ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CARL S. HERZ

Les théorèmes de renouvellement

Annales de l'institut Fourier, tome 15, n^{o} 1 (1965), p. 169-187
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_169_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 1 (1965), 169-188.

LES THÉORÈMES DE RENOUVELLEMENT

par Carl S. HERZ (1)

Introduction.

Soit $\mathscr{D}$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions indéfiniment dérivables à support compact. Une distribution $D \in \mathscr{D}'$, le dual de $\mathscr{D}$, est un *laplacien généralisé* si $\int gD \leqslant 0$ pour chaque $g \in \mathscr{D}$ qui atteint son maximum en O, l'origine. On peut facilement caractériser ces distributions: Un laplacien généralisé est en dehors de l'origine une mesure de Radon positive, la mesure du complémentaire d'un voisinage de l'origine étant finie. Quelle que soit la fonction g positive et deux fois dérivable, $\int gD$ a un sens pourvu que l'on admette $+\infty$ comme valeur possible.

Nous nous bornons à la considération du groupe $\mathbf{R}$, la droite réelle. Posons $\sigma^2 = \int x^2 D$. On a, dans le cas $\sigma < \infty$,

$$\int gD = \tfrac{1}{2}\sigma_0^2 g''(O) + mg'(O) - pg(O) + \int_{\complement O} \{g(x) - g(O) - xg'(O)\}\, d\mu(x)$$

où $\sigma_0^2 \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, et μ est une mesure de Radon positive sur $\complement O$ telle que $\sigma_0^2 + \int x^2\, d\mu(x) = \sigma^2$. On a toujours $\int_{|x|<1} x^2\, d\mu(x) < \infty$, mais si $\int_{|x|>1} |x|\, d\mu(x) = \infty$ il faut alors modifier un peu la présentation de D.

On étudie les opérateurs de convolution $D*$. Ce sont précisément les générateurs infinitésimaux des semi-groupes sous-markoviens de convolution. On veut examiner les solutions élémentaires E de $D * E = -\delta$, c'est-à-dire les distributions $E \in \mathscr{D}'$ telles que, pour chaque $f \in \mathscr{D}$, $D * g$ est définie où $g = E * f$ et $D * g = -f$. Les solutions convenables sont les bons noyaux du potentiel.

(1) L'auteur a pu faire ce travail grâce à une subvention de la National Science Foundation (contrat GP-1645).

Signalons une propriété très importante des laplaciens généralisés. (On suppose toujours $D \neq 0$.)

LEMME 1. — *Soit* U *un ouvert précompact. Supposons* $D * g \geqslant 0$ *dans* U. *Quel que soit* $c > 0$, *si* g *atteint la valeur* c *dans* U *alors il existe* $y \in \complement U$ *tel que* $g(y) \geqslant c$.

Cette propriété du laplacien généralisé correspond à un principe du maximum pour la solution élémentaire. Il y a plusieurs principes du maximum. Leurs énoncés s'expriment tous sous la forme générale:

P: *Si* $f \in \mathscr{C}$ *alors l'inégalité* $E * f(x) \leqslant 1$ *a lieu partout dès qu'elle a lieu en chaque* $x \in S$,

où $\mathscr{C}$ désigne un sous-ensemble de $\mathscr{D}$ et S un sous-ensemble de **R**. Voici les principes:

PRINCIPE COMPLET DU MAXIMUM:

$$\mathscr{C} = \mathscr{D}, \qquad S = \{x : f(x) > 0\}$$

PRINCIPE FORT DU MAXIMUM:

$$\mathscr{C} = \mathscr{D}, \qquad S = \{x : f(x) \neq 0\}$$

PRINCIPE SEMI-COMPLET (2) DU MAXIMUM:

$$\mathscr{C} = \{f \in \mathscr{D} : \textstyle\int f\,dx \geqslant 0\}, \qquad S = \{x : f(x) > 0\}$$

PRINCIPE DU MAXIMUM:

$$\mathscr{C} = \mathscr{D}^+, \qquad S = \{x : f(x) \neq 0\}.$$

On arrive aisément à la

PROPOSITION 1. — *Si* $p = -\int D \neq 0$ *alors il existe une solution élémentaire* $E = -D^{-1}$ *qui est une mesure de Radon positive de masse totale* p^{-1}. E *satisfait au principe complet du maximum.*

Or, quels que soient D, laplacien généralisé, et $\lambda > 0$, $E_\lambda = (\lambda - D)^{-1}$ est comme dans l'énoncé de la proposition. D'ailleurs on a le

LEMME 2. — *Si* $0 < \lambda \leqslant \mu$ *alors* $E_\lambda \geqslant E_\mu$.

Démonstration. — Conséquence immédiate du Lemme 1 et de l'identité $D * (E_\lambda - E_\mu) = \lambda(E_\lambda - E_\mu) - (\mu - \lambda)E_\mu$.

On peut se demander si les E_λ convergent lorsque $\lambda \downarrow 0$. Cela dépend de la nature de D. L'hypothèse la plus simple est la suivante: D *est du type transient*: il possède une solution élémentaire positive.

(2) Pour être plus exact on doit dire « semi-complet par rapport à la mesure dx ». Quand il s'agit du groupe **Z** des entiers, au lieu de **R**, il convient de remplacer $\int f(x)\,dx \geqslant 0$ par $\Sigma f(x) \geqslant 0$. Nous entendons par dx la mesure invariante convenable au problème.

Dans le cas transient on a un théorème d'existence très simple.

THÉORÈME 1. — *Si* D *est du type transient alors les* E_λ *convergent, lorsque* $\lambda \downarrow 0$, *vers une mesure de Radon positive* E_0 *telle que*

$$D * E_0 = -\delta.$$

Celle-ci est la solution élémentaire positive minimale et elle satisfait au principe complet du maximum.

Démonstration. — Soit F une solution élémentaire positive (il suffit de supposer que $\liminf_{x\to\infty} F * f(x) \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathscr{D}^+$). Il résulte du Lemme 1 et l'identité $D * (F - E_\lambda) = -\lambda E_\lambda$ que $E_\lambda \leqslant F$. Ainsi les E_λ convergent vers $E_0 \leqslant F$ puisqu'ils croissent quand $\lambda \downarrow 0$ (lemme 2). Evidemment E_0 satisfait au principe complet du maximum. En particulier, E_0 est bornée, et

$$D * (E_0 * f) = \lim D * (E_\lambda * f) = \lim\{-f + \lambda E_\lambda * f\} = -f.$$

Pour écarter le cas trivial de la proposition 1 nous supposons que $D * g = 0$ si g est une constante. D'autre part, nous voulons éviter les cas périodiques où il convient de remplacer **R** par un sous-groupe discret fermé isomorphe à **Z**. Donc nous faisons l'hypothèse

(H): *Les solutions bornées continues* g *de* $D * g = 0$ *sont les constantes.*

Par « théorème de renouvellement » nous entendons un énoncé donnant le comportement asymptotique de la solution élémentaire à l'infini. Voici l'exemple typique pour le cas transient.

Exemple. — $D = -m\delta'$, $m > 0$. (Ceci correspond à un mouvement uniforme à droite de vitesse m.) Posons $k(x) = 1$ si $x \geqslant 0$, $k(x) = 0$ sinon. Alors on trouve

$$E_\lambda(x) = m^{-1} \exp\{-\lambda m^{-1} x\} k(x)\, dx \qquad \text{et} \qquad E_0(x) = m^{-1} k(x)\, dx.$$

Feller et Orey [1] ont traité le cas transient en toute généralité, et puis Feller (³) a donné une démonstration entièrement indépendante de la théorie des probabilités. Le résultat est le

THÉORÈME 2. — *Pour la solution élémentaire* E_0 *du théorème* 1 *on a pour chaque* $f \in \mathscr{D}$

$$\lim_{x\to+\infty} E_0 * f(x) = l^+ \int f(y), dy \qquad \lim_{x\to-\infty} E_0 * f(x) = l^- \int f(y)\, dy$$

(³) La théorie de Feller n'est pas encore parue dans son intégralité. Elle sera exposée dans son livre à paraître, *Probability Theory and its Application*, vol. II.

où 1°) $l^+ = m^{-1}$, $l^- = 0$, 2°) $l^+ = 0$, $l^- = -m^{-1}$, *ou* 3°) $l^+ = l^- = 0$ *selon les cas* 1°) $\int x\mathrm{D} = m > 0$, 2°) $\int x\mathrm{D} = m < 0$, 3°) $\int x\mathrm{D}$ *n'existe pas.*

Jusqu'ici on n'a pas traité le cas général d'un laplacien généralisé satisfaisant à H. Alors, il se peut qu'aucune solution élémentaire n'existe en tant que distribution tempérée; voir au N° 6. C'est le cas de laplacien généralisé *mal-adapté* au groupe **R** où il s'agit vraisemblablement de considérer un sous-groupe discret dense dans **R** dont la mesure de Haar doit remplacer la mesure de Lebesgue comme mesure invariante convenable, même s'il existe une solution élémentaire en tant que distribution non-tempérée. Au contraire, si le laplacien généralisé D possède une solution élémentaire tempérée alors on dit que D est *bien-adapté* à **R**.

THÉORÈME 3. — *Soit* D *un laplacien généralisé bien-adapté. Alors il existe une famille de constantes* $\{\mathrm{C}_\lambda\}$, *où* $0 \leqslant \mathrm{C}_\mu \leqslant \mathrm{C}_\lambda$ *pour* $\lambda \leqslant \mu$, *telle que* $\mathrm{E}_\lambda - \mathrm{C}_\lambda\, dx$ *converge, lorsque* $\lambda \downarrow 0$, *vers une distribution tempérée* E. *La distribution* E, *solution de* $\mathrm{D} * \mathrm{E} = -\delta$, *satisfait au principe semi-complet du maximum.*

Ce théorème est aussi valable dans $\mathbf{R}^2$ où pour D = laplacien ordinaire on trouve E = potentiel logarithmique. Néanmoins, toutes les difficultés se présentent dans le cas d'une dimension. Si D est bien-adapté mais non pas du type transient alors

D *est du type récurrent*: il possède des solutions élémentaires tempérées mais aucune d'entre elles n'est positive. Voici l'exemple typique pour le cas récurrent.

Exemple. — $D = \frac{1}{2}\sigma^2\delta''$. (Ceci correspond au mouvement brownien symétrique de variance σ^2.) On a

$$\mathrm{E}_\lambda(x) = (\sigma\sqrt{2\lambda})^{-1} \exp\{-\sqrt{2\lambda}|x|/\sigma\}\, dx$$

et, en posant $C_\lambda = (\sigma\sqrt{2\lambda})^{-1}$, on trouve

$$\mathrm{E}(x) = \lim_{\lambda\to 0} \mathrm{E}_\lambda(x) - \mathrm{C}_\lambda\, dx = -\sigma^{-2}|x|\, dx.$$

Dans le cas récurrent le remplacement pour le théorème de renouvellement est

THÉORÈME 4. — *Soit* D *un laplacien généralisé du type récurrent. Pour la solution élémentaire* E *du théorème* 3 *on a pour chaque* $f \in \mathcal{D}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{E}' * f(x) = \pm\,\sigma^{-2}\int f(y)\, dy$$

où E′ *désigne la dérivée de* E *et* $\sigma^2 = \int x^2\mathrm{D}$, $0 < \sigma^2 \leqslant \infty$.

Pour le groupe **Z** des entiers, Spitzer [3] a démontré les Théorèmes 3 et 4 où l'on doit remplacer $E_\lambda - C_\lambda\, dx$ par $E_\lambda - C_\lambda \Sigma$, Σ étant la mesure de Haar sur **Z**, et $E'(x)$ par $E(x+1) - E(x)$. Or, dans le cas du groupe **Z**, tout laplacien généralisé est bien-adapté et de plus, il existe un choix canonique de $\{C_\lambda\}$, à savoir $C_\lambda = E_\lambda\{0\}$, tel que E est une mesure de Radon négative. La théorie de Spitzer, qui repose fortement sur des considérations probabilistes, ne permet pas de conclure dans le cas du groupe **R**. Nous y parviendrons sans utiliser la théorie des probabilités. Notre exposition reste plus simple que celle de Spitzer pour le groupe **Z**. D'autre part, bien que le nouvel argument de Feller pour le cas transient soit de la théorie pure du potentiel, il nous faut faire intervenir quelques raisonnements de l'analyse harmonique. Cela s'explique, peut-être, par le fait que les noyaux E ne sont pas toujours des mesures mais des noyaux-distributions telles que $E * f$ n'existe que si f est assez régulière.

1. Le cas transient d'après Feller ([4]).

Le raisonnement de la démonstration du Théorème 1 prouve la

Proposition 2.— *Si* $f \in \mathcal{D}^+$ *alors* $\liminf_{x\to\infty} E_0 * f(x) = 0$.

Démonstration. — Supposons que $E_0 * f(x) > \varepsilon > 0$ pour $x \in \complement K$, K un compact. Ceci entraîne $D * 1 = 0$ car $\int D \neq 0$ implique que D^{-1} s'annule à l'infini. Posons $g = \varepsilon - (E_0 - E_\lambda) * f$. Alors

$$D * g = \lambda E_\lambda * f \geqslant 0.$$

D'autre part, $\liminf_{x\to\infty} g(x) \leqslant 0$. Ainsi, selon le Lemme 1, g ne peut pas atteindre un maximum strictement positif. Donc elle est partout négative et $E_0 * f(x) - E_\lambda * f(x) \geqslant \varepsilon$ en chaque x quel que soit λ, ce qui contredit $\lim_{\lambda\to 0} E_\lambda * f(x) = E_0 * f(x)$.

Proposition 3.— E_0 *est bornée et* E'_0 *s'annule à l'infini.*

Démonstration. — E_0 est bornée car elle satisfait au principe fort du maximum. Posons $g_y(x) = E_0 * f(x+y)$ où $f \in \mathcal{D}$ est donnée. Alors la famille $\{g_y\}$ constitue un précompact dans $\mathcal{E}$, espace des fonctions indéfiniment dérivables. Soit g une fonction adhérent à

([4]) La théorie de Feller n'est pas encore parue dans son intégralité. Elle sera exposée dans son livre à paraître, *Probability Theory and its Application*, vol. II.

$\{g_y : |y| \geqslant n\}$ pour chaque $n = 1, 2, 3, \ldots$ Alors $D * g = 0$ puisque $D * g_y(x) = 0$ si $x \notin -y + \operatorname{supp} f$. Selon l'hypothèse H, g doit être une constante, c'est-à-dire $g' = 0$. Donc, si on note G'_n l'adhérence de $\{g'_y : |y| \geqslant n\}$, alors $\bigcap G'_n = \{0\}$. Autrement dit,

$$E'_0 * f(x + y) = \{E_0 * f(x + y)\}' \to 0$$

uniformément pour x dans un compact lorsque $y \to \infty$.

PROPOSITION 4.— *Soit $f \in \mathcal{D}$ et posons $g = E_0 * f$. Alors*

$$\lim_{y \to \infty} g(y) g(-y) = 0.$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. On choisit y assez grand pour que

$$|g(x + y) - g(y)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad x \in \operatorname{supp} f.$$

Posons $M = \sup\{g(x) : x \in \operatorname{supp} f\}$ et considérons la fonction

$$h(x) = M^{-1} g(y) g(x) - g(x + y) = E_0 * \{M^{-1} g(y) f(x) - f(x + y)\}.$$

On a $h(x) < \varepsilon$ pour $x \in \operatorname{supp} f$ tandis que E_0 satisfait au principe complet du maximum. Donc $h(x) \leqslant \varepsilon$ partout. D'après la proposition 2, il existe x_ε tel que $g(x_\varepsilon) < \varepsilon$. De l'inégalité $h(-y + x_\varepsilon) < \varepsilon$ il résulte que

$$g(y) g(-y + x_\varepsilon) \leqslant 2M\varepsilon.$$

L'énoncé s'en déduit en faisant tendre y vers ∞ car $g(y)$ reste bornée et

$$g(-y + x_\varepsilon) - g(-y) \to 0.$$

Cette démonstration, qui met en pleine lumière le rôle du principe complet du maximum, est due à Feller.

PROPOSITION 5.— *Si $f \in \mathcal{D}$ alors $\lim_{x \to +\infty} E_0 * f(x)$ existe.*

Démonstration. — Posons $g = E_0 * f$ et supposons $l > 0$ soit un point limite de $g(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et n un entier positif. On peut choisir $x_1, x_2, \ldots x_n$ tels que

$$g(x_i) < l + 2^{-i-1}\varepsilon, \qquad g(-x_i) < 2^{-i-1}\varepsilon$$

$$|g(x_i) - g(x_i + x)| < 2^{-i-1}\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad x \in -x_j + \operatorname{supp} f, \quad 0 \leqslant j < i \ (\text{on pose } x_0 = 0)$$

$$|g(-x_i) - g(-x_i + x)| < 2^{-i-1}\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad x \in x_j + \operatorname{supp} f, \quad 0 \leqslant j < i.$$

Ces inégalités résultent des propositions 3 et 4. Maintenant posons

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) + g(x_1 + x) + \cdots + g(x_n + x) \\ &= \mathrm{E}_0 * \{f(x) + f(x_1 + x) + \cdots + f(x_n + x)\}. \end{aligned}$$

Selon le principe du maximum, $h(x) \leqslant \mathrm{M} + nl + \varepsilon$ partout où $\mathrm{M} = \sup\{g(x) : x \in \operatorname{supp} f\}$. Ainsi

$$\limsup_{x \to +\infty} g(x) \leqslant l + n^{-1}(\mathrm{M} + \varepsilon).$$

Puisque n était arbitraire, $\limsup_{x \to \infty} g(x) \leqslant l$. Donc il existe au plus une limite strictement positive à droite; par conséquent il existe une limite unique lorsque x tend vers $+\infty$.

La démonstration du théorème 2 est presque achevée. On se donne une fonction $u \in \mathscr{D}$ telle que $\int u(x)\,dx = 1$. On pose

$$l^+ = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{E}_0 * u(x), \qquad l^- = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{E}_0 * u(-x).$$

Les deux limites existent suivant la proposition 5. D'autre part, quelle que soit $f \in \mathscr{D}$, $f - (\int f(y)\,dy)u$ est la dérivée d'une fonction appartenant à $\mathscr{D}$ parce que son intégrale est zéro. Il résulte de la proposition 3 que $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{E}_0 * f(x) = l^+ \int f(y)\,dy$. Enfin il ne reste qu'à trouver les valeurs explicites des constantes l^+ et l^-. Nous renvoyons à [1] pour les détails.

2. Analyse harmonique des laplaciens généralisés.

DÉFINITION. — Dire qu'une fonction continue ψ est *définie-négative* est dire qu'elle remplit les conditions suivantes:

1°) $\psi(\mathrm{O}) \geqslant 0$

2°) $\psi(-\xi) = \bar{\psi}(\xi)$

3°) $\Sigma\psi(\xi_i - \xi_j)c_i c_j \leqslant 0$ quels que soient les couples $(\xi_1, c_1), \ldots (\xi_n, c_n)$; $\xi_i \in \mathbf{R}$, c_i nombre complexe; où $\Sigma c_i = 0$.

PROPOSITION 6. — *Pour que* D *soit un laplacien généralisé il faut et il suffit que sa transformée de Fourier soit de la forme*

$$\int \exp(-i\xi x)\mathrm{D}(x) = -\psi(\xi)$$

où ψ *est une fonction définie-négative.*

PROPOSITION 7. — *Dire que* D *vérifie l'hypothèse* H, *c'est dire que* $\psi(\xi) = 0$ *seulement en* $\xi = \mathrm{O}$. *De plus ce* D *possède une solution* *élémentaire tempérée si et seulement si $\psi^{-1}(\xi)\,d\xi$ est, en dehors de l'origine, une distribution tempérée.*

Nous ne donnons pas les démonstrations des propositions 6 et 7. Elles ne sont pas difficiles, mais il y a une précision à apporter: La supposition que $\psi^{-1}(\xi)\,d\xi$ soit une distribution tempérée sur $|\xi| > 1$, n'entraîne pas que $|\psi^{-1}(\xi)|d\xi$ y soit une mesure à croissance lente. Si $|\psi^{-1}(\xi)|\,d\xi$ est à croissance lente, alors $\psi^{-1}(\xi)\,d\xi$ est une distribution tempérée et, de plus nous avons

S: *Les distributions $[\lambda + \psi(\xi)]^{-1}\,d\xi$ convergent, lorsque $\lambda \downarrow 0$, sur $|\xi| > 1$ vers $\psi^{-1}(\xi)\,d\xi$ en tant que distributions tempérées.*

Nous ajoutons à la définition d'un laplacien généralisé bien adapté à **R** *l'hypothèse* S. Cette hypothèse est nécessaire pour que le Théorème 3 soit valable, et il est bien possible qu'on puisse la déduire du fait que ψ est une fonction définie-négative telle que $\psi^{-1}(\xi)\,d\xi$ est une distribution tempérée sur $|\xi| > 1$.

Si $f \in \mathscr{D}$ alors sa transformée de Fourier est

$$\hat{f}(\xi) = \int \exp(i\xi x) f(x)\,dx$$

Donnons-nous une fonction $\hat{u}$ indéfiniment dérivable à décroissance rapide telle que $\hat{u}(\mathrm{O}) = 1$, $\hat{u}'(\mathrm{O}) = 0$. Pour chaque $\lambda > 0$ et chaque $f \in \mathscr{D}$ on a

$$\begin{aligned}\int f\mathrm{E}_\lambda = \quad & \mathrm{C}_\lambda \int f(x)\,dx + \mathrm{C}'_\lambda \int xf(x)\,dx \\ & + \int \{\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\mathrm{O})\hat{u}(\xi) - \hat{f}'(\mathrm{O})\xi\hat{u}(\xi)\}[\lambda + \psi(\xi)]^{-1}\,d\xi/2\pi,\end{aligned}$$

où

$$\mathrm{C}_\lambda = \int \hat{u}(\xi)[\lambda + \psi(\xi)]^{-1}\,d\xi/2\pi, \qquad \mathrm{C}'_\lambda = i\int \xi\hat{u}(\xi)[\lambda + \psi(\xi)]^{-1}\,d\xi/2\pi.$$

Si $\hat{u}$ est la transformée de Fourier d'une certaine fonction u, alors

$$\mathrm{C}_\lambda = \int u\mathrm{E}_\lambda, \qquad \mathrm{C}'_\lambda = \int u\mathrm{E}'_\lambda.$$

On arrive à un énoncé très proche de celui du théorème 3.

PROPOSITION 8. — *Si* D *est un laplacien généralisé bien adapté au groupe* **R** *alors il existe deux familles de constantes $\{\mathrm{C}_\lambda\}$ et $\{\mathrm{C}'_\lambda\}$ telles que $\mathrm{E}_\lambda - \mathrm{C}_\lambda\,dx - \mathrm{C}'_\lambda x\,dx$ converge dans $\mathscr{D}'$, lorsque $\lambda \downarrow 0$, vers une distribution tempérée* F. *De plus, on peut supposer $0 \leqslant \mathrm{C}_\mu \leqslant \mathrm{C}_\lambda$ pour $0 < \lambda \leqslant \mu$* et $\mathrm{C}_\lambda \leqslant (\sigma\sqrt{2\lambda})^{-1} + o(\lambda^{-\frac{1}{2}})$ *où $\sigma^2 = \int x^2\mathrm{D}$.*

Démonstration. — Par passage formel à la limite on a pour $f \in \mathscr{D}$

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0+} \left\{\int f\mathrm{E}_\lambda - \mathrm{C}_\lambda\int f(x)\,dx - \mathrm{C}'_\lambda\int xf(x)\,dx\right\} \\ &\quad = \{\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\mathrm{O})\hat{u}(\xi) - \hat{f}'(\mathrm{O})\xi\hat{u}(\xi)\}\psi^{-1}(\xi)\,d\xi/2\pi.\end{aligned}$$

Sur $|\xi| > 1$ c'est exactement l'hypothèse S qui intervient. En ce qui concerne l'intervalle $|\xi| \leqslant 1$ nous avons l'estimation :

$$\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\mathrm{O})\hat{u}(\xi) - \hat{f}'(\mathrm{O})\xi\hat{u}(\xi) = O(\xi^2), \qquad \xi \to \mathrm{O}$$

tandis que

$$\lim_{\xi \to 0} \xi^2 \psi^{-1}(\xi) = 2\sigma^{-2} \qquad \text{ou} \qquad 0.$$

Donc le passage à la limite est justifié. Si l'on suppose u positive alors $\mathrm{C}_\lambda = \int u\mathrm{E}_\lambda$ est positive et elle croît lorsque λ diminue. D'ailleurs, si u est paire, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_\lambda &= \pi^{-1} \int_0^\infty \hat{u}(\xi) \mathrm{Re}\{\lambda + \psi(\xi)\}^{-1}\, d\xi \\
&= \pi^{-1} \int_0^1 \hat{u}(\xi) \mathrm{Re}\{\lambda + \psi(\xi)\}^{-1}\, d\xi + O(1) \\
&\leqslant \pi^{-1} \int_0^\infty (\lambda + \tfrac{1}{2}\sigma^2\xi^2)^{-1}\, d\xi + o(\lambda^{-\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

Nous avons besoin d'un petit calcul.

Lemme 3.— $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-1} \int_{-1}^{1} (1 - \cos \xi x)\psi^{-1}(\xi)\, d\xi/2\pi = \sigma^{-2}$ *si* $\int x^2\mathrm{D} = \sigma^2 < \infty$ *et* $\int x\mathrm{D} = 0$; *sinon la limite est zéro.*

Démonstration. — Posons $\theta(\xi) = \xi^2/2\psi(\xi)$, $|\xi| \leqslant 1$ et $\theta(\xi) = 0$, $\xi > 1$. Alors θ est bornée et elle est continue en O. Ainsi

$$x^{-1} \int_{-1}^{1} (1 - \cos \xi x)\psi^{-1}(\xi)\, d\xi/2\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \xi x}{\pi x \xi^2}\, \theta(\xi)\, d\xi \to \theta(\mathrm{O}).$$

Or,

$$\theta(\mathrm{O}) = \sigma^{-2} \text{ si } \int x^2\mathrm{D} = \sigma^2 < \infty \text{ et } \int x\mathrm{D} = 0\text{; sinon } \theta(\mathrm{O}) = 0.$$

Proposition 9. — *Soit $f \in \mathscr{D}$ une fonction paire telle que*

$$\int f(x)\, dx = 1.$$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x)^{-1}\{\mathrm{F} * f(x) + \mathrm{F} * f(-x)\} = -\sigma^{-2}$ *ou* 0 *selon que* $\int x^2\mathrm{D} = \sigma^2 < \infty$, $\int x\mathrm{D} = 0$ *ou non.*

Démonstration. — La représentation comme intégrale de Fourier de la fonction $(2x)^{-1}\{F * f(x) + F * f(-x)\}$ est

$$x^{-1}\int\{\hat{f}(\xi)\cos\xi x - \hat{f}(O)\hat{u}(\xi)\}\psi^{-1}(\xi)\,d\xi/2\pi$$

$$= -x^{-1}\int_{-1}^{1}(1-\cos\xi x)\psi^{-1}(\xi)\,d\xi/2\pi$$

$$+ x^{-1}\int_{-1}^{1}\cos\xi x\{\hat{f}(\xi) - \hat{f}(O)\}\psi^{-1}(\xi)\,d\xi/2\pi$$

$$+ x^{-1}\int_{-1}^{1}\{1-\hat{u}(\xi)\}\bar{\psi}^{-1}(\xi)\,d\xi/2\pi$$

$$+ x^{-1}\int_{|\xi|\geqslant 1}\{\hat{f}(\xi)\cos\xi x - \hat{f}(O)\hat{u}(\xi)\mathrm{Re}\,\psi^{-1}(\xi)\}\,d\xi/2\pi.$$

Chaque intégrale sauf la première est uniformément bornée en x (quant à la dernière il faut remarquer que $\mathrm{Re}\,\psi^{-1}(\xi)\,d\xi$ est une mesure à croissance lente sur $|\xi| \geqslant 1$). Ainsi la proposition résulte du lemme.

3. Le Théorème d'Existence.

Pour démontrer le théorème 3 il faut commencer avec un résultat plus faible.

Lemme 4. — *Les* C'_λ *sont bornées.*

Démonstration. — Selon la proposition 8, $E_\lambda - C_\lambda\,dx - C'_\lambda x\,dx$ converge vers une distribution F. Soit $f \in \mathscr{D}^+$ telle que $\int f(x)\,dx = 1$, $\int xf(x)\,dx = 0$, et dont le support est contenu dans $[-1, 1]$. Or, $F * f(x)$ est bornée dans $[-2, 2]$; donc il existe une constante b telle que

$$|E_\lambda * f(x) - C_\lambda - C'_\lambda x| \leqslant b \qquad \text{pour} \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2.$$

En particulier, $E_\lambda * f(x) - C_\lambda \leqslant b + |C'_\lambda|$ sur le support de f. Puisque les E_λ satisfont au principe du maximum (et les C_λ sont positives), cette inégalité a lieu partout. En posant $x = 2\,\mathrm{sgn}\,C'_\lambda$ on obtient $|C'_\lambda| \leqslant 2b$.

Comme corollaire immédiat nous avons

Lemme 5. — *La famille* $\{E_\lambda - C_\lambda\,dx : \lambda > 0\}$ *est précompacte dans* $\mathscr{D}'$ *et si l'on appelle* E *une des limites alors chaque autre limite s'exprime comme* $E - \gamma x\,dx$ *où* γ *est une constante.*

Nous allons prouver que la limite est en fait unique.

LEMME 6. — *Quelle que soit la limite* E, *elle satisfait au principe semi-complet du maximum. En particulier, elle est bornée supérieurement.*

Démonstration. – D'après la Proposition 1, chaque E_λ satisfait au principe complet du maximum. Ainsi $E_\lambda - C_\lambda\, dx$ satisfait au principe semi-complet parce que $C_\lambda \geqslant 0$. Il est évident qu'une limite de distributions satisfaisant au principe semi-complet du maximum y satisfait également.

PROPOSITION 10.— *Lorsque* $\lambda \downarrow 0$, $E_\lambda - C_\lambda\, dx$ *converge dans* $\mathscr{D}'$ *vers une distribution* E *satisfaisant au principe semi-complet du maximum.*

Démonstration. — Soit E une des limites dont on sait l'existence d'après le lemme 5. D'après le lemme 6, E est bornée supérieurement ainsi que chaque autre limite $E - \gamma x\, dx$ mais si les distributions E et $E - \gamma x\, dx$ sont bornées toutes les deux supérieurement, il faut que $\gamma = 0$. Ainsi la famille $\{E_\lambda - C_\lambda\, dx : \lambda > 0\}$ possède une limite unique.

PROPOSITION 11.— *Lorsque* $\lambda \downarrow 0$, E'_λ *converge vers* E' *qui satisfait au principe fort du maximum.*

Démonstration. — La dérivée d'une distribution satisfaisant au principe semi-complet satisfait au principe fort.

Nota. — E' est complètement déterminée par D bien que E ne le soit pas parce qu'on peut toujours modifier les C_λ.

Pour achever la démonstration du théorème 3 il ne reste qu'à prouver $D * E = -\delta$. Ceci n'est pas tout à fait banal.

LEMME 7.— *On ne peut pas avoir à la fois g bornée supérieurement et* $D * g(x) \geqslant \varepsilon > 0$ *partout.*

Démonstration. — L'énoncé se voit directement par l'étude de la forme générale d'un laplacien généralisé, mais nous donnons un autre raisonnement moins fâcheux.

Soit b la borne supérieure de g. Alors D est le générateur d'un semi-groupe $\{P_t\}$ de mesures de probabilité, et on a

$$P_t * g - g = \int_0^t P_s * (D * g)\, ds.$$

Ainsi $P_1 * g(x) - g(x) \geqslant \varepsilon$. D'autre part $P_1 * g \leqslant b$. Donc

$$g(x) \leqslant b - \varepsilon,$$

ce qui contredit l'hypothèse que b soit la borne supérieure. (Si $\mathrm{D} * g$ n'est pas bornée, alors il faut une petite modification).

LEMME 8. — $\mathrm{D} * \mathrm{E}' = -\delta'$.

Démonstration. — Donnons-nous $f \in \mathscr{D}$ et posons

$$g_\lambda = \mathrm{E}_\lambda * f - \mathrm{C}_\lambda \int f\, dx,$$

$g = \mathrm{E} * f$. D'après la proposition 10, g_λ, ainsi que toutes ses dérivées, converge uniformément sur tout compact lorsque $\lambda \downarrow 0$. Ainsi g'_λ converge uniformément vers g' sur le support de f. Puisque les E'_λ satisfont au principe fort du maximum, les g'_λ sont bornées dans leur ensemble. Donc $\mathrm{D} * g' = \lim_{\lambda \to 0} \mathrm{D} * g'_\lambda = \lim_{\lambda \to 0} - f' + \lambda g'_\lambda = -f'$.

PROPOSITION 12. — $\mathrm{D} * \mathrm{E} = -\delta$.

Démonstration. — En gardant les notations ci-dessus, supposons $f \in \mathscr{D}^+$. Alors, les g_λ sont bornées supérieurement dans leur ensemble parce que les E_λ satisfont au principe semi-complet du maximum. Hors d'un voisinage de l'origine, D est une mesure positive de masse finie. Donc $\mathrm{D} * g \geqslant \limsup_{\lambda \to 0} \mathrm{D} * g_\lambda$. D'autre part,

$$\mathrm{D} * g_\lambda = -f + \lambda\{g_\lambda + \mathrm{C}_\lambda \int f\, dx\}.$$

Grâce à l'estimation $\mathrm{C}_\lambda = O(\lambda^{-\frac{1}{2}})$ de la proposition 8, nous en concluons que $\lim_{\lambda \to 0} \mathrm{D} * g_\lambda = -f$. Donc, $\mathrm{D} * g$ existe (pour une fonction indéfiniment dérivable g, bornée supérieurement, ou bien $\mathrm{D} * g(x)$ existe ou bien $\mathrm{D} * g(x) = -\infty$) et $\mathrm{D} * g = -f + h$ où $h \geqslant 0$. D'ailleurs, $(\mathrm{D} * g)' = \mathrm{D} * g' = -f'$ suivant le lemme 8. Il s'ensuit que h est une constante. Supposons $h = 2\varepsilon > 0$. Pour λ fixé suffisamment petit $\lambda\{g_\lambda(x) + \mathrm{C}_\lambda \int f\, dx\} \leqslant \varepsilon$. Donc $\mathrm{D} * (g - g_\lambda) \geqslant \varepsilon$ partout tandis que $g - g_\lambda$ est bornée supérieurement. Ainsi l'hypothèse $h > 0$ entraîne une contradiction du lemme 7. Il ne reste que la possibilité $h = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{D} * g = -f$, ce qui donne l'énoncé de la proposition.

Le théorème 3 est simplement un résumé des propositions 10 et 12.

4. Le Théorème de Renouvellement dans le cas récurrent.

La démonstration complète du théorème 4 est assez longue. On commence par la

PROPOSITION 13. — E'' *s'annule à l'infini.*

Démonstration. — Voir la démonstration de la proposition 3.

Or, il suffit d'établir l'énoncé du théorème 4 pour une seule $f \in \mathscr{D}^+$ avec $\int f(x)\,dx = 1$, car, si $h \in \mathscr{D}$ est quelconque alors $h(x) - \{\int h(y)\,dy\} f(x) = k'(x)$ où $k \in \mathscr{D}$ (toute fonction appartenant à $\mathscr{D}$ dont l'intégrale est zéro, est la dérivée d'une fonction appartenant à $\mathscr{D}$). Nous avons

$$\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{E}' * h(x) = \int h(y)\,dy \lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{E}' * f(x) + \lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{E}' * k'(x)$$

et $\mathrm{E}' * k'(x) = \mathrm{E}'' * k(x)$ tend vers 0 lorsque $x \to \pm\infty$ d'après la proposition. Donc nous donnons, une fois pour toutes, une telle f, et nous posons $g = \mathrm{E} * f$.

Suivant les propositions 10 et 11, g est bornée supérieurement, g' est bornée, et enfin $|x|^{-1} g(x)$ est bornée inférieurement. Donc toutes les quantités définies ci-dessous sont finies

$$\alpha^+ = \liminf_{x \to +\infty} - x^{-1} g(x), \qquad \alpha^- = \liminf_{x \to -\infty} x^{-1} g(x)$$

$$\beta^+ = \limsup_{x \to +\infty} - g'(x), \qquad \beta^- = \limsup_{x \to -\infty} g'(x)$$

$$\gamma^+ = \liminf_{x \to +\infty} - g'(x), \qquad \gamma^- = \liminf_{x \to -\infty} g'(x).$$

Il est évident que $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$.

Proposition 14. — $\alpha^+ = \beta^+$ *et* $-\gamma^- \leqslant \alpha^+$. *De plus,* $\lim_{x \to +\infty} x^{-1} g(x)$ *existe.* (On a également $\alpha^- = \beta^-$, $-\gamma^+ < \alpha^-$, et $\lim_{x \to -\infty} x^{-1} g(x)$ existe.)

Démonstration. — Etant donné $\varepsilon > 0$, on choisit y assez grand pour que

$$-g(x) \leqslant (\alpha^+ + \varepsilon) y \quad \text{pour} \quad x \in y + \operatorname{supp} f$$

$$g(x) \leqslant \varepsilon y \quad \text{pour} \quad x \in \operatorname{supp} f.$$

Alors $g(x) - g(x + y) \leqslant (\alpha^+ + 2\varepsilon) y$ pour $x \in \operatorname{supp} f$, et donc, selon le principe semi-complet du maximum, $g(x) - g(x + y) \leqslant (\alpha^+ + 2\varepsilon) y$ partout. Puisque $g''(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$, on aura $|g''(x)| < \varepsilon y^{-1}$ si $|x| > x_0$. Alors

$$|g(x) - g(x + y) + y g'(x)| \leqslant \varepsilon y \quad \text{si} \quad x > x_0 \quad \text{ou} \quad x < -x_0 - y.$$

Donc, $-y g'(x) \leqslant (\alpha^+ + 3\varepsilon) y$ pour x assez grand, ce qui entraîne $\beta^+ \leqslant \alpha^+$ et $-\gamma^- \leqslant \alpha^+$. Enfin $\alpha^+ = \beta^+$ et $-x^{-1} g(x) \to \alpha^+$ lorsque $x \to +\infty$.

Suivant la proposition 9, $\alpha^+ + \alpha^- = 0$ sauf dans le cas $\int x^2 \mathrm{D} < \infty$ et $\int x\mathrm{D} = 0$. Evidemment $\alpha^+, \alpha^- \geqslant 0$. Donc le cas exceptionnel mis à part, il ne reste plus rien à faire car on a $\alpha^+ = \alpha^- = 0$, et puis $0 \leqslant \gamma^+ \leqslant \beta^+ = 0$, etc. Par ailleurs nous trouvons

Proposition 15. — *Si* $\int x^2\mathrm{D} < \infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to \infty} g'(x) + g'(-x) = 0.$

Notre démonstration repose sur l'analyse harmonique. Nous la donnerons dans N° 5.

Achevons la preuve du théorème 4 dans le cas exceptionnel, $\int x^2\mathrm{D} = \sigma^2 < \infty$, $\int x\mathrm{D} = 0$. D'après la proposition 15 nous avons $\beta^+ = \beta^-$ tandis que $\alpha^+ + \alpha^- = 2\sigma^{-2}$ selon la proposition 9. Donc $\gamma^+ \leqslant \beta^+ = \alpha^+ = \sigma^{-2} > 0$. Supposons qu'il existe $l \geqslant 0$ telle que $\gamma^+ \leqslant l < \beta^+$. Etant donnés $\varepsilon > 0$ et n un entier positif on peut choisir, comme dans la démonstration de la proposition 5, des points $x_1, x_2, \ldots x_n$ tels que

$$-g'(x_i) < l + 2^{-i-1}\varepsilon$$

$$|g'(x_i) - g'(x_i + x)| < 2^{-i-1}\varepsilon$$

pour $x \in -x_j + \operatorname{supp} f$, $0 \leqslant j < i$ (on pose $x_0 = \mathrm{O}$)

$$|g'(x) + g'(-x)| < 2^{-i-1}\varepsilon$$

pour $x \in x_i - x_j + \operatorname{supp} f$, $0 \leqslant j < i$.

Posons

$$\begin{aligned} h(x) &= -g'(x) - g'(x_1 + x) - \cdots - g'(x_n + x) \\ &= -\mathrm{E}' * \{f(x) + f(x_1 + x) + \cdots + f(x_n + x)\}. \end{aligned}$$

Selon le principe fort du maximum auquel E′ satisfait (proposition 11), $h(x) \leqslant \mathrm{M} + nl + \varepsilon$ partout où $\mathrm{M} = \sup\{-g'(x) : x \in \operatorname{supp} f\}$. Il s'ensuit que $\limsup\limits_{x \to +\infty} -g'(x) \leqslant l$, d'où contradiction. Donc $\gamma^+ = \beta^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = -\sigma^{-2}$.

5. Démonstration de la Proposition 15.

Si $\int x^2\mathrm{D} < \infty$ alors la distribution D s'exprime sous la forme

$$\int g\mathrm{D} = \tfrac{1}{2}\sigma_0^2 g''(\mathrm{O}) + mg'(\mathrm{O}) + \int \{g(x) - g(\mathrm{O}) - xg'(\mathrm{O})\}\, d\mu(x)$$

où $\sigma_0 \geqslant 0$ et μ est une mesure positive sur $\complement\mathrm{O}$ telle que $\int x^2\, d\mu(x) < \infty$.

Ainsi $\psi(\xi) = -\int \exp(-i\xi x)\mathrm{D} = \psi_1(\xi) + i\psi_2(\xi)$ où

$$\psi_1(\xi) = \int_0^\infty r^{-2}\{1 - \cos r\xi\}\, d\sigma(r)$$

$$\psi_2(\xi) = +m\xi + \int_0^\infty r^{-2}\{-r\xi + \sin r\xi\}\, d\tau(r)$$

$$\sigma(r) = \sigma_0^2 + \int_{0<|x|\leqslant r} x^2\, d\mu(x), \qquad \tau(r) = \int_{0<|x|\leqslant r} (\operatorname{sgn} x)x^2\, d\mu(x).$$

Il s'ensuit que, pour $\xi > 0$,

$$\psi_1(\xi) \geqslant a\sigma(\xi^{-1})\xi^2$$

$$|\psi_2(\xi)^- m\xi| \leqslant b\xi^3 \int_0^{\xi-1} r\, d\sigma(r) + c\xi \int_{\xi-1}^\infty r^{-1}\, d\sigma(r).$$

Si $m \neq 0$ alors on se trouve dans le cas transient. Donc; nous supposons $m = 0$. On ne perd rien en supposant de plus $\sigma(1) > 0$.

LEMME 9.— $\int_0^1 \xi|\psi_2(\xi)|\,|\psi(\xi)|^{-2}\, d\xi < \infty$.

Démonstration. — En posant $\xi = u^{-1}$ nous avons

$$\int_0^1 \xi|\psi_2(\xi)|\psi_1^{-2}(\xi)\, d\xi = \int_1^\infty \frac{u|\psi_2(u^{-1})|}{u^4\psi_1^2(u^{-1})}\, du$$

$$\leqslant ba^{-2} \int_1^\infty \sigma^{-2}(u)u^{-2} \int_0^u r\, d\sigma(r)\, du$$

$$+ca^{-2} \int_1^\infty \sigma^{-2}(u) \int_u^\infty r^{-1}\, d\sigma(r)\, du$$

$$= ba^{-2} \int_1^\infty \sigma^{-2}(u)u^{-2} \int_0^1 r\, d\sigma(r)\, du$$

$$+ba^{-2}\mathrm{B} + ca^{-2}\mathrm{C}$$

où

$$\mathrm{B} = \int_1^\infty \sigma^{-2}(u)u^{-2} \int_1^u r\, d\sigma(r)\, du = \int_1^\infty \int_r^\infty u^{-2}\sigma^{-2}(u)\, du\, r\, d\sigma(r),$$

$$\mathrm{C} = \int_1^\infty \sigma^{-2}(u) \int_u^\infty r^{-1}\, d\sigma(r)\, du = \int_1^\infty r^{-1} \int_1^r \sigma^{-2}(u)\, du\, d\sigma(r).$$

Or,

$$\int_r^\infty u^{-2}\sigma^{-2}(u)\,du \leqslant r^{-1}\sigma^{-2}(r)$$

car σ est croissant. Donc

$$B \leqslant \int_1^\infty \sigma^{-2}(r)\,d\sigma(r) = \sigma^{-1}(\infty) - \sigma^{-1}(1) < \infty.$$

Ici il n'est pas nécessaire de supposer $\sigma(\infty) < \infty$, mais nous en aurons besoin pour l'estimation de C, à savoir $r^{-1}\int_1^r \sigma^{-2}(u)\,du \leqslant \sigma^{-2}(1)$ et ainsi $C \leqslant \sigma^{-2}(1)\int_1^\infty d\sigma(r) < \infty$.

La proposition s'ensuit rapidement si ψ^{-1} est à croissance lente, mais cela n'est pas toujours vrai. Il nous faut invoquer un théorème de l'analyse harmonique qui est plus ou moins connu (plutôt moins que plus).

Théorème de Riemann–Lebesgue–Wiener. — *Si* T *est une distribution bornée dont la transformée de Fourier est une fonction localement sommable, alors* T *s'annule à l'infini.*

Démonstration. — Posons $\phi(\xi) = \int \exp(-i\xi x)\mathrm{T}(x)$. Donnons-nous $f \in \mathscr{D}$ et $k \in \mathrm{L}^1$ telle que $\hat{k}(\xi) = \int \exp(-i\xi x)k(x)\,dx$ est nulle hors d'un compact. Avec notre convention, $\hat{f}(\xi) = \int \exp(i\xi x)f(x)\,dx$ et

$$k * (\mathrm{T} * f)(x) = \int \exp(-i\xi x)\hat{f}(\xi)\hat{k}(-\xi)\phi(-\xi)\,d\xi/2\pi.$$

L'intégrale tend vers 0 lorsque $x \to \infty$ par le lemme de Riemann–Lebesgue parce que $\hat{f}(\xi)\hat{k}(-\xi)\phi(-\xi)$ est une fonction sommable. Ainsi $k * (\mathrm{T} * f)$ s'annule à l'infini pour chaque $k \in \mathrm{L}^1$ dont la transformée de Fourier a un support compact. Les tels k sont denses dans L^1 et $\mathrm{T} * f \in \mathrm{L}^\infty$. Donc $k * (\mathrm{T} * f)$ s'annule à l'infini pour chaque $k \in \mathrm{L}^1$. Il s'agit maintenant de poser $h = f - f''$ et $k(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$. Si g est bornée et indéfiniment dérivable alors $k * (g - g'') = g$. Or, pour $g = \mathrm{T} * f$ nous avons

$$g = k * (g - g'') = k * (\mathrm{T} * h)$$

qui s'annule à l'infini parce que h possède les mêmes propriétés que f.

Pour en tirer la proposition 15, il suffit de remarquer que, pour f paire, $\mathrm{E}' * f(x) + \mathrm{E}' * f(-x) = \mathrm{T} * f(x)$ où la transformée de Fourier de T est la fonction $\xi \operatorname{Im} \psi^{-1}(\xi)$ qui est localement sommable par le lemme 9 ; T est bornée d'après la proposition 11.

Une extension de ce raisonnement, suivant Hoeffding [2], prouve le théorème 4 dans le cas $\int x^2 D < \infty$ sans aucune utilisation d'idées de la Théorie du potentiel si l'on suppose que $|\psi^{-1}(\xi)|\, d\xi$ soit une mesure à croissance lente. Néanmoins, même avec cette dernière hypothèse, on ne voit pas de remplacement pour le lemme 9 dans le cas $\int x^2 D = \infty$.

6. Laplaciens généralisés mal adaptés au groupe R.

Nous avons remarqué la

PROPOSITION 16. — *Le laplacien généralisé associé à la fonction définie-négative ψ est bien-adapté à* **R** *s'il existe un n tel que*

$$\int_1^\infty |\psi^{-1}(\xi)|\xi^{-n}\, d\xi < \infty.$$

Evidemment, les laplaciens généralisés mal-adaptés à **R** correspondent aux fonctions définies-négatives ψ telles que $\xi^n|\psi(\xi)|$ n'est pas bornée inférieurement sur $\xi > 1$, quel que soit n. Si $|\psi(\xi)|$ n'y est pas bornée alors la conclusion de la proposition suivante reste valable.

PROPOSITION 17. — *Si* D *est un laplacien généralisé mal adapté au groupe* **R** *alors il s'exprime sous la forme*

$$D = \sum p_k(\delta_{x_k} - \delta)$$

où $p_k > 0$, $\Sigma p_k < \infty$, et les x_k engendrent un sous-groupe dense dans **R**.

Démonstration. — Soit ψ une fonction définie-négative telle que $\psi(O) = 0$. Alors $s(\xi, \eta) = |\psi(\xi - \eta)|^{\frac{1}{2}}$ définit un écart invariant sur le groupe **R**. Les points où ψ est nulle constituent un sous-groupe de **R**, et, sous l'hypothèse H, ce sous-groupe réduit à $\{O\}$. Ainsi $d(\xi, \eta)$ est une vraie distance sur **R**. Munissons **R** de la topologie induite par d. Il y a deux possibilités: ou **R** a sa topologie habituelle ou **R** est dense dans un groupe compact **R***. Nous sommes dans ce cas-ci, et alors le groupe dual **X** de **R*** s'identifie avec un sous-groupe discret de **R**. D'ailleurs **X** est dense dans **R** suivant l'hypothèse H. Puisque ψ est continue par rapport à la distance d, elle s'étend d'une façon unique à une fonction continue et définie-négative sur **R***. Le groupe **R*** étant compact, ψ possède une borne supérieure b et $b - \psi$ est une fonction définie-positive. D'après le théorème de Bochner

$$b - \psi(\xi) = \sum p_k \exp(-i\xi x_k)$$

où $p_k > 0$ et $\Sigma p_k = b$; d'ailleurs, $x_k \in \mathbf{X}$.

La réciproque de la proposition 16 est exacte si le laplacien généralisé en question est symétrique. En tout cas, pour que D soit bien adapté il est nécessaire que $\operatorname{Re} \psi^{-1}(\xi)\, d\xi$ soit une mesure à croissance lente. Ainsi il est relativement aisé de construire des laplaciens généralisés mal adaptés et symétriques.

Exemple. — Posons $\mathrm{D} = d\mu - \delta$ où est la mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$ donnant la probabilité $\frac{1}{2}p_j$ à $\pm\, 2^{-j}$. La fonction définie-négative associée est

$$\psi(\xi) = 1 - \sum p_j \cos 2^{-j}\xi = 2 \sum p_j \sin^2 2^{-j-1}\xi.$$

Si toutes les p_j sont strictement positives alors $\psi(\xi) > 0$ sauf en $\xi = 0$.

D'autre part, pour $\xi = 2^{k+1}\pi + \eta$ on a

$$\psi(\xi) = 2 \sum_{j \leqslant k} \sin^2 2^{-j-1}\eta + 2 \sum_{j>k} p_j \sin^2 2^{-j-1}\xi < \eta^2 + 2 \sum_{j>k} p_j$$

Or, si l'on pose $\delta_k^2 = \sum_{j>k} p_j$ on aura

$$\int_{2^{k+1}\pi - \delta_k}^{2^{k+1}\pi + \delta_k} \psi^{-1}(\xi)\, d\xi > \tfrac{1}{2}\delta_k^{-1}.$$

Ceci montre que la distribution $\psi^{-1}(\xi)\, d\xi$ n'est pas tempérée si les δ_k décroissent assez rapidement.

Si l'on veut faire intervenir quelques notions arithmétiques alors on obtient des exemples d'une apparence très simple. En voici un où il n'y a pas de symétrie.

Exemple. — Posons $\mathrm{D} = \dfrac{b}{a+b}\delta_a + \dfrac{a}{a+b}\delta_{-b} - \delta$ où b/a est un nombre de Liouville, c'est-à-dire que pour chaque n il existe un entier q tel que qb/a diffère d'un entier par moins que q^{-n}. Alors, bien que $\operatorname{Re} \psi^{-1}(\xi)\, d\xi$ soit une mesure à croissance lente,

$$\operatorname{Im} \psi^{-1}(\xi)\, d\xi$$

ne donne pas lieu à une distribution tempérée. Ce D est mal adapté.

D'autre part, si $D = \alpha(\delta_a - \delta) + \beta(\delta_b - \delta)$ n'est pas périodique (b/a n'est pas rationnel) alors D est bien adapté sauf dans le cas où $\alpha a + \beta b = 0$ et b/a est un nombre de Liouville.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. FELLER et S. OREY, A renewal theorem, *Journ. Math. and Mech.,* 10 (1961), 619-624.

[2] W. HOEFFDING, On sequences of sums of independent random vectors, *4th Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob.,* vol. II, 213-226.

[3] Frank SPITZER, Hitting probabilities, *Journ. Math. and Mech.,* 11 (1962), 593-614.

Carl S. HERZ,
Cornell University,
Department of Mathematics,
White Hall,
Ithaca, N.Y. (U.S.A.).