ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Nadine GUILLOTIN-PLANTARD

Sur la convergence faible des systèmes dynamiques échantillonnés

Tome 54, n° 1 (2004), p. 211-233.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_1_211_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
54, 1 (2004), 211–233

SUR LA CONVERGENCE FAIBLE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES ÉCHANTILLONNÉS

par Nadine GUILLOTIN-PLANTARD

1. Introduction.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique où $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de probabilité, T une transformation de E, mesurable, préservant la mesure μ. Nous noterons $S_n f = f + f \circ T + \ldots + f \circ T^{n-1}$. Burton et Denker [1] ont prouvé que pour tout système dynamique apériodique $(E, \mathcal{A}, \mu, T)$, il existe une fonction $f \in L^2(\mu)$ telle que

$$\sigma_n^{-1} S_n f \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \tag{1}$$

où σ_n est la norme L^2 de la somme ergodique $S_n f$, c'est-à-dire que pour tout réel u,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu\left(\left\{x \in E;\ \sigma_n^{-1} S_n f(x) \leqslant u\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2} dt.$$

En 1999, Volný [8] a amélioré leur résultat en montrant qu'on pouvait obtenir une normalisation en $\sqrt{n}$. Dans le cas particulier de la rotation

Mots-clés : Système dynamique – Marche aléatoire – Mouvement Brownien Fractionnaire – Convergence faible.
Classification math. : 60G50 – 60F05.

T_α sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la mesure de Lebesgue μ, d'angle irrationnel α, Lacey [5] a obtenu le résultat suivant : soit $(B_H(t))_t$ un mouvement Brownien fractionnaire d'indice $H \in]0,1[$, c'est-à-dire un processus Gaussien, centré, à accroissements stationnaires satisfaisant $B_H(0) \equiv 0, \mathbb{E}(B_H^2(1)) = 1$ et la condition d'auto-similarité :

$$(c^{-H} B_H(ct))_{t \geqslant 0} \stackrel{d}{=} (B_H(t))_{t \geqslant 0}, \ c > 0.$$

Lacey [5] a établi le lien existant entre la régularité des fonctions f satisfaisant

$$\frac{1}{n^H} \sum_{k=0}^{[nt]-1} f \circ T_\alpha^k \stackrel{d}{\Longrightarrow} (B_H(t))_t \tag{2}$$

(où $\stackrel{d}{\Longrightarrow}$ désigne la convergence des lois de dimension finie) et le type diophantien γ de l'angle de la rotation ; le type diophantien d'un irrationnel α étant défini comme le plus petit réel σ pour lequel il existe une constante positive $c = c(\sigma, \alpha)$ telle que l'inégalité

$$h^\sigma ||h\alpha|| \geqslant c$$

soit vérifiée pour tout $h \in \mathbb{Z}^*$, où $||x||$ désigne la distance de x au plus proche entier. Pour une fonction f définie sur $\mathbb{T}$, nous écrirons $f \in \mathrm{Lip}(a)$ avec $0 < a < 1$ si il existe une constante C positive telle que pour tout $x, y \in \mathbb{T}$,

$$|f(x) - f(y)| < C|x-y|^a$$

où $|.|$ dans le membre de droite désigne la distance à 0 dans $\mathbb{T}$.

THÉORÈME 1.1 [Lacey]. — i) *Si $a < \frac{1-H}{\gamma}$, alors il existe une fonction $f \in Lip(a)$ satisfaisant*

$$\frac{1}{n^H} \sum_{k=0}^{[nt]-1} f \circ T_\alpha^k \stackrel{d}{\Longrightarrow} (B_H(t))_t. \tag{3}$$

ii) *Si $a > \frac{1-H}{\gamma}$, alors il n'existe pas de fonction $f \in Lip(a)$ satisfaisant (3).*

Nous généralisons le résultat de Lacey à des rotations irrationnelles échantillonnées le long d'une marche aléatoire transiente. Considérons une marche aléatoire $\{S_k, k \geqslant 0\}$ telle que $S_0 = 0$ et pour tout $k \geqslant 1$, $S_k =$

$X_1 + \cdots + X_k$ où $\{X_k, k \geqslant 1\}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes, identiquement distribuées, de carré intégrables et d'espérance m non nulle. Nous supposons en plus que la marche aléatoire est fortement apériodique au sens donné par Spitzer ([7], p. 42), ce qui est équivalent à dire que le module de la fonction caractéristique de la variable aléatoire X_1 vaut 1 uniquement en 0 ([7], p. 75).

THÉORÈME 1.2.— i) *Soit* $H \in]\frac{1}{2}, 1[$. *Si* $a < \frac{1-H}{\gamma}$, *alors il existe une fonction* $f \in Lip(a)$ *et un sous-ensemble* Ω_0 *de* Ω *de probabilité 1 satisfaisant pour tout* $\omega \in \Omega_0$,

$$\frac{1}{n^H} \sum_{k=0}^{[nt]-1} f \circ T_\alpha^{S_k(\omega)} \xrightarrow{d} (B_H(t))_t. \tag{4}$$

ii) *Soit* $H \in]\frac{5}{6}, 1[$. *Si* $a > \frac{1-H}{\gamma}$, *alors il existe un sous-ensemble* Ω_0 *de* Ω *de probabilité 1 tel que pour tout* $\omega \in \Omega_0$, *il n'existe pas de fonction* $f \in Lip(a)$ *satisfaisant (4).*

Soit $f \in L^2(\mu)$, nous définissons l'opérateur

$$Rf = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p(k) f \circ T_\alpha^k$$

où $(p(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les coefficients de Fourier d'une fonction ϕ de classe C^1 sur $\mathbb{T}$ telle que $|\phi| < 1$ sur $\mathbb{T} \setminus \{0\}$, $\phi(0) = 1$ et $\phi'(0) \neq 0$.

THÉORÈME 1.3.— *Soit* $H \in]0, 1[$.

i) *Si* $a < \frac{1-H}{\gamma}$, *il existe* $f \in Lip(a)$ *telle que*

$$\frac{1}{n^H} \sum_{k=0}^{[nt]-1} R^k f \xrightarrow{d} (B_H(t))_t. \tag{5}$$

ii) *Supposons que pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, $p(k) \geqslant 0$, *alors si* $a > \frac{1-H}{\gamma}$, *il n'existe pas de fonction* $f \in Lip(a)$ *satisfaisant (5).*

La suite de l'article est organisée de la façon suivante. Dans la section 2, nous prouvons la partie positive du théorème 1.3; la preuve faisant appel au théorème central limite de Salem-Zygmund [9] pour les séries de Fourier aléatoires. Dans la section 3, nous établissons la partie négative de ce même théorème. Puis dans la dernière partie, nous montrons comment le théorème 1.2 se déduit du théorème 1.3.

2. Preuve de la partie positive du théorème 1.3.

Nous allons construire la fonction f comme une série de Fourier aléatoire définie sur $\mathbb{T}$ en posant

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sum_{j\geqslant 1} a_j r_j \cos(2\pi jx) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j r_{|j|} e^{2\pi ijx}, \end{aligned}$$

où $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de Rademacher définie sur un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ et les réels $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ sont tels que $a_0 = 0$ et $a_j = a_{-j}$.

2.1. Le choix des coefficients et les estimations fondamentales.

La transformation T_α opère sur la fonction f par multiplication de ses coefficients de Fourier par $e^{2\pi ij\alpha}$, R opère par multiplication des coefficients par $\phi(j\alpha)$ et donc $\sum_{k=0}^{n-1} R^k$ par $N_n(j\alpha)$ où $N_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k(\alpha)$. On obtient donc que

$$\Sigma_n f(x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} R^k f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j r_{|j|} e^{2\pi ijx} N_n(j\alpha).$$

Soit $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_l$ et des réels $\theta_1, \ldots, \theta_l$. Nous allons choisir les réels $a_j, j \geqslant 1$ afin que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

i) il existe une constante $C > 0$ telle que lorsque $n \longrightarrow \infty$,

$$\sigma_n^2 = \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{i=1}^{l} \theta_i \Sigma_{[nt_i]} f(x) \right)^2 dx \sim C.n^{2H}$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^{2H}} = C.$$

ii) il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{j\geqslant 1} a_j^4 \left|\sum_{i=1}^{l} \theta_i N_{[n_m t_i]}(j\alpha)\right|^4 = \mathcal{O}(n_m^{4H-\delta})$$

où $n_m = [\theta^m]$ pour un réel $\theta > 1$ et $m \geqslant 1$.

A. Condition i)

Nous notons $\langle x\rangle$ la distance signée d'un réel x au plus proche entier c'est-à-dire

$$\langle x\rangle = \epsilon_x \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$$

où ϵ_x prend les valeurs $+1$ ou -1 suivant que x se trouve à gauche ou à droite de l'entier réalisant le minimum. Nous avons clairement

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{i=1}^{l} \theta_i \Sigma_{[nt_i]} f(x)\right)^2 dx = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j^2 \left|\sum_{i=1}^{l} \theta_i N_{[nt_i]}(j\alpha)\right|^2 \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left|\sum_{i=1}^{l} \theta_i N_{[nt_i]}(\lambda)\right|^2 \nu_0(d\lambda)\end{aligned}$$

où

$$\nu_0 = \sum_{j\geqslant 1} a_j^2 \delta_{\langle \pm j\alpha\rangle}.$$

La suite de différences $(B_H(k+1)-B_H(k))_{k\geqslant 0}$ étant une suite stationnaire, centrée, d'après la théorie de la représentation spectrale des processus stationnaires, nous avons pour tout $k \geqslant 0$,

$$B_H(k+1) - B_H(k) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i k\lambda} Z_H(d\lambda)$$

où Z_H est un bruit blanc gaussien de mesure de contrôle ν_H satisfaisant pour tout intervalle $I \subseteq]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$,

$$\nu_H(I) = c_H \int_I \lambda^{1-2H}\, d\lambda,$$

c_H étant une constante strictement positive dépendant de H.

Nous choisissons

$$a_l = \begin{cases} \nu_H(I_j)^{1/2} \text{ si } l = l_j, j \geqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec $l_j = \inf\{k; \langle k\alpha\rangle \in I_j\}$ où $(I_j)_{j\geqslant 1}$ est une partition de $]0,1/2]$ définie par

$$I_j = \left]\frac{1}{2(j+1)^p}, \frac{1}{2j^p}\right]$$

pour p assez grand. On a alors l'estimation directe $\nu_H(I_j) = \frac{C}{j^{2p(1-H)+1}}$ où C est une constante strictement positive.

Ce choix particulier de la suite $(a_j)_{j\geqslant 1}$ est dicté par le fait que nous pouvons construire une suite de variables aléatoires stationnaires, centrées, gaussiennes

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i k\lambda} Z_0(d\lambda)$$

où Z_0 est définie de la manière suivante :

$$\forall j \geqslant 1, \qquad Z_0(\lambda_j) = Z_H(I_j) \quad \text{et} \quad Z_0(-\lambda_j) = Z_H(-I_j)$$

où $\lambda_j = \langle l_j\alpha\rangle$ et $-I_j$ est l'intervalle symétrique de I_j par rapport à 0. La mesure de contrôle de Z_0 est alors la mesure discrète

$$\nu_0 = \sum_{j\geqslant 1} \nu_H(I_j)\delta_{\langle \pm l_j\alpha\rangle}$$

et par cette construction astucieuse, σ_n^2 est aussi la variance de

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{l} \theta_i N_{[nt_i]}(\lambda)\right) Z_0(d\lambda).$$

Avant d'établir i), nous donnons deux majorations concernant le noyau N_n.

LEMME 2.1. — *Il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $\lambda \in]-1/2, 1/2]$:*

i) $|N_n(\lambda)| \leqslant \inf(n, \frac{C_1}{|\lambda|})$

ii) $|N_n'(\lambda)| \leqslant C_2 n^2$.

Preuve. — D'après la définition de la fonction ϕ,

$$\begin{aligned} N_n(\lambda) &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{(l_1,\dots,l_k)\in\mathbb{Z}^k} p(l_1)\dots p(l_k)e^{2\pi i(l_1+\dots+l_k)\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\lambda)^k \\ &= \frac{1-\phi(\lambda)^n}{1-\phi(\lambda)} \quad \text{si } \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Donc, si $\lambda \neq 0$,

$$|N_n(\lambda)| \leqslant \frac{2}{|\lambda|}\left|\frac{\lambda}{1-\phi(\lambda)}\right|.$$

La fonction $\lambda \to \frac{\lambda}{1-\phi(\lambda)}$ est continue sur $[-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{2}[$ et se prolonge par continuité en 0 puisque $\phi'(0) \neq 0$. Elle est donc bornée sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et l'inégalité i) est prouvée.

En utilisant le fait que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|p(k) < \infty$ et que $|\phi(\lambda)| \leqslant 1$ pour tout $\lambda \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, nous obtenons l'inégalité

$$|N_n'(\lambda)| = \left|\sum_{k=1}^{n} k\phi(\lambda)^{k-1}\right| |\phi'(\lambda)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) ||\phi'||_\infty \leqslant C_2 n^2.$$

Le lemme technique suivant nous sera bien utile par la suite.

Lemme 2.2. — *Si* $1 < \beta \leqslant \alpha + 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{n \wedge j^\alpha}{j^\beta} = \mathcal{O}(n^{\frac{\alpha-\beta+1}{\alpha}}).$$

La preuve du lemme est élémentaire en coupant la série au point $J_n = [n^{\frac{1}{\alpha}}]$.

Proposition 2.3. — *Il existe* $C > 0$ *telle que lorsque* $n \longrightarrow \infty$,

$$\sigma_n^2 = \mathbb{E}\left[\left(\int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{l} \theta_i N_{[nt_i]}(\lambda)\right) Z_0(d\lambda)\right)^2\right] \sim C.n^{2H}.$$

Preuve. — La proposition se déduit de manière classique des deux résultats suivants :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{-1/2}^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(\lambda)\right)(Z_H - Z_0)(d\lambda)\right)^2\right] = o(n^{2H}) \tag{6}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{-1/2}^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(\lambda)\right) Z_H(d\lambda)\right)^2\right] \sim C.n^{2H}. \tag{7}$$

Établissons tout d'abord (6) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_{-1/2}^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(\lambda)\right)(Z_H - Z_0)(d\lambda)\right)^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{l}\theta_i \int_{-1/2}^{1/2}\left(N_{[nt_i]}(\lambda) - \sum_j N_{[nt_i]}(\lambda_j)1_{I_j}(\lambda)\right) Z_H(d\lambda)\right)^2\right]\\
&= \sum_{j\geqslant 1}\int_{I_j}\left(\sum_{i=1}^{l}\theta_i(N_{[nt_i]}(\lambda) - N_{[nt_i]}(\lambda_j))\right)^2 \nu_H(d\lambda)\\
&\leqslant \sum_{j\geqslant 1}\nu_H(I_j)\left(\sum_{i=1}^{l}|\theta_i| \sup_{\lambda\in I_j}|N_{[nt_i]}(\lambda) - N_{[nt_i]}(\lambda_j)|\right)^2.
\end{aligned}$$

D'après les deux estimations du lemme 2.1 et le fait que $|I_j| \leqslant C/j^{p+1}$ pour une certaine constante $C > 0$, on a l'inégalité

$$\sup_{\lambda\in I_j}|N_n(\lambda) - N_n(\lambda_j)| \leqslant C\left(j^p \wedge \frac{n^2}{j^{p+1}}\right),$$

d'où,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_{-1/2}^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(\lambda)\right)(Z_H - Z_0)(d\lambda)\right)^2\right]\\
&\qquad\qquad \leqslant C\sum_{j\geqslant 1}\left(j^{2p} \wedge \frac{[nt_l]^4}{j^{2p+2}}\right)\frac{1}{j^{2p+1-2pH}}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.2 avec $\alpha = 4p+2$, $\beta = 4p+3-2pH$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{-1/2}^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(\lambda)\right)(Z_H - Z_0)(d\lambda)\right)^2\right] = \mathcal{O}(n^{\frac{4pH}{2p+1}}) = o(n^{2H}).$$

Prouvons l'équivalence (7).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&\left[\left(\int_{-1/2}^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(\lambda)\right)Z_H(d\lambda)\right)^2\right]\\ &= C_H\int_{-1/2}^{1/2}\left|\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(\lambda)\right|^2\lambda^{1-2H}d\lambda\\ &= C_H n^{2H}\int_{-n/2}^{n/2}\frac{1}{n^2}\left|\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(\frac{u}{n})\right|^2 u^{1-2H}du\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable : $\lambda = \frac{u}{n}$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue car pour tout u, la suite de fonctions

$$\frac{1}{n^2}\left|\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(\frac{u}{n})\right|^2$$

admet une limite et d'après le lemme 2.1, l'intégrande est dominée par $C.(1\wedge\frac{1}{u^2})u^{1-2H}$.

B. Condition ii)

D'après la définition de la suite $(a_j)_{j\geqslant 1}$, nous avons

$$\sum_{j\geqslant 1}a_j^4|\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(j\alpha)|^4 = \sum_{j\geqslant 1}\nu_H(I_j)^2|\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(\lambda_j)|^4.$$

Le fait que $\nu_H(I_j) = \frac{C}{j^{2p(1-H)+1}}$ et l'inégalité i) du lemme 2.1 entraînent que

$$\sum_{j\geqslant 1}a_j^4|\sum_{i=1}^{l}\theta_i N_{[nt_i]}(j\alpha)|^4 \leqslant C\sum_{j\geqslant 1}(n\wedge j^p)^4\frac{1}{j^{4p(1-H)+2}} = \mathcal{O}(n^{4H-\frac{1}{p}})$$

en utilisant le lemme 2.2 avec $\alpha = 4p$, $\beta = 4p(1-H)+2$ et $p \geqslant \frac{1}{4H}$ afin que $\beta \leqslant \alpha+1$.

2.2. La convergence en distribution.

Nous rappelons le théorème central limite de Salem-Zygmund pour les séries de Fourier aléatoires ([9], p. 263). Considérons un tableau de réels $\{a_{n,k}, n \geqslant 1,\ k \geqslant 1\}$. Notons

$$S_n(x) = \sum_{k \geqslant 1} a_{n,k} r_k \cos(2\pi k x),$$

où $(r_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de Rademacher définie sur un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$. Supposons que pour tout n, on ait :

$$\int_{-1/2}^{1/2} S_n^2(x)\ dx = \frac{1}{2} \sum_{k\geqslant 1} a_{n,k}^2 = 1$$

alors, sous les conditions précédentes, nous avons :

THÉORÈME 2.4 [Salem-Zygmund]. — *Si $\sum_n \sum_{k\geqslant 1} a_{n,k}^4$ est finie, alors pour tout réel u,*

$$\mu\left(\{x \in\ ]-1/2, 1/2]\ ;\ S_n(x) \leqslant u\,\}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \mathbb{P}' - p.s.$$

c'est-à-dire : $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ $\mathbb{P}'$−presque sûrement, quand n tend vers l'infini.

Soit $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_l$ et des réels $\theta_1, \ldots, \theta_l$. Soit $\theta > 1$ et $n_m = [\theta^m]$ pour $m \geqslant 1$. Alors, d'après le théorème de Salem-Zygmund, les conditions i) et ii) entraînent que

$$n_m^{-H} \sum_{i=1}^{l} \theta_i \Sigma_{[n_m t_i]} f \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^{l} \theta_i B_H(t_i),$$

la fonction f pouvant être choisie à une constante multiplicative près. Nous obtenons la convergence sur la suite intégrale des entiers en remarquant que grâce à la condition i), si $n_m \leqslant n < n_{m+1}$,

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{l} \theta_i [\Sigma_{[n_m t_i]} f(x) - \Sigma_{[n t_i]} f(x)] \right)^2 dx = \mathcal{O}((\theta - 1)^{2H} [\theta^m]^{2H})$$

et en choisissant θ arbitrairement proche de 1.

2.3. Le caractère lipschitzien de f.

Il reste à prouver que la fonction particulière f que nous avons construite est presque-sûrement Lipschitzienne d'ordre $a < \frac{1-H}{\gamma}$. (voir [3], Chap. 7). Soit $(a_k)_k$ une suite de nombres complexes. Nous notons S la série de Fourier aléatoire

$$\sum_{k\geqslant 1} a_k r_k \exp(2\pi i k x),\ x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

où $(r_k)_{k\geqslant 1}$ désigne toujours une suite de Rademacher définie sur un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$. En introduisant la quantité :

$$s_j = \left(\sum_{2^j \leqslant k < 2^{j+1}} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

nous savons que S représente presque-sûrement une fonction continue lorsque la suite $(s_j)_j$ est décroissante et sommable. De plus, si on ne suppose pas la décroissance de la suite $(s_j)_j$, alors la conclusion est encore vraie si nous avons la condition :

$$\sum_{k\geqslant 1} 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{\sum_{2^k \leqslant j < 2^{k+1}} s_j^2} < \infty.$$

Par ailleurs, si nous avons $s_j = \mathcal{O}(2^{-aj})$ avec $a \in]0,1[$, alors $\mathbb{P}'$−presque-sûrement S représente une fonction $\mathrm{Lip}(b)$ pour tout $b < a$. Rappelons aussi un résultat de la théorie de l'uniforme distribution (voir [4]).

LEMME 2.5. — *Si α est un irrationnel de type $\gamma \geqslant 1$ alors pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\sup_{I\subseteq\mathbb{T}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_I(\langle k\alpha\rangle) - |I| \right| = \mathcal{O}(n^{-1/(\gamma+\epsilon)})$$

Il existe une constante $C_\epsilon > 0$ telle que pour tout intervalle I,

$$\min\{j; \langle j\alpha\rangle \in I\} \leqslant C_\epsilon |I|^{-\gamma-\epsilon}.$$

Le lemme précédent ainsi que le choix particulier de l_j et de la partition $(I_j)_{j\geqslant 1}$ entraînent qu'il existe une constante $C_\epsilon > 0$ telle que

$$\begin{aligned} l_j &\leqslant C_\epsilon |I_j|^{-\gamma-\epsilon} \\ &\leqslant C_{\epsilon,p} j^{(\gamma+\epsilon)(p+1)} \end{aligned}$$

où $C_{\epsilon,p}$ est une constante strictement positive dépendant de ϵ et p. D'où,

$$\begin{aligned} s_j^2 &= \sum_{2^j \leqslant k < 2^{j+1}} |a_k|^2 \\ &\leqslant \sum_{2^j \leqslant k} |a_k|^2 \\ &\leqslant \nu_H(]0, 2^{-jp/(\gamma+\epsilon)(p+1)}]) \\ &\leqslant C 2^{-2jp(1-H)/(\gamma+\epsilon)(p+1)}. \end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathrm{Lip}(a)$ si $a < \frac{(1-H)p}{(\gamma+\epsilon)(p+1)} < \frac{1-H}{\gamma}$.

3. Preuve de la partie négative du théorème 1.3.

L'irrationnel α s'écrit sous forme de fraction continue

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}} := [a_1, a_2, \ldots].$$

Le n-ième convergent principal de α est défini par

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_1, \ldots, a_n]$$

où pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

et $p_0 = q_1 = 1$, $p_1 = q_0 = 0$. La suite $(\frac{p_n}{q_n})_n$ converge vers α et si α est de type diophantien $\gamma \geqslant 1$ alors pour tout $\epsilon > 0$, pour n grand,

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| > \frac{1}{q_n^{\gamma+1+\epsilon}}$$

et pour une sous-suite n_j,

$$\left|\alpha - \frac{p_{n_j}}{q_{n_j}}\right| < \frac{1}{q_{n_j}^{\gamma+1-\epsilon}}.$$

Supposons qu'il existe une fonction $f \in \mathrm{Lip}(a), a > (1-H)/\gamma$ telle que lorsque $n \longrightarrow \infty$,

$$n^{-H}\Sigma_n f \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Soit n_j la sous-suite définie ci-dessus et notons $d_{n_j} = |\langle q_{n_j}\alpha\rangle| = |q_{n_j}\alpha - p_{n_j}|$. Soit $x \in\,]-1/2, 1/2]$, alors

$$\begin{aligned}\left|\Sigma_{2q_{n_j}} f(x) - 2\Sigma_{q_{n_j}} f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{q_{n_j}-1} (R^{k+q_{n_j}} f(x) - R^k f(x))\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{q_{n_j}-1} \left|R^{k+q_{n_j}} f(x) - R^k f(x)\right|.\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}R^k f(x) &= f(x) + \sum_{(l_1,\dots,l_k)\in\mathbb{Z}^k} p(l_1)\dots p(l_k) f(x + (l_1 + \dots + l_k)\alpha) \\ &= \mathbb{E}(f(x + S_k\alpha))\end{aligned}$$

où $S_0 = 0$ et $S_k, k \geqslant 1$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ de loi de probabilité $p^{*(k)} = p * \dots * p$ (k fois). En utilisant cette réécriture des compositions de l'opérateur R, nous avons

$$\begin{aligned}\left|\Sigma_{2q_{n_j}} f(x) - 2\Sigma_{q_{n_j}} f(x)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{q_{n_j}-1} |\mathbb{E}(f(x + S_{k+q_{n_j}}\alpha)) - \mathbb{E}(f(x + S_k\alpha))| \\ &= \sum_{k=0}^{q_{n_j}-1} |\mathbb{E}(f(x + (S_{k+q_{n_j}} - S_k)\alpha + S_k\alpha)) - \mathbb{E}(f(x + S_k\alpha))| \\ &\leqslant C_f \sum_{k=0}^{q_{n_j}-1} \mathbb{E}(|\langle (S_{k+q_{n_j}} - S_k)\alpha\rangle|^a) \\ &= C_f q_{n_j} \mathbb{E}(|\langle S_{q_{n_j}}\alpha\rangle|^a)\end{aligned}$$

en utilisant la stationarité des accroissements du processus $(S_k)_{k\geqslant 0}$. Or, d'après la définition de $\langle . \rangle$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\langle S_{q_{n_j}}\alpha\rangle|^a) &= \mathbb{E}(\inf_{m\in\mathbb{Z}}|S_{q_{n_j}}\alpha - m|^a)\\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{q_{n_j}}\mathbb{E}(\inf_{m\in\mathbb{Z}}|X_i\alpha - \frac{m}{q_{n_j}}|^a)^{\frac{1}{a}}\right)^a\\
&= q_{n_j}^a\mathbb{E}(\inf_{m\in\mathbb{Z}}|X_1\alpha - \frac{m}{q_{n_j}}|^a)\\
&= \mathbb{E}(|\langle X_1 q_{n_j}\alpha\rangle|^a)\\
&= |q_{n_j}\alpha - p_{n_j}|^a\mathbb{E}(|X_1|^a) \leqslant m^a d_{n_j}^a.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\left|\Sigma_{2q_{n_j}}f(x) - 2\Sigma_{q_{n_j}}f(x)\right| \leqslant C_f q_{n_j} m^a d_{n_j}^a \leqslant C_f m^a q_{n_j}^{H-\epsilon'}$$

en choisissant ϵ assez petit afin que $0 < a\epsilon < H - 1 + a\gamma$. On en déduit que

$$\frac{1}{q_{n_j}^H}(\Sigma_{2q_{n_j}}f - 2\Sigma_{q_{n_j}}f)$$

tend uniformément vers 0 et que donc si

$$n^{-H}\Sigma_n f \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

alors il en est de même pour $\frac{1}{2q_{n_j}^H}\Sigma_{2q_{n_j}}f$ et $\frac{1}{(2q_{n_j})^H}\Sigma_{2q_{n_j}}f$, ce qui est une contradiction.

4. Preuve du théorème 1.2.

Définissons pour tout $\theta \in \,]-1/2, 1/2]$, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$a_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{2\pi i\theta S_k(\omega)} - \mathbb{E}(e^{2\pi i\theta S_k})\right).$$

PROPOSITION 4.1. — *Il existe un sous-ensemble Ω_0 de Ω de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe une constante $C_\omega > 0$ telle que pour tout $n \geqslant 2$,*

a) *si* $|\theta| \leqslant n^{-2/3}$,

$$|a_n(\theta)| \leqslant C_\omega |\theta| n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\log\log n}$$

b) *si* $|\theta| \geqslant n^{-2/3}$,

$$|a_n(\theta)| \leqslant C_\omega \sqrt{\frac{n \log n}{|\theta|}}.$$

Il en découle directement le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.2. — *Il existe un ensemble* Ω_0 *de probabilité 1 tel que pour tout* $\omega \in \Omega_0$, *il existe une constante* $C_\omega > 0$ *telle que pour tout* $n \geqslant 2$,

$$\sup_{\theta \in]-1/2, 1/2]} |a_n(\theta)| \leqslant C_\omega n^{5/6} \sqrt{\log n}.$$

Remarque. — Cette inégalité apparaît dans la preuve du caractère universel d'une somme de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$, de carré intégrable, non centrées (théorème 5 de [6]), la puissance $\frac{5}{6}$ étant remplacée par $\frac{7}{8}$.

Preuve de la proposition 4.1. — Premièrement, plaçons-nous sur l'ensemble des $\theta \in]-1/2, 1/2]$ tels que $|\theta| \leqslant n^{-2/3}$. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |a_n(\theta)| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| e^{2\pi i \theta S_k(\omega)} - \phi(\theta)^k \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| e^{2\pi i \theta S_k(\omega)} - e^{2\pi i k m \theta} \right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \left| e^{2\pi i k m \theta} - \phi(\theta)^k \right|. \end{aligned}$$

D'après la loi du logarithme itéré, il existe un ensemble Ω_1 de probabilité 1 tel que si $\omega \in \Omega_1$, alors il existe une constante C_ω telle que

$$|S_k(\omega) - km| \leqslant C_\omega (k \log\log k)^{1/2}.$$

Donc, si $|\theta| \leqslant n^{-2/3}$, alors

$$\begin{aligned} \left| e^{2\pi i \theta S_k(\omega)} - e^{2\pi i k m \theta} \right| &\leqslant 2\pi |S_k(\omega) - km| |\theta| \\ &\leqslant 2\pi C_\omega |\theta| \sqrt{n \log\log n}. \end{aligned}$$

La fonction ϕ est deux fois continûment différentiable car X_1 a un moment d'ordre 2, donc pour θ petit,

$$\phi(\theta) = 1 + 2\pi i m\theta + \mathcal{O}(\theta^2) \tag{8}$$

et

$$e^{2\pi i m\theta} = 1 + 2\pi i m\theta + \mathcal{O}(\theta^2) \tag{9}$$

donc pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}\left|e^{2\pi i\theta mk} - \phi(\theta)^k\right| &\leqslant k\left|e^{2\pi i\theta m} - \phi(\theta)\right| \\ &\leqslant Cn|\theta|^2.\end{aligned}$$

En conclusion, il existe un ensemble Ω_1 de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_1$, il existe une constante $C_\omega > 0$ telle que pour tout $n \geqslant 2$,

$$|a_n(\theta)| \leqslant C_\omega[n^{\frac{3}{2}}|\theta|\sqrt{\log\log n} + n^2|\theta|^2]. \tag{10}$$

Nous en déduisons a) car sous l'hypothèse $|\theta| \leqslant n^{-2/3}$,

$$n^2|\theta|^2 \leqslant n^{4/3}|\theta| \leqslant n^{\frac{3}{2}}|\theta|\sqrt{\log\log n}.$$

Nous allons maintenant montrer que pour $\mathbb{P}-$presque tout $\omega \in \Omega$, il existe une constante $C_\omega > 0$ telle que pour tout $n \geqslant 2$, si $n^{-2/3} \leqslant |\theta| \leqslant 1/2$, alors

$$|a_n(\theta)| \leqslant C_\omega\left[\sqrt{\frac{n\log n}{|\theta|}} + \inf(n, \frac{1}{|\theta|})\right]$$

ce qui entraîne que

$$|a_n(\theta)| \leqslant C_\omega\sqrt{\frac{n\log n}{|\theta|}}$$

car $\inf(n, \frac{1}{|\theta|}) = \frac{1}{|\theta|} \leqslant \frac{n^{1/3}}{\sqrt{|\theta|}}$.

Nous avons

$$|a_n(\theta)| \leqslant \left|\sum_{k=1}^n \phi(\theta)^k\right| + \left|\sum_{k=1}^n e^{2\pi i\theta S_k(\omega)}\right|.$$

D'après le lemme 2.1, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \phi(\theta)^k\right| \leqslant \inf\left(n, \frac{C_1}{|\theta|}\right). \tag{11}$$

Montrons maintenant que pour $\mathbb{P}-$presque tout $\omega \in \Omega$, il existe une constante $C_\omega > 0$ telle que pour tout $n \geqslant 2$, si $n^{-2/3} \leqslant |\theta| \leqslant 1/2$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i\theta S_k(\omega)}\right| \leqslant C_\omega\sqrt{\frac{n \log n}{|\theta|}}. \tag{12}$$

Définissons pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $\omega \in \Omega$,

$$R_n(\omega) = c_{n,\theta}\sum_{k=1}^{n} \cos(2\pi\theta S_k(\omega))$$

où $c_{n,\theta} = \sqrt{\frac{|1-\phi(\theta)|\log(n)}{n}}$. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n), n \geqslant 1$ la filtration naturelle associée à la suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ et pour tout $n \geqslant 1$, notons $(R_{n,m}, \mathcal{F}_m)_{m=1,\ldots,n}$ la martingale finie définie par

$$R_{n,m} = \mathbb{E}(R_n|\mathcal{F}_m), \quad m = 1, \ldots, n.$$

Nous allons tout d'abord commencer par montrer le lemme suivant :

LEMMA 4.3. — *Soit $(M_m)_{m=1,\ldots,n}$ une martingale finie telle qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $m = 2, \ldots, n$, pour tout $\omega \in \Omega$, $|M_m(\omega) - M_{m-1}(\omega)| \leqslant c$. Notons pour tout $m = 2, \ldots, n$,*

$$\langle M\rangle_m = \sum_{j=2}^{m} \mathbb{E}((M_j - M_{j-1})^2|\mathcal{F}_{j-1}).$$

Alors, si $d = \frac{e^{\lambda c}-1-\lambda c}{c^2}$, pour tout $n \geqslant 1$, la suite $(\mathcal{E}_m = \exp(\lambda M_m - d < M >_m), \mathcal{F}_m)_{m=1,\ldots,n}$ est une sur-martingale finie.

Preuve. — Pour tout x tel que $|x| \leqslant c$,

$$e^{\lambda x} - 1 - \lambda x = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(\lambda x)^m}{m} \leqslant x^2 d.$$

Pour tout $m \geqslant 2$, nous avons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} d_m &\equiv \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{m-1} \\ &= \mathcal{E}_{m-1}\Big[(e^{\lambda(M_m - M_{m-1})} - 1)e^{-d(<M>_m - <M>_{m-1})} \\ &\qquad\qquad + (e^{-d(<M>_m - <M>_{m-1})} - 1)\Big] \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(d_m|\mathcal{F}_{m-1}) &= \mathcal{E}_{m-1}\Big[\mathbb{E}(e^{\lambda(M_m - M_{m-1})} - 1|\mathcal{F}_{m-1})e^{-d(<M>_m - <M>_{m-1})} \\ &\quad + (e^{-d(<M>_m - <M>_{m-1})} - 1)\Big] \\ &= \mathcal{E}_{m-1}\Big[\mathbb{E}(e^{\lambda(M_m - M_{m-1})} - 1 - \lambda(M_m - M_{m-1})|\mathcal{F}_{m-1})e^{-d(<M>_m - <M>_{m-1})} \\ &\quad + (e^{-d(<M>_m - <M>_{m-1})} - 1)\Big] \\ &\leqslant \mathcal{E}_{m-1}\Big[d\,\mathbb{E}((M_m - M_{m-1})^2|\mathcal{F}_{m-1})e^{-d(<M>_m - <M>_{m-1})} \\ &\quad + (e^{-d(<M>_m - <M>_{m-1})} - 1)\Big] \\ &= \mathcal{E}_{m-1}\Big[d(< M >_m - < M >_{m-1})e^{-d(<M>_m - <M>_{m-1})} \\ &\quad + (e^{-d(<M>_m - <M>_{m-1})} - 1)\Big]. \end{aligned}$$

Or pour tout $x \geqslant 0$,

$$xe^{-x} + e^{-x} - 1 \leqslant 0$$

donc pour tout $m \geqslant 2$, $\mathbb{E}(\mathcal{E}_m|\mathcal{F}_{m-1}) \leqslant \mathcal{E}_{m-1}$.

Supposons qu'on ait montré qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $m = 1, \ldots, n$, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|R_{n,m}(\omega) - R_{n,m-1}(\omega)| \leqslant c \quad (\text{ ici } R_0 = 0) \tag{13}$$

et une constante $C' > 0$ telle que pour tout $m = 2, \ldots, n$,

$$< R >_m = \sum_{j=2}^{m} \mathbb{E}((R_{n,j} - R_{n,j-1})^2|\mathcal{F}_{j-1}) \leqslant C' \log n \tag{14}$$

alors nous pouvons en déduire (12) en utilisant le lemme 4.3 de la manière suivante. Premièrement, notons $F_n = c_{n,\theta}\sum_{k=1}^{n}\exp(2\pi i\theta S_k)$, alors pour tout $C > 0$,

$$\mathbb{P}(\{|F_n| \geqslant C \log n\}) \leqslant \mathbb{E}(e^{|F_n|})e^{-C \log n}.$$

Comme pour tous réels a, b, nous avons l'inégalité : $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, il suffit d'obtenir les inégalités suivantes :

$$\mathbb{E}(e^{2R_n}) \leqslant e^{C' \log n}, \quad \mathbb{E}(e^{-2R_n}) \leqslant e^{C' \log n}$$

et

$$\mathbb{E}(e^{2I_n}) \leqslant e^{C' \log n}, \quad \mathbb{E}(e^{-2I_n}) \leqslant e^{C' \log n}$$

où I_n désigne la partie imaginaire de F_n. La première inégalité (idem pour les trois autres) s'obtient en appliquant le lemme précédent à la martingale finie $(R_{n,m}, \mathcal{F}_m)_{m=1,\dots,n}$ car en notant $d = \frac{e^{2c}-1-2c}{c^2}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{2R_n}) &= \mathbb{E}(e^{2R_n - d\langle R\rangle_n} e^{d\langle R\rangle_n}) \\
&\leqslant \mathbb{E}(e^{2R_n - d\langle R\rangle_n}) e^{dC' \log n} \\
&\leqslant \mathbb{E}(e^{2R_{n,1} - d\langle R\rangle_1}) e^{dC' \log n} \\
&\leqslant e^{2c + d\, C' \log n} \ (\text{car } |R_{n,1}| \leqslant c).
\end{aligned}$$

En choisissant $C \geqslant d\, C' + 4$, nous obtenons l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(\{|F_n| \geqslant C \log n\}\right) \leqslant Cste.n^{-4}$$

Si nous définissons l'ensemble $H_n = \{\theta \in \,]-1/2, 1/2]; |\theta| \geqslant n^{-2/3}$ et $\theta = \frac{k}{n^2}$ pour un certain $k\}$, alors comme Card $H_n \leqslant n^2$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{ \sup_{\theta \in H_n} |F_n| \geqslant C \log n\Big\}\Big) \leqslant Cste.n^{-2}.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, il existe un ensemble Ω_2 de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_2$, il existe une constante C_ω telle que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sup_{\theta \in H_n} |F_n(\omega)| \leqslant C_\omega \log n$$

soit encore en utilisant le fait que $|1 - \phi(\theta)| \geqslant C|\theta|$, nous avons pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $\theta \in H_n$,

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i\theta S_k(\omega)}\Big| \leqslant C_\omega \sqrt{\frac{n \log n}{|\theta|}}.$$

Nous obtenons l'inégalité (12) en remarquant que pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, pour tout n,

$$\left|\frac{d}{d\theta}\left(\sum_{k=1}^{n} \exp(2\pi i\theta S_k(\omega)\right)\right| \leqslant C_\omega n^2.$$

Il nous reste donc à prouver les inégalités (13) et (14). Nous avons besoin de formules explicites pour la martingale $(R_{n,m}, \mathcal{F}_m)_{m=1,\dots,n}$. Définissons la martingale finie $(F_{n,m}, \mathcal{F}_m)_{m=1,\dots,n}$ où $F_{n,m} = \mathbb{E}(F_n|\mathcal{F}_m), m = 1, \dots, n$. En utilisant l'indépendance des variables aléatoires $X_i, i \geqslant 1$, nous obtenons directement une formule explicite pour $F_{n,m}$:

$$F_{n,m} = c_{n,\theta} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \exp(2\pi i\theta S_k) + \frac{1 - \phi(\theta)^{n-m+1}}{1 - \phi(\theta)} \exp(2\pi i\theta S_m) \right).$$

Donc, pour $m = 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
|R_{n,m} - R_{n,m-1}| &\leqslant |F_{n,m} - F_{n,m-1}| \\
&= c_{n,\theta} \left| \frac{1 - \phi(\theta)^{n-m+1}}{1 - \phi(\theta)} \right| .|\exp(2\pi i\theta X_m) - \phi(\theta)| \\
&\leqslant \frac{4\, c_{n,\theta}}{|1 - \phi(\theta)|}.
\end{aligned}$$

Or, si $|\theta| \geqslant n^{-2/3}$, en utilisant que $|1-\phi(\theta)| \geqslant C|\theta|$, nous pouvons supposer n assez grand pour que

$$\frac{c_{n,\theta}}{|1 - \phi(\theta)|} = \sqrt{\frac{\log n}{n|1 - \phi(\theta)|}} \leqslant 1.$$

Pour $m = 1$,

$$|R_{n,1}| \leqslant |F_{n,1}| = c_{n,\theta} \left| \frac{1 - \phi(\theta)^n}{1 - \phi(\theta)} \right| .|\exp(2\pi i\theta X_1)| \leqslant \frac{2c_{n,\theta}}{|1 - \phi(\theta)|} \leqslant 2.$$

Il reste à prouver (14). Pour tout $m = 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|R_{n,m} - R_{n,m-1}|^2|\mathcal{F}_{m-1}) &\leqslant \mathbb{E}(|F_{n,m} - F_{n,m-1}|^2|\mathcal{F}_{m-1}) \\
&= c_{n,\theta}^2 \left| \frac{1 - \phi(\theta)^{n-m+1}}{1 - \phi(\theta)} \right|^2 \mathbb{E}(|\exp(2\pi i\theta X_m) - \phi(\theta)|^2|\mathcal{F}_{m-1}) \\
&\leqslant 4 \frac{\log n}{n} \left(\frac{1 - |\phi(\theta)|^2}{|1 - \phi(\theta)|} \right) \leqslant C\, \frac{\log n}{n}
\end{aligned}$$

(car $\frac{1-|\phi(\theta)|^2}{|1-\phi(\theta)|}$ est uniformément borné en θ).

Nous allons maintenant nous appliquer à prouver le théorème 1.2. Soit $0 < t_1 < \ldots < t_l$ et $\theta_1, \ldots, \theta_l$ des réels. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\frac{1}{n^H}\left\|\sum_{i=1}^{l}\theta_i \sum_{k=0}^{[nt_i]-1}(T_\alpha^{S_k(\omega)}f(x) - R^k f(x))\right\|_2 \leqslant \frac{1}{n^H}\sum_{i=1}^{l}\theta_i\left\|\sum_{k=0}^{[nt_i]-1}(T_\alpha^{S_k(\omega)}f(x) - R^k f(x))\right\|_2,$$

il suffit donc d'estimer (On pose $t_i = 1$ pour simplifier)

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}(T_\alpha^{S_k(\omega)}f(x) - R^k f(x))\right\|_2.$$

Les opérateurs T_α et R opèrent sur la fonction f construite au paragraphe 2 en multipliant ses coefficients de Fourier respectivement par $e^{2\pi ij\alpha}$ et $\phi(j\alpha)$. Par conséquent, l'opérateur

$$\sum_{k=0}^{n}(T_\alpha^{S_k(\omega)}f(x) - R^k f(x))$$

opère sur f en multipliant ses coefficients de Fourier par

$$\sum_{k=0}^{n}(e^{2\pi ij\alpha S_k(\omega)} - \mathbb{E}(e^{2\pi ij\alpha S_k})),$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=0}^{n}(T_\alpha^{S_k(\omega)}f(x) - R^k f(x))\right\|_2^2 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}|a_j|^2\left|\sum_{k=0}^{n}(e^{2\pi ij\alpha S_k(\omega)} - \mathbb{E}(e^{2\pi ij\alpha S_k}))\right|^2 \\ &= 2\sum_{j\geqslant 1}\nu_H(I_j)|a_n(\langle l_j\alpha\rangle)|^2.\end{aligned}$$

D'après la proposition 4.1, il existe un ensemble Ω_0 de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe une constante $C_\omega > 0$ telle que pour tout $n \geqslant 2$, si $\langle l_j\alpha\rangle \leqslant n^{-2/3}$,

$$|a_n(\langle l_j\alpha\rangle)| \leqslant C_\omega|\langle l_j\alpha\rangle|n^{3/2}\sqrt{\log\log n}$$

et si $\langle l_j\alpha\rangle \geqslant n^{-2/3}$, alors

$$|a_n(\langle l_j\alpha\rangle)| \leqslant C_\omega\sqrt{\frac{n\log n}{|\langle l_j\alpha\rangle|}}.$$

En découpant la somme

$$\sum_{j\geqslant 1}\nu_H(I_j)|a_n(\langle l_j\alpha\rangle)|^2$$

selon les entiers j tels que $\langle l_j\alpha\rangle \leqslant n^{-2/3}$ et $\langle l_j\alpha\rangle \geqslant n^{-2/3}$, la définition de $\nu_H(I_j)$ et les inégalités ci-dessus, on obtient que

$$\sum_{j\geqslant 1}\nu_H(I_j)|a_n(\langle l_j\alpha\rangle)|^2 \leqslant C'_\omega n^{\frac{1+4H}{3}}\log n = o(n^{2H})$$

si $H > \frac{1}{2}$ (C'_ω étant un multiple de C_ω). Donc, si $H \in \,]\frac{1}{2},1[$, le i) du théorème 1.3 combiné au théorème de Slutsky nous donne l'assertion i) du théorème 1.2.

Il nous reste à prouver la partie négative du théorème 1.2. Soit $f \in L^2(\mu)$. D'après le corollaire 4.2, il existe un ensemble Ω_0 de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe une constante $C_\omega > 0$ telle que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n^H}\left\|\sum_{i=1}^{l}\theta_i\sum_{k=0}^{[nt_i]-1}(T_\alpha^{S_k(\omega)}f(x) - R^k f(x))\right\|_2 \leqslant C_\omega n^{5/6-H}\sqrt{\log n}.$$

Alors, si le paramètre H est compris entre $\frac{5}{6}$ et 1, l'assertion ii) du théorème 1.3 combiné au théorème de Slutsky nous donne le résultat ii) du théorème 1.2.

5. Problème ouvert.

Les méthodes utilisées ici ne permettent pas de résoudre le cas critique $a = \frac{1-H}{\gamma}$. La preuve de l'existence ou non d'une fonction Lip($\frac{1-H}{\gamma}$) pour laquelle la convergence (4) dans le théorème 1.2 serait réalisée nécessite des hypothèses plus fortes sur l'irrationnel α. En particulier, la vitesse de convergence dans le lemme 2.5 peut être améliorée si on suppose que les quotients partiels de l'irrationnel α ne croissent pas trop vite, par exemple avec une vitesse égale à $n^{1+\epsilon}, \epsilon > 0$.

Remerciements. — L'auteur remercie Jean Brossard dont la contribution a permis d'améliorer de manière substantielle le théorème 1.2 ainsi que la présentation générale de l'article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BURTON et M. DENKER, On the central limit theorem for dynamical systems, Trans. of the Amer. Math. Soc., Vol. 302, No. 2 (1987), 715-726.

[2] N. GUILLOTIN-PLANTARD, Sur la convergence faible des systèmes dynamiques échantillonnés, C. R. Acad. Sci., Paris, Vol. 333 (2001), 583-588.

[3] J.-P. KAHANE, Some random series of functions, Cambridge University Press, Seconde édition 1985.

[4] L. KUIPERS et H. NIEDERREITER, Uniform distribution of sequences, Wiley and sons, 1974.

[5] M. LACEY, On central limit theorems, modulus of continuity and Diophantine type for irrational rotations, Journal d'Analyse Mathématique, Vol. 61 (1993), 47-59.

[6] M. LACEY, K. PETERSEN, M. WIERDL et D. RUDOLPH, Random ergodic theorems with universally representative sequences, Annales de l'institut Henri Poincaré, Vol. 30, No. 3 (1994), 353-395.

[7] F.-L. SPITZER, Principles of random walks, Second Edition, Springer, New York, 1976.

[8] D. VOLNÝ, Invariance principles and Gaussian approximation for strictly stationary processes, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 351, No. 8 (1999), 3351-3371.

[9] A. ZYGMUND, Trigonometric series, Cambridge University Press, Seconde édition 1959.

Manuscrit reçu le 16 janvier 2003,
révisé le 19 septembre 2003,
accepté le 3 octobre 2003.

Nadine GUILLOTIN-PLANTARD,
Université Claude Bernard- Lyon 1
LaPCS - 50, avenue Tony Garnier
69366 Lyon Cedex 07 (France).

nadine.guillotin@univ-lyon1.fr