



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Barbara SCHAPIRA

Lemme de l'ombre et non divergence des horosphères d'une variété géométriquement finie

Tome 54, n° 4 (2004), p. 939-989.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_4_939_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

LEMME DE L'OMBRE ET NON DIVERGENCE DES HOROSPHERES D'UNE VARIÉTÉ GÉOMÉTRIQUEMENT FINIE

by Barbara SCHAPIRA

1. Introduction.

Soit M une variété riemannienne à courbure négative pincée. Le flot géodésique agissant sur son fibré unitaire tangent T^1M est un flot hyperbolique; en particulier, T^1M est feuilleté par les variétés fortement instables de ce flot, encore appelées *horosphères fortement instables*.

Si M est une surface hyperbolique, les feuilles de ce feuilletage sont les orbites du flot horocyclique $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$ agissant sur T^1M . On sait que ce flot est minimal lorsque M est compacte : les orbites sont toutes denses dans T^1M . Quand M est seulement de volume fini, certaines orbites sont périodiques, les autres sont denses dans T^1M (*cf.* Hedlund [He]). En particulier, leur projection sur M revient infiniment souvent dans la partie compacte de la variété. Ce résultat qualitatif de retour dans un compact a été étendu par Margulis [Ma] à l'action de flots unipotents sur l'espace des réseaux $\Lambda_n = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$.

Ce fut Dani qui, le premier, précisa ce comportement en une estimée quantitative : dans le cas du flot horocyclique de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ dans [Da1], puis dans le cas d'un flot unipotent sur un espace homogène G/Γ de rang 1 et de volume fini dans [Da2] et sur Λ_n dans [Da3], il montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de T^1M tel qu'une orbite non périodique de $(h^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de longueur T suffisamment grande passe un

Mots-clés : Horosphère – Variété géométriquement finie – Non divergence – Lemme de l'ombre – Mesure de Patterson.

Classification math. : 37D40 – 37C85 – 28D99.

temps supérieur à $(1 - \varepsilon)T$ dans K_ε . Rappelons que ce résultat, dit de non divergence, est un outil essentiel dans le théorème d'équidistribution des flots unipotents de Ratner.

Dans un cadre différent, mentionnons encore le résultat de Minsky et Weiss [MW] de non divergence des orbites du flot horocyclique de Teichmüller.

Le but du présent travail est d'établir l'analogie de ce phénomène de non divergence en l'étendant dans plusieurs directions : nous considérons des variétés qui sont d'une part de dimension quelconque, d'autre part de courbure négative variable, et enfin qui sont géométriquement finies de volume infini.

Dans ce cadre plus général, nous restreignons notre étude à l'ensemble non errant \mathcal{E} du feuilletage horosphérique de T^1M . On sait alors (voir Dal'bo [Dal]) que certaines feuilles de \mathcal{E} sont compactes et que les autres sont denses dans \mathcal{E} . En particulier, leur projection sur M revient infiniment souvent dans la partie compacte de la variété. Notons $\mathcal{E}_{\text{rad}} \subset \mathcal{E}$ l'union de ces feuilles denses dans \mathcal{E} .

En l'absence de paramétrage naturel de ces feuilles par un flot, nous utilisons une distance naturelle sur ces feuilles et nous considérons sur chaque feuille de grandes boules notées $B^+(u, r)$, avec $r > 0$.

Pour donner un sens au « temps passé » par une feuille dans un compact, nous étudions le comportement de moyennes sur ces boules relativement à une mesure, notée μ_{H^+} sur chaque feuille H^+ , construite à partir d'une mesure naturelle sur le bord $\partial\widetilde{M}$ du revêtement universel \widetilde{M} de M , la *mesure de Patterson*.

Plus précisément, si $u \in T^1M$ et $r > 0$, nous définissons la moyenne d'une fonction $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ continue par

$$M_{r,u}(\psi) := \oint_{B^+(u,r)} \psi(v) d\mu_{H^+}(v),$$

où la notation \oint signifie que $M_{r,u}$ est normalisée en une mesure de probabilité.

Si Γ est un groupe géométriquement fini, la variété $M = \widetilde{M}/\Gamma$ ne possède qu'un nombre fini de pointes, les *cusps*. À chaque cusp est associée une classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques maximaux de Γ , i.e. des sous-groupes de Γ fixant exactement un point de Λ_Γ , et maximaux pour cette propriété.

Nous aurons besoin de faire des hypothèses, notées (*) et (**), satisfaites en courbure constante, portant sur la croissance des sous-groupes paraboliques maximaux de Γ . Soit $o \in \widetilde{M}$ un point fixé. La première hypothèse est la suivante.

$$(*) \quad \begin{cases} \text{Pour tout sous-groupe parabolique } \Pi \text{ de } \Gamma, \text{ il existe une} \\ \text{constante } D \geq 1 \text{ telle que} \\ D^{-1} \exp(\delta_\Pi T) \leq \#\{p \in \Pi, d(o, po) \in [T, T + 1[\} \leq D \exp(\delta_\Pi T), \end{cases}$$

où δ_Π est l'exposant critique de Π , défini par

$$\delta_\Pi = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq T\}.$$

Cette hypothèse est apparue à plusieurs reprises dans la littérature, d'abord dans [HP2], puis dans [EF] par exemple, et semble nécessaire à chaque fois qu'on souhaite obtenir des estimées précises à l'intérieur des cusps. Nous verrons plus loin (proposition 2.10) qu'elle est toujours satisfaite si M est une variété localement symétrique de rang 1.

Cette hypothèse sert à démontrer le théorème 3.2 ci-dessous, mais on peut l'affaiblir en l'hypothèse (**) suivante, qui nous suffira à obtenir le théorème 4.2 de non divergence souhaité.

Pour tout sous-groupe parabolique Π de Γ :

1) La quantité

$$(**)_1 \quad \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq t+N}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)} \Big/ \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq t}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)}$$

converge vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, uniformément en $t \geq 1$.

2) Pour tout $N \geq 0$ fixé

$$(**)_2 \quad \sup_{t \geq 1} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq t}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)} \Big/ \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq t+N}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)} < +\infty.$$

3) Pour tout $C > 0$, on a

$$(**)_3 \quad \sup_{t \geq 1} \frac{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t + C\}}{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t\}} < +\infty.$$

Sous (**), notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 4.2. — Soit $M = \widetilde{M}/\Gamma$ une variété géométriquement finie à courbure négative pincée dont les cusps vérifient la condition (**), avec Γ un groupe divergent. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et C un compact de T^1M . Alors il existe un compact $K_{\varepsilon,C} \subset \Omega$ et un réel $r_0(C) > 0$ tels que pour tout $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap C$ et pour tout $r \geq r_0(C)$, on ait

$$M_{r,u}(K_{\varepsilon,C}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Ce résultat assure en particulier que la suite de mesures de probabilité $(M_{r,u})_{r \geq 0}$ ne tend pas faiblement vers 0 quand $r \rightarrow \infty$. Autrement dit, la suite $(M_{r,u})_{r \geq 0}$ est «tendue» : il n'y a aucune perte de masse dans les cusps.

Notons qu'un résultat analogue de non divergence a été démontré par Rudolph [Ru] en courbure constante, mais seulement pour presque tout $u \in \mathcal{E}_r$ (au sens de la mesure de Patterson-Sullivan), ce qui lui suffisait pour en déduire l'ergodicité du feuilletage.

Pour établir le théorème 4.2, il nous faudra donner une estimée de la mesure de Patterson de petits ouverts du bord, les *ombres*. Plus précisément, nous aurons à contrôler des quotients de mesures d'ombres. Le *lemme de l'ombre* (théorème 3.2), encore appelé propriété de la *densité fluctuante*, est un énoncé qui donne un équivalent précis de la mesure d'une ombre. Il est originellement dû à Sullivan sur les variétés hyperboliques compactes, et a été étendu à toutes les variétés compactes ou convexes-cocompactes à courbure négative variable, permettant alors de réinterpréter la mesure de Patterson comme la mesure de Hausdorff de l'ensemble limite Λ_Γ de Γ dans $\partial\widetilde{M}$. Stratmann et Velani [SV] l'ont généralisé sur les variétés hyperboliques géométriquement finies, et nous adaptons une preuve de leur résultat due à Peigné [Pe1] pour l'établir sur les variétés géométriquement finies de courbure variable négative pincée qui satisfont la condition (*). Notons qu'il existe une démonstration différente de la nôtre de ce résultat, due à Hersensky et Paulin [HP2], lorsque les ombres sont centrées en des points paraboliques (i.e. dans le cas le plus utile en pratique).

En fait, une étude plus fine de la mesure de ces ombres nous permettra, en suivant la preuve du théorème 3.2, de démontrer directement le théorème 4.2 sous l'hypothèse plus faible (**).

Précisons quelques notations. Plutôt que les ombres considérées par Sullivan, nous considérerons des ensembles comparables : si o est un point de \widetilde{M} , ξ un point du bord $\partial\widetilde{M}$ et $t \geq 0$, nous noterons $V(o, \xi, t)$ l'ensemble des points du bord dont le projeté sur le rayon $[o\xi]$ est à distance au moins t de o , et $\xi(t)$ le point à distance t de o sur $[o\xi]$.

Une *densité conforme invariante* par Γ de dimension $\delta > 0$ est une famille $\nu = (\nu_x)_{x \in \widetilde{M}}$ de mesures équivalentes sur le bord $\partial \widetilde{M}$, telles que pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $(x, y) \in \widetilde{M}^2$, on a

$$\nu_{\gamma x} = \gamma_* \nu_x \quad \text{et} \quad \frac{d\nu_x}{d\nu_y}(\xi) = \exp(-\delta \beta_\xi(x, y)) \quad \nu_x\text{-p.s.},$$

où $\beta_\xi(x, y)$ désigne le cocycle de Busemann (voir § 2.1).

Le lemme de l'ombre s'énonce alors :

THÉORÈME 3.2. — *Soit $M = \widetilde{M}/\Gamma$ une variété géométriquement finie à courbure négative pincée dont les cusps satisfont (*). Alors pour toute densité conforme $\nu = (\nu_x)_{x \in \widetilde{M}}$ Γ -invariante sans atomes de dimension δ et de support Λ_Γ , il existe des constantes $A_0 > 0$ et $A_1 > 0$ telles que pour tout $\xi \in \Lambda_\Gamma$ et $t \geq 0$, on ait :*

a) *si $\xi(t)$ appartient à un relevé de la partie compacte sur \widetilde{M} , alors*

$$A_0^{-1} e^{-\delta t} \leq \nu_o(V(o, \xi, t)) \leq A_0 e^{-\delta t},$$

b) *si $\xi(t)$ est dans un relevé du cusp, alors*

$$A_1^{-1} e^{-\delta t + (2\delta_\Pi - \delta)d(\xi(t), \Gamma o)} \leq \nu_o(V(o, \xi, t)) \leq A_1 e^{-\delta t + (2\delta_\Pi - \delta)d(\xi(t), \Gamma o)}.$$

L'organisation de cet article est la suivante : nous commençons (§ 2) par une introduction aux variétés géométriquement finies, et nous prouvons une série de lemmes géométriques élémentaires utiles par la suite. Nous énonçons et démontrons au paragraphe 3 le lemme de l'ombre (théorème 3.2). Nous prouvons le théorème 4.2 dans la dernière partie (§ 4).

Remerciements. — Marc Peigné m'a énormément aidée par sa lecture attentive d'une version préliminaire de ce travail, ses remarques et de nombreuses discussions très profitables qui ont permis d'aboutir aux bonnes hypothèses, et je le remercie beaucoup.

Je remercie également très chaleureusement le *referee* de cet article, qui m'a permis d'en améliorer la rédaction et de corriger des erreurs.

Cet article n'aurait pas vu le jour sans les conseils et la confiance de Martine Babillot ; il lui est dédié.

2. Variétés géométriquement finies.

2.1. Généralités.

Nous renvoyons à Bowditch [Bo] pour plus de détails. Soit M une variété riemannienne à courbure négative pincée, i.e. dont toutes les courbures sectionnelles sont comprises entre deux constantes négatives $-b^2$ et $-a^2$, avec $0 < a \leq b < +\infty$. On normalise la courbure en supposant que $a = 1$. Notons \widetilde{M} son revêtement universel, $\Gamma = \pi_1(M)$ son groupe fondamental, T^1M son fibré unitaire tangent de M et $\pi : T^1M \rightarrow M$ la projection canonique. Nous noterons d la distance riemannienne sur M et \widetilde{M} . Soit $o \in \widetilde{M}$ un point fixé une fois pour toutes.

Le bord à l'infini $\partial\widetilde{M}$ de \widetilde{M} permet de compactifier \widetilde{M} en $\widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$. Le groupe Γ agit sur \widetilde{M} par isométries et sur $\partial\widetilde{M}$ par homéomorphismes. L'ensemble limite $\Lambda_\Gamma \subset \partial\widetilde{M}$ de Γ est le plus petit fermé Γ -invariant de $\partial\widetilde{M}$. C'est aussi l'ensemble des points d'accumulation dans $\partial\widetilde{M}$ de l'orbite d'un point quelconque $o \in \widetilde{M}$ par Γ ; en d'autres termes, on a $\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma o} \setminus \Gamma o$.

Le flot géodésique $g = (g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de M agit sur T^1M en associant à un vecteur v le vecteur $\dot{c}_v(t)$ tangent à l'unique géodésique $(c_v(t))_{t \in \mathbb{R}}$ telle que $\dot{c}_v(0) = v$. Il se relève sur $T^1\widetilde{M}$ en le flot géodésique de \widetilde{M} , noté $\tilde{g} = (\tilde{g}^t)_{t \in \mathbb{R}}$. L'ensemble non errant $\Omega \subset T^1M$ du flot géodésique s'identifie (voir Eberlein [Eb]) à l'ensemble des vecteurs $v \in T^1M$ dont un relevé $\tilde{v} \in T^1\widetilde{M}$ définit une géodésique dont les deux extrémités sont dans Λ_Γ .

Un point ξ de l'ensemble limite Λ_Γ est dit *radial* s'il existe un point $o \in \widetilde{M}$ et une infinité de points de l'orbite Γo à distance bornée du rayon $[o\xi]$. L'ensemble des points limite radiaux sera noté $\Lambda_{\text{rad}} \subset \Lambda_\Gamma$.

Si $\xi \in \Lambda_\Gamma$ est l'unique point fixe d'une isométrie parabolique de Γ , il est dit *parabolique*. Le stabilisateur dans Γ d'un tel point sera appelé un *sous-groupe parabolique maximal*. Le point ξ est *parabolique borné* si son stabilisateur $\Pi \subset \Gamma$ agit de manière cocompacte sur $\Lambda_\Gamma \setminus \{\xi\}$. Nous noterons Λ_{pb} l'ensemble des points paraboliques bornés de Λ_Γ .

Le groupe Γ est dit *cocompact* si M est compacte, ce qui implique que $\Omega = T^1M$ est compact et $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} = \partial\widetilde{M}$. Il est dit *convexe-cocompact* si Ω est compact, et dans ce cas $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}}$. Enfin, il est *géométriquement fini* si $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} \cup \Lambda_{\text{pb}}$.

Le cocycle de Busemann est défini sur $\partial\widetilde{M} \times \widetilde{M} \times \widetilde{M}$ par

$$\beta_\xi(x, y) = \lim_{z \rightarrow \xi} d(x, z) - d(y, z) = "d(x, \xi) - d(y, \xi)".$$

C'est une fonction continue qui vérifie la relation de cocycle

$$\beta_\xi(x, y) + \beta_\xi(y, z) = \beta_\xi(x, z).$$

Ce cocycle permet de paramétrer $T^1\widetilde{M}$ de façon simple. Si $u \in T^1\widetilde{M}$, on notera $u^+ \in \partial\widetilde{M}$ (resp. u^-) l'extrémité $c_u(+\infty)$ (resp. $c_u(-\infty)$) de l'unique géodésique c_u telle que $\dot{c}_u(0) = u$. L'ensemble des géodésiques orientées de $T^1\widetilde{M}$ est en bijection avec le « double bord »

$$\partial^2\widetilde{M} := \partial\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M} \setminus \{(\xi, \xi), \xi \in \partial\widetilde{M}\}.$$

Alors l'application

$$v \longmapsto (v^-, v^+, \beta_{v^-}(\pi(v), o))$$

est un homéomorphisme de $T^1\widetilde{M}$ sur $\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}$.

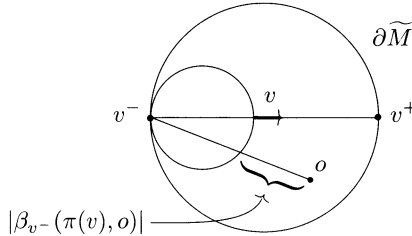


Figure 1. Coordonnées sur $T^1\widetilde{M}$

Sur $\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}$, les actions de Γ et de \tilde{g} s'écrivent

$$\begin{aligned} \gamma(u^-, u^+, s) &= (\gamma u^-, \gamma u^+, s + \beta_{u^-}(o, \gamma^{-1}o)), \\ \tilde{g}^t(u^-, u^+, s) &= (u^-, u^+, s + t). \end{aligned}$$

L'action de (\tilde{g}^t) commute avec celle de Γ et définit par passage au quotient l'action du flot géodésique sur T^1M . Ainsi on a aussi des homéomorphismes $T^1M \simeq (\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R})/\Gamma$ et $\Omega \simeq (\Lambda_\Gamma^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$.

Une horosphère $H \subset \widetilde{M}$ centrée en ξ est une ligne de niveau de l'application $y \mapsto \beta_\xi(y, o)$. Une horoboule $\mathcal{H} \subset \widetilde{M}$ centrée en ξ est un sous-ensemble $\mathcal{H} = \{y \in \widetilde{M}, \beta_\xi(y, o) \leq k\}$, avec $k \in \mathbb{R}$. C'est un ensemble géodésiquement convexe de \widetilde{M} .

Notons $\tilde{C}(\Gamma)$ l'enveloppe convexe dans \widetilde{M} de l'ensemble limite Λ_Γ . Le cœur de Nielsen N_Γ de M (ou de Γ) est le quotient $N_\Gamma = \tilde{C}(\Gamma)/\Gamma$.

La variété M est géométriquement finie si et seulement si son cœur de Nielsen se décompose en une union finie (voir Bowditch [Bo])

$$N_\Gamma = C_0 \sqcup C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k,$$

où C_0 est un ensemble relativement compact, de diamètre noté Δ , et les C_ℓ , $1 \leq \ell \leq k$ (en nombre fini) sont les *cusps* : pour chaque ℓ , l'ensemble C_ℓ est isométrique au quotient de $\mathcal{H}^\ell \cap \tilde{C}(\Gamma)$ par un sous-groupe parabolique maximal Π_ℓ , où \mathcal{H}^ℓ est une horoboule centrée en un point parabolique ξ^ℓ et Π_ℓ est le stabilisateur de ξ^ℓ . Nous noterons $\tilde{C}_\ell = \mathcal{H}^\ell \cap \tilde{C}(\Gamma)$ le relevé de C_ℓ à \tilde{M} . On peut le choisir de telle sorte que les images de \mathcal{H}^ℓ par Γ soient disjointes ou confondues. De plus, si $\ell \neq \ell'$, les orbites $\Gamma\mathcal{H}^\ell$ et $\Gamma\mathcal{H}^{\ell'}$ sont disjointes.

En pratique, nous considérerons plutôt la décomposition ci-dessus sur \tilde{M} , notée

$$\tilde{C}(\Gamma) = \Gamma\tilde{C}_0 \sqcup \Gamma\tilde{C}_1 \sqcup \dots \sqcup \Gamma\tilde{C}_k.$$

Notons en particulier que si o est un point fixé de \tilde{C}_0 , son orbite Γo reste dans $\Gamma\tilde{C}_0$ et n'intersecte donc pas les orbites $\Gamma\mathcal{H}^\ell$ des horoboules \mathcal{H}^ℓ .

2.2. Projections.

Dans toute la suite, les géodésiques seront paramétrées à vitesse 1 et le paramétrage d'un rayon $[x\xi]$, avec $x \in \tilde{M}$ et $\xi \in \partial\tilde{M}$ sera noté $(\xi_x(t))_{t \geq 0}$. Nous renvoyons à Bowditch [Bo] pour un exposé complet sur la notion de projection.

Rappelons que sur une variété d'Hadamard \tilde{M} , pour tout $x \in \tilde{M}$ et toute géodésique $(c(t))_{t \in \mathbb{R}}$, la fonction $t \mapsto d(x, c(t))$ est une fonction propre et strictement convexe. Ceci permet de définir sans ambiguïté le *projeté* de x sur la géodésique c comme l'unique point $c(t_0)$ qui réalise le minimum de $c(t)$.

Si de plus \tilde{M} est une variété à courbure majorée par -1 (ou plus généralement un espace $CAT(-1)$), alors ceci s'étend aux points ξ du bord $\partial\tilde{M}$ de \tilde{M} . Plus précisément, si $\xi \in \partial\tilde{M}$, alors pour tout $y \in \tilde{M}$ fixé, la fonction $t \mapsto \beta_\xi(c(t), y)$ est strictement convexe, et l'instant t_0 où elle atteint son minimum ne dépend pas de y . Le projeté $c(t_0)$ de ξ sur $(c(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est donc encore bien défini.

Pour les mêmes raisons de convexité, on peut également définir la notion de projection d'un point $x \in \tilde{M} \cup \partial\tilde{M}$ sur un segment géodésique $[yz]$, ou un rayon géodésique $[y\xi]$.

Remarquons enfin que si $[x\xi]$ et $[x\eta]$ sont deux rayons géodésiques, alors les fonctions $t \mapsto d(\xi_x(t), \eta_x(t))$ et $t \mapsto d(\xi_x(t), [x\eta])$ sont également strictement convexes sur \mathbb{R}_+ .

2.3. Espaces hyperboliques au sens de Gromov.

La structure de variété riemannienne de M n'est pas essentielle dans tout ce travail. En revanche, nous utiliserons de manière cruciale le fait que \widetilde{M} est un espace hyperbolique au sens de Gromov.

Rappelons d'abord que si (a, b, c) est un triangle géodésique de \widetilde{M} , le triangle intérieur (p, q, r) à (a, b, c) est défini comme l'unique triangle vérifiant $p \in [bc]$, $q \in [ac]$, $r \in [ab]$, et $d(a, r) = d(a, q)$, $d(b, p) = d(b, r)$ et $d(c, p) = d(c, q)$. Si un (ou plusieurs) des sommets, par exemple a est sur le bord $\partial\widetilde{M}$, le triangle intérieur reste bien défini, à condition de remplacer la condition $d(a, q) = d(a, r)$ par $\beta_a(q, r) = 0$; autrement dit, en supposant que les points q et r sont sur la même horosphère centrée en a . Nous noterons aussi p', q', r' les projetés respectifs des sommets a, b et c sur le côté opposé.

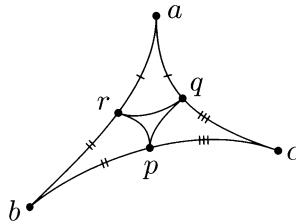


Figure 2. Les triangles de \widetilde{M} sont fins

Le fait que la courbure de \widetilde{M} soit majorée par -1 s'exprime dans la proposition suivante (voir aussi la figure 2).

PROPOSITION 2.1 (voir [GH], [CDP]). — Il existe une constante $\alpha \geq 0$, telle que \widetilde{M} est un espace α -hyperbolique au sens de Gromov : tout triangle géodésique (a, b, c) de $\widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$ a un triangle intérieur (p, q, r) de diamètre inférieur à α . De plus, on peut choisir α de sorte que les distances $d(p, p')$, $d(q, q')$ et $d(r, r')$ entre les projetés des sommets et les sommets du triangle intérieur soient toutes inférieures à α .

L'hyperbolicité permet de bien contrôler le défaut d'égalité dans l'inégalité triangulaire $d(b, c) \leq d(a, b) + d(a, c)$. D'un point de vue riemannien, si l'angle au sommet a est minoré par $\theta > 0$, il existe une constante $C(\theta)$, telle que $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) \leq C(\theta)$. Réciproquement,

si $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) \leq c$, et si les côtés du triangle ne sont pas trop petits, alors l'angle au sommet a est minoré par une constante $\theta(c)$. Bien que plus visuels, les angles riemanniens sont en fait plus difficiles à manipuler que des distances et nous préférons donc l'énoncé ci-dessous :

LEMME 2.2. — Soient (a, b, c) un triangle géodésique de \widetilde{M} et $C > 0$. Si $d(a, [bc]) \leq C$, alors $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) \leq 2C$. Réciproquement, si $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) \leq C$, alors $d(a, [bc]) \leq \frac{1}{2}C + \alpha$. Ceci reste vrai si b ou c est un point du bord, en remplaçant $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c)$ par $\beta_b(a, x) + \beta_c(a, x)$, pour tout $x \in (b, c)$.

Démonstration. — Par définition du triangle intérieur, on a $d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) = 2d(a, r)$. Puisque $d(a, [bc]) \leq d(a, r) + \alpha$, on en déduit la deuxième partie du lemme. Notons maintenant p' le projeté de a sur $[bc]$, et supposons que $d(a, p') = d(a, [bc]) \leq C$. Alors on a

$$0 \leq d(a, b) + d(a, c) - d(b, c) = d(a, b) - d(p', b) + d(a, c) - d(p', c) \leq 2d(a, p') \leq 2C. \quad \square$$

Si le projeté de a sur $[bc]$ est b , alors il est clair que l'angle au sommet b est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}\pi$. En termes de distances, ceci se réécrit :

LEMME 2.3. — Soient (a, b, c) un triangle géodésique de \widetilde{M} et p' le projeté de a sur le côté $[bc]$. Si $p' = b$, alors la distance de b à $[ac]$ est inférieure à 2α . Réciproquement, si cette distance est inférieure à 2α , alors la distance de p' à b est au plus 3α .

Ce lemme se généralise immédiatement au cas où a est un point du bord, à condition d'utiliser les fonctions de Busemann au lieu de la distance.

Démonstration. — D'après la proposition 2.1, on a d'une part $d(b, [ac]) \leq d(b, p) + \alpha$, et d'autre part $d(p, p') \leq \alpha$. Si $b = p'$, on trouve immédiatement $d(b, [ac]) \leq 2\alpha$. Réciproquement, si $d(b, [ac]) \leq 2\alpha$, le lemme 2.2 donne $2d(b, p) = d(b, a) + d(b, c) - d(a, c) \leq 4\alpha$ et $d(p, p') \leq \alpha$ d'après la proposition 2.1, ce qui montre bien que la distance de b à p' est au plus 3α . \square

2.4. Voisinages d'un point du bord.

Il existe plusieurs familles équivalentes de voisinages d'un point ξ du bord. Nous n'en utiliserons qu'une, mais nous les définissons toutes, de manière à donner une bonne image de ce que signifie «être proche» pour

deux points du bord. Dans ce qui suit, on considère un point x de \widetilde{M} , un point ξ du bord $\partial\widetilde{M}$, et on note toujours $(\xi_x(t))_{t \geq 0}$ le paramétrage à vitesse 1 du rayon $[x\xi]$.

Les voisinages les plus célèbres de ξ sont sans doute les ombres de Sullivan. On fixe un réel $r > 0$, et pour $x \in \widetilde{M}$, $\xi \in \partial\widetilde{M}$ et $t > 0$, on définit $\mathcal{O}(x, \xi, t)$ comme l'ombre faite sur le bord par la boule de centre $\xi_x(t)$ et de rayon r vue du point x , soit encore l'ensemble des $\eta \in \partial\widetilde{M}$ tels que le rayon $[x\eta]$ intersecte la boule $B(\xi_x(t), r)$.

On peut également considérer les boules de la famille $(d_x)_{x \in \widetilde{M}}$ des distances de Gromov, ou distances visuelles sur le bord, étudiées en détail par Bourdon [Bou]. Elles sont définies pour tout $x \in \widetilde{M}$ et tous $(\xi, \eta) \in \partial^2\widetilde{M}$ par

$$d_x(\xi, \eta) = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta_\xi(x, y) - \frac{1}{2}\beta_\eta(x, y)\right), \quad \text{avec } y \in (\xi\eta).$$

C'est ici que nous nous servons du fait que la courbure de \widetilde{M} est majorée par -1 ; en effet, si elle est inférieure à $-a^2$ avec $a < 1$, les quantités ci-dessus sont toujours définies mais ne satisfont plus l'inégalité triangulaire, voir [Bou]. Nous noterons $B_x(\xi, r)$ la boule de centre ξ et de rayon r pour la distance d_x .

Les voisinages de Kaimanovich [Ka] sont définis comme suit : $\mathcal{D}(x, \xi, t)$ est l'ensemble des points $\eta \in \partial\widetilde{M}$ tels que la distance de $\xi_x(t)$ à $\eta_x(t)$ est inférieure à α . La proposition suivante montre que ces trois familles de voisinages sont pratiquement les mêmes.

PROPOSITION 2.4 (voir Kaimanovich [Ka]). — Soit \widetilde{M} une variété de Hadamard à courbure négative pincée. Il existe des constantes $c_1 \geq 1$ et $c_2 \geq 1$ telles que pour tous $x \in \widetilde{M}$, $\xi \in \partial\widetilde{M}$ et $t \geq 0$, on ait

$$\begin{aligned} B_x(\xi, c_1^{-1} e^{-t}) &\subset \mathcal{O}(x, \xi, t) \subset B_x(\xi, c_1 e^{-t}), \\ B_x(\xi, c_2^{-1} e^{-t}) &\subset \mathcal{D}(x, \xi, t) \subset B_x(\xi, c_2 e^{-t}). \end{aligned}$$

Pour les besoins de la preuve du théorème 3.2, il sera utile de travailler avec un dernier type de voisinages, utilisés dans [Pe1]. Définissons $V(x, \xi, 0)$ comme l'ensemble des points $\eta \in \partial\widetilde{M}$ dont le projeté sur la géodésique $(x\xi)$ appartient en fait au rayon $[x\xi]$, et si $t \geq 0$, $V(x, \xi, t) \subset V(x, \xi, 0)$ comme l'ensemble de ceux qui se projettent sur $]\xi_x(t)\xi)$, i.e. à distance strictement supérieure à t de x . Le lemme suivant montre qu'ils sont encore comparables aux voisinages définis ci-dessus.

LEMME 2.5. — Pour tout $x \in \widetilde{M}$, $\xi \in \partial\widetilde{M}$ et $t \geq 2\alpha$, on a

$$V(x, \xi, t + \alpha) \subset \mathcal{D}(x, \xi, t) \subset V(x, \xi, t - 2\alpha).$$

Notons que même en courbure constante égale à -1 , ces voisinages ne coïncident pas exactement les uns avec les autres. Par exemple, on peut montrer que si $t \geq 0$, on a

$$V(x, \xi, t) = B_x\left(\xi, \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 + e^{-2t}}}\right).$$

Démonstration du lemme 2.5. — Soit tout d'abord η un point de $\mathcal{D}(x, \xi, t)$, qui vérifie donc $d(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq \alpha$. Notons u_0 le minimum de la fonction $\varphi(u) = \beta_\eta(\xi_x(u), \eta_x(t))$. Le point $\xi_x(u_0)$ est donc le projeté de η sur le rayon $[x\xi]$. L'inégalité triangulaire donne $\varphi(t) = \beta_\eta(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq d(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq \alpha$. D'autre part, si $u \leq t$, on a

$$\varphi(u) = \beta_\eta(\xi_x(u), \eta_x(t)) = \beta_\eta(\xi_x(u), \eta_x(u)) + \beta_\eta(\eta_x(u), \eta_x(t)) \geq -\alpha + t - u.$$

Si $u < t - 2\alpha$, on en déduit que $\varphi(u) > \varphi(t)$. Par stricte convexité de φ , le minimum de φ est nécessairement atteint en $u_0 \geq t - 2\alpha$, ce qui signifie exactement que η appartient à $V(x, \xi, t - 2\alpha)$.

Réciproquement, si $\eta \in V(x, \xi, t + \alpha)$, d'après la proposition 2.1, le sommet $\xi_x(s_0)$ du triangle intérieur à (x, ξ, η) vérifie $s_0 \geq t$, d'où on déduit $d(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq d(\xi_x(s_0), \eta_x(s_0)) \leq \alpha$. \square

Nous détaillons maintenant certaines propriétés des ensembles $V(x, \xi, t)$ qui nous serviront au cours de la preuve du théorème 3.2. La première est élémentaire :

LEMME 2.6. — Pour tout $x \in \widetilde{M}$, $\xi \in \partial\widetilde{M}$ et $t \geq 0$, si $\eta \in V(x, \xi, t)$, alors la distance de $\xi_x(t)$ à $(x\eta)$ est inférieure à 2α . En particulier, $t - 4\alpha \leq \beta_\eta(x, \xi_x(t)) \leq t$.

Démonstration. — L'inégalité triangulaire donne $\beta_\eta(x, \xi_x(t)) \leq t$. Le lemme 2.3 implique $d(\xi_x(t), [x\eta]) \leq 2\alpha$. Par le lemme 2.2, nous en déduisons $\beta_\eta(x, \xi_x(t)) \geq t - 4\alpha$. \square

Dans le lemme suivant, nous montrons comment varient ces ensembles $V(x, \xi, t)$ quand on fait varier légèrement ξ ou x .

LEMME 2.7. — a) Soient $x \in \widetilde{M}$, $\xi \in \partial\widetilde{M}$ et $t \geq 6\alpha$. Pour tout $\eta \in \mathcal{D}(x, \xi, t)$, on a

$$V(x, \eta, t) \subset V(x, \xi, t - 6\alpha).$$

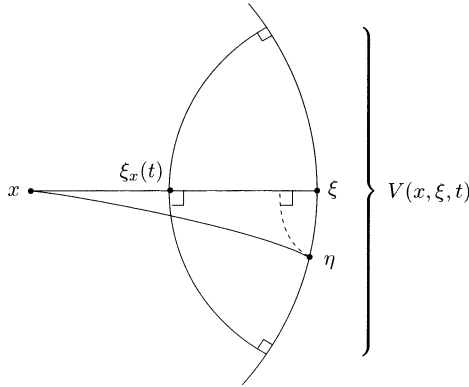


Figure 3. L'ensemble $V(x, \xi, t)$

b) Posons $K_1 = 6\alpha > 0$. Soient $x \in \widetilde{M}$, $\xi \in \partial\widetilde{M}$ et $t \geq K_1$. Pour tout $\eta \in V(x, \xi, t + K_1 + \alpha)$, on a

$$V(x, \eta, t + K_1) \subset V(x, \xi, t) \subset V(x, \eta, t - K_1)$$

c) Pour tout $D > 0$, notons $K_2 = K_2(D) = 2D + 4\alpha > 0$. Soient x et y des points de \widetilde{M} tels que $d(x, y) \leq D$, $\xi \in \partial\widetilde{M}$, et $t \geq K_2$. Alors

$$V(x, \xi, t + K_2) \subset V(y, \xi, t) \subset V(x, \xi, t - K_2).$$

Démonstration. — a) Soient $\eta \in \mathcal{D}(x, \xi, t)$ et $\zeta \in V(x, \eta, t)$. Notons $\xi_x(u_0)$ le projeté de ζ sur le rayon $[x\xi]$. Par définition, u_0 minimise la fonction $u \mapsto \varphi(u) = \beta_\zeta(\xi_x(u), \eta_x(t))$. Par hypothèse, on a

$$\varphi(t) = \beta_\zeta(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq d(\xi_x(t), \eta_x(t)) \leq \alpha.$$

Par ailleurs, si $u \leq t$, l'inégalité triangulaire et le lemme 2.6 donnent

$$\varphi(u) = \beta_\zeta(\xi_x(u), \eta_x(u)) + \beta_\zeta(\eta_x(u), \eta_x(t)) \geq -\alpha + t - u - 4\alpha.$$

Autrement dit, si $0 \leq u < t - 6\alpha$, alors $\varphi(u) > \varphi(t)$. La stricte convexité de φ implique qu'elle atteint son minimum en $u_0 \geq t - 6\alpha$. Ceci signifie exactement que $\zeta \in V(x, \xi, t - 6\alpha)$.

b) Le lemme 2.5 donne $V(x, \xi, t + K_1 + \alpha) \subset \mathcal{D}(x, \xi, t + K_1)$. Si $\eta \in V(x, \xi, t + K_1 + \alpha)$, le a) ci-dessus donne

$$V(x, \eta, t + 6\alpha) \subset V(x, \xi, t).$$

De plus, on voit aisément que $\xi \in \mathcal{D}(x, \eta, t)$ et le a) donne alors

$$V(x, \xi, t) \subset V(x, \eta, t - K_1).$$

c) Soit $\zeta \in V(y, \xi, t)$, avec $t \geq K_2$. Posons $\varphi(u) = \beta_\zeta(\xi_x(u), \xi_y(t))$. Puisque $d(x, y) \leq D$ et que les rayons $[x\xi]$ et $[y\xi]$ sont asymptotes, on a $d(\xi_x(u), \xi_y(t)) \leq d(x, y) \leq D$ pour tout $u \geq 0$. On en déduit $|\beta_\zeta(\xi_x(t), \xi_y(t))| \leq D$ et en particulier $\varphi(t) \leq D$. D'autre part, pour tout $0 \leq u \leq t$, d'après le lemme 2.6, on a

$$\varphi(u) = \beta_\zeta(\xi_x(u), \xi_y(t)) + \beta_\zeta(\xi_y(u), \xi_y(t)) \geq -D + t - u - 4\alpha.$$

Comme φ est strictement convexe, le projeté $\xi_x(u_0)$ de ζ sur $(x\xi)$ vérifie $u_0 \geq t - 2D - 4\alpha = t - K_2$, ce qui montre que $V(y, \xi, t) \subset V(x, \xi, t - K_2)$. L'autre inclusion se prouve en inversant les rôles de x et y . \square

Pour finir ce paragraphe, énonçons un dernier lemme qui nous servira par la suite, et qui découle immédiatement des lemmes 2.7, c), 2.5 et de la proposition 2.4 :

LEMME 2.8. — Soit $D > 0$ fixé. Il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tous $(o, x) \in \widetilde{M}^2$ avec $d(o, x) \leq D$, et tout $\xi \in \partial\widetilde{M}$

$$V(x, \xi, 0) \supset B_o(\xi, \varepsilon).$$

2.5. Action d'une isométrie parabolique sur le bord.

Nous allons maintenant nous servir des ensembles $V(x, \xi, t)$ pour comprendre l'action d'une isométrie parabolique de \widetilde{M} sur le bord privé de son point fixe, ainsi que sur les horosphères qu'elle stabilise (i.e. celles qui sont centrées en son point fixe). Une isométrie parabolique, quand elle est itérée, attire tous les points du bord d'une part, et de \widetilde{M} d'autre part vers son point fixe. Ce que dit le lemme ci-dessous, c'est qu'on peut quantifier et relier entre eux ces déplacements.

LEMME 2.9. — Soient $o \in \widetilde{M}$, $\xi \in \partial\widetilde{M}$ et K un compact de $\partial\widetilde{M} \setminus \{\xi\}$. Il existe une constante $K_3 > 0$, telle que pour toute isométrie parabolique p fixant ξ , et tout $t \geq K_3$, on ait

a) Si $d(o, po) \geq 2t$, alors $pK \subset V(o, \xi, t - K_3)$ et pour tout $\eta \in K$,

$$|\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi(t)) - d(o, po) + 2t| \leq 2K_3.$$

b) Si $d(o, po) \leq 2t$, alors $pK \cap V(o, \xi, t + K_3) = \emptyset$ et, pour tout $\eta \in K$,

$$|\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi(t))| \leq 2K_3.$$

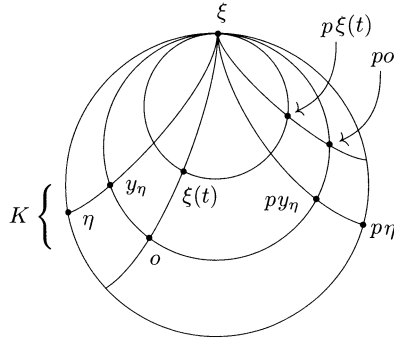


Figure 4. Illustration du lemme 2.9

Démonstration. — Si $\eta \in K$, notons y_η l'intersection de la géodésique $(\xi\eta)$ et de l'horosphère centrée en ξ et passant par o . Par compacité de K , on a

$$C(K, o, \xi) := \sup_{\eta \in K} d(o, y_\eta) < +\infty.$$

Notons $(\xi(s))_{s \geq 0}$ le rayon $[o\xi]$ et $(\xi_\eta(s))_{s \geq 0} \in \mathbb{R}$ le paramétrage de la géodésique $(\eta\xi)$ positif sur le rayon $[y_\eta\xi]$. On a donc $y_\eta = \xi_\eta(0)$ et $o = \xi(0)$.

Considérons le triangle $(o, \xi, p\eta)$. Comme $\beta_\xi(o, py_\eta) = 0$, les sommets des côtés $[o\xi]$ et $[p\eta\xi]$ de son triangle intérieur s'écrivent $\xi(s_0)$ et $\xi_{p\eta}(s_0) = p\xi_\eta(s_0)$, avec $s_0 \geq 0$. L'inégalité triangulaire et la définition du triangle intérieur donnent facilement $2s_0 - \alpha \leq d(o, py_\eta) \leq 2s_0 + \alpha$. D'où on déduit, puisque $d(po, py_\eta) = d(o, y_\eta) \leq C(K, o, \xi)$,

$$(1) \quad 2s_0 - C(K, o, \xi) - \alpha \leq d(o, po) \leq 2s_0 + C(K, o, \xi) + \alpha$$

D'après la proposition 2.1, le projeté de $p\eta$ sur $[o\xi]$ est à distance au plus α de $\xi(s_0)$. Posons $K_3 = \frac{1}{2}C(K, o, \xi) + \frac{3}{2}\alpha$. Avec l'encadrement (1), l'inégalité $d(o, po) \geq 2t$ implique $p\eta \in V(o, \xi, t - K_3)$. Ceci étant vrai pour tout $\eta \in K$, on a bien $pK \subset V(o, \xi, t - K_3)$.

Si $d(o, po) \leq 2t$, on montre de même que $pK \cap V(o, \xi, t + K_3) = \emptyset$.

Il nous reste maintenant à estimer $\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi(t))$ pour $\eta \in \partial\widetilde{M}$. On a $\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi(t)) = \beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi_\eta(t)) + \beta_{p\eta}(p\xi_\eta(t), p\xi(t))$. Remarquons que

$$|\beta_{p\eta}(p\xi_\eta(t), p\xi(t))| \leq d(\xi_\eta(t), \xi(t)) \leq d(y_\eta, o) \leq C(K, o, \xi).$$

Il nous suffit donc d'estimer $\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi_\eta(t))$. Si $s_0 \leq t$, alors

$$|\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi_\eta(t))| \leq d(\xi(t), p\xi_\eta(t)) \leq d(\xi(s_0), p\xi_\eta(s_0)) \leq \alpha.$$

Supposons maintenant $s_0 \geq t$ et notons $(c(t))_{t \geq 0}$ le paramétrage du rayon géodésique $[o p\eta]$. Le troisième sommet du triangle intérieur à $(o, \xi, p\eta)$ est alors $c(s_0)$. Par définition de ce triangle intérieur, on a alors $\beta_{p\eta}(c(s_0), p\xi_\eta(s_0)) = 0$, d'où on déduit que $\beta_{p\eta}(c(2s_0 - t), p\xi_\eta(t)) = 0$. D'autre part, on a aussi $|\beta_{p\eta}(\xi(t), c(t))| \leq d(\xi(t), c(t)) \leq \alpha$. À l'aide de toutes ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} \beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi_\eta(t)) &= \beta_{p\eta}(\xi(t), c(t)) + \beta_{p\eta}(c(t), c(2s_0 - t)) \\ &= \beta_{p\eta}(\xi(t), c(t)) + 2(s_0 - t), \end{aligned}$$

puis $|\beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi_\eta(t)) - (2s_0 - 2t)| \leq \alpha + C(K, o, \xi)$. Finalement, en utilisant la notation $u^+ = \max(u, 0)$ pour $u \in \mathbb{R}$, on peut rassembler les deux cas $s_0 \leq t$ et $s_0 \geq t$ ci-dessus pour obtenir pour tout $t \geq 0$

$$(2) \quad \begin{aligned} (2s_0 - 2t)^+ - \alpha - C(K, o, \xi) &\leq \beta_{p\eta}(\xi(t), p\xi_\eta(t)) \\ &\leq (2s_0 - 2t)^+ + \alpha + C(K, o, \xi) \end{aligned}$$

Une manipulation élémentaire des encadrements (1) et (2) permet de conclure la preuve du lemme. □

2.6. Géométrie des cusps.

Dans ce paragraphe, nous revenons sur les hypothèses (*) et (**) introduites plus haut sur la croissance des sous-groupes paraboliques maximaux de Γ . Nous montrons que (*) est satisfaite lorsque les cusps de M sont localement symétriques (proposition 2.10), nous détaillons certaines conséquences de ces hypothèses et nous donnons un exemple explicite où (**) est satisfaite mais pas (*).

L'exposant critique d'un groupe discret d'isométries Γ de \widetilde{M} est défini par

$$\delta_\Gamma = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \# \{ \gamma \in \Gamma, d(o, \gamma o) \leq T \}.$$

C'est encore l'exposant critique de la série de Poincaré de Γ :

$$P(\Gamma, o, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)}.$$

Le groupe Γ est dit *de type divergent* si la série ci-dessus diverge en $s = \delta_\Gamma$. Si Γ est *non élémentaire*, c'est-à-dire si $\#\Lambda_\Gamma = +\infty$, alors δ_Γ est strictement positif, et Roblin [Ro] a démontré que la limite supérieure ci-dessus est en fait une limite. Mais un tel résultat est inconnu pour les groupes élémentaires, par exemple les sous-groupes paraboliques de Γ . Pour

démontrer le théorème 3.2, nous aurons besoin justement de supposer que c'est bien une limite, et plus encore : nous supposons que pour tout sous-groupe parabolique Π de Γ , il existe une constante $D \geq 1$, telle que

$$(*) \quad D^{-1} \exp(\delta_\Pi T) \leq \#\{p \in \Pi, d(o, po) \in [T, T + 1[\} \leq D \exp(\delta_\Pi T)$$

La proposition ci-dessous montre que cette hypothèse est vérifiée dès que les cusps sont « raisonnables ».

PROPOSITION 2.10. — *L'hypothèse (*) est vérifiée dès que les cusps de M sont isométriques aux cusps d'une variété localement symétrique de rang 1.*

Démonstration. — Pour chaque sous-groupe parabolique Π , on peut vérifier cette hypothèse en supposant que o est dans le cusp considéré. Or le sous-groupe parabolique Π stabilise le cusp, donc Πo reste dans les relevés du cusp. La preuve consiste alors simplement à vérifier que dans les espaces localement symétriques, cette condition de croissance est vérifiée. Dans l'espace hyperbolique réel, c'est un simple calcul utilisant d'une part le fait qu'une isométrie parabolique p fixant le point ∞ (dans le modèle du demi-espace supérieur) agit par translation euclidienne sur les horosphères horizontales, et d'autre part l'équivalent $d(o, po) \sim 2 \log d_{\text{eucl}}(o, po)$, où o est le point à hauteur (euclidienne) 1 sur l'axe vertical. Dans les espaces hyperboliques exotiques, il est encore possible d'obtenir un équivalent exact de cette distance $d(o, po)$ (voir Corlette-Iozzi [CI], formule (3.5)), ce qui permet de conclure (voir aussi une preuve complète dans [Ne], lemma 3.5). \square

Cette hypothèse (*) implique de manière immédiate que tout sous-groupe parabolique Π de Γ est divergent. Des travaux de Dal'bo, Otal et Peigné, on déduit le résultat suivant :

THÉORÈME (voir Dal'bo-Otal-Peigné [DOP]). — *Si Γ est un groupe géométriquement fini dont tout sous-groupe parabolique Π est divergent, alors $\delta_\Pi < \delta_\Gamma$ et en particulier, le groupe Γ est lui-même divergent.*

En résumé, sous (*), on a le trou critique $\delta_\Pi < \delta_\Gamma$, et le groupe Γ est divergent. En fait, on peut affaiblir l'hypothèse (*) pour prouver le théorème 4.2 sous l'hypothèse moins restrictive (**), rappelée ci-dessous, à condition de supposer également que Γ est divergent.

Pour tout sous-groupe parabolique Π de Γ :

1) La quantité

$$(**)_1 \quad \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq t+N}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)} \Big/ \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq t}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)}$$

converge vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, uniformément en $t \geq 1$.

2) Pour tout $N \geq 0$ fixé, on a

$$(**)_2 \quad \sup_{t \geq 1} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq t}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)} \Big/ \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq t+N}} e^{-\delta_\Gamma d(o, po)} < +\infty$$

3) Pour tout $C > 0$, on a

$$(**)_3 \quad \sup_{t \geq 1} \frac{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t + C\}}{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq t\}} < +\infty.$$

Ces conditions $(**)$ découlent aisément de la condition $(*)$ de croissance des cusps. L'intérêt de $(**)$ est qu'il existe des exemples de surfaces qui satisfont $(**)$ et pas $(*)$, et dont le groupe fondamental Γ est divergent.

L'exemple suivant a été obtenu avec l'aide de Marc Peigné (communication orale). Nous renvoyons à [DOP] pour plus de détails.

L'idée est de partir d'une surface hyperbolique \mathbb{H}/Γ , et de perturber la métrique dans un cusp de S . Soit donc Π un sous-groupe parabolique maximal de Γ , et notons $p \in \Pi$ un générateur de Π . En courbure constante, on a $d(o, p^n o) \sim 2 \log |n|$ quand $|n| \rightarrow +\infty$. En modifiant légèrement la courbure dans le cusp, on peut s'arranger pour avoir

$$d(o, p^n o) \sim 2 \log |n| + 4 \log \log |n|,$$

de sorte que le groupe Π soit convergent. De plus, il est possible d'effectuer cette modification tout en conservant la propriété de trou critique $\delta_\Pi < \delta_\Gamma$. En effet (voir par exemple [Pe2]), on peut pour cela considérer un groupe discret Γ_0 constitué d'isométries hyperboliques et tel que $\delta_{\Gamma_0} > \frac{1}{2}$. On se donne d'autre part une isométrie parabolique p et une isométrie hyperbolique γ de l'espace hyperbolique \mathbb{H} dont les points fixes dans $\partial\mathbb{H}$

sont distincts et qui engendrent un groupe libre. Notons Π_0 le groupe parabolique engendré par p , d'exposant critique $\delta_{\Pi_0} = \frac{1}{2}$. Soient Γ'_0 le groupe $\gamma\Gamma_0\gamma^{-1}$ et Γ' le groupe engendré par Γ'_0 et Π_0 . Il n'est pas difficile de voir que d'une part $\delta_{\Gamma'} \geq \max\{\delta_{\Gamma'_0}, \delta_{\Pi_0}\}$, et d'autre part $\delta_{\Gamma'_0} = \delta_{\Gamma_0} > \frac{1}{2}$. Autrement dit, le groupe Γ' vérifie la propriété de trou critique.

Remarquons alors que la modification de la courbure dans le cusp associé à Π_0 ne change ni l'exposant critique du groupe Π ainsi obtenu, ni celui du groupe Γ engendré par Π et Γ'_0 . Le groupe Γ satisfait donc la propriété de trou critique avec la croissance de Π annoncée ci-dessus.

Rappelons que cette propriété de trou critique implique (théorème 2.11) que le groupe Γ est divergent, ce qui nous permet d'obtenir le théorème 4.2.

Notons alors $u(t) = 2 \log t + 4 \log \log t$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \delta_{\Pi} &= \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \#\{n \in \mathbb{N}, 2 \log n + 4 \log \log n \leq T\} \\ &= \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log u^{-1}(T). \end{aligned}$$

On montre de façon élémentaire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(3) \quad \frac{1}{c} \frac{e^{t/2}}{t^2} \leq u^{-1}(t) \leq c \frac{e^{t/2}}{t^2},$$

d'où on déduit d'une part que $\delta_{\Pi} = \frac{1}{2}$ et d'autre part que la condition (*) n'est pas vérifiée. De plus, la propriété de trou critique implique $\delta_{\Gamma} > \frac{1}{2}$.

La condition (**)₃ est immédiate, car le quotient $u^{-1}(t+c)/u^{-1}(t)$ est borné par $c^2 e^{c/2} t^2 / (t+c)^2$ et donc par $c^2 e^{c/2}$ uniformément en $t \geq 0$.

Les conditions (**)₁ et (**)₂ nécessitent l'estimée de

$$\sum_{n \in \mathbb{N}, d(o, p^n o) \geq t} e^{-\delta_{\Gamma} d(o, p^n o)} = \sum_{n \in \mathbb{N}, n \geq u^{-1}(t)} \frac{1}{n^{2\delta_{\Gamma}} (\log n)^{4\delta_{\Gamma}}}.$$

Cette série est comparable à l'intégrale $\int_{u^{-1}(t)}^{+\infty} dx / x^{2\delta_{\Gamma}} (\log x)^{4\delta_{\Gamma}}$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\delta_{\Gamma}} (\log x)^{4\delta_{\Gamma}}} &= \frac{1}{2\delta_{\Gamma} - 1} \frac{1}{a^{2\delta_{\Gamma}-1} (\log a)^{4\delta_{\Gamma}}} \\ &\quad - \frac{4\delta_{\Gamma}}{2\delta_{\Gamma} - 1} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\delta_{\Gamma}} (\log x)^{4\delta_{\Gamma}+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit l'équivalent

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\delta_\Gamma} (\log x)^{4\delta_\Gamma}} \sim \frac{1}{2\delta_\Gamma - 1} \frac{1}{a^{2\delta_\Gamma - 1} (\log a)^{4\delta_\Gamma}}$$

quand $a \rightarrow +\infty$. Si $a = u^{-1}(t)$, on obtient

$$\int_{u^{-1}(t)}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\delta_\Gamma} (\log x)^{4\delta_\Gamma}} \sim \frac{1}{2\delta_\Gamma - 1} \frac{e^{-t(\delta_\Gamma - 1/2)}}{t^2}.$$

La quantité à estimer pour $(**)_1$ est donc comparable à

$$\frac{e^{-(t+N)(\delta_\Gamma - 1/2)}}{e^{-t(\delta_\Gamma - 1/2)}} \frac{t^2}{(t+N)^2} \leq e^{-N(\delta_\Gamma - 1/2)},$$

pour $N \geq 1$ et $t \geq 0$. On a bien obtenu la convergence uniforme souhaitée vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$.

De même, la quantité à estimer pour $(**)_2$ est comparable à

$$\frac{e^{-t(\delta_\Gamma - 1/2)}}{e^{-(t+N)(\delta_\Gamma - 1/2)}} \frac{(t+N)^2}{t^2},$$

qui est borné par $(1+N)^2 e^{N(\delta_\Gamma - 1/2)}$ pour $t \geq 1$, ce qui donne la condition $(**)_2$.

Remarque 2.12. — Dans l'exemple ci-dessus, la propriété de trou critique $\delta_\Pi < \delta_\Gamma$ nous a servi d'une part à montrer que Γ est divergent, et d'autre part à vérifier (**). Il est certainement possible de produire beaucoup d'autres exemples avec la propriété de trou critique et vérifiant (**) et pas (*), en perturbant comme ci-dessus la métrique de sorte que $u^{-1}(t)$ soit comparable à $e^{t/2}/\varphi(t)$, avec φ une fonction sous-exponentielle, polynomiale par exemple.

En supposant qu'il n'y a pas de trou critique ($\delta_\Pi = \delta_\Gamma$), on peut par exemple montrer (**) si $u^{-1}(t)$ est comparable à $e^{t/2 - \sqrt{t}}$. Mais on n'a pas de moyen a priori de savoir si Γ est divergent. La question de savoir si on peut construire un groupe fuchsien divergent sans trou critique est un travail en cours de M. Peigné et J.-P. Otal. Il serait intéressant que leur construction permette d'obtenir cette croissance de $u^{-1}(t)$, et donc la propriété (**). Sur un tel exemple de surface, la divergence de Γ et la forme de $u^{-1}(t)$ permettraient de démontrer, grâce au critère de [DOP], que la mesure de Patterson-Sullivan est finie, hypothèse sous laquelle les résultats de [Sc], qui utilisent le théorème 4.2, sont obtenus.

3. Mesures conformes et lemme de l'ombre.

3.1. Densités conformes.

Une *densité conforme* Γ -invariante de dimension $\delta > 0$ sur $\partial\widetilde{M}$ est une famille $\nu = (\nu_x)_{x \in \widetilde{M}}$ de mesures finies sur $\partial\widetilde{M}$ qui vérifient la condition d'invariance $\nu_{\gamma x} = \gamma_* \nu_x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, et pour tous $(x, y) \in \widetilde{M}^2$ et $\xi \in \partial\widetilde{M}$

$$\frac{d\nu_x}{d\nu_y}(\xi) = \exp(-\delta\beta_\xi(x, y)), \quad \nu_y\text{-p.s.}$$

Soit $o \in \widetilde{M}$ un point fixé dans toute la suite de ce paragraphe. La densité ν sera dite *normalisée* si ν_o est une probabilité.

Si Γ est un groupe discret non élémentaire, un résultat originellement dû à Patterson [Pa] assure l'existence d'une densité conforme invariante de dimension δ_Γ à support Λ_Γ . L'étude d'abord faite par Sullivan [S1], [S2] en courbure constante, puis généralisée en courbure variable [Yu] montre aussi que toute densité δ -conforme invariante vérifie $\delta \geq \delta_\Gamma$. Lorsque Γ est divergent, on a de plus :

PROPOSITION 3.1. — *Si Γ est non élémentaire divergent, il existe une unique densité conforme invariante normalisée $\nu = (\nu_x)_{x \in \widetilde{M}}$ de dimension δ_Γ à support Λ_Γ , et elle est sans atomes. La mesure ν_o est alors appelée mesure de Patterson.*

Dans le paragraphe ci-dessous, nous travaillerons avec une densité conforme invariante de dimension quelconque, mais la densité donnée par la proposition ci-dessus sera privilégiée dans tout le paragraphe 4.

3.2. Lemme de l'ombre.

Dans le cas d'une variété compacte à courbure négative, le lemme de l'ombre, originellement dû à Sullivan [S1] en courbure constante, permet de montrer que pour tout $x \in \widetilde{M}$, la mesure de Patterson ν_x de Γ est la mesure de Hausdorff (de dimension δ_Γ) pour la distance de Gromov d_x sur $\partial\widetilde{M}$. En revanche, dans le cas d'une variété non compacte, la description de ν est beaucoup plus délicate. Le cas des variétés géométriquement finies de courbure constante fut décrit par Stratmann et Velani [SV], et récemment généralisé aux variétés localement symétriques de rang 1 par Newberger dans [Ne]. Nous montrerons que cette description est encore valide pour les variétés géométriquement finies de courbure variable sous la condition (*). Pour cela, nous adapterons la preuve de Peigné [Pe1] du résultat

de Stratmann et Velani. Le résultat obtenu (différemment) par Hersensky et Paulin dans [HP2] correspond en fait au premier encadrement de la proposition 3.4 (voir paragraphe suivant).

Les estimées du théorème ci-dessous se démontrent cusp par cusp, nous supposons donc dans ce paragraphe que M n'a qu'un seul cusp noté C_1 . Rappelons les notations du paragraphe 2.1. Le cœur de Nielsen N_Γ est un convexe qui se décompose en $N_\Gamma = C_0 \sqcup C_1$, où C_0 est la partie compacte de la variété, de diamètre inférieur à Δ , et le cusp C_1 est isométrique au quotient de $\tilde{C}_1 := \mathcal{H}_1 \cap \tilde{C}(\Gamma)$ par Π , où \mathcal{H}_1 est une horoboule centrée au point parabolique $\xi_1 \in \Lambda_\Gamma$, et Π est le stabilisateur de ξ_1 dans Γ . On peut alors choisir un relevé \tilde{C}_0 de C_0 à \tilde{M} , qui soit connexe et de diamètre inférieur à Δ , et tel que les adhérences de \tilde{C}_0 et \tilde{C}_1 s'intersectent. On choisira une famille $\{\gamma_i\}_{i \geq 0}$ de représentants de Γ/Π et on notera $\xi_i = \gamma_i \xi_1$ et \mathcal{H}_i l'horoboule $\gamma_i \mathcal{H}_1$. On a alors

$$\Gamma \tilde{C}_1 = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} \gamma_i \tilde{C}_1 = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} \mathcal{H}_i \cap \tilde{C}(\Gamma).$$

D'autre part, quitte à faire agir le stabilisateur $\gamma_i \Pi \gamma_i^{-1}$ de \mathcal{H}_i , nous pouvons supposer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \tilde{C}_0$ intersecte le rayon $[o\xi_i]$ (et le bord $\partial \mathcal{H}_i$ évidemment).

Rappelons pour finir que si $\xi \in \partial \tilde{M}$, on désigne toujours par $\xi(t)$ le point à distance t de o sur le rayon géodésique $[o\xi]$.

Le théorème ci-dessous étend le lemme de l'ombre en courbure variable, permettant ainsi d'obtenir des estimées précises de la mesure des ombres sur le bord.

THÉORÈME 3.2. — *Soit $M = \tilde{M}/\Gamma$ une variété géométriquement finie à courbure négative pincée dont les cusps satisfont l'hypothèse (*). Alors pour toute densité conforme $\nu = (\nu_x)_{x \in \tilde{M}}$ Γ -invariante sans atomes de dimension $\delta \geq \delta_\Gamma$ et de support Λ_Γ , il existe des constantes $A_0 > 0$ et $A_1 > 0$ telles que pour tout $\xi \in \Lambda_\Gamma$ et $t \geq 0$,*

a) *si $\xi(t) \in \Gamma \tilde{C}_0$, alors $A_0^{-1} \exp(-\delta t) \leq \nu_o(V(o, \xi, t)) \leq A_0 \exp(-\delta t)$,*

b) *si $\xi(t) \in \Gamma \tilde{C}_1$, alors*

$$A_1^{-1} e^{-\delta t + (2\delta_\Pi - \delta)d(\xi(t), \Gamma o)} \leq \nu_o(V(o, \xi, t)) \leq A_1 e^{-\delta t + (2\delta_\Pi - \delta)d(\xi(t), \Gamma o)}.$$

En particulier, le théorème s'applique à l'unique densité δ_Γ -conforme invariante donnée par la proposition 3.1, qui est sans atomes.

3.3. Preuve du théorème 3.2.

Le plan de la preuve est celui de Peigné [Pe1]; la différence essentielle réside dans la proposition 3.4, où se manifeste la courbure variable, et où l'hypothèse (*) est utilisée. Nous rappelons toutefois toute la démonstration pour la commodité du lecteur. Elle se fait en plusieurs étapes. Le lemme 3.3 est le lemme de l'ombre classique, il traite le cas où $\xi(t)$ appartient au relevé $\Gamma\tilde{C}_0$ de la partie compacte. Le résultat clé est la proposition 3.4. De cette proposition découlent le corollaire 3.5, qui traite le cas où $\xi = \xi_i$ est un point parabolique et $\xi(t)$ appartient à l'horoboule \mathcal{H}_i centrée en ξ_i , et le lemme 3.6 qui permet de conclure la démonstration du théorème 3.2 dans tous les autres cas.

Notons le fait que la condition (*), bien que cruciale pour obtenir le théorème 3.2, ne sert qu'à peu de reprises dans la démonstration. Nous mettrons en valeur un certain nombre d'estimées qui ne font pas appel à (*), et qui nous serviront à prouver le lemme 3.7, dans lequel sont rassemblés des résultats utiles au paragraphe 4 sous la condition plus faible (**).

Commençons par une remarque importante : si $\eta \in V(o, \xi, t)$, on a $|\beta_\eta(o, \xi(t)) - t| \leq 4\alpha$ par le lemme 2.6. En utilisant la relation de conformité de ν , on obtient

$$(4) \quad \exp(-4\delta\alpha + \delta t) \leq \frac{\nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t))}{\nu_o(V(o, \xi, t))} \leq \exp(4\delta\alpha + \delta t).$$

Autrement dit, il suffit d'estimer $\nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t))$ pour prouver le théorème 3.2, ce que nous ferons par la suite.

LEMME 3.3. — *Il existe une constante $B_0 > 0$ telle que si $\xi(t) \in \Gamma\tilde{C}_0$, alors*

$$B_0^{-1} \leq \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)) \leq B_0.$$

Vu l'encadrement (4), le lemme 3.3 démontre la partie a) du théorème, avec $A_0 = B_0 \exp(4\delta\alpha)$.

Démonstration. — Si $\xi(t)$ appartient à $\Gamma\tilde{C}_0$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $d(\xi(t), \gamma o) \leq \Delta$. Par conformité de ν , ceci implique

$$\begin{aligned} e^{-\delta\Delta} \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)) &\leq \nu_{\gamma o}(V(o, \xi, t)) = \nu_o(V(\gamma^{-1}o, \gamma^{-1}\xi, t)) \\ &\leq e^{\delta\Delta} \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)). \end{aligned}$$

Comme ν_o est une probabilité, la quantité $\nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t))$ est majorée par $\exp(\delta\Delta)$. D'autre part, comme la distance de $\gamma^{-1}\xi(t)$ à o est

inférieure à Δ , il existe d'après le lemme 2.8 un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$V(\gamma^{-1}o, \gamma^{-1}\xi, t) = V(\gamma^{-1}\xi(t), \gamma^{-1}\xi, 0) \supset B_o(\gamma^{-1}\xi, \varepsilon),$$

et comme ν est de support Λ_Γ , on en déduit

$$1 \geq \nu_o(V(\gamma^{-1}o, \gamma^{-1}\xi, t)) \geq \inf_{\eta \in \Lambda_\Gamma} \nu_o(B_o(\eta, \varepsilon)) = C_\varepsilon > 0. \quad \square$$

Considérons à présent le cas où $\xi = \xi_i$ est un point parabolique de Λ_Γ . On notera $(\xi_i(t))_{t \geq 0}$ le rayon $[o\xi_i]$ et s_i l'instant d'entrée du rayon $[o\xi_i]$ dans l'horoboule \mathcal{H}_i , soit encore $\xi_i(s_i) = [o\xi_i] \cap \partial\mathcal{H}_i$.

PROPOSITION 3.4. — *Soit M une variété géométriquement finie dont les cusps satisfont (*). Il existe des constantes $B_1 > 0$ et $B_2 > 0$, telles que pour tout point parabolique ξ_i et tout $t \geq s_i$, on a*

$$B_1^{-1} \exp((2\delta_\Pi - \delta)(t - s_i)) \leq \nu_{\xi_i(t)}(V(o, \xi_i, t)) \leq B_1 \exp((2\delta_\Pi - \delta)(t - s_i)),$$

$$B_2^{-1} \exp((2\delta_\Pi - \delta)(t - s_i)) \leq \nu_{\xi_i(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o, \xi_i, t)) \leq B_2 \exp((2\delta_\Pi - \delta)(t - s_i)).$$

COROLLAIRE 3.5. — *Cette proposition démontre le théorème quand $\xi = \xi_i \in \Lambda_{pb}$ et $\xi_i(t) \in \mathcal{H}_i$.*

Démonstration du corollaire 3.5. — En effet, dans ce cas, on a

$$|d(\xi_i(t), \Gamma o) - (t - s_i)| = |d(\xi_i(t), \Gamma o) - d(\xi_i(t), \Gamma\widetilde{C}_0)| \leq \Delta.$$

Démonstration de la proposition 3.4. — La première étape est l'estimation des mesures $\nu_{\xi_1(t)}(V(o, \xi_1, t))$ et $\nu_{\xi_1(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o, \xi_1, t))$ quand $\xi_i = \xi_1$ et $\xi_1(t) \in \widetilde{C}_1$. À la fin de la preuve, nous expliquerons comment passer de ξ_1 à $\xi_i = \gamma_i\xi_1$.

Dans ce premier cas, vus les choix des relevés $\widetilde{C}_0, \widetilde{C}_1$ de C_0, C_1 , le point $\xi_1(s_1)$ est dans l'adhérence de \widetilde{C}_0 , donc à distance inférieure à Δ de o , de sorte que $s_1 \leq \Delta$. On peut donc oublier la contribution de s_1 dans l'estimée ci-dessus, ou plus exactement considérer qu'elle est intégrée dans les constantes B_1 et B_2 .

Soit \mathcal{D} un domaine fondamental *borélien* pour l'action de Π sur $\Lambda_\Gamma \setminus \{\xi_1\}$, i.e. satisfaisant à $\nu_x(\bigcup p\mathcal{D}) = \nu_x(\Lambda_\Gamma \setminus \{\xi_1\})$ et $\nu_x(\mathcal{D} \cap p\mathcal{D}) = 0$ pour tout $p \neq Id$. On le choisira relativement compact dans $\Lambda_\Gamma \setminus \{\xi_1\}$.

Comme ν est sans atomes et de support Λ_Γ , on a $\nu_x(\Lambda_\Gamma \setminus \{\xi_1\}) = \nu_x(\partial\widetilde{M})$ pour tout x , d'où

$$\sum_{\substack{p \in \Pi \\ p\mathcal{D} \subset V(o, \xi_1, t)}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}) \leq \nu_{\xi_1(t)}(V(o, \xi_1, t)) \leq \sum_{\substack{p \in \Pi \\ p\mathcal{D} \cap V(o, \xi_1, t) \neq \emptyset}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}).$$

En utilisant le lemme 2.9 avec $K = \mathcal{D}$, on obtient

$$(5) \quad \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq 2t + 2K_3}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}) \leq \nu_{\xi_1(t)}(V(o, \xi_1, t)) \leq \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq 2t - 2K_3}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}).$$

De même, on trouve

$$(6) \quad \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) < 2t - 2K_3}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}) \leq \nu_{\xi_1(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o, \xi_1, t)) \leq \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) < 2t + 2K_3}} \nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}).$$

Nous devons donc estimer $\nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D})$. Par conformité et invariance de ν sous l'action de Γ , nous avons

$$\nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} e^{-\delta\beta_{p\eta}(\xi_1(t), p\xi_1(t))} d\nu_{\xi_1(t)}(\eta).$$

Le lemme 2.9 fournit une estimée de $\beta_{p\eta}(\xi_1(t), p\xi_1(t))$ en fonction de $d(o, po)$. Si $d(o, po) \leq 2t$, nous en déduisons

$$\exp(-2\delta K_3) \leq \frac{\nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D})}{\nu_{\xi_1(t)}(\mathcal{D})} \leq \exp(2\delta K_3).$$

Et si $d(o, po) \geq 2t$, alors

$$\exp(-2\delta K_3 - \delta d(o, po) + 2\delta t) \leq \frac{\nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D})}{\nu_{\xi_1(t)}(\mathcal{D})} \leq \exp(2\delta K_3 - \delta d(o, po) + 2\delta t).$$

Remarquons qu'en fait, dans (5) et (6), on sommat sur $d(o, po) \geq 2(t \pm K_3)$ et $d(o, po) \leq 2(t \pm K_3)$. Il faut alors remplacer t par $t \pm K_3$ dans les encadrements ci-dessus, ce qui donne une estimée de $\nu_{\xi_1(t \pm K_3)}(p\mathcal{D})$ au lieu de $\nu_{\xi_1(t)}(p\mathcal{D})$. Mais la conformité de ν implique que le quotient de

ces deux dernières quantités est au plus $\exp(\delta K_3)$. On en déduit alors les encadrements

$$(7) \quad e^{-\delta K_3} e^{2\delta t} \nu_{\xi_1(t+K_3)}(\mathcal{D}) \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o,po) \geq 2t+2K_3}} e^{-\delta d(o,po)} \leq \nu_{\xi_1(t)}(V(o, \xi_1, t)) \\ \leq e^{\delta K_3} e^{2\delta t} \nu_{\xi_1(t-K_3)}(\mathcal{D}) \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o,po) \geq 2t-2K_3}} e^{-\delta d(o,po)}.$$

De même, on trouve

$$(8) \quad e^{-3\delta K_3} \nu_{\xi_1(t-K_3)}(\mathcal{D}) \# \{p \in \Pi, d(o, po) < 2(t - K_3)\} \\ \leq \nu_{\xi_1(t)}(\partial \widetilde{M} \setminus V(o, \xi_1, t)) \\ \leq e^{3\delta K_3} \nu_{\xi_1(t+K_3)}(\mathcal{D}) \# \{p \in \Pi, d(o, po) < 2(t + K_3)\}.$$

Dans les deux cas, il reste à estimer $\nu_{\xi_1(t')}(\mathcal{D})$, avec $t' = t \pm K_3$. Or par conformité de ν , on a

$$(9) \quad \nu_{\xi_1(t')}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} e^{-\delta \beta_\eta(\xi_1(t'), o)} d\nu_o(\eta).$$

Comme au paragraphe 2.5, notons y_η l'intersection de la géodésique $(\eta \xi_1)$ avec $\partial \mathcal{H}_1$. Lorsque η varie dans le compact \mathcal{D} de $\partial \widetilde{M} \setminus \{\xi_1\}$, la distance de o à la géodésique $(\eta \xi_1)$ est inférieure à la distance de o à y_η , elle-même majorée par une constante $C_{\mathcal{D}} = C(\mathcal{D}, o, \xi_1)$. En notant $(\xi_\eta(s))_{s \geq 0}$ le rayon $[y_\eta \xi_1)$, par le lemme 2.2, nous avons

$$0 \leq \beta_\eta(o, \xi_\eta(t')) + \beta_{\xi_1}(o, \xi_\eta(t')) = \beta_\eta(o, \xi_\eta(t')) + t' \leq 2C_{\mathcal{D}}.$$

On a d'autre part $|\beta_\eta(\xi_1(t'), \xi_\eta(t'))| \leq d(\xi_1(t'), \xi_\eta(t')) \leq C_{\mathcal{D}}$, d'où finalement

$$t' - 3C \leq \beta_\eta(\xi_1(t'), o) \leq t + C_{\mathcal{D}}.$$

Avec (9) ci-dessus, on obtient

$$e^{-\delta C_{\mathcal{D}} - \delta t'} \nu_o(\mathcal{D}) \leq \nu_{\xi_1(t')}(\mathcal{D}) \leq e^{3\delta C_{\mathcal{D}} - \delta t'} \nu_o(\mathcal{D}).$$

Reportons cet encadrement dans les inégalités (7) et (8). Nous obtenons alors

$$(10) \quad e^{-2\delta K_3 - \delta C_{\mathcal{D}}} \nu_o(\mathcal{D}) e^{\delta t} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o,po) \geq 2t+2K_3}} e^{-\delta d(o,po)} \leq \nu_{\xi_1(t)}(V(o, \xi_1, t)) \\ \leq e^{2\delta K_3 + 3\delta C_{\mathcal{D}}} \nu_o(\mathcal{D}) e^{\delta t} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o,po) \geq 2t-2K_3}} e^{-\delta d(o,po)}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & e^{-2\delta K_3 - \delta C_D} \nu_o(\mathcal{D}) e^{-\delta t} \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2(t - K_3)\} \\
 & \leq \nu_{\xi_1(t)}(\partial\tilde{M} \setminus V(o, \xi_1, t)) \\
 & \leq e^{2\delta K_3 + 3\delta C_D} \nu_o(\mathcal{D}) e^{-\delta t} \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2(t + K_3)\}.
 \end{aligned}$$

Nous devons maintenant considérer le cas où $\xi_i = \gamma_i \xi_1 \neq \xi_1$. Rappelons la notation $\xi_i(s_i) = [o \xi_i(t) [\cap \partial \mathcal{H}_i$. Par choix de γ_i (voir paragraphe 3.2), l'ensemble $\gamma_i \tilde{C}_0$ intersecte le rayon $[o \xi_i$ et son adhérence intersecte celle de \tilde{C}_i . On en déduit que $\xi_i(s_i)$ est dans le bord de $\gamma_i \tilde{C}_0$, d'où $d(\xi_i(s_i), \gamma_i o) \leq \Delta$. En utilisant le lemme 2.7, c) (avec $K_2 = K_2(\Delta)$), et le fait que $V(o, \xi_i, t) = V(\xi_i(s_i), \xi_i, t - s_i)$, on obtient l'encadrement

$$(12) \quad V(\gamma_i o, \xi_i, t - s_i + K_2) \subset V(o, \xi_i, t) \subset V(\gamma_i o, \xi_i, t - s_i - K_2).$$

Notons $(\xi_1(u))_{u \geq 0}$ le rayon $[o \xi_1$. Les rayons $(\xi_i(u + s_i))_{u \geq 0}$ et $(\gamma_i \xi_1(u))_{u \geq 0}$ sont asymptotes, d'où pour tout $t \geq s_i$,

$$d(\xi_i(t), \gamma_i \xi_1(t - s_i)) \leq d(\xi_i(s_i), \gamma_i \xi_1(0)) = d(\xi_i(s_i), \gamma_i o) \leq \Delta.$$

La conformité de ν donne pour tout $\eta \in \partial\tilde{M}$

$$(13) \quad \exp(-\delta \Delta) \leq \frac{d\nu_{\xi_i(t)}}{d\nu_{\gamma_i \xi_1(t - s_i)}}(\eta) \leq \exp(\delta \Delta).$$

En utilisant (12) et (13), on obtient

$$\begin{aligned}
 & e^{-\delta \Delta - \delta K_2} \nu_{\gamma_i \xi_1(t - s_i + K_2)}(V(\gamma_i o, \xi_i, t - s_i + K_2)) \\
 & \leq \nu_{\xi_i(t)}(V(o, \xi_i, t)) \\
 & \leq e^{\delta \Delta + \delta K_2} \nu_{\gamma_i \xi_1(t - s_i - K_2)}(V(\gamma_i o, \xi_i, t - s_i - K_2)).
 \end{aligned}$$

Avec (10), on en déduit

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & e^{-\delta \Delta - 2\delta K_3 - \delta C_D} \nu_o(\mathcal{D}) e^{\delta(t - s_i)} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq 2(t - s_i) + 2K_2 + 2K_3}} e^{-\delta d(o, po)} \\
 & \leq \nu_{\xi_i(t)}(V(o, \xi_i, t)) \\
 & \leq e^{\delta \Delta + 2\delta K_3 + 3\delta C_D} \nu_o(\mathcal{D}) e^{\delta(t - s_i)} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq 2(t - s_i) - 2K_2 - 2K_3}} e^{-\delta d(o, po)}.
 \end{aligned}$$

De même, (12) et (13) donnent

$$\begin{aligned} & e^{-\delta\Delta - \delta K_2} \nu_{\gamma_i \xi_1(t-s_i-K_2)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(\gamma_i o, \xi_i, t-s_i-K_2)) \\ & \leq \nu_{\xi_i(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o, \xi_i, t)) \\ & \leq e^{\delta\Delta + \delta K_2} \nu_{\gamma_i \xi_1(t-s_i+K_2)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(\gamma_i o, \xi_i, t-s_i+K_2)), \end{aligned}$$

et avec (11), on en déduit

$$\begin{aligned} (15) \quad & e^{-\delta\Delta - 2\delta K_3 - \delta C_{\mathcal{D}}} \nu_o(\mathcal{D}) e^{-\delta(t-s_i)} \\ & \quad \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2(t-s_i-K_2-K_3)\} \\ & \leq \nu_{\xi_i(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o, \xi_i, t)) \\ & \leq e^{\delta\Delta + 2\delta K_3 + 3\delta C_{\mathcal{D}}} \nu_o(\mathcal{D}) e^{-\delta(t-s_i)} \\ & \quad \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2(t-s_i+K_2+K_3)\}. \end{aligned}$$

Notons que nous n'avons pas utilisé la condition (*) pour démontrer les encadrements (14) et (15). Elle va nous servir maintenant pour conclure la démonstration de la proposition 3.4, en permettant d'estimer les quantités

$$e^{\delta t} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq 2t}} e^{-\delta d(o, po)} \quad \text{et} \quad e^{-\delta t} \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2t\}.$$

Notons

$$a_T = \#\{p \in \Pi, d(o, po) \in [T, T+1[\}.$$

L'hypothèse (*) donne $D^{-1} e^{\delta\pi T} \leq a_T \leq D e^{\delta\pi T}$. Rappelons que cette hypothèse (*) implique $\delta_{\Pi} < \delta_{\Gamma} \leq \delta$. En écrivant

$$e^{-\delta} \sum_{n=[2t]+1}^{+\infty} a_n e^{-\delta n} \leq \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq 2t}} e^{-\delta d(o, po)} \leq \sum_{n=[2t]}^{+\infty} a_n e^{-\delta n},$$

on obtient

$$\begin{aligned} (16) \quad & \frac{e^{\delta\pi - 2\delta}}{D} \frac{1}{1 - e^{\delta\pi - \delta}} e^{\delta t + 2(\delta\pi - \delta)t} \\ & \leq e^{\delta t} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq 2t}} e^{-\delta d(o, po)} \leq \frac{D}{1 - e^{\delta\pi - \delta}} e^{\delta t + 2(\delta\pi - \delta)t}. \end{aligned}$$

De même on trouve

$$\frac{e^{-\delta t} e^{\delta_{\Pi}(2t-1)} - 1}{D e^{\delta_{\Pi}} - 1} \leq e^{-\delta t} \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2t\} \leq D \frac{e^{\delta_{\Pi}}}{e^{\delta_{\Pi}} - 1} e^{-\delta t} e^{2\delta_{\Pi}t},$$

ce qui donne, lorsque t est assez grand (précisément $\delta_{\Pi}(2t - 1) \geq \log 2$), l'encadrement

$$(17) \quad \frac{1}{2D} \frac{e^{-\delta_{\Pi}}}{e^{\delta_{\Pi}} - 1} e^{-\delta t} e^{2\delta_{\Pi}t} \leq e^{-\delta t} \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2t\} \leq \frac{D e^{\delta_{\Pi}}}{e^{\delta_{\Pi}} - 1} e^{-\delta t} e^{2\delta_{\Pi}t}.$$

Les encadrements (16) et (17) combinés avec (14) et (15) donnent le résultat voulu. □

Il reste maintenant à traiter le cas général, ce qui est fait dans le lemme ci-dessous et achèvera la démonstration du théorème 3.2.

LEMME 3.6. — *Il existe une constante $B_3 > 0$, telle que si $\xi \in \Lambda_{\Gamma}$, et $\xi(t) \in \Gamma\tilde{C}_1$, alors*

$$B_3^{-1} \exp((2\delta_{\Pi} - \delta)d(\xi(t), \Gamma o)) \leq \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)) \leq B_3 \exp((2\delta_{\Pi} - \delta)d(\xi(t), \Gamma o)).$$

Démonstration. — Soit $\xi \in \Lambda_{\Gamma}$, et $i \in \mathbb{N}$ tel que $\xi(t) \in \tilde{C}_i$. Nous distinguerons trois cas selon les positions respectives de ξ et ξ_i .

Premier cas : $\xi_i \in V(o, \xi, t + K_1 + \alpha)$ (où K_1 est la constante donnée par le lemme 2.7, b). — Montrons que la mesure $\nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t))$ est très proche de $\nu_{\xi_i(t)}(V(o, \xi_i, t)) \asymp e^{(2\delta_{\Pi} - \delta)(t - s_i)}$ (proposition 3.4), et que la distance de $\xi(t)$ à Γo est à peu près $t - s_i$. Le lemme 2.7, b) donne

$$V(o, \xi_i, t + K_1) \subset V(o, \xi, t) \subset V(o, \xi_i, t - K_1).$$

D'autre part, pour tout $\eta \in \partial\tilde{M}$, l'inégalité triangulaire entraîne $|\beta_{\eta}(\xi(t), \xi_i(t))| \leq d(\xi(t), \xi_i(t))$. D'après le lemme 2.5, on a

$$V(o, \xi, t + K_1 + \alpha) \subset \mathcal{D}(o, \xi, t + K_1).$$

Par définition de $\mathcal{D}(o, \xi, t + K_1)$, en utilisant $\xi_i \in V(o, \xi, t + K_1 + \alpha)$, on obtient $d(\xi(t), \xi_i(t)) \leq \alpha$, d'où $d(\xi(t), \xi_i(t \pm K_1)) \leq \alpha + K_1$. Par conformité de ν , on en déduit

$$(18) \quad e^{-\delta\alpha - \delta K_1} \nu_{\xi_i(t+K_1)}(V(o, \xi_i, t + K_1)) \leq \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)) \leq e^{\delta\alpha + \delta K_1} \nu_{\xi_i(t-K_1)}(V(o, \xi_i, t - K_1))$$

La première estimée de la proposition 3.4 dit que les quantités $\nu_{\xi_i(t \pm K_1)}(V(o, \xi_i, t \pm K_1))$ sont comparables à $e^{2(\delta_{\Pi} - \delta)(t - s_i \pm K_1)}$; le résultat en découle, puisque

$$|d(\xi(t), \Gamma o) - (t - s_i)| \leq |d(\xi(t), \Gamma o) - d(\xi_i(t), \Gamma o)| + |(t - s_i) - d(\xi_i(t), \Gamma o)| \leq \alpha + \Delta.$$

Deuxième cas : $\xi_i \notin V(o, \xi, t - K_1 - \alpha)$. — Le point ξ_i est alors plus proche du point antipodal de ξ sur $(o\xi)$, noté ξ' . Introduisons l'autre intersection o' de la géodésique $(o\xi)$ avec $\partial\mathcal{H}_i : o' =]\xi(t)\xi) \cap \partial\mathcal{H}_i$ et la distance $t' = d(\xi(t), o')$. On a alors $V(o, \xi, t) = \partial\widetilde{M} \setminus V(o', \xi', t')$ et $\xi_i \in V(o', \xi', t' + K_1 + \alpha)$. Le lemme 2.7, b) donne

$$\partial\widetilde{M} \setminus V(o', \xi_i, t' - K_1) \subset V(o, \xi, t) = \partial\widetilde{M} \setminus V(o', \xi', t') \subset \partial\widetilde{M} \setminus V(o', \xi_i, t' + K_1).$$

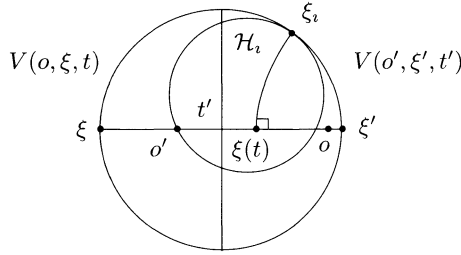


Figure 5. Retournement de situation

On est donc ramené à l'estimation des $\nu_{\xi_i(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o', \xi_i, t' \pm K_1))$. Comme $o \in \widetilde{C}(\Gamma)$ et $\xi \in \Lambda_\Gamma$, le point o' est aussi dans $\widetilde{C}(\Gamma)$. De plus, par définition, o' appartient au bord de $\mathcal{H}_i = \gamma_i \mathcal{H}_1$, donc $\gamma_i^{-1} o' \in \partial\mathcal{H}_1$, de sorte qu'il existe un élément p du stabilisateur de ξ_1 , tel que $p^{-1} \gamma_i^{-1} o' \in \partial\mathcal{H}_1 \cap \widetilde{C}_0$. En particulier, on a $d(p^{-1} \gamma_i^{-1} o', o) = d(o', \gamma_i p o) \leq \Delta = \text{diam}(\widetilde{C}_0)$. Nous noterons par la suite $\gamma = \gamma_i p$. Le lemme 2.7, c) donne alors l'existence d'une constante $K_2(\Delta)$ telle que

$$\partial\widetilde{M} \setminus V(\gamma o, \xi_i, t' - K_1 - K_2) \subset V(o, \xi, t) \subset \partial\widetilde{M} \setminus V(\gamma o, \xi_i, t' + K_1 + K_2).$$

Notons $(c(s))_{s \geq 0}$ le rayon $[\gamma o \xi_i)$ et $(c'(s))_{s \geq 0}$ le rayon $[o' \xi_i)$. Le lemme 2.5 dit que $V(o', \xi', t' + K_1 + \alpha) \subset \mathcal{D}(o', \xi', t' + K_1)$. Comme $\xi_i \in V(o', \xi', t' + K_1 + \alpha)$, par définition de $\mathcal{D}(o', \xi', t' + K_1)$, on en déduit $d(c'(t'), \xi(t)) \leq \alpha$. D'autre part, les rayons géodésiques $[\gamma o \xi_i)$ et $[o' \xi_i)$ sont asymptotes, d'où $d(c'(t'), c(t')) \leq d(o', \gamma o) \leq \Delta$. Finalement, on obtient $d(c(t'), \xi(t)) \leq \alpha + \Delta$, puis $d(c(t' \pm (K_1 + K_2)), \xi(t)) \leq \alpha + \Delta + K_1 + K_2$.

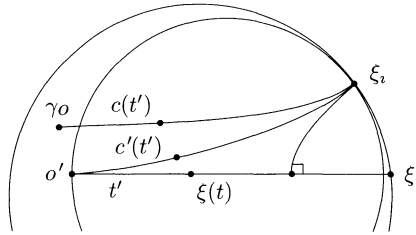


Figure 6. Géodésiques proches les unes des autres

Par conformité de ν , on en déduit

$$\begin{aligned}
 (19) \quad & e^{-\delta(\alpha+\Delta+K_1+K_2)} \nu_{c(t'-K_1-K_2)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(\gamma_o, \xi_i, t' - K_1 - K_2)) \\
 & \leq \nu_{\xi(t)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o', \xi_i, t')) = \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)) \\
 & \leq e^{\delta(\alpha+\Delta+K_1+K_2)} \nu_{c(t'+K_1+K_2)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(\gamma_o, \xi_i, t' + K_1 + K_2)).
 \end{aligned}$$

Maintenant, la proposition 3.4 (et donc l'hypothèse $(*)$) dit qu'aux constantes près, la quantité ci-dessus est comparable à $e^{(2\delta\pi-\delta)t'}$.

Il reste à voir que la distance de $\xi(t)$ à Γo est à peu près t' . D'abord, on a clairement

$$d(\xi(t), \Gamma o) \leq d(\xi(t), o') + d(o', \gamma_o) \leq t' + \Delta.$$

Dans l'autre sens, comme l'orbite Γo ne rencontre pas l'intérieur de \mathcal{H}_i , la minoration de $d(\xi(t), \Gamma o) - t'$ découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 d(\xi(t), \Gamma o) & \geq \beta_{\xi_i}(\partial\mathcal{H}_i, \xi(t)) = \beta_{\xi_i}(o', \xi(t)) \\
 & = \beta_{\xi_i}(o', c'(t')) + \beta_{\xi_i}(c'(t'), \xi(t)) \geq t' - d(c'(t'), \xi(t)) \geq t' - \alpha.
 \end{aligned}$$

Dernier cas : $\xi_i \in V(o, \xi, t - K_1 - \alpha) \setminus V(o, \xi, t + K_1 + \alpha)$. — On pose alors $t_1 = t - 2K_1 - 2\alpha$ et $t_2 = t + 2K_1 + 2\alpha$. On a bien sûr

$$V(o, \xi, t_2) \subset V(o, \xi, t) \subset V(o, \xi, t_1).$$

Par conformité de ν , on en déduit

$$\begin{aligned}
 e^{-2\delta(K_1+\alpha)} \nu_{\xi(t_2)}(V(o, \xi, t_2)) & \leq \nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t)) \\
 & \leq e^{2\delta(K_1+\alpha)} \nu_{\xi(t_1)}(V(o, \xi, t_1)).
 \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que ξ_i appartient à $V(o, \xi, t_1 + K_1 + \alpha)$ et n'appartient pas à $V(o, \xi, t_2 - K_1 - \alpha)$. On peut donc appliquer les deux premiers cas

de la démonstration à $\nu_{\xi(t_i)}(V(o, \xi, t_i))$ pour $i = 1, 2$ pour obtenir qu'aux constantes près, ces quantités sont comparables à $e^{(2\delta_\Pi - \delta_\Gamma)d(\xi(t_i), \Gamma o)}$. Le résultat voulu en découle, puisque $d(\xi(t_i), \xi(t)) = 2K_1 + 2\alpha$, pour $i = 1, 2$. □

Ceci termine donc la preuve du lemme de l'ombre en courbure négative variable.

Pour finir, énonçons un lemme qui, sous l'hypothèse plus faible (**), nous permet d'obtenir les estimées utiles dans l'étude de la non divergence des horosphères.

LEMME 3.7. — *Soit $M = \widetilde{M}/\Gamma$ une variété géométriquement finie à courbure négative pincée dont les cusps satisfont (**), avec Γ divergent. Avec les notations de ce paragraphe, on a :*

1) *Si $\xi = \xi_i \in \Lambda_{pb}$, alors la quantité*

$$\frac{\nu_o(V(o, \xi_i, t + N))}{\nu_o(V(o, \xi_i, t))}$$

converge vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, uniformément en $t \geq 0$.

2) *Pour tout $\tau > 0$, on a*

$$\sup_{\xi \in \Lambda_\Gamma} \sup_{t \geq 0} \frac{\nu_o(V(o, \xi, t))}{\nu_o(V(o, \xi, t + \tau))} < +\infty.$$

Démonstration. — 1) D'après (4), on a

$$\frac{\nu_o(V(o, \xi_i, t + N))}{\nu_o(V(o, \xi_i, t))} \leq e^{8\delta\alpha} e^{-\delta N} \frac{\nu_{\xi_i(t+N)}(V(o, \xi_i, t + N))}{\nu_{\xi_i(t)}(V(o, \xi_i, t))}.$$

En utilisant (14), on peut majorer cette quantité à une constante près par

$$\sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o,p) \geq 2(t+N-s_i) - 2K_3}} e^{-\delta d(o,p)} \Bigg/ \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o,p) \geq 2(t-s_i) + 2K_3}} e^{-\delta d(o,p)}$$

où s_i désigne toujours l'instant d'entrée du rayon $[o\xi_i)$ dans le cusp : $\xi_i(s_i) := [o\xi_i) \cap \partial\mathcal{H}_i$. La condition (**)₁ affirme précisément que ce quotient converge vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, uniformément en $t \geq 0$ (et $s_i \geq 0$), ce qui démontre la première partie du lemme.

2) Pour démontrer la deuxième partie, il nous faudra distinguer plusieurs cas, comme dans la preuve du lemme 3.6 ci-dessus. Soit $\tau > 0$ fixé. Les deux points $\xi(t)$ et $\xi(t + \tau)$ étant à distance τ l'un de l'autre, nous

les supposerons simultanément dans $\Gamma\tilde{C}_0$ ou dans $\Gamma\tilde{C}_1$. D'après (4), on a la majoration

$$(20) \quad \frac{\nu_o(V(o, \xi, t))}{\nu_o(V(o, \xi, t + \tau))} \leq e^{\delta\tau + 8\delta\alpha} \frac{\nu_{\xi(t)}(V(o, \xi, t))}{\nu_{\xi(t+\tau)}(V(o, \xi, t + \tau))}.$$

Premier cas : les deux points $\xi(t)$ et $\xi(t + \tau)$ sont dans $\Gamma\tilde{C}_0$. — Le lemme 3.3 permet de majorer la quantité (20) ci-dessus par $B_0^2 e^{\delta\tau + 8\delta\alpha}$, ce qui donne le résultat voulu.

Deuxième cas : les deux points sont dans \tilde{C}_i et ξ_i appartient à $V(o, \xi, t + \tau + K_1 + \alpha)$. L'encadrement (18) permet de majorer la quantité (20) ci-dessus par

$$e^{\delta\tau + 10\delta\alpha + 2\delta K_1} \frac{\nu_{\xi_i(t-K_1)}(V(o, \xi_i, t - K_1))}{\nu_{\xi_i(t+\tau+K_1)}(V(o, \xi_i, t + \tau + K_1))}.$$

Notons $\xi_i(s_i)$ le point d'intersection du rayon $[o\xi_i)$ avec $\partial\mathcal{H}_i$. Par (14), à des constantes multiplicatives près, on obtient la majoration de cette dernière quantité par

$$\sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq 2(t-s_i) - 2K_1 - 2K_2 - 2K_3}} e^{-\delta d(o, po)} \quad / \quad \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq 2(t-s_i) + 2\tau + 2K_1 + 2K_2 + 2K_3}} e^{-\delta d(o, po)},$$

et c'est cette fois la condition (**)₂ qui permet de conclure.

Troisième cas : les deux points sont dans \tilde{C}_i et $\xi_i \notin V(o, \xi, t - K_1 - \alpha)$. Reprenons les notations de la démonstration du lemme 3.6 (cf. figures 5 et 6) : le point o' est l'intersection du rayon $[\xi(t)\xi)$ avec $\partial\mathcal{H}_i$, $\gamma o = \gamma_i p o$ est un point de Γo à distance au plus Δ de o' , avec p un élément du stabilisateur de ξ_1 et $\gamma_i \xi_1 = \xi_i$, et on note $t' = d(\xi(t), o')$. Enfin, $(c(t))_{t \geq 0}$ est le paramétrage à vitesse 1 du rayon $[\gamma o \xi_i)$. Remarquons que $d(\xi(t + \tau), o') = t' - \tau$. L'encadrement (19) permet de majorer (20) (à des constantes multiplicatives près) par

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_{c(t'+K_1+K_2)}(\partial\tilde{M} \setminus V(\gamma o, \xi_i, t' + K_1 + K_2))}{\nu_{c(t'-\tau-K_1-K_2)}(\partial\tilde{M} \setminus V(\gamma o, \xi_i, t' - \tau - K_1 - K_2))} \\ &= \frac{\nu_{\xi_1(t'+K_1+K_2)}(\partial\tilde{M} \setminus V(o, \xi_1, t' + K_1 + K_2))}{\nu_{\xi_1(t'-\tau-K_1-K_2)}(\partial\tilde{M} \setminus V(o, \xi_1, t' - \tau - K_1 - K_2))}. \end{aligned}$$

Les inégalités (11) permettent de majorer cette dernière quantité (toujours à des constantes multiplicatives près) par

$$\frac{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq 2t' + 2K_1 + 2K_2 + 2K_3\}}{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq 2t' - 2\tau - 2K_1 - 2K_2 - 2K_3\}}.$$

C'est cette fois la condition (**)₃ qui donne le résultat voulu.

Dernier cas : les deux points sont dans \widetilde{C}_i et ξ_i appartient à $V(o, \xi, t - K_1 - \alpha) \setminus V(o, \xi, t + \tau + K_1 + \alpha)$. — On cherche à se ramener aux cas étudiés ci-dessus. Pour cela, observons que $\xi_i \in V(o, \xi, t - 2(K_1 + \alpha) + K_1 + \alpha)$ et $\xi_i \notin V(o, \xi, t + \tau + 2(K_1 + \alpha) - K_1 - \alpha)$. D'autre part, on a $V(o, \xi, t) \subset V(o, \xi, t - 2(K_1 + \alpha))$ et $V(o, \xi, t + \tau) \supset V(o, \xi, t + \tau + 2(K_1 + \alpha))$. Par conformité de ν , à des constantes multiplicatives près, on majore (20) par

$$(21) \quad \frac{\nu_{\xi(t-2(K_1+\alpha))}(V(o, \xi, t - 2(K_1 + \alpha)))}{\nu_{\xi(t+\tau+2(K_1+\alpha))}(V(o, \xi, t + \tau + 2(K_1 + \alpha)))}.$$

Comme $\xi_i \in V(o, \xi, t - 2(K_1 + \alpha) + K_1 + \alpha)$, d'après (18), le numérateur de (21) est majoré (à des constantes multiplicatives près) par

$$\nu_{\xi_i(t-2(K_1+\alpha)-K_1)}(V(o, \xi_i, t - 2(K_1 + \alpha) - K_1)).$$

Soit $\xi_i(s_i)$ l'intersection de $[o\xi_i)$ avec $\partial\mathcal{H}_i$. D'après (14), aux constantes multiplicatives près, cette quantité est majorée par

$$(22) \quad e^{\delta(t-s_i)} \sum_{\substack{p \in \Pi \in \Pi \\ d(o, po) \geq 2(t-s_i - 2(K_1 + \alpha) - K_1 - K_2 - K_3)}} e^{-\delta d(o, po)}$$

Minorons maintenant le dénominateur de (21). On a $t' = d(\xi(t), o')$, où $o' = [\xi(t)\xi \cap \partial\mathcal{H}_i$, d'où $d(\xi(t + \tau + 2(K_1 + \alpha)), o') = t' - \tau - 2(K_1 + \alpha)$ (cf. figure 5). Comme $\xi_i \notin V(o, \xi, t + \tau + 2(K_1 + \alpha) - (K_1 + \alpha))$, d'après (19), le dénominateur de (21) est minoré (aux constantes multiplicatives près) par

$$\begin{aligned} & \nu_{c(t'-\tau-2(K_1+\alpha)-K_1-K_2)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(\gamma o, \xi_i, t' - \tau - 2(K_1 + \alpha) - K_1 - K_2)) \\ & = \nu_{\xi_1(t'-\tau-2(K_1+\alpha)-K_1-K_2)}(\partial\widetilde{M} \setminus V(o, \xi_1, t' - \tau - 2(K_1 + \alpha) - K_1 - K_2)), \end{aligned}$$

où $(c(t))_{t \geq 0}$ désigne le rayon $[\gamma o \xi_i)$. Maintenant, en utilisant (11), on minore le dénominateur de (21) par (toujours aux constantes près)

$$(23) \quad e^{-\delta t'} \#\{p \in \Pi, d(o, po) < 2(t' - \tau - 2(K_1 + \alpha) - K_1 - K_2 - K_3)\}.$$

Nous allons montrer maintenant que $|t' - (t - s_i)| \leq 4K_1 + 10\alpha + 2\tau$.

En effet, on a d'abord $\xi_i \in V(o, \xi, t - K_1 - \alpha) \subset \mathcal{D}(o, \xi, t - K_1 - 2\alpha)$ (lemme 2.5), d'où $d(\xi(t - K_1 - 2\alpha), \xi_i(t - K_1 - 2\alpha)) \leq \alpha$, par définition de $\mathcal{D}(o, \xi, t - K_1 - 2\alpha)$. On en déduit $|\beta_{\xi_i}(\xi(t - K_1 - 2\alpha), \xi_i(t - K_1 - 2\alpha))| \leq \alpha$, soit encore

$$(24) \quad \begin{aligned} & |\beta_{\xi_i}(\xi(t - K_1 - 2\alpha), \partial\mathcal{H}_i) - \beta_{\xi_i}(\xi_i(t - K_1 - 2\alpha), \partial\mathcal{H}_i)| \\ & = |\beta_{\xi_i}(\xi(t - K_1 - 2\alpha), \partial\mathcal{H}_i) - (t - s_i - K_1 - 2\alpha)| \leq \alpha. \end{aligned}$$

On effectue le même raisonnement que ci-dessus en utilisant le fait que $\xi_i \notin V(o, \xi, t + \tau + K_1 + \alpha) = \partial\widetilde{M} \setminus V(o', \xi', t' - \tau - K_1 - \alpha)$, d'où $\xi_i \in V(o', \xi', t' - \tau - K_1 - \alpha) \subset \mathcal{D}(o', \xi', t' - \tau - K_1 - 2\alpha)$. On en déduit comme ci-dessus que

$$(25) \quad |\beta_{\xi_i}(\xi(t + \tau + K_1 + 2\alpha), \partial\mathcal{H}_i) - (t' - \tau - K_1 - 2\alpha)| \leq \alpha.$$

Les estimées (24) et (25) donnent finalement

$$|t' - (t - s_i)| \leq 2(K_1 + 2\alpha) + 2(\tau + K_1 + 2\alpha) + 2\alpha = 4K_1 + 10\alpha + 2\tau.$$

Posons $T = 2(t - s_i - (4K_1 + 10\alpha + 2\tau) - \tau - 2(K_1 + \alpha) - K_1 - K_2 - K_3)$ et $C = 2(\tau + 2K_1 + 5\alpha)$. On a montré qu'aux constantes multiplicatives près, (21) est majorée par le quotient de (22) par (23), i.e. par

$$e^{\delta T} \left(\sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq T + C}} e^{-\delta d(o, po)} \right) / \#\{p \in \Pi, d(o, po) < T\},$$

quantité elle-même majorée par

$$e^{\delta T} \left(\sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq T}} e^{-\delta d(o, po)} \right) / \#\{p \in \Pi, d(o, po) < T\}.$$

Il nous reste à montrer que cette quantité est bornée en $T \geq 1$. D'après (**)₁, il existe un réel $N_0 > 0$, tel que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq T + N_0}} e^{-\delta d(o, po)} & \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq T}} e^{-\delta d(o, po)} \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ T \leq d(o, po) < T + N_0}} e^{-\delta d(o, po)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq T + N_0}} e^{-\delta d(o, po)} \end{aligned}$$

Autrement dit, on a

$$\sum_{\substack{p \in \Pi \\ d(o, po) \geq T}} e^{-\delta d(o, po)} \leq 2 \sum_{\substack{p \in \Pi \\ T \leq d(o, po) < T + N_0}} e^{-\delta d(o, po)}.$$

De plus, cette dernière somme vérifie

$$\sum_{\substack{p \in \Pi \\ T \leq d(o, po) < T + N_0}} e^{-\delta d(o, po)} \leq e^{-\delta T} \#\{p \in \Pi, T \leq d(o, po) < t + N_0\},$$

d'où on déduit

$$\frac{e^{\delta T} \sum_{p \in \Pi, d(o, po) \geq T} e^{-\delta d(o, po)}}{\#\{p \in \Pi, d(o, po) < T\}} \leq 2 \frac{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq T + N_0\}}{\#\{p \in \Pi, d(o, po) \leq T\}}.$$

La condition (**)₃ permet alors de conclure que la quantité ci-dessus est bornée en $T \geq 1$. □

4. Moyennes horosphériques.

4.1. Définitions.

Rappelons que $M = \Gamma \backslash \widetilde{M}$ est une variété géométriquement finie à courbure négative pincée. Le flot géodésique $g = (g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ agissant sur $T^1 M$ est un flot hyperbolique, dont les variétés fortement instables se relèvent sur $T^1 \widetilde{M}$ en les variétés fortement instables du flot géodésique $\tilde{g} = (\tilde{g}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de $T^1 \widetilde{M}$, qu'il est simple de décrire géométriquement.

Une horosphère $H \subset \widetilde{M}$ centrée en ξ se relève à $T^1 \widetilde{M}$ en une horosphère fortement instable

$$H^+ := \{u \in T^1 \widetilde{M}, \pi(u) \in H \text{ et } u^- = \xi\}.$$

C'est encore l'ensemble des vecteurs basés sur H orthogonaux à H et pointant vers l'extérieur. Si $u \in T^1 \widetilde{M}$, nous noterons respectivement $H(u) \subset M$ l'horosphère de M centrée en u^- et passant par le point base $\pi(u)$ de u , et $H^+(u) \subset T^1 \widetilde{M}$ l'horosphère fortement instable contenant u . Les horosphères vues sur $T^1 \widetilde{M}$ sont les variétés fortement instables du flot géodésique \tilde{g} sur $T^1 \widetilde{M}$:

$$H^+(u) = \widetilde{W}^{su}(u) := \{w \in T^1 \widetilde{M}, \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{g}^{-t} u, \tilde{g}^{-t} w) = 0\}.$$

De la même manière, on définit l'horosphère fortement stable $H^-(u)$ de u par

$$H^-(u) = \widetilde{W}^{ss}(u) := \{w \in T^1\widetilde{M}, \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{g}^t u, \tilde{g}^t w) = 0\}.$$

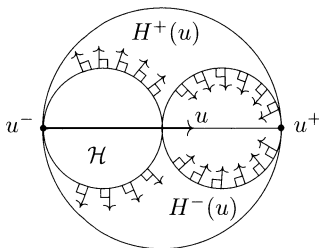


Figure 7. Horosphères et horoboules

Nous nous servons de la famille $(d_{H^+})_{H^+ \in \mathcal{H}}$ des distances dites de Hamenstädt sur les horosphères de $T^1\widetilde{M}$ (voir [HP1]). Si $x \in \widetilde{M}$ est un point quelconque, elles sont définies pour tous $(u, v) \in (H^+)^2$ par

$$d_{H^+}(u, v) = \exp\left(\frac{1}{2}\beta_{u^+}(x, u) + \frac{1}{2}\beta_{v^+}(x, v)\right) d_x(u^+, v^+).$$

En fait, nous les considérerons indifféremment comme des distances sur les horosphères de \widetilde{M} et de $T^1\widetilde{M}$. Elles sont bien définies car l'expression ci-dessus ne dépend pas de x . Elles sont invariantes par isométries au sens où pour toute isométrie γ de $T^1\widetilde{M}$, on a $d_{\gamma H^+}(\gamma u, \gamma v) = d_{H^+}(u, v)$. De plus, poussées par le flot, elles vérifient pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$d_{g^t H^+}(g^t u, g^t v) = e^t d_{H^+}(u, v).$$

Géométriquement (figure 8), $2 \log d_{H^+}(u, v)$ représente la distance « algébrique » entre les deux horosphères $H^-(u)$ et $H^-(v)$.

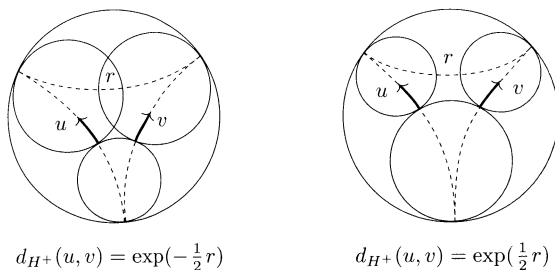


Figure 8. Distance horosphérique

Dans le modèle du demi-plan supérieur de l'espace hyperbolique \mathbb{H} , cette distance s'exprime très simplement. Si $H^+(u)$ est une horosphère horizontale, i.e. si $u^- = +\infty$, et v est un vecteur de $H^+(u)$, alors on a $d_{H^+}(u, v) = d/h$, où d est la distance euclidienne entre les points base de u et v , et h la hauteur euclidienne de l'horosphère $H^+(u)$. Rappelons que si Γ est un groupe divergent, il existe une unique densité conforme invariante normalisée $\nu = (\nu_x)_{x \in \tilde{M}}$ de dimension δ_Γ sur Λ_Γ (proposition 3.1).

Pour pouvoir définir des moyennes horosphériques au paragraphe suivant, nous aurons besoin d'une famille de mesures sur les horosphères fortement instables, définies à partir de la mesure de Patterson ν_o .

PROPOSITION 4.1. — *La famille de mesures définies sur chaque horosphère H^+ par*

$$d\mu_{H^+}(v) = \exp(\delta_\Gamma \beta_{v^+}(o, v)) d\nu_o(v^+)$$

ne dépend pas de o , elle est Γ -invariante (au sens où $\gamma_ \mu_{H^+} = \mu_{\gamma H^+}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$) et induit donc au quotient par Γ une famille de mesures sur les variétés fortement instables du flot géodésique. De plus, poussée par le flot, elle vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$(26) \quad dg_*^{-t} \mu_{g^t H^+}(u) = \exp(\delta_\Gamma t) d\mu_{H^+}(u).$$

Remarquons également que, la mesure ν_o ayant pour support Λ_Γ , chaque mesure μ_{H^+} définie ci-dessus a pour support $\{v \in H^+ ; v^+ \in \Lambda_\Gamma\}$. En particulier, si H^+ est centrée dans Λ_Γ , la mesure μ_{H^+} a pour support $H^+ \cap \Omega$.

4.2. Non divergence des moyennes horosphériques.

Quand M est géométriquement finie, la topologie des horosphères fortement instables est bien connue. Soit $\mathcal{E} = \{v \in T^1 M ; v^- \in \Lambda_\Gamma\}$. D'après Dal'bo [Dal], les feuilles centrées en un point parabolique borné sont compactes, celles centrées en un point limite radial sont denses dans \mathcal{E} , et celles qui sont centrées hors de l'ensemble limite sont fermées et non compactes. Par conséquent, par analogie avec le cas d'un flot, nous appellerons \mathcal{E} l'ensemble non errant du feuilletage horosphérique (instable). Il se décompose en une union disjointe

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{rad}} \sqcup \mathcal{E}_{pb},$$

où \mathcal{E}_{rad} (resp. \mathcal{E}_{pb}) est l'ensemble des vecteurs de \mathcal{E} centrés en un point limite radial (resp. un point parabolique borné).

En l'absence de paramétrage naturel des feuilles par un flot, nous nous intéressons ici à des moyennes sur de grandes boules horosphériques pour la mesure μ_{H^+} définie au paragraphe précédent : pour toute fonction continue $\psi : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $r \geq 0$, nous posons

$$M_{r,u}(\psi) = \frac{1}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} \int_{B^+(u, r)} \psi(v) d\mu_{H^+}(v).$$

Si $u \in \mathcal{E}_{pb}$, les probabilités $(M_{r,u})_{r>0}$ sont à support compact inclus dans $H^+(u)$.

Mais si $u \in \mathcal{E}_{rad}$, la mesure μ_{H^+} ayant pour support $H^+ \cap \Omega$, ces mesures $(M_{r,u})_{r>0}$ sont à support dans l'ensemble non errant Ω du flot géodésique, qui est non compact lorsque M est géométriquement finie avec des cusps. Pour quantifier la non divergence des horosphères, nous allons montrer qu'il n'y a pas de perte de masse des mesures $(M_{r,u})_{r>0}$ dans les cusps. Plus précisément, notre résultat est le suivant :

THÉORÈME 4.2. — *Soit $M = \widetilde{M}/\Gamma$ une variété géométriquement finie dont les cusps satisfont (**), avec Γ un groupe divergent. Fixons $\varepsilon > 0$ et C un compact de T^1M . Alors il existe un compact $K_{\varepsilon,C} \subset \Omega$ et un réel $r_0(C) > 0$, tels que pour tout $u \in C \cap \mathcal{E}_{rad}$ et tout $r \geq r_0(C)$,*

$$M_{r,u}(K_{\varepsilon,C}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Démonstration. — Nous allons étudier les moyennes sur le revêtement $T^1\widetilde{M}$, et déterminer pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact C de T^1M un ensemble $\widetilde{K}_{\varepsilon,C}$ de $\Lambda_{\Gamma}^2 \times \mathbb{R}$ compact modulo Γ , qui satisfait l'assertion du théorème ci-dessus.

Première étape. — Dans le cas où $C = \pi^{-1}(C_0)$ est l'ensemble des vecteurs basés dans C_0 , nous allons introduire l'ensemble cocompact $\widetilde{K}_{\varepsilon,C} \subset \Lambda_{\Gamma}^2 \times \mathbb{R}$, puis ramener l'énoncé ci-dessus à la recherche d'estimées de mesures de boules horosphériques.

Comme Γ est géométriquement fini, il n'a qu'un nombre fini de cusps, on supposera donc comme au paragraphe précédent qu'il n'en a qu'un seul. Rappelons que $\widetilde{C}(\Gamma)$ se décompose en une union disjointe $\widetilde{C}(\Gamma) = \Gamma\widetilde{C}_1 \sqcup \Gamma\widetilde{C}_0$, où \widetilde{C}_1 désigne l'intersection de $\widetilde{C}(\Gamma)$ avec une horoboule \mathcal{H}_1 centrée au point parabolique borné ξ_1 . Nous renvoyons le lecteur aux notations introduites au paragraphe 3.2.

Notons maintenant $\mathcal{H}_1^N \subset \mathcal{H}_1$ l'horoboule «rétrécie de N », c'est-à-dire l'horoboule dont le bord satisfait $\beta_{\xi_1}(\partial\mathcal{H}_1, \partial\mathcal{H}_1^N) = N > 0$. Le candidat à être $\tilde{K}_{\varepsilon, C_0}$ est l'ensemble des vecteurs de $\Lambda_1^2 \times \mathbb{R}$ dont le point base appartient au complémentaire $\tilde{C}(\Gamma) \setminus \Gamma\mathcal{H}_1^N$ de ces horoboules rétrécies, pour un $N = N(\varepsilon)$ suffisamment grand.

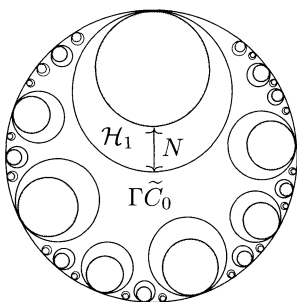


Figure 9. Horosphères rétrécies

Nous fixons désormais $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}}$, et nous supposons que u est basé dans $\Gamma\tilde{C}_0$, tout en gardant en mémoire que les raisonnements que nous ferons ne doivent dépendre que de C_0 . Le cas général d'un compact C quelconque sera traité dans la dernière étape.

Nous aurons besoin d'estimer la mesure $\mu_{H^+}(B^+(u, r) \cap \mathcal{H}_i^N)$, où par abus de notation, $B^+(u, r) \cap \mathcal{H}_i^N$ désigne l'ensemble des vecteurs de $B^+(u, r)$ dont le point base appartient à \mathcal{H}_i^N . Commençons donc par étudier l'intersection géométrique $H^+(u) \cap \mathcal{H}$, où \mathcal{H} est une horoboule quelconque centrée en un point $\xi \neq u^-$. Si cette intersection est non vide, considérons le vecteur le plus haut de $H^+(u)$ dans \mathcal{H} , i.e. le vecteur v qui réalise le maximum de $w \mapsto \beta_\xi(\partial\mathcal{H}, \pi(w))$ dans $H^+(u) \cap \mathcal{H}$. Par stricte convexité des horosphères, ce vecteur est bien défini et s'écrit $v = (u^-, \xi, s(u))$ dans les coordonnées $T^1\tilde{M} \simeq \partial^2\tilde{M} \times \mathbb{R}$. Nous noterons $h = \beta_\xi(\partial\mathcal{H}, \pi(v))$ la hauteur à laquelle monte $H^+(u)$ dans \mathcal{H} .

LEMME 4.3. — Soient \mathcal{H} une horoboule centrée en $\xi \in \partial\tilde{M}$ et $H^+(u)$ une horosphère fortement instable qui rencontre \mathcal{H} . Soit $v = (u^-, \xi, s(u))$ le vecteur de $H^+(u)$ qui réalise le maximum $h = \beta_\xi(\partial\mathcal{H}, \pi(v))$ de $w \mapsto \beta_\xi(\partial\mathcal{H}, \pi(w))$, où $w \in H^+(u) \cap \mathcal{H}$. Si $h \geq \alpha$, on a

$$B^+(v, e^{(h-\alpha)/2}) \subset H^+(u) \cap \mathcal{H} \subset B^+(v, e^{h/2}),$$

l'inclusion de droite restant vraie quand $0 \leq h < \alpha$.

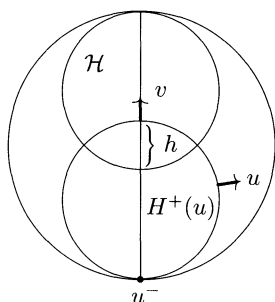


Figure 10. Intersection horosphère-horoboule

Dans l'espace hyperbolique \mathbb{H} , un calcul donne précisément pour tout $h \geq 0$

$$H^+(u) \cap \mathcal{H} = B^+(v, \sqrt{e^h - 1}).$$

Démonstration du lemme 4.3. — Soit $w \in H^+(u) \cap \mathcal{H}$. On a alors $0 \leq \beta_\xi(\pi(w), \pi(v)) \leq h$. Si les horosphères $\pi(H^-(v))$ et $\pi(H^-(w))$ s'intersectent (dans \tilde{M}), alors

$$d_{H^+}(v, w) \leq 1 \leq e^{h/2}.$$

Dans la suite de la démonstration, nous nous intéresserons au cas où ces horosphères sont disjointes. Notons alors $\mathcal{H}(v)$ (resp. $\mathcal{H}(w)$) l'horoboule dont le bord est $\pi(H^-(v))$ (resp. $\pi(H^-(w))$). Dans ce cas, le triangle (p, q, r) intérieur à (u^-, ξ, w^+) est à l'extérieur des horoboules $\mathcal{H}(v)$ et $\mathcal{H}(w)$. (En effet, si r appartenait à $\mathcal{H}(v)$, par définition du triangle intérieur, ceci impliquerait $p \in \mathcal{H}(v)$, puis $q \in \mathcal{H}(w)$ et enfin $r \in \mathcal{H}(w)$ d'où une contradiction. Les autres cas se traitent de façon analogue.)

Introduisons a_v et a_w les intersections respectives des horosphères $\pi(H^-(v))$ et $\pi(H^-(w))$ avec la géodésique $(\xi w^+) = (v^+ w^+)$. Par définition de d_{H^+} , on a $d_{H^+}(v, w) = \exp \frac{1}{2} d(a_v, a_w)$. Par convexité des horoboules, on a la majoration

$$d(a_v, a_w) = \beta_\xi(a_w, a_v) \leq \beta_\xi(\pi(w), a_v),$$

d'où l'on déduit que si $d_{H^+}(v, w) > e^{h/2}$, alors $\beta_\xi(\pi(w), a_v) > h$ et le point $\pi(w)$ ne peut pas appartenir à \mathcal{H} . On a donc montré l'inclusion

$$H^+(u) \cap \mathcal{H} \subset B^+(v, e^{h/2}).$$

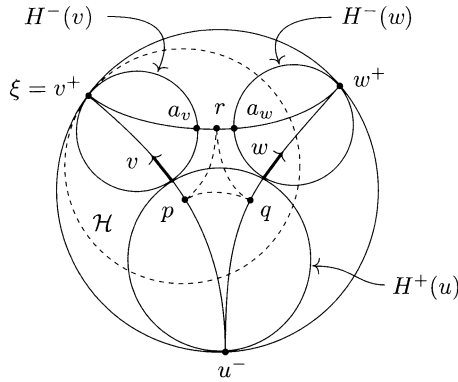


Figure 11. Illustration du lemme 4.3

Réciproquement, si $\pi(w) \notin \mathcal{H}$, observons que

$$\beta_\xi(\pi(w), a_v) = \beta_\xi(\pi(w), a_w) + \beta_\xi(a_w, a_v) \geq d(a_v, a_w) - d(\pi(w), a_w).$$

Comme q et r n'appartiennent pas à $\mathcal{H}(w)$, on a $d(a_w, \pi(w)) \leq d(r, q) \leq \alpha$. Si le point $\pi(w)$ n'appartient pas à \mathcal{H} , on a $\beta_\xi(\pi(w), \pi(v)) > h$, d'où on déduit

$$d(a_v, a_w) > -\alpha + h.$$

Lorsque $-\alpha + h \geq 0$, ceci donne l'autre inclusion $B^+(v, e^{(h-\alpha)/2}) \subset H^+(u) \cap \mathcal{H}$. □

Soient maintenant $\mathcal{H}_i = \gamma_i \mathcal{H}_1$ une horoboule intersectant $H^+(u)$, $v_i = (u^-, \xi_i, s(u))$ le vecteur le plus haut dans l'horoboule et $h_i = \beta_{\xi_i}(\partial \mathcal{H}_i, \pi(v_i))$. On déduit du lemme 4.3 que si $h_i \geq N + \alpha$, alors

$$B^+(v_i, e^{(h_i - N - \alpha)/2}) \subset H^+(u) \cap \mathcal{H}_i^N \subset B^+(v_i, e^{(h_i - N)/2}),$$

l'inclusion de droite restant vraie pour $N \leq h_i < N + \alpha$. Si $h_i \leq N$, on a facilement $H^+(u) \cap \mathcal{H}_i^N = \emptyset$.

On ne regarde donc que les $h_i \geq N$. Rappelons que nous cherchons $N = N(\varepsilon) > 0$ assez grand pour que, pour tout $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap C_0$, on ait

$$(27) \quad \frac{\mu_{H^+}(B^+(u, r) \cap \Gamma \mathcal{H}_1^N)}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} \leq \varepsilon.$$

Introduisons l'ensemble $I_{u,r,N}$ des $i \in \mathbb{N}$, tels que $B^+(u, r) \cap \mathcal{H}_i^N \neq \emptyset$. (On a donc $h_i \geq N$ pour $i \in I_{u,r,N}$.) À l'aide du lemme 4.3, on peut majorer le numérateur de (27) ci-dessus par

$$\sum_{i \in I_{u,r,N}} \mu_{H^+}(B^+(v_i, e^{(h_i-N)/2})).$$

Pour minorer le dénominateur, rappelons que les horoboules \mathcal{H}_i sont deux à deux disjointes, et donc les boules $B^+(v_i, e^{h_i/2})$ aussi (à la constante α près, dont on ne tiendra pas compte pour simplifier les notations dans la suite de la démonstration). Ce dénominateur est donc minoré par

$$\sum_{i \in I_{u,r,N}} \mu_{H^+}(B^+(u, r) \cap B^+(v_i, e^{h_i/2})).$$

Dans la majoration du numérateur, les boules $B^+(u, r)$ n'interviennent plus que via l'ensemble d'indices $I_{u,r,N}$. Pour le dénominateur, le problème est qu'il n'y a aucune raison pour que les boules $B^+(v_i, e^{h_i/2})$ soient totalement incluses dans $B^+(u, r)$. En revanche, comme $u \in \Gamma\tilde{C}_0$, u n'appartient à aucune horoboule \mathcal{H}_i , et si $i \in I_{u,r,N}$, alors $B^+(u, r)$ intersecte $B^+(v_i, e^{(h_i-N)/2})$, d'où

$$e^{h_i/2} \leq d_{H^+}(u, v_i) \leq r + e^{(h_i-N)/2}.$$

On déduit de cette majoration $e^{h_i/2}(1 - e^{-N/2}) \leq r$, d'où, si $N \geq 2 \log 3$, pour tout $i \in I_{u,r,N}$, on a

$$B^+(v_i, e^{h_i/2}) \subset B^+(u, 3r).$$

Le dénominateur de (27) vérifie donc la minoration

$$\mu_{H^+}(B^+(u, r)) \geq \frac{\mu_{H^+}(B^+(u, r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, 3r))} \sum_{i \in I_{u,r,N}} \mu_{H^+}(B^+(v_i, e^{h_i/2})).$$

Pour finir, on obtient la majoration suivante (pour $N \geq 2 \log 3$) :

$$\frac{\mu_{H^+}(B^+(u, r) \cap \Gamma\mathcal{H}_1^N)}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} \leq \frac{\sum_{i \in I_{u,r,N}} \mu_{H^+}(B^+(v_i, e^{(h_i-N)/2}))}{\sum_{i \in I_{u,r,N}} \mu_{H^+}(B^+(v_i, e^{h_i/2}))} \frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 3r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))}.$$

Dans la deuxième étape, nous majorons le premier quotient par ε pour N assez grand. À la troisième étape, nous montrons qu'il existe $r_0(C_0) > 0$, tel que le deuxième quotient soit borné uniformément en $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap \Gamma\tilde{C}_0$ et $r \geq r_0(C_0)$. Pour finir, la quatrième étape traitera le cas d'un compact C quelconque différent de C_0 .

Deuxième étape. — Montrons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon) > 0$, tel que pour tout $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap \Gamma\tilde{C}_0$, tout $r > 0$ et $i \in I_{u,r,N}$, on ait

$$(28) \quad \frac{\mu_{H^+(u)}(B^+(v_i, e^{(h_i-N)/2}))}{\mu_{H^+(u)}(B^+(v_i, e^{h_i/2}))} \leq \varepsilon.$$

Notons $w_i = g^{-h_i}v_i \in \partial\mathcal{H}_i$. D’après la relation (26) du paragraphe 4.1, la quantité ci-dessus est encore égale à

$$\frac{\mu_{H^+(w_i)}(B^+(w_i, e^{(-h_i-N)/2}))}{\mu_{H^+(w_i)}(B^+(w_i, e^{-h_i/2}))}.$$

Remarquons qu’à i fixé, la quantité ci-dessus tend clairement vers 0 quand N tend vers l’infini ; mais la difficulté vient du fait qu’on cherche une uniformité en $i \in I_{u,r,N}$.

Pour tout i , notons $x_i \in \tilde{M}$ le point base de w_i et $\xi_i = \gamma_i\xi_1 \in \Lambda_{\text{pb}}$ le point du bord vers lequel il pointe. Remarquons que $x_i \in \tilde{C}(\Gamma)$, puisque $w_i \in \Lambda_\Gamma^2 \times \mathbb{R}$. Rappelons que la mesure μ_{H^+} est définie pour $x \in \tilde{M}$ quelconque par

$$d\mu_{H^+}(v) = \exp(\delta_\Gamma\beta_{v^+}(x, \pi(v))) d\nu_x(v^+),$$

avec ν_x la mesure de Patterson sur $\partial\tilde{M}$ vue du point x . En particulier, si $x = x_i$, la quantité $\exp(\delta_\Gamma\beta_{v^+}(x_i, \pi(v)))$ est bornée par $\exp \delta_\Gamma d(x_i, \pi(v)) \leq e^{\delta_\Gamma\alpha}$ pour tout $v \in B^+(w_i, e^{-h_i/2}) \subset B^+(w_i, 1)$.

À un terme multiplicatif compris entre deux constantes strictement positives près, la quantité à estimer est donc

$$\frac{\nu_{x_i}(B^+(w_i, e^{(-h_i-N)/2}))}{\nu_{x_i}(B^+(w_i, e^{-h_i/2}))},$$

où par abus de notation, $B^+(w_i, e^{(\dots)/2})$ désigne l’image dans $\partial\tilde{M}$ de la boule horosphérique par la projection naturelle notée P_{w_i} de $H^+(w_i)$ dans $\partial\tilde{M}$ qui à $w = (u^-, w^+, s(w_i))$ associe w^+ .

Soient $x \in \tilde{M}$, $\xi \in \partial\tilde{M}$ et $t \in \mathbb{R}^+$; rappelons que $V(x, \xi, t) \subset \partial\tilde{M}$ est l’ensemble des points $\eta \in \partial\tilde{M}$ dont le projeté sur le rayon géodésique $[x\xi]$ est à distance supérieure à t de x . Nous avons alors le

LEMME 4.4. — *Soit P_w la projection naturelle de $H^+(w)$ dans $\partial\tilde{M} \setminus \{w^-\}$ et $x = \pi(w)$ le point base de w dans \tilde{M} . Alors pour tout $s \geq \alpha$, on a*

$$V(x, w^+, s + \alpha) \subset P_w(B^+(w, e^{-s})) \subset V(x, w^+, s - \alpha).$$

Démonstration. — Écrivons $w = (w^-, w^+, s(w))$. Soient $s \geq 0$ et $z \in B^+(w, e^{-s})$. Considérons le triangle idéal (w^-, w^+, z^+) et son triangle intérieur (p, q, r) , dont le diamètre est borné par α .

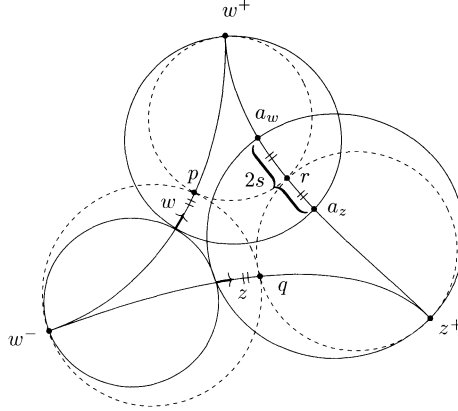


Figure 12. Illustration du lemme 4.4

Notons $a_w = (w^+z^+) \cap H^-(z)$ et $a_z = (w^+z^+) \cap H^-(w)$. On a $d_{H^+}(w, z) = e^{-d(a_w, a_z)/2} \leq e^{-s}$, d'où $d(a_w, a_z) \geq 2s$. D'autre part, en observant les appartenances des différents points aux diverses horosphères, on trouve

$$\begin{aligned} d(a_w, r) &= \beta_{z^+}(a_w, r) = \beta_{z^+}(\pi(z), q) = d(\pi(z), q) \\ &= \beta_{w^-}(q, \pi(z)) = \beta_{w^-}(p, \pi(w)) = d(w, p) \\ &= \beta_{w^+}(\pi(w), p) = \beta_{w^+}(a_z, r) = d(a_z, r), \end{aligned}$$

donc toutes ces distances sont égales à $\frac{1}{2}d(a_w, a_z) \geq s$. Le triangle (w^-, w^+, z^+) étant fin (proposition 2.1), le projeté de z^+ sur $[\pi(w)w^+)$ est à distance inférieure ou égale à α de p , et $d(w, p) \geq s$ d'après ci-dessus. Donc $z^+ \in V(x, w^+, s - \alpha)$. Le même type d'arguments montre que si $z^+ \in V(x, w^+, s + \alpha)$, alors $d_{H^+}(w, z) \leq \exp(-s)$. □

Nous sommes donc ramenés à estimer la quantité

$$\frac{\nu_{x_i}(V(x_i, \xi_i, \frac{1}{2}(h_i + N)))}{\nu_{x_i}(V(x_i, \xi_i, \frac{1}{2}h_i))}.$$

Le point base x_i de w_i appartient à $\partial\mathcal{H}_i \cap \tilde{C}(\Gamma)$. Il est donc dans le bord de $\gamma\tilde{C}_0$, pour un certain $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_i$, et donc $\gamma\xi_1 = \xi_i$. On

en déduit $d(x_i, \gamma o) \leq \text{diam}(\tilde{C}_0) = \Delta$. En utilisant la Γ -invariance et la conformité de $\nu = (\nu_x)_{x \in \tilde{M}}$, ainsi que le lemme 2.7, c), on trouve que la quantité ci-dessus est proche, à des constantes uniformes près, de

$$\frac{\nu_o(V(o, \xi_1, \frac{1}{2}(h_i + N)))}{\nu_o(V(o, \xi_1, \frac{1}{2}h_i))}.$$

Le lemme 3.7 montre que sous (**), cette quantité tend vers 0 uniformément en i quand $N \rightarrow +\infty$.

Troisième étape :

LEMME 4.5. — *Il existe $c > 0$, tel que pour tout compact C de T^1M , il existe $r_0(C) > 0$, tel que pour tout $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap C$ et tout $r \geq r_0(C)$, on ait*

$$\frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 3r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} \leq c.$$

Démonstration. — Commençons par traiter le cas où $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap \Omega$, c'est-à-dire où $u^+ \in \Lambda_\Gamma$. Comme $u^- \in \Lambda_{\text{rad}}$, on peut définir $s \geq 0$ le plus petit réel supérieur à $\log 3r$, tel que $g^{-s}u \in \Gamma\tilde{C}_0$. On a alors

$$\frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 3r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} = \frac{\mu_{H^+}(B^+(g^{-s}u, 3r e^{-s}))}{\mu_{H^+}(B^+(g^{-s}u, r e^{-s}))}.$$

Or il existe $\gamma \in \Gamma$, tel que $d(\gamma o, g^{-s}u) \leq \Delta$. Par les lemmes 4.4, 2.7, c), la conformité et l'invariance de ν par Γ , la quantité ci-dessus est donc, à des constantes uniformes près, proche de

$$\frac{\nu_o(V(o, \gamma^{-1}u^+, s - \log r - \log 3))}{\nu_o(V(o, \gamma^{-1}u^+, s - \log r))}.$$

Le lemme 3.7 assure que cette quantité est bornée uniformément en $r > 0$ et $u^+ \in \Lambda_\Gamma$. On en déduit que

$$\sup_{u \in \Omega} \sup_{r > 0} \frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 3r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} = k < +\infty.$$

Traitons maintenant le cas d'un vecteur $u \in \mathcal{E}_{\text{rad}} \cap C$ quelconque. Soient $v \in H^+(u)$ le vecteur de Ω le plus proche de u (pour la distance

horosphérique d_{H^+}) et notons $r(u) = d_{H^+}(u, v)$. Par compacité de C , la quantité $r(C) = \sup_{u \in C} r(u)$ est bien définie. Remarquons alors que

$$\frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 2r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} \leq \frac{\mu_{H^+}(B^+(v, 2r + r(C)))}{\mu_{H^+}(B^+(v, r - r(C)))}$$

Pour $r \geq 4r(C)$, on a $2r + r(C) \leq 3(r - r(C))$, et donc les quotients ci-dessus sont bornés par k d'après la première partie de la démonstration. Or

$$\frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 3r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} \leq \frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 4r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, 2r))} \frac{\mu_{H^+}(B^+(u, 2r))}{\mu_{H^+}(B^+(u, r))} \leq k^2$$

Le lemme découle de ce qui précède avec $r_0(C) = 4r(C)$ et $c = k^2$. □

Quatrième et dernière étape. — Il reste pour démontrer le théorème à traiter le cas d'un compact C quelconque de Ω . Quitte à le décomposer en une union de plus petits compacts, on peut supposer qu'il existe un $T_0 > 0$ tel que $\pi(g^{-T_0}C) \subset \tilde{C}_0$. Alors, il est facile de voir que le compact $K_{\varepsilon, C} = g^{T_0}(K_{\varepsilon, C_0})$ et le réel $r_0(K_{\varepsilon, C}) = r_0(K_{\varepsilon, C_0}) e^{T_0}$ conviennent. □

BIBLIOGRAPHIE

- [Bou] M. BOURDON, Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace, Enseign. Math. (2), 41 (1995), 63–102.
- [Bo] B.H. BOWDITCH, Geometrical finiteness with variable negative curvature, Duke Math. J., 77 (1995), 229–274..
- [CDP] M. COORNAERT, T. DELZANT, A. PAPADOPOULOS, Géométrie et théorie des groupes, in 'Les groupes hyperboliques de Gromov', Lecture Notes in Math. 1441, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [CI] K. CORLETTE, A. IOZZI, Limit sets of discrete groups of isometries of exotic hyperbolic spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 351 (1999), 1507–1530.
- [Dal] F. DAL'BO, Topologie du feuilletage fortement stable, Ann. Inst. Fourier, 50-3 (2000), 981–993.
- [DOP] F. DAL'BO, J.-P. OTAL, M. PEIGNÉ, Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis, Israel J. Math., 118 (2000), 109–124.
- [Da1] S.G. DANI, On uniformly distributed orbits of certain horocycle flows, Ergodic Theory Dyn. Systems, 2 (1982), 139–158.
- [Da2] S.G. DANI, On Orbits of unipotent flows on homogeneous spaces, Ergodic Theory Dyn. Systems, 4 (1984), 25–34.

- [Da3] S.G. DANI, On Orbits of unipotent flows on homogeneous spaces, II, *Ergodic Theory Dyn. Systems*, 6 (1986), 167–182.
- [Eb] P.B. EBERLEIN, Geodesic flows on negatively curved manifolds I, *Ann. of Math.* (2), 95 (1972), 492–510.
- [EF] N. ENRIQUEZ, J. FRANCHI, Masse des pointes, temps de retour et enroulements en courbure négative, *Bull. Soc. Math. France*, 130-3 (2002), 349–386.
- [GH] É. GHYS, P. DE LA HARPE, Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov (Berne, 1988), *Progr. Math.*, vol. 83, 1–25, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [He] G.A. HEDLUND, Fuchsian groups and transitive horocycles, *Duke Math. J.*, 2 (1936), 530–542.
- [HP1] S. HERSONSKY, F. PAULIN, On the rigidity of discrete isometry groups of negatively curved spaces, *Comment. Math. Helv.*, 72 (1997), 349–388.
- [HP2] S. HERSONSKY, F. PAULIN, Counting orbit points in coverings of negatively curved manifolds and Hausdorff dimension of cusp excursions, à paraître dans *Ergodic Theory Dyn. Systems* (2004).
- [Ka] V.A. KAIMANOVICH, Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds, *Ann. IHP, Physique Théorique*, 53-4 (1990), 361–393.
- [Ma] G.A. MARGULIS, On the action of unipotent groups in the space of lattices, *Proc. of the Summer School on Groups Representations*, 365–370, Bolyai Janos Math. Soc., Budapest, 1971.
- [MW] Y. MINSKY, B. WEISS, Nondivergence of horocyclic flows on moduli space, *J. reine angew. Math.*, 552 (2002), 131–177.
- [Ne] F. NEWBERGER, On the Patterson–Sullivan measure for geometrically finite groups acting on complex or quaternionic hyperbolic spaces, *Geom. Dedicata*, 97 (2003), 215–249.
- [Pa] S.J. PATTERSON, The limit set of a Fuchsian group, *Acta Math.*, 136-3–4 (1976), 241–273.
- [Pe1] M. PEIGNÉ, Mesures de Hausdorff de l’ensemble limite de groupes kleinien géométriquement finis, *Notes du groupe de travail de systèmes dynamiques, Orléans*, 1999–2000.
- [Pe2] M. PEIGNÉ, On the Patterson–Sullivan measure of some discrete groups of isometries, *Israel J. Math.*, 133 (2003), 77–88.
- [Ro] T. ROBLIN, Sur la fonction orbitale des groupes discrets en courbure négative, *Ann. Inst. Fourier*, 52-1 (2002), 145–151.
- [Ru] D.J. RUDOLPH, Ergodic behaviour of Sullivan’s geometric measure on a geometrically finite hyperbolic manifold, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2 (1982), 491–512.
- [Sc] B. SCHAPIRA, Equidistribution of the horocycles of a geometrically finite surface, *Prépublication du MAPMO, arxiv preprint math.DS/0306258* 2003.
- [SV] B. STRATMANN, S.L. VELANI, The Patterson measure for geometrically finite groups with parabolic elements, new and old, *Proc. London Math. Soc.* (3), 71-1 (1995), 197–220.
- [S1] D. SULLIVAN, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, *Publ. Math. IHÉS*, 50 (1979), 171–202.

- [S2] D. SULLIVAN, Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups, *Acta Math.*, 153 (1984), 259–277.
- [Yu] C. YUE, The ergodic Theory of discrete isometry groups on manifolds of variable negative curvature, *Trans. Am. Math. Soc.*, 348 (1996), 4965–5005.

Manuscrit reçu le 12 mai 2003,
accepté le 30 avril 2004.

Barbara SCHAPIRA,
LAMFA–UMR 6140
Université Picardie Jules Vernes
33 rue St Leu
80000 Amiens (France).
Barbara.Schapira@u-picardie.fr