ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Nicolas MARTEAU

Équations aux différences associées à des groupes, fonctions représentatives.

Tome 54, n° 2 (2004), p. 383-412.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_2_383_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
54, 2 (2004), 383–412

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES ASSOCIÉES À DES GROUPES FONCTIONS REPRÉSENTATIVES

par Nicolas MARTEAU

Introduction

Le point de départ de ce travail est un article de J.-P. Bézivin et F. Gramain [2] dans lequel ils étudiaient certains systèmes d'équations aux différences. On trouve au début de ce travail le résultat suivant (qui est aussi une conséquence directe d'un théorème de Gel'fond, voir [8], remarque page 367), si α et β sont deux nombres complexes $\mathbb{R}$-linéairement indépendants, alors une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, entière, solution d'un système de deux équations aux différences à pas récurrents dans les directions α et β à coefficients constants,

$$\text{(S)} \qquad \sum_{0 \leqslant j \leqslant J} a_j f(z + j\alpha) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant K} b_k f(z + k\beta) = 0$$

(où $a_0 a_J \neq 0$ et $b_0 b_K \neq 0$) est un *polynôme exponentiel*, c'est à dire un élément de l'algèbre engendrée par les polynômes et les exponentielles (les fonctions $z \mapsto e^{\omega z}$, avec $\omega \in \mathbb{C}$). Différents travaux de la part de J.-J. Loeb, N. Brisebarre et L. Habsieger (voir [4] et [5]) conduisent à un résultat analogue avec la condition plus faible que α et β soient $\mathbb{Q}$-linéairement

Mots-clés : Équations aux différences – Groupes de Lie.
Classification math. : 39A05 – 39A10 – 39A70 – 22E25 – 22E27 – 22E30.

indépendants et reste valable pour les fonctions continues d'une variable réelle, i.e. une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, solution d'un système de deux équations aux différences à pas récurrents dans les directions α et β ($\mathbb{Q}$-linéairement indépendants) à coefficients constants,

$$(\mathrm{S}') \qquad \sum_{0\leqslant j\leqslant J} a_j f(x+j\alpha) = \sum_{0\leqslant k\leqslant K} b_k f(x+k\beta) = 0$$

(où $a_0 a_J \neq 0$ et $b_0 b_K \neq 0$) est un polynôme exponentiel.

Nous faisons les remarques suivantes (valables aussi dans le cas réel-continu).

1. Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, entière, est solution d'un système du type (S) si et seulement si le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les translatées $f_\gamma : z \mapsto f(z+\gamma)$, où γ appartient au sous-groupe $\Gamma = \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$ de $(\mathbb{C}, +)$, est de dimension finie.

2. Les polynômes exponentiels holomorphes sur $\mathbb{C}$ sont les seules fonctions entières f telles que l'ensemble des translatées $f_u : z \mapsto f(z+u)$ engendrent un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie (voir théorème 6).

3. La condition α et β sont $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, implique que toute fonction entière Γ-invariante (où $\Gamma = \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$) est constante.

On peut donc traduire le résultat cité en introduction de la façon suivante, si une fonction entière (resp. continue) est telle que l'espace vectoriel engendré par ses Γ-translatées est de dimension finie alors l'espace vectoriel engendré par ses $\mathbb{C}$-translatées (resp. $\mathbb{R}$-translatées) est aussi de dimension finie (et est donc un polynôme exponentiel), pourvu que le sous-groupe Γ de $\mathbb{C}$ (resp. de $\mathbb{R}$) satisfasse certaines conditions. Tout cela se généralise aux groupes en introduisant les définitions suivantes,

DÉFINITION.— *Soient G un groupe, H un sous-groupe de G et $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est H-représentative à gauche (resp. à droite) si le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les translatées $f_h : x \mapsto f(hx)$, $h \in H$ (resp. les $f^h : x \mapsto f(xh)$, $h \in H$) est de dimension finie. Quand $H = G$, on parle de fonction représentative (au lieu de G-représentative).*

Il est nécessaire de préciser à droite ou à gauche dans la définition d'une fonction H-représentative, par contre, les notions de fonction représentative à droite et à gauche sont équivalentes (voir proposition 2). On s'intéresse aux problèmes suivants.

1. Problème $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$: quelle(s) condition(s) doit-on avoir sur un sous-groupe H d'un groupe de Lie complexe G pour que toute fonction entière de G qui soit H-représentative soit aussi représentative ?

2. Problème $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$: quelle(s) condition(s) doit-on avoir sur un sous-groupe H d'un groupe de Lie réel G pour que toute fonction continue de G qui soit H-représentative soit aussi représentative ?

3. Quels liens existent-ils entre système d'équations aux différences à pas récurrents et fonctions représentatives ?

On montre les résultats suivants.

THÉORÈME. — *Soient G un groupe de Lie réel connexe et H un sous-groupe de G. Toute fonction continue de G dans $\mathbb{C}$ et H-représentative (à droite ou à gauche) est représentative si et seulement si H est dense dans G.*

THÉORÈME. — *Soient G un groupe de Lie complexe connexe et H un sous-groupe de G. Si toute fonction entière de G dans $\mathbb{C}$ et H-représentative (à droite ou à gauche) est représentative alors toute fonction entière H-invariante est constante. La réciproque est vraie si G est abélien ou nilpotent. Si H est un sous-groupe fermé, complexe, co-compact de G ou si H est un sous-groupe Zariski-dense dans un groupe G, réductif complexe, alors toute fonction entière H-représentative est aussi représentative.*

Notations. — Pour un ensemble X quelconque, on note $F(X)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des applications de X dans $\mathbb{C}$, on dira «fonction sur X» pour désigner un élément de cette algèbre. Pour un groupe G, un élément $t \in G$ et f un élément de $F(G)$, on note f_t (resp. f^t) la fonction qui à $g \in G$ associe $f(tg)$ (resp. $f(gt)$). Pour un groupe topologique G, on note $\mathrm{Rep}^{\mathcal{C}}(G)$, la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions continues et G-représentatives, de même, pour un groupe de Lie complexe G, on note $\mathrm{Rep}^{\mathcal{O}}(G)$, la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions entières et G-représentatives. On notera $\mathcal{O}(X)$, la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions entières d'une variété complexe X et $\mathcal{C}(X)$, la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions continues d'un espace topologique X. Pour un groupe de Lie réel G et un sous-groupe H de G, on écrira $\mathcal{C}(G)^H = \mathbb{C}$ pour signifier que toute fonction continue de G qui est H-invariante à droite (ou à gauche) est constante, ceci étant équivalent à H est dense dans G. De même, pour un groupe de Lie complexe G et un sous-groupe H de G, on écrira $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$ pour signifier que toute fonction entière de G qui est H-invariante à droite (ou à gauche) est constante.

1. Propriétés élémentaires. Aspects topologiques et matriciels.

Quelques résultats généraux.

On donne dans cette section quelques résultats qui seront constamment utiles par la suite. On commence par la

PROPOSITION 1.— *Soit G un groupe. Les fonctions de G qui sont H-représentatives (à droite ou à gauche) forment une $\mathbb{C}$-algèbre.*

Preuve.— Donnons une démonstration rapide pour le cas H-représentatives à gauche. Soient f et g deux fonctions H-représentatives à gauche, notons V_f (resp. V_g), le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les translatées à gauche de f (resp. de g) par les éléments de H ; enfin, soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Considérons $(f_1, \ldots, f_n)$, une base de V_f et $(g_1, \ldots, g_m)$, une base de V_g. Il est clair que les espaces vectoriels engendrés par les H-translatées à gauche de $\lambda f,\ f+g,\ fg$ sont de dimensions finies et engendrées respectivement par les f_i, l'ensemble des f_i et des g_j et l'ensemble des $f_i g_j$. □

PROPOSITION 2.— *Soit G un groupe. Une fonction $f \in F(G)$ est représentative à droite si et seulement si elle est représentative à gauche, et les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels engendrés par les translatées à droite et à gauche sont de mêmes dimensions.*

Preuve.— En effet, considérons une fonction $f \in F(G)$ représentative à gauche. Notons V_f (resp. V^f), le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les translatées à gauche (resp. à droite) de f par les éléments de G. Notons $n = \dim_{\mathbb{C}} V_f$, la dimension de V_f (finie par hypothèse). On a

$$\forall g \in G,\ \forall u \in G,\ f(ug) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i(u) f_i(g),$$

où $(f_1, \dots, f_n)$ forment une base de V_f. Il est alors clair que f est représentative à droite puisque les $a_1, \dots, a_n$ forment un système de générateur de V^f et on a $\dim_{\mathbb{C}} V^f \leqslant \dim_{\mathbb{C}} V_f$. En raisonnant de même sur la représentativité de f à gauche, on obtient $\dim_{\mathbb{C}} V_f \leqslant \dim_{\mathbb{C}} V^f$, et donc $\dim_{\mathbb{C}} V_f = \dim_{\mathbb{C}} V^f$. $\square$

Par contre, les notions de fonction H-représentative à gauche et à droite ne coïncident pas à priori (sauf évidemment si G est abélien). Voici un exemple, on considère la fonction f sur le groupe de Heisenberg $H_3(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{cccc} f: & G = H_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ & \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & e^{2i\pi(x+y+z)}. \end{array}$$

Soit Γ le sous-groupe de G,

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

On peut vérifier que f est Γ-représentative à droite, mais pas Γ-représentative à gauche.

Le vocabulaire «fonction représentative» est motivé par le fait suivant. Si ρ est une représentation d'un groupe G dans $Gl_n(\mathbb{C})$ alors toutes les composantes $\rho_{i,j} : G \to \mathbb{C}$ sont des fonctions représentatives puisque $\rho_{i,j}(ug) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \rho_{i,k}(u)\rho_{k,j}(g)$. Réciproquement, si on considère une fonction $f \in F(G)$ qui est H-représentative à gauche et que l'on note n la dimension (finie) de l'espace vectoriel complexe E engendré par les f_h, $h \in H$, et que l'on en choisit une base $(f_1, \dots, f_n)$, alors la fonction $F : G \to \mathbb{C}^n$ qui à g associe $(f_1(g), \dots, f_n(g))$ satisfait

$$(M) \qquad \forall h \in H,\ \forall g \in G,\ F(hg) = \rho(h)F(g),$$

où ρ est une représentation de H dans $Gl_n(\mathbb{C})$, ce qui résulte immédiatement de la définition d'une fonction H-représentative. On appelle ρ, *une représentation matricielle induite sur H* par la fonction H-représentative

f, elle est uniquement déterminée par la fonction f et la base de E que l'on a choisie.

Le lemme élémentaire qui suit permet d'éclairer quelques aspects topologiques de notre étude.

LEMME 3. — *Soient X un ensemble non vide et E un sous espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geqslant 1$ de $F(X)$. Alors il existe $g_1, \dots, g_n$ dans E et $x_1, \dots, x_n$ dans X, tels que $(g_1, \dots, g_n)$ forment une base de E et $g_i(x_j) = \delta_{i,j}$ (δ est ici le symbole de Kronecker). De plus, E est fermé pour la topologie de la convergence simple sur X (i.e. la topologie produit de $\mathbb{C}^X$).*

Preuve. — Montrons la première partie de notre assertion par récurrence sur $n = \dim_{\mathbb{C}} E$. Si $n = 1$, c'est évident : il suffit de choisir f dans E non nulle et x_1 tel que $f(x_1) \neq 0$, on conclut en posant $f_1 = f/f(x_1)$. Supposons maintenant E de dimension $n+1$, il existe alors, par hypothèse de récurrence, $g_1, \dots, g_n$ dans E et $x_1, \dots, x_n$ dans X tels que $g_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Soit $\phi : E \to \mathbb{C}^n$ qui à $f \in E$ associe $(f(x_1), \dots, f(x_n))$, l'application ϕ est linéaire et surjective (par l'existence des g_i), le noyau de ϕ est donc de dimension 1. Soient f un élément non nul de $\ker \phi$ et $x' \in X$ tel que $f(x') \neq 0$, on conclut la récurrence en posant $f_{n+1}(x) = f(x)/f(x')$, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $f_i(x) = g_i(x) - g_i(x') f_{n+1}(x)$ puis $x_{n+1} = x'$. La deuxième partie de notre assertion résulte du fait que la topologie produit est engendrée par la famille séparante de semi-normes $p_x(f) = |f(x)|$, $x \in X$. □

Cette remarque amène la

PROPOSITION 4. — *Soient G un groupe topologique, H un sous-groupe de G et f une fonction continue H-représentative à gauche (resp. à droite) alors f est $\bar{H}$-représentative à gauche (resp. à droite).*[1]

Preuve. — Soit f une fonction continue et H-représentative (par exemple à gauche). Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel Ξ engendré par les H-translatées à gauche de f. Fixons t dans $\bar{H}$, par la continuité de f et par la définition d'un groupe topologique on peut déduire

$$\forall x \in G,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists V, \text{un voisinage de } t,\ \forall h \in V \cap H,\ |f(tx) - f(hx)| < \varepsilon.$$

[1] la notation $\bar{H}$ désigne l'adhérence de H, ici il s'agit de la topologie de G.

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ et $y_1, \dots, y_p$ des éléments quelconques de G. En prenant l'intersection des voisinages $V_1, \dots, V_p$ de t décrit ci-dessus, on voit qu'il existe un voisinage V de t tel que

$$\forall h \in V \cap H,\ |f(ty_j) - f(hy_j)| < \varepsilon$$

ce qui, par définition de la topologie produit, montre que la fonction f_t est dans l'adhérence de E. Le corollaire du lemme 3 montre que f_t appartient à E et permet de conclure la proposition (on a même obtenu le résultat plus précis qui est que l'espace vectoriel engendré par les $\bar{H}$-translatées est le même que celui engendré par les H-translatées). □

On donne ici quelques propriétés de la représentation matricielle d'une fonction représentative.

PROPOSITION 5. — *Soient G un groupe, H un sous-groupe de G et $f \in F(G)$ une fonction H-représentative à gauche. Notons E, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les fonctions f_h, $h \in H$, et $n = \dim_{\mathbb{C}} E$.*

(1) *Considérons deux bases $(f_1, \dots, f_n)$ et $(g_1, \dots, g_n)$ de E et ρ_1 et ρ_2 les deux représentations matricielles induites sur H. Si on note $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ la matrice de passage entre ces bases alors pour tout $h \in H$ on a $\rho_1(h) = P^{-1}\rho_2(h)P$.*

(2) *Si G est un groupe topologique et f est continue alors les représentations induites sur H par f sont continues.*

(3) *Si G est un groupe de Lie complexe et H est un sous-groupe complexe de G, alors les représentations induites sur H par f sont holomorphes.*

Preuve. — La preuve de 1 est immédiate, notons, pour $u \in G$, $F(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u))$ et $G(u) = (g_1(u), \dots, g_n(u))$. On a alors $G(u) = PF(u)$ et donc, pour $h \in H$ et $u \in G$, $G(hu) = \rho_2(h)G(u)$, ce qui donne $PF(hu) = \rho_2(h)PF(u)$ puis $P^{-1}PF(hu) = P^{-1}\rho_2(h)PF(u)$, d'où $\rho_1(h) = P^{-1}\rho_2(h)P$. Pour le point 2, on considère une base de E adaptée comme au lemme 3, i.e. on a $(f_1, \dots, f_n)$, base de E et $x_1, \dots, x_n$ dans G tels que $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Soit $F(g) = (f_1(g), \dots, f_n(g))$ et ρ la représentation matricielle induite sur H. On a alors $\forall g \in G,\ \forall h \in H,\ F(hg) = \rho(h)F(g)$, on voit, en remplaçant g par x_j, que $\rho_{i,j}(h) = f_i(hx_j)$ ce qui permet de conclure. La preuve du point 3 est identique au point 2. □

Les fonctions continues $(\mathbb{R}^n, +)$-représentatives et entières $(\mathbb{C}^n, +)$-représentatives.

THÉORÈME 6. — *Les fonctions continues $(\mathbb{R}, +)$-représentatives ainsi que les fonctions entières $(\mathbb{C}, +)$-représentatives sont les polynômes exponentiels.*

Preuve. — On commence par le cas complexe qui est un peu plus simple. Soient $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière $(\mathbb{C}, +)$-représentative et E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie engendré par les translatées de f. Soient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, les fonctions entières

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \frac{f(z + 1/n) - f(z)}{1/n}.$$

Les fonctions f_n appartiennent à E. Comme E est fermé pour la topologie de la convergence simple (voir corollaire au lemme 3) et $\lim_{n\to+\infty} f_n = f'$, on en déduit que $f' \in E$. De proche en proche, les dérivées successives $f^{(p)}$ appartiennent à E. Comme E est de dimension finie, il existe une relation linéaire non triviale à coefficients dans $\mathbb{C}$ satisfaite par les $f^{(p)}$; la théorie élémentaire des équations différentielles nous montre alors que f est un polynôme exponentiel holomorphe.

La même démonstration est valable pour une fonction d'une variable réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ici on suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction représentative seulement continue et on note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie engendré par les translatées de f. Soient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, des fonctions θ_n de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ ayant pour support $[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}]$ et satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} \theta_n(t)dt = 1$. Notons f_n les fonctions $f * \theta_n$. D'une part, les f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et convergent simplement vers f quand n tend vers $+\infty$. D'autre part, on a $f_n(x) = \int_{-1/n}^{+1/n} f(x-t)\theta_n(t)dt$ et donc, par sommation de Riemann

$$f_n(x) = \lim_{m\to+\infty} \frac{2}{nm} \sum_{k=0}^{k=m} f\Big(x + \frac{1}{n} - \frac{2k}{nm}\Big)\theta_n\Big(-\frac{1}{n} + \frac{2k}{nm}\Big).$$

On en déduit que f_n appartient à E, puis, comme $E \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est fermé dans E qui est fermé pour la topologie de la convergence simple, que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est donc un polynôme exponentiel.

Montrons la réciproque : tout polynôme exponentiel est une fonction représentative, aussi bien dans le cas réel que complexe. Soit ϕ une fonction de la forme $x \mapsto \sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(x)e^{\omega_j x}$, où les c_j sont des polynômes. Il est facile de voir que toute translatée $\phi_u : x \mapsto \phi(x+u)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ des fonctions $x^k e^{\omega_j x}$, où $1 \leqslant j \leqslant n$ et $k \leqslant \deg(c_j)$. □

LEMME 7.— *Soit G un groupe topologique produit direct de deux groupes topologiques G_1 et G_2, alors l'algèbre* $\mathrm{Rep}^{\mathcal{C}}(G)$ *des fonctions G-représentatives continues est engendrée par* $\mathrm{Rep}^{\mathcal{C}}(G_1)$ *et* $\mathrm{Rep}^{\mathcal{C}}(G_2)$.

Si on se place dans le cadre des groupes de Lie complexes, l'algèbre $\mathrm{Rep}^{\mathcal{O}}(G)$ *des fonctions G-représentatives entières est engendrée par* $\mathrm{Rep}^{\mathcal{O}}(G_1)$ *et* $\mathrm{Rep}^{\mathcal{O}}(G_2)$.

Preuve.— On fait la démonstration dans le cas des groupes topologiques, le cas des groupes de Lie complexes se traite de la même manière. Tout d'abord, il est clair que la proposition 1 implique qu'une fonction qui s'écrit $f : (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{i=n} a_i(x)b_i(y)$ où les a_i et les b_i sont des fonctions continues respectivement G_1 et G_2 représentatives est G-représentative. Réciproquement, soit f une fonction G-représentative, alors f satisfait

$$\forall (u,v,x,y) \in G^4,\ f\big((u,v)(x,y)\big) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i(u,v)b_i(x,y),$$

comme les fonctions a_i et b_i doivent être elles-mêmes des fonctions G-représentatives continues, on en déduit que $f(u,y) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i(u,e_2)b_i(e_1,y)$, (où e_1 et e_2 sont les éléments neutres de G_1 et G_2 respectivement) appartient à l'algèbre engendrée par $\mathrm{Rep}^{\mathcal{C}}(G_1)$ et $\mathrm{Rep}^{\mathcal{C}}(G_2)$. □

THÉORÈME 8.— *Les fonctions continues $(\mathbb{R}^n,+)$-représentatives ainsi que les fonctions entières $(\mathbb{C}^n,+)$-représentatives sont les polynômes exponentiels.*

Preuve.— C'est une conséquence facile du théorème 6 et du lemme 7. □

Équations aux différences et fonctions représentatives.

On fait le lien entre équations aux différences et fonctions représentatives, déjà esquissé dans l'introduction.

PROPOSITION 9.— *Soient $(G,+)$ un groupe abélien et Γ un sous-groupe de type fini de G ayant $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ pour générateurs. Dans ces* *conditions, une fonction $f \in F(G)$ est Γ-représentative si et seulement si f est solution de n équations aux différences non triviales à coefficients constants dans les directions $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.*

Preuve. — Supposons que f est Γ-représentative, par définition cela implique que les fonctions $f_{\gamma_1}, f_{2\gamma_1}, \dots, f_{M\gamma_1}$ sont $\mathbb{C}$-liées, pour M suffisamment grand. On en déduit une équation non triviale du type

$$\sum_{0 \leqslant m \leqslant M} a_m f(g + m\gamma_1) = 0$$

satisfaite par f. On procède de même avec $\gamma_2, \dots, \gamma_n$. Réciproquement, si $f \in F(G)$ satisfait un système de n équations aux différences non triviales dans chaque direction γ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, i.e.

$$\sum_{0 \leqslant m_i \leqslant M_i} a_{i,m_i} f(g + m_i\gamma_i) = 0$$

avec $a_{i,0}a_{i,M_i} \neq 0$, alors il est clair que chaque translatée f_γ, $\gamma \in \Gamma$, est une combinaison linéaire à coefficients complexes des $f_{m_1\gamma_1+\dots+m_n\gamma_n}$, où m_i est un entier compris entre 0 et $M_i - 1$, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$. □

Voici un exemple d'application de la proposition ci-dessus combiné aux résultats de la première section. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, solutions de $n+1$ équations aux différences à pas récurrents dans les directions $e_1, \dots, e_n$ (la base canonique de $\mathbb{R}^n$) et $v = (v_1, \dots, v_n)$. On suppose de plus que $v_1, \dots, v_n$ et 1 soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Dans ces conditions f est un polynôme exponentiel. En effet, le sous-groupe additif Γ engendré par $e_1, \dots, e_n$ et v est alors dense dans $\mathbb{R}^n$ par un théorème de Kronecker (voir [9], pages 375 à 378). La proposition 4 implique alors que f est représentative et donc un polynôme exponentiel par le théorème 8.

L'hypothèse G abélien est essentielle dans la proposition 9. Si on la supprime, alors on a l'implication : f est Γ-représentative (précisons, à gauche) implique l'existence de n équations aux différences satisfaites par f du type $\sum_{0 \leqslant m_i \leqslant M_i} a_{i,m_i} f(\gamma_i^{m_i} g) = 0$ avec $a_{i,0}a_{i,M_i} \neq 0$ (on a noté la loi de G multiplicativement). Par contre la réciproque est fausse, en voici un exemple. Soient $G = Gl_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et Γ le sous-groupe de G engendré par A et B. On a $A^2 = B^2 = \mathrm{Id}$. Soit $C = AB = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $C^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & c_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Toute fonction

$f \in F(G)$ satisfait un système de deux équations aux différences dans les directions A et B puisque $f(A^2g) = f(g)$ et $f(B^2g) = f(g)$, mais n'est pas nécessairement Γ-représentative (à gauche) : il suffit de choisir f qui à $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe e^c ; les fonctions $f(C^n g)$, $n \in \mathbb{Z}$, étant alors $\mathbb{C}$-indépendantes, puisque $f(C^n g) = e^{2^n c}$.

2. Une condition nécessaire aux problèmes $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$. Le cas réel.

Une condition nécessaire. On prouve ici le

THÉORÈME 10. — *Soient G un groupe de Lie complexe connexe et H un sous-groupe de G. Si toute fonction $f \in \mathcal{O}(G)$ et H-représentative à gauche (ou à droite) est représentative alors $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$.*

Preuve. — Considérons $f : G \to \mathbb{C}$, une fonction entière H-invariante (par exemple à gauche) et montrons qu'elle est constante. Si f est H-invariante alors elle est H-représentative à gauche et donc représentative par hypothèse. Fixons un élément X dans $\mathfrak{g}$ (l'algèbre de Lie de G) et considérons la fonction entière

$$\begin{aligned} g :\ \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto f\big(\exp(tX)\big), \end{aligned}$$

où exp est l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. Comme

$$g(t_0 + t) = f\big(\exp((t_0 + t)X)\big) = f\big(\exp(t_0 X)\exp(tX)\big)$$

et que la fonction f est G-représentative, on voit que g est $\mathbb{C}$-représentative. La fonction g est donc un polynôme exponentiel d'après le théorème 6. Pour toute fonction entière $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, l'application $\Phi \circ f : G \to \mathbb{C}$ est entière et H-invariante, et donc G-représentative. Or $\Phi \circ g$ est $\mathbb{C}$-représentative (c'est-à-dire un polynôme exponentiel) car

$$(\Phi \circ g)(t_0 + t) = \Phi\big(f(\exp(t_0 + t)X)\big) = (\Phi \circ f)(\exp t_0 X \exp tX).$$

Pour $\Phi(t) = e^t$, le fait que $\Phi \circ g$ et g soient des polynômes exponentiels implique que g est de la forme $g(t) = at + b$. En prenant $\Phi(t) = e^{e^t}$, on voit que $a = 0$ et donc g est constante.

On en déduit que pour tout (t, X) dans $\mathbb{C} \times \mathfrak{g}$, $f(\exp(tX)) = f(e)$ et donc $f \circ \exp$ est constante sur $\mathfrak{g}$. Comme exp envoie surjectivement $\mathfrak{g}$ sur un voisinage V de $e \in G$, on conclut que f est constante sur V et donc constante sur G par prolongement analytique et par connexité de G. □

De façon analogue dans le cas réel :

THÉORÈME 11. — *Soient G un groupe de Lie réel connexe et H un sous-groupe de G. Si toute fonction $f \in \mathcal{C}(G)$ et H-représentative à gauche (ou à droite) est représentative alors $\mathcal{C}(G)^H = \mathbb{C}$ et donc H est dense dans G.*

Preuve. — On considère une fonction f continue H-invariante (à gauche) et donc G-représentative par hypothèse. On pose

$$\begin{aligned} h_u : \quad G &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(xu). \end{aligned}$$

h_u est H-invariante et donc représentative. La preuve du cas holomorphe s'applique alors (on change simplement «holomorphe» en «continue») sauf que l'on a pas, dans ce cas, l'argument sur le prolongement analytique. On sait toutefois que h_u est constante sur un voisinage V de $e \in G$ et ce voisinage ne dépend pas de u. On en déduit que f est constante sur chaque translaté $V.u$, $u \in G$. Un argument de connexité donne alors que f est constante partout. Si H n'était pas dense dans G, $G/\bar{H}$ serait une variété homogène connexe non réduite à un point sur laquelle il existe des fonctions continues non constantes, on en déduit l'existence de fonctions continues sur G non constantes et $\bar{H}$-invariantes et à plus forte raison H-invariante, ce qui contredit $\mathcal{C}(G)^H = \mathbb{C}$. □

Le cas réel. Ceci clôt le problème dans le cas réel-continu, puisque le théorème ci-dessus combiné à la proposition 4 nous donne une condition nécessaire et suffisante :

THÉORÈME 12. — *Soient G un groupe de Lie réel connexe et H un sous-groupe de G. Alors toute fonction $f \in \mathcal{C}(G)$ et H-représentative à gauche (ou à droite) est représentative si et seulement si H est dense dans G.*

3. Approche d'une condition suffisante au problème $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$. Le cas abélien.

Le but de cette section est de motiver notre impression qui est que la condition $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$ est suffisante pour le problème $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$, i.e. si G est un groupe complexe connexe, H est un sous-groupe de G tel que $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$ alors toute fonction $f \in \mathcal{O}(G)$ et H-représentative (à gauche ou à droite) est représentative. Tout d'abord, je montrais dans ma thèse [11], grâce à des arguments «élémentaires», qu'une fonction entière sur $G = \mathbb{C}^n$ solution d'un système de $n+1$ équations[(2)] aux différences à pas récurrents dans les directions $e_1, \dots, e_n$ (la base canonique de $\mathbb{C}^n$) et $v = (v_1, \dots, v_n)$, est un polynôme exponentiel pourvu que $v_1, \dots, v_n$ et 1 soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Or, cette dernière hypothèse implique $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$, où H est le sous-groupe additif de G engendré par $e_1, \dots, e_n$ et v, ce qui peut se voir en utilisant les développements en séries de Fourier complexe. Ceci motive l'étude dans le cas abélien, que l'on résout grâce au lemme

LEMME 13. — *Soient G un groupe de Lie complexe et H un sous-groupe de G tel que $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$. On suppose de plus que toute fonction entière $f : G \to \mathbb{C}$ telle que l'espace vectoriel complexe engendré par les f_h, $h \in H$, soit de dimension 1, ne s'annule en aucun point. Dans ces conditions, toute fonction entière H-représentative (à gauche) est représentative.*

Preuve. — Soient f une fonction entière H-représentative à gauche, supposée non nulle et E, l'espace vectoriel de dimension finie n engendré par les f_h, $h \in H$. On considère une base $(f_1, \dots, f_n)$ de E et $x_1, \dots, x_n$ des éléments de G tels que $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$, par le lemme 3. Posons

$$\begin{aligned} F : \quad G &\to M_n(\mathbb{C}) \\ g &\mapsto \big(f_i(gx_j)\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} . \end{aligned}$$

On a alors $F(hg) = \rho(h)F(g)$ où $\rho : H \to Gl_n(\mathbb{C})$ est la représentation matricielle induite par f sur H. Soit $\phi : G \to \mathbb{C}$, l'application qui à g associe $\det(F(g))$. On a $\phi(hg) = \det(\rho(h))\phi(g) = \chi(h)\phi(g)$, où χ est un caractère de H. Comme $\phi(e) = \det(F(e)) = 1$ (par construction des x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$) l'espace vectoriel engendré par les ϕ_h, $h \in H$, est de dimension 1, on en

(2) pour le cas réel, voir l'exemple qui suit la proposition 9.

déduit que ϕ ne s'annule en aucun point, autrement dit $F(u)$ est inversible pour tout $u \in G$. Soit, pour $u \in G$ fixé, l'application H_u qui à $g \in G$ associe $F(g)^{-1}F(gu)F(u)^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} H_u(hg) &= F(hg)^{-1}F(hgu)F(u)^{-1} \\ &= F(g)^{-1}\rho(h)^{-1}\rho(h)F(gu)F(u)^{-1} = H_u(g), \end{aligned}$$

ainsi H_u est H-invariante et donc constante par hypothèse sur H. On a alors $H_u(g) = H_u(e)$, ce qui s'écrit encore $\forall (g,u) \in G^2,\ F(gu) = F(g)F(u)$. On en déduit que F est une représentation et est donc représentative. Il en est de même pour f. □

Remarque. — Dans les conditions du lemme 13, on obtient le résultat plus précis suivant : l'espace vectoriel engendré par les f_h, $h \in H$, est le même que l'espace vectoriel engendré par les f_u, $u \in G$.

THÉORÈME 14. — *Soient G un groupe abélien complexe connexe (noté additivement) et H un sous groupe de G tel que $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$. Dans ces conditions toute fonction entière H-représentative est représentative.*

Preuve. — On se place sous les hypothèses du lemme 13 : on considère f, une fonction entière de G dans $\mathbb{C}$ telle que l'espace vectoriel engendré par les f_h, $h \in H$, soit de dimension 1. On a donc $f(h+g) = \chi(h)f(g)$, où χ est un caractère de H. Soit, pour $t \in G$, $\phi_t(g) = f(g+t)f(-g+t)$, on a $\phi_t(h+g) = \phi_t(g)$, ainsi ϕ_t est constante, si f s'annulait en un point $t \in G$ on aurait $\phi_t \equiv 0$ et donc $f \equiv 0$ par connexité de G. □

Remarque. — La démonstration originale de J.-J. Loeb, s'applique plus généralement à une algèbre de fonctions de G satisfaisant certaines conditions de compatibilité avec la loi de groupe de G (voir [11], page 54).

Il est important de souligner que pour certains groupes de Lie complexes G, on peut trouver des sous-groupes H tels que $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$ et des fonctions $f \in \mathcal{O}(G)$ telles que l'espace vectoriel engendré par les f_h, $h \in H$, soit de dimension 1 mais qui s'annulent en certains points. Par exemple, considérons $G = Sl_2(\mathbb{C})$, le groupe des matrices 2-2 de déterminant 1 et H le sous-groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. On a $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$ puisque G/H s'identifie à la variété complexe compacte $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Soit $f \in \mathcal{O}(G)$ qui à $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ associe $P(x,z)$, un polynôme homogène en x et z de degré m. On a alors, $f(gh) = a^m f(g)$, où $h = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. La fonction f est bien H-représentative (à droite), l'espace vectoriel engendré par les f^h, $h \in H$, est de dimension 1, mais f s'annule en certains points. On peut remarquer que f est quand même représentative, mais que l'espace vectoriel engendré par les f^u, $u \in G$, est de dimension au moins égale à m.

Pour finir, je donne pour motivation un théorème dû à J.-J. Loeb [10] qui utilise un résultat classique sur les sections holomorphes d'une variété complexe compacte.

THÉORÈME 15. — *Soient G un groupe complexe et H un sous-groupe complexe fermé tel que G/H soit compact. Alors les fonctions entières H-représentatives sont représentatives.*

On peut remarquer que la condition H co-compact dans G implique $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$ mais ne lui est pas équivalente, comme le montrait J. Winkelmann dans [16] ou F. Capocasa et F. Catanese dans [6]. Cette dernière référence contient une caractérisation des groupes de Cousin, i.e. les groupes de la forme $\mathbb{C}^n/\Gamma$, sans fonction entière autre que les constantes, qui est à l'origine de l'étude du cas nilpotent où on utilise une caractérisation des groupes H tels que $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$.

4. Le cas nilpotent.

Le but de cette section 4 est de montrer quelques résultats sur les groupes nilpotents généralisant ceux sur les groupes abéliens, notamment le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Soient G un groupe de Lie nilpotent, complexe, connexe et H un sous-groupe de G. Si $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$ alors toute fonction entière H-représentative est aussi représentative.*

On donne tout de suite la caractérisation des sous-groupes H fermés d'un groupe G satisfaisant $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$, dont on peut trouver une démonstration dans [11] page 62, ou dans [7] page 2.

THÉORÈME 16. — *Soient G un groupe de Lie complexe, nilpotent, connexe, simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et H un sous-groupe* *fermé de G. Soient K l'unique*[3] *sous-groupe connexe de G tel que K/H soit compact et $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie. Soient $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \cap i\mathfrak{k}$ et L le sous-groupe de Lie complexe, connexe correspondant à $\mathfrak{l}$. Soit p la projection canonique de K sur K/L. On a la caractérisation*

$$\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C} \text{ si et seulement si } \mathfrak{k} + i\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \text{ et } p(H) \text{ est dense dans } K/L.$$

Ceci généralise les groupes de Cousin (le cas $G = \mathbb{C}^n$). Le premier résultat de cette partie est une généralisation du théorème 8 dans le cas nilpotent.

Les fonctions représentatives. On utilise quelques théorèmes classiques sur la classification des groupes nilpotents, dont on trouve une démonstration dans [14], page 144 et 145, théorème 6.8 et corollaire.

THÉORÈME 17. — **Lie-Kolchin** — *Soit G un sous-groupe de Lie connexe, résoluble de $Gl_n(\mathbb{C})$, alors il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$, tel que*

$$\forall g \in G,\ PgP^{-1} \text{soit triangulaire supérieure.}$$

Pour ceux de ces groupes qui sont algébriques, on a une classification en terme de produit direct de tores et de sous-groupes formés de matrices unipotentes. Précisément, on a le

THÉORÈME 18. — *Soit G un sous-groupe de Lie complexe, nilpotent, connexe de $Gl_n(\mathbb{C})$, alors G est le produit direct de deux de ses sous-groupes : $G = G_S \times G_U$, où G_S est l'ensemble des éléments diagonalisables de G, et G_U est formée de matrices unipotentes (de la forme $\mathrm{Id} + N$, avec N nilpotente). G_S est un tore complexe inclus dans le centre de G. Par ailleurs, G_U est nilpotent, connexe et simplement connexe.*

On obtient la caractérisation,

THÉORÈME 19. — *Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe. Une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ continue est représentative si et seulement si elle est un polynôme exponentiel.*

---

[3] voir [13], théorème 2.10.

Il faut préciser ce qu'on entend par *polynôme exponentiel* dans ce contexte.

DÉFINITION 20. — *Une exponentielle est un caractère continu de G dans $\mathbb{C}^*$ (dans le cas $G = \mathbb{R}^p$ on retrouve la définition habituelle, puisqu'il est bien connu qu'un caractère continu de $\mathbb{R}^p$ est de la forme $\chi(x_1, \dots, x_p) = e^{a_1x_1+\cdots+a_px_p}$).*

DÉFINITION 21. — *Soit $P : G \to \mathbb{C}$, alors P est appelé polynôme si et seulement si, pour une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathfrak{g}$, la fonction $\tilde{P} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto P \circ \exp(x_1e_1 + \cdots + x_pe_p)$ est un polynôme en $x_1, \dots, x_p$ au sens classique (cela ne dépend pas de la base choisie).*

On appelle alors polynôme exponentiel toute fonction appartenant à la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par les exponentielles et les polynômes.

Passons à la démonstration du théorème 19 et montrons d'abord qu'une fonction représentative continue est un polynôme exponentiel.

Soit donc f une fonction représentative continue de G. Soit V l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les translatées à gauche de f, soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de V et posons $F(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u))$. On obtient une représentation continue ρ de G dans $Gl_n(\mathbb{C})$ satisfaisant

$$\forall g \in G,\ \forall u \in G,\ F(gu) = \rho(g)F(u).$$

En posant $u = e$ dans cette relation, on voit que pour montrer que f est un polynôme exponentiel, il suffit de montrer que chaque coordonnée $\rho_{i,j} : G \to \mathbb{C}$ de ρ en est un.

On considère H, l'adhérence – au sens de la topologie de Zariski de $Gl_n(\mathbb{C})$ – de $\rho(G)$, ce qu'on écrit $H = \overline{\rho(G)}^{zar}$. Il s'agit d'un sous-groupe algébrique connexe, fermé, nilpotent de $Gl_n(\mathbb{C})$. Appliquons le théorème 18 : $H = H_S \times H_U$, où H_U est un sous-groupe connexe, simplement connexe, nilpotent, formé de matrices unipotentes et H_S est un tore complexe, i.e. isomorphe à un $(\mathbb{C}^*)^s$, inclus dans le centre de H.

On a le résultat classique d'algèbre linéaire : *Soit $(L_i)_{i\in I}$ une famille de matrices carrées de même dimension à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si les L_i commutent deux à deux et sont diagonalisables, alors elles sont toutes diagonalisables dans une même base.*

On applique ce résultat aux éléments de H_S qui commutent deux à deux (théorème 18) et on supposera dorénavant que V est rapporté à une base qui diagonalise les éléments de H_S. Le fait que H_S est inclus dans le centre de H permet de décomposer ρ en

$$\begin{array}{rll} \rho : & G & \to H = H_S \times H_U \\ & g & \mapsto \rho_1(g)\rho_2(g) \end{array}$$

où ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations de G dans H_S et H_U respectivement et chaque ${\rho_1}_{i,i}(g)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est un caractère de G (les autres composantes ${\rho_1}_{i,j}(g)$, $i \neq j$, sont nulles).

On s'intéresse maintenant à ρ_2. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "d\rho_2"] \arrow[d, "\exp"'] \arrow[dr, phantom, "\bigcirc"] & \mathfrak{n} \subseteq M_n(\mathbb{C}) \arrow[d, "\mathrm{Exp}"] \\ G \arrow[r, "\rho_2"'] & H_U \end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie associée à H_U. Le sous-groupe H_U étant nilpotent, connexe, simplement connexe, la fonction Exp est une bijection de $\mathfrak{n}$ sur H_U. Comme H_U est formé de matrices de la forme $\mathrm{Id} + N$, avec N nilpotente, on voit que

$$\begin{array}{rll} \mathrm{Exp} : & \mathfrak{n} & \to H_U \\ & N & \mapsto \mathrm{Id} + N + N^2/2 + \cdots + N^n/n! \end{array}$$

est polynomiale. Comme $d\rho_2$ est linéaire, il en est de même pour la fonction $\mathrm{Exp} \circ d\rho_2$.

En utilisant ce qui a été dit sur ρ_1, et ce que l'on vient de voir sur ρ_2, on constate que chaque composante $\rho_{i,j} : G \to \mathbb{C}$ de ρ est un polynôme exponentiel et donc f est aussi un polynôme exponentiel. $\square$

Montrons maintenant que tout polynôme exponentiel f est une fonction représentative. Le polynôme exponentiel f s'écrit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \chi_i(x) P_i(x),$$

où chaque χ_i est un caractère de G et chaque P_i est un polynôme. Il est clair que chaque χ_i est représentative, puisque $\chi_i(g_0 g) = \chi_i(g_0)\chi_i(g)$. Il suffit donc de montrer qu'un polynôme est une fonction représentative, le fait que l'ensemble des fonctions représentatives forme une $\mathbb{C}$-algèbre impliquera la représentativité de f.

Soit donc $P : G \to \mathbb{C}$, un polynôme. Dans le cadre des groupes nilpotents simplement connexes, on a la formule de Campbell-Hausdorff(4) :

$$\forall (X,Y) \in \mathfrak{g}^2,\ \exp X \exp Y = \exp R(X,Y),$$

où R est un polynôme en X et Y à valeurs dans $\mathfrak{g}$ dans le même sens qu'à la définition 21. Ici, on a

$$\forall g_0 \in G,\ \forall g \in G,\ P(g_0 g) = P\big(\exp(X_0)\exp(X)\big) = P\big(\exp R(X_0, X)\big).$$

Choisissons une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathfrak{g}$, et écrivons $X = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$. En utilisant le fait que R et $P \circ \exp$ sont des polynômes, on voit que

$$P(g_0 g) = \sum_{i=(i_1,\dots,i_p)\in\mathbb{N}^p} \lambda_i(g_0) x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p},$$

où la somme n'a qu'un nombre fini N de termes, indépendant de g et g_0, et chaque $\lambda_i(g_0)$ est un nombre complexe qui dépend de g_0. En notant $P_i(g) = x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p}$, pour $1 \leqslant i \leqslant N$, on voit que $P(g_0 g)$ est une combinaison linéaire des N fonctions P_i, et donc P est représentative. Ce qui achève de démontrer le théorème 19. □

Le cas co-compact. On montre maintenant le lemme de prolongement suivant, dont on peut trouver une généralisation à une représentation quelconque dans [11], page 58.

PROPOSITION 22. — *Soient G un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe, H un sous-groupe fermé et co-compact de G et χ un caractère continu de H dans $\mathbb{C}^*$. Alors il existe H_0 sous-groupe de H, co-fini dans H, tel que la restriction $\chi_{|H_0}$ se prolonge en un caractère continu $\bar{\chi}$ de G tout entier.*

COROLLAIRE. — *Soient G un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe, H un sous-groupe fermé et co-compact de G et f une*

(4) [15] page 195, théorème 3.6.1.

fonction continue telle que $f(hg) = \chi(h)f(g)$, i.e. f est nulle ou bien f est H-représentative à gauche et l'espace des H-translatées est de dimension 1. Alors il existe H_0 sous-groupe de H, co-fini dans H, tel que f s'écrive $f(g) = \bar{\chi}(g)v(g)$, où $\bar{\chi}$ est un caractère qui prolonge $\chi_{|H_0}$ et v est une fonction continue H_0-invariante à gauche.

Remarque. — On a des exemples de caractères sur un sous-groupe fermé et co-compact que l'on ne peut pas prolonger (même dans le cas nilpotent, simplement connexe). On considère le groupe $G = H_3(\mathbb{R})$ et Γ le sous-groupe discret et co-compact de G :

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2m & p \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (m,n,p) \in \mathbb{Z}^3 \right\}$$

et considérons le caractère χ de Γ suivant

$$\begin{array}{cccc} \chi : & \Gamma & \rightarrow & \mathbb{C}^* \\ & (2m, 2n, p) & \mapsto & (-1)^p. \end{array}$$

Une telle représentation ne peut se prolonger à G tout entier, puisqu'un caractère de G doit prendre la valeur 1 sur le centre de G, or le centre de G est ici l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$. Par contre, le sous-groupe

$$\Gamma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2p \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (m,n,p) \in \mathbb{Z}^3 \right\}$$

est co-fini dans Γ, et la restriction de χ à Γ_0 se prolonge à G tout entier par $\bar{\chi}(x,y,z) = e^{x+y}$. C'est la construction d'un tel sous-groupe, dans le cas général, que l'on va détailler dans la suite.

LEMME 23. — *Soient H_0 un sous-groupe fermé co-compact de G et $\chi : H_0 \rightarrow \mathbb{C}^*$ un caractère continu de H_0 satisfaisant $\chi_{|G' \cap H_0} = 1$. Alors il existe un caractère continu $\bar{\chi} : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $\bar{\chi}_{|H_0} = \chi$.*

Preuve. — On utilise le résultat suivant qui concerne les sous-groupes des groupes nilpotents simplement connexes[5] : *si H_0 est co-compact dans G alors H_0' et $G' \cap H_0$ sont co-compacts dans G'.*

Considérons l'injection $H_{0/G'\cap H_0} \overset{i}{\hookrightarrow} G/G'$ et montrons que $i(H_{0/G'\cap H_0})$ est fermé dans G/G'. En effet, supposons donnée une suite $i(h_n.(G' \cap H_0)) = h_n.G'$, qui tende vers $x.G'$ dans G/G', et montrons que $x \in H_0$ modulo G'. Le fait que $h_n.G'$ tende vers $x.G'$ se traduit par $h_n g_n'$ tend vers x dans G, pour une certaine suite (g_n') de G'. Par ailleurs, on sait que $G' \cap H_0$ est co-compact dans G'. Cela implique qu'il existe $g' \in G'$ et une suite extraite (g_{n_k}') de (g_n') telle que $\lim_{k\to\infty} g_{n_k}'.(G' \cap H_0) = g'.(G' \cap H_0)$, et donc il existe une suite (ζ_{n_k}) de $G' \cap H_0$ telle que $\lim_{k\to\infty} \zeta_{n_k} g_{n_k}' = g'$. En écrivant $h_{n_k} g_{n_k}' = h_{n_k} \zeta_{n_k}^{-1} \zeta_{n_k} g_{n_k}'$, on voit que $h_{n_k} \zeta_{n_k}^{-1}$ tend vers xg'^{-1}. Comme h_{n_k} et ζ_{n_k} sont dans H_0 qui est fermé dans G, on peut conclure que $xg'^{-1} \in H_0$, ce qui est le résultat souhaité.

Comme on a supposé $\chi_{|G'\cap H_0} = 1$, on peut passer au quotient

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\chi}: & H_{0/G'\cap H_0} & \to & \mathbb{C}^* \\ & h.(G' \cap H_0) & \mapsto & \chi(h). \end{array}$$

Comme G/G' est isomorphe à $(\mathbb{R}^r, +)$ et $H_{0/G'\cap H_0}$ s'identifie à un sous-groupe fermé de G/G' par la remarque précédente, on va montrer qu'un caractère continu sur un sous-groupe fermé S de $(\mathbb{R}^r, +)$ se prolonge à $\mathbb{R}^r$ ce qui permettra de conclure que $\tilde{\chi}$ se prolonge à G/G'. Soit donc S un sous-groupe fermé de $(\mathbb{R}^r, +)$, il est de la forme

$$S = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \mathbb{Z}e_k \oplus \mathbb{R}e_{k+1} \oplus \cdots \mathbb{R}e_{k+p},$$

où les $e_1, \ldots, e_{k+p}$ forment une famille $\mathbb{R}$-indépendante de vecteurs de $\mathbb{R}^r$. Par identification, le caractère continu $\tilde{\chi}$ de S s'écrit alors

$$\begin{aligned} &\tilde{\chi}(m_1 e_1 + \cdots + m_k e_k + x_{k+1} e_{k+1} + \cdots + x_{k+p} e_{k+p}) \\ &\qquad\qquad = a_1^{m_1} \cdots a_k^{m_k} \tilde{\chi}(x_{k+1} e_{k+1} + \cdots + x_{k+p} e_{k+p}) \end{aligned}$$

où les m_i sont dans $\mathbb{Z}$, les x_j sont dans $\mathbb{R}$ et $a_1, \ldots, a_k$ sont des nombres complexes non nuls. On forme une base de $\mathbb{R}^r$ en complétant la famille

[5] voir [13], chapitre 2, théorème 2.10 et suivants.

$\{e_1, \ldots, e_{k+p}\}$ par $e_{k+p+1}, \ldots, e_r$ et on prolonge χ en posant (on garde la notation $\tilde{\chi}$ pour le prolongement),

$$\tilde{\chi}\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} x_i e_i\right) = e^{x_1 b_1} \cdots e^{x_k b_k} \tilde{\chi}(x_{k+1} e_{k+1} + \cdots + x_{k+p} e_{k+p}),$$

où les b_i sont choisis de sorte que l'on ait $e^{b_i} = a_i$.

Ce prolongement obtenu, on pose $\bar{\chi} : G \to \mathbb{C}^*$, $g \mapsto \tilde{\chi}(g.G')$. On a

$$\forall h \in H_0, \ \bar{\chi}(h) = \tilde{\chi}(h.G') = \tilde{\chi}(h.(G' \cap H_0)) = \chi(h)$$

et donc $\bar{\chi}$ prolonge $\chi_{|H_0}$ à G, la continuité de $\tilde{\chi}$ entraînant celle de $\bar{\chi}$. □

LEMME 24. — *Soient H_1 fermé co-compact dans G et $\chi : H_1 \to \mathbb{C}^*$ un caractère continu, alors il existe $H_0 \trianglelefteq H_1$, co-fini dans H_1, tel que $\chi_{|G' \cap H_0} = 1$.*

Preuve. — Montrons d'abord que H_1' est co-fini dans $G' \cap H_1$. D'après [13], H_1' et $G' \cap H_1$ sont co-compacts dans G'. On considère

$$\begin{array}{rll} i : & (G' \cap H_1)/H_1' & \to G'/H_1' \\ & x.H_1' & \mapsto x.H_1'. \end{array}$$

Comme H_1' est normal dans H_1 il est aussi normal dans $G' \cap H_1$, donc $(G' \cap H_1)/H_1'$ est un groupe de Lie. Par contre, G'/H_1' est une variété. L'application i est injective et continue et $i((G' \cap H_1)/H_1')$ est fermé dans G'/H_1', ce qui résulte du fait que $G' \cap H_1$ est fermé dans G'. Ainsi $(G' \cap H_1)/H_1'$ est compact puisque G'/H_1' est compact.

On a $H_1' \subseteq G' \cap H_1'$ donc $(H_1')^o \subseteq (G' \cap H_1')^o$ (le o en exposant désigne les composantes neutres). Considérons l'application

$$\begin{array}{rll} j : & (G' \cap H_1)^o/(H_1')^o & \to (G' \cap H_1)/H_1' \\ & x.(H_1')^o & \mapsto x.H_1' \end{array}$$

j est injective et $j((G' \cap H_1)^o/(H_1')^o)$ est fermé et connexe dans $(G' \cap H_1)/H_1'$. Or le groupe $(G' \cap H_1)^o/(H_1')^o$ est isomorphe à un $(\mathbb{R}^k, +)$, puisqu'il est abélien et simplement connexe. Comme $(G' \cap H_1)/H_1'$ est compact, cela implique $k = 0$ et donc $(G' \cap H_1)^o = (H_1')^o$. Les groupes $G' \cap H_1$ et H_1' ont donc la même composante neutre, ce qui implique

$(G' \cap H_1)/H_1'$ est discret, comme ce groupe est aussi compact, on a finalement que $(G' \cap H_1)/H_1'$ est fini.

On pose $p = \operatorname{card}((G' \cap H_1)/H_1')$ et on considère $\chi^p : H_1 \to \mathbb{C}^*$, la puissance $p^{\text{ième}}$ de χ (qui est aussi un caractère). Pour tout $u \in G' \cap H_1$, on a $\chi^p(u) = \chi(u^p) = 1$, donc par le lemme 23, il existe un caractère $\theta : G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\theta_{|H_1} = \chi^p$. Par ailleurs, il existe $\mu : G \to \mathbb{C}^*$ tel que $\mu^p = \theta$, ce qui s'obtient en relevant θ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& (\mathbb{C}, +) \arrow[d, "\exp"] \\
G \arrow[ur, dashed, "\tilde{\theta}"] \arrow[r, "\theta"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\bigcirc"] & (\mathbb{C}^*, \cdot)
\end{tikzcd}$$

On pose $\mu(g) = \exp\left(\frac{1}{p}\tilde{\theta}(g)\right)$ de telle sorte que $\mu^p = \theta$. Soit $H_0 = \ker \xi$ où

$$\begin{array}{rccl} \xi : & H_1 & \to & \mathbb{C}^* \\ & h & \mapsto & \frac{\chi(h)}{\mu(h)}. \end{array}$$

Montrons que H_0 satisfait les propriétés demandées :

- $H_0 \trianglelefteq H_1$ (c'est un noyau).
- $\forall h \in H_1,\ \xi(h^p) = \chi^p(h)/\mu^p(h) = \theta(h)/\theta(h) = 1$, donc $h^p \in H_0$. Comme H_1/H_0 est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ on en déduit que H_1/H_0 est formé de racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Donc H_0 est co-fini dans H_1.
- $\forall u \in G' \cap H_0,\ \chi(u) = \mu(u)$ or $u \in G' \Rightarrow \mu(u) = 1$, donc $\chi_{|G' \cap H_0} = 1$.

Ce qui achève la preuve du lemme 24. □

Preuve du corollaire.— Posons $v(g) = \bar{\chi}(g)^{-1} f(g)$. On a alors, pour tout $h \in H_0$,

$$v(hg) = \bar{\chi}(hg)^{-1} f(hg) = \bar{\chi}(g)^{-1}\bar{\chi}(h)^{-1}\chi(h) f(g) = \bar{\chi}(g)^{-1} f(g) = v(g),$$

donc v est H_0-invariante à gauche. □

Résolution du problème $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$ dans le cas nilpotent. On démontre le

THÉORÈME 25. — *Soient G un groupe de Lie complexe, nilpotent, connexe, simplement connexe et H un sous-groupe de G tel que $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$, alors toute fonction entière H-représentative (à droite ou à gauche) est représentative.*

On commence par le lemme.

LEMME 26. — *Soient G un groupe complexe, nilpotent, connexe et simplement connexe et H un sous-groupe fermé de G tel que $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$. Soient χ un caractère continu de H et $\Phi : G \to \mathbb{C},\ g \mapsto \Phi(g)$, une fonction entière satisfaisant*

$$\forall h \in H,\ \forall g \in G,\ \Phi(hg) = \chi(h)\Phi(g).$$

Dans ces conditions

$$\Phi(e) = 0 \iff \forall g \in G,\ \Phi(g) = 0.$$

Autrement dit, toutes fonctions entières telles que l'espace des H-translatées est de dimension 1 ne s'annule en aucun point.

Preuve. — Soit K le sous-groupe fermé, connexe, minimal contenant H, on sait que K/H est compact. De plus, avec les mêmes notations qu'au théorème 16, on appelle $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie associée à K, on définit $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} \cap i\mathfrak{k}$, on note L le sous-groupe complexe, connexe associé à $\mathfrak{l}$ et on appelle p la projection de K sur K/L. La condition $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$ se traduit alors par $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{k}$ et $p(H)$ est dense dans K/L.

D'après la proposition 22, il existe H_0 co-fini dans H tel que la restriction $\chi_{|H_0}$ se prolonge en un caractère continu $\bar{\chi}$ sur K. D'après le corollaire à la proposition 22, on a $\Phi(k) = \bar{\chi}(k)v(k)$, où v est une fonction H_0-invariante à gauche, continue sur K. La restriction de $\bar{\chi}$ au sous groupe complexe L est un caractère continu *non nécessairement holomorphe.* On va montrer ici qu'il existe $\tilde{\chi}$, un caractère holomorphe de L tel que

$$\forall l \in L,\ |\tilde{\chi}(l)| = |\bar{\chi}(l)|. \tag{1}$$

Pour cela, remarquons que $\bar{\chi}$ passe au quotient L/L' qui est isomorphe à un $(\mathbb{C}^k, +)$. Soit μ cet isomorphisme $\mu : (\mathbb{C}^k, +) \to L/L'$. L'application $\chi_1 = \bar{\chi} \circ \mu$ est un caractère continu de $(\mathbb{C}^k, +)$, ainsi

$$\chi_1(z_1, \ldots, z_k) = \chi_1(x_1 + iy_1, \ldots, x_k + iy_k) = e^{w_1x_1 + w_1'y_1 + \cdots + w_kx_k + w_k'y_k},$$

où $w_1, w_1', \ldots, w_k, w_k'$ sont des nombres complexes.

Posons, pour $1 \leqslant j \leqslant k$, $\zeta_j = \Re(w_j) - i\Re(w'_j)$. Soit χ_2, le caractère *holomorphe*

$$\chi_2(z_1, \dots, z_k) = e^{\zeta_1 z_1 + \dots + \zeta_k z_k}.$$

On a alors $\forall z \in \mathbb{C}^k$, $|\chi_2(z)| = |\chi_1(z)|$. En posant $\tilde{\chi} = \chi_2 \circ \mu^{-1}$, on voit que $\tilde{\chi}$ est holomorphe (puisque μ et χ_2 le sont) et satisfait la relation (1).

Maintenant, on fixe $k_1 \in K$ et on considère la fonction entière

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : & L & \to \mathbb{C} \\ & l & \mapsto \frac{\Phi(k_1 l)}{\tilde{\chi}(l)}. \end{array}$$

En utilisant la relation $\Phi(k) = \tilde{\chi}(k)v(k)$, on voit que Λ vérifie $|\Lambda(l)| = |\tilde{\chi}(k_1)v(k_1 l)|$. Or v, qui est continue et H_0-invariante, est nécessairement bornée sur K puisque K/H_0 est compact. Il en résulte que pour k_1 fixé, la fonction Λ est bornée et donc constante par le théorème de Liouville. En prenant pour valeur particulière $l = e$, on obtient

$$\forall k \in K,\ \forall l \in L,\ \Phi(kl) = \tilde{\chi}(l)\Phi(k) = \Phi(lk),$$

où la deuxième partie de l'égalité se montre en plaçant k_1 à droite dans la définition de Λ.

Posons, pour $g \in G$, $\psi(g) = \Phi(g)\Phi(g^{-1})$ et soit ψ_K sa restriction à K, on a

$$\begin{aligned} \forall k \in K,\ \forall l \in L,\ \psi_K(kl) &= \Phi(kl)\Phi(l^{-1}k^{-1}) \\ &= \tilde{\chi}(l)\Phi(k)\tilde{\chi}(l^{-1})\Phi(k^{-1}) = \psi_K(k) \end{aligned}$$

donc ψ_K passe au quotient K/L. Par ailleurs, on a

$$\forall h \in H_0,\ \psi_K(h) = \Phi(h)\Phi(h^{-1}) = \tilde{\chi}(h)v(h)\tilde{\chi}(h^{-1})v(h^{-1}) = v(h)v(h^{-1}),$$

or v étant H_0-invariante, on en déduit $\psi_K(h) = v(e)^2$. Comme $p(H)$ est dense dans K/L et que H_0 est co-fini dans H on a que $p(H_0)$ est co-fini dans $p(H)$ et $p(H_0)$ est dense dans K/L. On en déduit, $\forall k \in K$, $\psi_K(k) = v(e)^2$.

Finalement, la fonction $\psi : g \mapsto \Phi(g)\Phi(g^{-1})$ est constante sur K. Comme $\mathfrak{k} + i\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$, on déduit que ψ, qui est entière, est constante sur G, donc

$$\forall g \in G,\ \Phi(g)\Phi(g^{-1}) = \Phi(e)^2.$$

Si on suppose $\Phi(e) = 0$ alors $\forall g \in G,\ \Phi(g) = 0$ par connexité de G.□

Le théorème 25 est une conséquence directe des lemmes 13 et 26. □

Montrons maintenant le théorème 25 sans l'hypothèse de simple connexité. Soient G un groupe nilpotent, connexe et H, un sous-groupe de G tel que $\mathcal{O}(G)^H = \mathbb{C}$. On considère une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ qui soit H-représentative, on va montrer que f est représentative. Soit $(\hat{G}, \pi)$ le revêtement simplement connexe de G. On note $H_1 = \pi^{-1}(H)$ et $H_2 = \ker \pi$ puis $\hat{H}$ le sous-groupe de $\hat{G}$ engendré par H_1 et H_2. Montrons d'abord que $\mathcal{O}(\hat{G})^{\hat{H}} = \mathbb{C}$. Soit $\phi : \hat{G} \to \mathbb{C}$, une fonction entière $\hat{H}$-invariante. Comme ϕ est H_2-invariante, ϕ passe à G : i.e. il existe $\Phi : G \to \mathbb{C}$ telle que $\Phi \circ \pi = \phi$. La fonction Φ est alors H-invariante, ce qui résulte de la H_1-invariance de ϕ, et est entière. On conclut que Φ est constante puis que ϕ est constante.

Considérons la fonction entière $\theta : \hat{G} \to \mathbb{C},\ g \mapsto f \circ \pi(g)$. Le fait que f soit H-représentative implique que θ est $\hat{H}$-représentative, il s'ensuit que θ est $\hat{G}$-représentative (par la démonstration du cas simplement connexe) puis que f est G-représentative. □

5. Le cas des groupes réductifs complexes.

Dans la suite G désignera un groupe réductif complexe. On rappelle qu'un tel groupe peut être muni d'une structure de groupe algébrique (voir [1], chapitre 5.3, groupes réductifs complexes). Grâce à une technique analogue au développement en série de Fourier ou en série de Laurent (cas du groupe $\mathbb{C}^*$), on montre que toute fonction entière Γ-représentative, où Γ un sous-groupe Zariski dense dans G, est représentative.

Rappels. On fait d'abord quelques rappels sur les groupes réductifs complexes, la référence étant [1]. Un groupe réductif complexe est le complexifié d'un groupe de Lie réel algébrique compact. On résume ici la technique de développement en série des fonctions entières sur ces groupes. Pour la suite, on note $\mathcal{O}(G)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions entières sur G.

- Toute représentation holomorphe de G de dimension finie est algébrique. En fait, une fonction représentative est algébrique si et seulement si elle est entière.
- Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de G. Un représentant π d'une classe de $\mathcal{I}$, ce que l'on écrit abusivement

$\pi \in \mathcal{I}$,

$$\pi : G \to Gl_m(\mathbb{C})$$

est une représentation algébrique holomorphe de G.

- Pour tout $\pi \in \mathcal{I}$, on note $\mathcal{O}_\pi(G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}(G)$ suivant :

$$h \in \mathcal{O}_\pi(G) \iff$$
$$\exists (v,w) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \text{ tel que } \forall g \in G,\ h(g) = < \pi(g)v \mid w >$$

où $< \mid >$ désigne le produit hermitien standard de $\mathbb{C}^m$. Chaque fonction de $\mathcal{O}_\pi(G)$ est entière et G-représentative et donc algébrique. Par ailleurs, les $\mathcal{O}_\pi(G)$ forment une famille de sous-espaces vectoriels indépendants de $\mathcal{O}(G)$.

- Pour tout $\pi \in \mathcal{I}$, il existe une projection

$$p_\pi : \begin{array}{ll} \mathcal{O}(G) & \to \mathcal{O}_\pi(G) \\ f & \mapsto f_\pi. \end{array}$$

Ces projections commutent avec la translation à gauche, c'est-à-dire que si l'on appelle l_u ($u \in G$) l'opérateur qui à une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ associe la fonction $l_u(f) : G \to \mathbb{C},\ g \mapsto f(ug)$, alors $p_\pi l_u = l_u p_\pi$.

- On a le développement en série, valable pour toute fonction f de $\mathcal{O}(G)$,

$$\forall g \in G,\ f(g) = \sum_{\pi \in \mathcal{I}} f_\pi(g),$$

la somme étant normalement convergente sur tout compact de G.

Ces notions généralisent certains développements en séries bien connus. Par exemple, quand $G = \mathbb{C}^*$, les représentations irréductibles de G deux à deux non équivalentes sont de la forme $\pi_k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto z^k,\ (k \in \mathbb{Z})$, (ce sont des caractères). Pour une fonction entière $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, on a : $f_{\pi_k}(z) = < \pi_k(z)v \mid w > = a_k z^k$ avec $a_k \in \mathbb{C}$ et on retrouve la notion de développement en série de Laurent à l'origine,

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k.$$

Un résultat sur les groupes réductifs complexes. Passons maintenant à la preuve du théorème.

THÉORÈME 27. — *Soient G un groupe réductif complexe et Γ un sous-groupe Zariski dense dans G. Alors toute fonction entière Γ-représentative est représentative.*

Preuve. — Soit f une fonction entière, Γ-représentative (à gauche), où Γ est un sous-groupe Zariski dense dans G. Soit V l'espace vectoriel engendré par les $f_\gamma : g \mapsto f(\gamma g)$, où $\gamma \in \Gamma$. Par hypothèse, V est de dimension fini, soient n sa dimension et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de V. Soit

$$\begin{aligned} F : \quad G &\to \mathbb{C}^n \\ g &\mapsto \big(f_1(g), \dots, f_n(g)\big). \end{aligned}$$

On a l'écriture sous forme matricielle

$$\forall \gamma \in \Gamma, \ \forall g \in G, \ F(\gamma g) = \rho(\gamma) F(g).$$

On décompose F en série, comme indiqué dans l'introduction,

$$F(g) = \sum_{\pi \in \mathcal{I}} F_\pi(g).$$

Soit π un élément de $\mathcal{I}$. En utilisant la relation de commutation $p_\pi l_u = l_u p_\pi$ et le fait que les p_π soient linéaires, on voit que F_π satisfait aussi

$$\forall \gamma \in \Gamma, \ \forall g \in G, \ F_\pi(\gamma g) = \rho(\gamma) F_\pi(g).$$

Notons W le sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}(G)^n$ engendré par les F_π, $\pi \in \mathcal{I}$, et considérons

$$\begin{aligned} \Phi : \quad W &\to \mathbb{C}^n \\ H &\mapsto H(e). \end{aligned}$$

Il est clair que Φ est linéaire, montrons que Φ est injective. Soit H tel que $\Phi(H) = 0$. Comme H vérifie $H(\gamma g) = \rho(\gamma) H(g)$, il en résulte $\forall \gamma \in \Gamma, \ H(\gamma) = 0$. Comme H est une fonction entière représentative elle est algébrique. Puisqu'elle s'annule sur Γ, qui est Zariski dense dans G, on en déduit $H \equiv 0$.

Maintenant, le fait que Φ est injective implique que W est de dimension au plus n. Comme les $\mathcal{O}_\pi(G)$ forment une famille de sous-espaces indépendants, il est clair que l'ensemble des éléments π de $\mathcal{I}$, tel que F_π soit non nulle, est de cardinal fini. En notant $\{\pi_1, \ldots, \pi_I\}$ cet ensemble, on voit que F s'écrit

$$F(g) = \sum_{i=1}^{i=I} F_{\pi_i}(g).$$

F est donc représentative en tant que somme d'un nombre fini de fonctions représentatives. Il en est de même pour f. □

Remarques. —

(1) Le fait que Γ soit Zariski dense n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple co-compact (co-compact n'implique pas Zariski dense).

(2) Dans le contexte du théorème 27, on peut préciser que l'espace des Γ-translatées de f est égal à l'espace des G-translatées. En effet, notons V l'espace vectoriel engendré par les Γ-translatées de f et V' l'espace vectoriel engendré par les G-translatées de f (qui est de dimension finie d'après le théorème 27), on a donc une représentation holomorphe de G dans V' qui est algébrique puisque G est réductif. Soit H le sous-groupe formé des éléments $g \in G$ qui stabilise le sous-espace vectoriel V de V', H est algébrique, comme Γ est Zariski dense dans G il s'ensuit que $H = G$ et donc $V = V'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.N. Akhiezer, Lie group actions in complex analysis, Aspects of mathematics, Vieweg 1995.

[2] J.-P. Bézivin, F. Gramain, Solutions entières d'un système d'équations aux différences, Ann. Institut Fourier, Grenoble, 43-3, (1993), 791-814.

[3] —, Solutions entières d'un système d'équations aux différences II, Ann. Institut Fourier, Grenoble, 46-2, (1996), 465-491.

[4] N. Brisebarre, Thèse de doctorat, « Une étude de deux problèmes diophantiens », n^o d'ordre 1903, 25/09/98, Université de Bordeaux I.

[5] N. Brisebarre, L. Habsieger, Sur les fonctions entières à double pas récurrents, Ann. Institut Fourier, Grenoble, 49-2, (1999), 653-671.

[6] F. Capocasa, F. Catanese, Periodic meromorphic functions, Acta Math. 166, (1991), 27-68.

[7] D. Gil, Complex nilmanifolds without non-constant holomorphic functions, Prépublication de l'université de Barcelone, 03/2000, (février 2000).

[8] A.O. Guelfond, Calcul des différences finies, Dunod, Paris, 1963.

[9] G.H. HARDY, E.M. WRIGHT, An introduction to the theory of numbers, Oxford Science publications, 1979.

[10] J.-J. LOEB, Équations aux différences associées à des groupes, Prépublication de l'université d'Angers, 1997.

[11] N. MARTEAU, Thèse de doctorat, «Equations aux différences et fonctions représentatives», n° d'ordre 368, 26/02/99, Université d'Angers.

[12] D.W. MASSER, On certain functional equations in several variables, Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1982, Progress in Math. 31, Birkh, 1983.

[13] M.S. RAGHUNATHAN, Discrete subgroups of Lie groups, Springer-Verlag, 1972.

[14] T.A. SPRINGER, Linear algebraic groups, Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1981.

[15] V.S. VARADARAJAN, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Springer-Verlag vol.102, 1984.

[16] J. WINKELMANN, Complex analytic geometry of complex parallelizable manifolds, Mémoires de la société Mathématiques de France, 72,73 (1998).

Manuscrit reçu le 11 mars 2003,
accepté le 17 juillet 2003.

Nicolas MARTEAU,
90 rue Anatole France
92 290 Chatenay-Malabry (France).

marteau.nicolas@wanadoo.fr