmod \mathcal{S}_{x_0}, Z) \approx \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad i \neq n \\ Z & \text{si} \quad i = n \end{cases}$$

on obtient, puisque

$$H^i(R_{x_0}, Z) = \{0\} \qquad \text{pour} \qquad i \geqslant n - 1 > \dim(R_{x_0}) :$$
$$\varphi^* : H^i(V_n, Z) \approx H^i(R_{x_0}, Z), \quad \text{si} \quad i \neq n,$$
$$H^n(V_n, Z) \approx Z;$$

donc on a un isomorphisme d'anneaux :

$$H^*(V_n, Z)/H^n(V_n, Z) \approx H^*(R_{x_0}, Z);$$

compte tenu de (F_3), il ne reste plus qu'à démontrer que si ξ est un générateur de $H^{\lambda+1}(V_n, Z)$, alors ξ^k est un générateur de $H^n(V_n, Z)$.

Tout d'abord le même raisonnement appliqué à l'homologie montre que si ρ est un générateur de $H_{n-\lambda-1}(R_{x_0}, Z)$ (R_{x_0} est orientable) alors $\varphi_x(\rho)$ est un générateur de $H_{n-\lambda-1}(V_n, Z)$; d'autre part soit x un point de R_{x_0} et soit $D_{x_0,x}$ le lieu des géodésiques passant par x_0 et x; c'est une sous-variété régulièrement plongée dans V_n [13], qui coupe R_{x_0} transversalement en un seul point, à savoir x; de plus $D_{x_0,x}$ est homéomorphe à la sphère, donc est orientable; si donc $\delta \in H_{\lambda+1}(V_n, Z)$ est l'image d'un générateur de $H_{\lambda+1}(D_{x_0,x}, Z)$, l'indice de Kronecker de $\varphi^*(\rho)$ et de δ est égal à ± 1; par la dualité de Poincaré (V_n est orientable), à $\varphi^*(\rho)$ correspond un générateur ξ de $H^{\lambda+1}(V_n, Z)$, et à δ un élément ξ' de $H^{n-\lambda-1}(V_n, Z)$ tels que $\xi \cup \xi'$ soit un générateur de $H^n(V_n, Z)$; d'autre part, d'après (F_3), ξ^{k-1} est un générateur de $H^{n-\lambda-1}(V_n, Z)$, donc $\xi' = \lambda . \xi^{k-1}$ ($\lambda \in Z$), et $\xi \cup \xi' = \lambda . \xi^k$, ce qui montre bien que ξ^k est un générateur de $H^n(V_n, Z)$.

Remarque. — La démonstration ci-dessus, valable pour tout espace $\mathfrak{V}(\mathfrak{T})$ fournit une nouvelle démonstration du fait que seule la sphère S_{15} peut être fibrée par des sphères différentiables S_7.

[13] Voir plus loin : n° 4.4.

4.4. Les espaces de type $\mathcal{A}(0)$ et $\mathcal{A}(n-1)$.

Soit V_n de type $\mathcal{A}(\lambda)$ et soient x_1 et x_2 deux points de V_n tels que

$$r(x_1, x_2) = 1;$$

nous avons déjà défini D_{x_1,x_2} comme le lieu des géodésiques passant par x_1 et x_2; si $u_1 \in T_{x_1}(V_n)$, $u_2 \in T_{x_2}(V_n)$, avec $\mathrm{Exp}_{x_1}(u_1) = x_2$ et $\mathrm{Exp}_{x_2}(u_2) = x_1$,

$$D_{x_1,x_2} = \mathrm{Exp}_{x_1}(T^2(u_1)) = \mathrm{Exp}_{x_2}(T^2(u_2)); \tag{4,6}$$

et comme les applications Exp_{x_1} et Exp_{x_2} sont régulières et injectives sur les vecteurs de norme inférieure à un, D_{x_1,x_2} est une sous-variété de V_n; de plus elle est compacte, donc régulièrement plongée dans V_n. Soient y_1 et y_2 deux points diamétralement opposés sur la sphère $S_{\lambda+1}$, supposée munie d'une métrique riemannienne canonique normalisée par la condition que la longueur d'un grand cercle soit égale à 2 (nous désignerons par $\widetilde{\mathrm{Exp}}$, $\tilde{\sigma}$, etc... les notions qui correspondent sur $S_{\lambda+1}$ à Exp, σ, etc...); donnons nous de plus une isométrie F de $T^2(u_1)$ sur $T_{y_1}(S_{\lambda+1})$; on définit un difféomorphisme f_1 de $D_{x_1,x_2} - \{x_2\}$ sur $S_{\lambda+1} - \{y_2\}$ en associant à $\mathrm{Exp}_{x_1}(u)$, pour $\|u\| < 1$,

$$f_1(\mathrm{Exp}_{x_1}(u)) = \widetilde{\mathrm{Exp}}_{y_1}(F(u));$$

on définit de même un difféomorphisme f_2 de

$$D_{x_1,x_2} - \{x_1\} \text{ sur } S_{\lambda+1} - \{y_1\} = f_2(\mathrm{Exp}_{x_2}(\sigma u)) = \widetilde{\mathrm{Exp}}_{y_2}(\tilde{\sigma} F(u));$$

comme f_1 et f_2 coïncident sur $D_{x_1,x_2} - (\{x_1\} \cup \{x_2\})$, il en résulte :

Il existe un difféomorphisme f de D_{x_1,x_2} sur $S_{\lambda+1}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_{y_1}(S_{\lambda+1}) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Exp}}_{y_1}} & S_{\lambda+1} \\ {\scriptstyle (df)_{x_1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} \\ T_{x_1}(D_{x_1,x_2}) & \xrightarrow{\mathrm{Exp}_{x_1}} & D_{x_1,x_2} \end{array}$$

ainsi que le diagramme analogue pour x_2 et y_2.

Sur un espace de type $\mathcal{A}(n-1)$ pour tout $x \in V_n$, nous désignerons par $\mathcal{A}(x)$ le seul point tel que

$$r(x, \mathcal{A}(x)) = 1.$$

Proposition 4.4. — *Soit* V_n *un espace de type* $\mathcal{A}(n-1)$*; étant donné un point* $x_1 \in V_n$*, il existe un difféomorphisme* f_{x_1} *de* V_n *sur* S_n *tel que le diagramme suivant soit commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} T_{y_1}(S_n) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Exp}}_{y_1}} & S_n \\ {\scriptstyle (df_{x_1})_{x_1}} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle f_{x_1}} \\ T_{x_1}(V_n) & \xrightarrow{\mathrm{Exp}_{x_1}} & V_n \end{array} \tag{4.7}$$

de plus, si, $\forall y \in S_n$, $\tilde{\mathcal{A}}(y)$ *désigne le point diamétralement opposé de* y*, alors,*

$$\mathcal{A} = f_{x_1}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{A}} \circ f_{x_1}; \tag{4.8}$$

enfin, $\mathcal{A}$ *est une isométrie.*

Le début de l'énoncé résulte de ce qui a été dit plus haut; pour démontrer la formule (4.8), il suffit de remarquer que si $x = \gamma(t)$ où γ est une géodésique telle que $\gamma(0) = x_1$ et $\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = 1$, alors $\mathcal{A}(x) = \gamma(t+1)$; on utilise alors le diagramme (4.7). Enfin, $\mathcal{A}$ étant différentiable d'après (4.8), pour montrer que c'est une isométrie, il suffit de montrer que $\|d\mathcal{A}(u)\| = \|u\|$ pour tout $u \in T(V_n)$; mais si $u = \frac{d\gamma}{dt}(0)$, alors $d\mathcal{A}(u) = \frac{d\gamma}{dt}\left(\frac{1}{\|u\|}\right)$ et la proposition 4.4 est démontrée.

Remarque. — Dans ce cas où λ est quelconque, D_{x_1, x_2} est de type $\mathcal{A}(m-1)$ (où $m = \lambda + 1$ est la dimension de D_{x_1, x_2}) en x_1 et x_2; on ne peut cependant affirmer qu'il est de type $\mathcal{A}(m-1)$ en tous points, à moins que l'on sache que D_{x_1, x_2} *est totalement géodésique.* Pour la même raison il n'est pas évident que la correspondance $\sigma : \mathcal{C}_u \to \mathcal{C}_{\sigma u}$ (pour $\|u\| = 1$) soit la restriction d'une application linéaire de $T^2(u)$ sur $T^2(\sigma u)$.

A étant une isométrie involutive et sans points fixes, on peut définir l'espace de Riemann quotient $V_n/\mathcal{A}$, obtenu en « identifiant » x et $\mathcal{A}(x)$. V_n est alors un revêtement à deux feuillets de $V_n/\mathcal{A}$.

PROPOSITION 4.5. — *Si* V_n *est de type* $\mathcal{A}(n-1)$, *alors* $V_n/\mathcal{A}$ *est de type* $\mathcal{A}\left(0, \frac{1}{2}\right)$; *inversement, tout espace de type* $\mathcal{A}(0, L)$ *est difféomorphe à l'espace elliptique* $P_n(\mathbf{R})$ *et son revêtement universel est de type* $\mathcal{A}(n-1, 2L)$.

Si V_n est de type $\mathcal{A}(n-1)$, l'assertion est une conséquence du diagramme (4.7) et de (4.8) puisque $S_n/\tilde{\mathcal{A}}$ est de type $\mathcal{A}\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Inversement, soit V'_n de type $\mathcal{A}(0, L)$; soit γ une géodésique telle que $\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = 1$; puisque toutes les géodésiques sont périodiques de longueur 2L, les valeurs 0 et 2L sont conjuguées sur γ, et

$$\lambda(\gamma; 0, 2L) = n-1;$$

montrons que V'_n est de type $\mathcal{F}(n-1, 2L)$: il suffit de montrer qu'il n'existe aucune valeur conjuguée de 0 entre 0 et 2L; s'il en existait une, soit t $(0 < t < 2L)$, d'après les conditions b) et c) (puisque $\lambda = 0$), on aurait $t > L$; mais t serait aussi conjuguée de 2L et l'on aurait de même $t < 2L - L = L$, ce qui est absurde.

Soit donc V_n le revêtement universel de V'_n : il est de type $\mathcal{A}(n-1, 2L)$; montrons que V'_n s'identifie à $V_n/\mathcal{A}$: soit $x'_0 \in V'_n$ et soit x_0 au-dessus de x'_0, alors $\mathcal{A}(x_0)$ est au-dessus de x'_0 car toute géodésique issue de x_0 passe par $\mathcal{A}(x_0)$ et deux géodésiques de V'_n ne peuvent avoir qu'un point commun; inversement, il n'y a pas d'autres points au-dessus de x'_0, car si x_1 se projette en x'_0, si γ est une géodésique telle que

$$\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = 1, \qquad \gamma(0) = x_0, \qquad \gamma(t) = x_1$$

alors, en projetant, on obtient une géodésique γ' telle que $\gamma'(0) = \gamma'(t) = x'_0$, ce qui implique $t \equiv 0 \pmod{L}$, autrement dit $x_1 = x_0$ ou $x_1 = \mathcal{A}(x_0)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. C. Allamigeon, Espaces homogènes symétriques harmoniques, *C. R. Acad. Sci.*, 246, 1958, 795-798.
[2] A C. Allamigeon, Propriétés globales des espaces harmoniques, *C. R. Acad. Sci.*, 252, 1961, 1093-1095.
[3] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Edizioni Cremonese, Roma, 1955.
[4] J. Milnor, Morse Theory, *Annals of Mathematics Study*, 51.
[5] G. de Rham, *Comm. Math. Helv.*, 26, 1952.
[6] Ruse, Walker and Willmore, *Harmonic Spaces*, Edizioni Cremonese, Roma, 1961, p. 41.

Manuscrit reçu en septembre 1964.