



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Frédéric TOUZET

**Sur les feuilletages holomorphes transversalement projectifs**

Tome 53, n° 3 (2003), p. 815-846.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2003\\_\\_53\\_3\\_815\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2003__53_3_815_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

## SUR LES FEUILLETAGES HOLOMORPHES TRANSVERSALEMENT PROJECTIFS

par Frédéric TOUZET

---

### Introduction.

Rappelons qu'un feuilletage holomorphe régulier  $\mathcal{F}$  transversalement projectif sur une variété  $M$  de dimension  $n$  est déterminé par les données

- d'un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $M$  ;
- d'une famille de submersions holomorphes  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{P}_1$ , la droite projective complexe  $\mathbb{P}_1$  étant ici identifiée à l'espace homogène  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/T$  où  $T$  désigne le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures (groupe affine) du groupe  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  ;
- d'une famille de cocycles  $f_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  localement constants tels que l'on ait  $f_j = f_{ji}(f_i)$ .

En raison du théorème d'uniformisation de Riemann, cette structure transverse est celle des feuilletages holomorphes transversalement homogènes de codimension 1 (cf. par exemple [Sca]). Les cas les plus standard sont donnés par les feuilletages génériquement transverses à une fibration en courbes holomorphes compactes et connexes, c'est-à-dire les feuilletages de Riccati (on étend cette terminologie qui est usuellement employée dans le cas d'une fibration rationnelle transverse) et les feuilletages dérivés obtenus par pull-back méromorphe des premiers. Il est alors naturel de se demander si tout feuilletage transversalement projectif, éventuellement en dehors d'une hypersurface invariante, est construit selon ce procédé. En fait, leur étude, menée dans [Sca], laisse présager que la réponse est négative.

Dans un contexte d'abord *local*, nous considérons le cas des équations différentielles réduites qui sont, au terme d'une succession d'éclatements ponctuels, les modèles terminaux des singularités générales des feuilletages en *dimension* 2. Rappelons que celles-ci sont définies par une 1-forme  $\omega$  à singularité isolée dont le jet d'ordre 1 (dans un certain système de coordonnées analytiques) est égal à

$$y dx + \lambda x dy, \quad \lambda \notin \mathbb{Q}^- \setminus \{0\}.$$

Il s'agit de caractériser parmi cette classe de feuilletages ceux qui sont transversalement projectifs en dehors de leurs séparatrices. Précisons cependant (pour des raisons que nous expliciterons ultérieurement) que nous nous plaçons en fait dans un cadre plus étroit en fixant dans le cas résonnant le type de croissance, dite *modérée*, des formes de structure (cf. I.1) qui définissent le feuilletage sur le complémentaire des séparatrices. Nous montrons alors que les éléments de cette classe proviennent, au sens précisé ci-dessus, de feuilletages de Riccati (théorème II.4.2). Qui plus est, nous décrivons exactement leur espace de modules au sens de Martinet Ramis (proposition II.4.3). La première partie de ce travail est consacrée à la preuve de ce résultat; elle s'inscrit dans la continuation de [BeTo] qui avait pour objet l'étude des feuilletages réduits à intégrales premières liouvilliennes, en particulier transversalement affines. Dans cette dernière situation, notre résultat est d'ailleurs déjà établi.

C'est en revanche faux dans le contexte *global* au sens où l'on peut construire des exemples de feuilletages sur le plan projectif  $\mathbb{P}_2$  transversalement projectifs en dehors d'un sous-ensemble analytique propre et qui ne peuvent être obtenus comme pull-back rationnel d'un feuilletage de Riccati sur une surface algébrique (théorème III.2.6); ces exemples sont produits à partir de feuilletages transversalement hyperboliques (i.e., dont les cocycles sont à valeurs dans  $SL(2, \mathbb{R})$ ) existant naturellement sur les surfaces de Hilbert rationnelles; on établira ce fait dans la deuxième partie.

Dans la dernière partie, nous revenons à une situation *locale* en exhibant un germe de feuilletage à l'origine de  $\mathbb{C}^2$  transversalement projectif en dehors de cinq courbes lisses mais ne pouvant être obtenu comme pull-back méromorphe d'une équation de Riccati.

Signalons enfin que les formes de structure associées à ces deux contre-exemples sont à croissance *modérée*.

*Remerciements* à M. Nicolau, D. Cerveau et F. Loray ainsi qu'au referee pour ses nombreuses et pertinentes remarques.

## I. Rappels et définitions.

### I.1. Équations de structures et modèle local d'un feuilletage holomorphe transversalement projectif.

On pourra se référer à [Go]. Soit  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  une base des 1-formes invariantes à gauche dans  $SL(2, \mathbb{C})$  vérifiant

$$d\Omega_1 = \Omega_2 \wedge \Omega_1, \quad d\Omega_2 = \Omega_1 \wedge \Omega_3, \quad d\Omega_3 = \Omega_3 \wedge \Omega_2.$$

Rappelons le résultat suivant qui est un cas particulier du théorème de Darboux-Lie.

**THÉORÈME I.1.1.** — *Soient  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  trois formes holomorphes sur une variété complexe  $M$  satisfaisant les relations*

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_1, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \omega_3 \wedge \omega_2.$$

*Alors, pour tout recouvrement simplement connexe  $(U_i)$  de  $M$ , il existe une famille d'applications holomorphes  $\pi_i : U_i \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  telles que, pour  $k = 1, 2, 3$ ,  $\omega_k = \pi_i^* \Omega_k$  et  $\pi_j = g_{ji} \circ \pi_i$ ,  $g_{ji} \in SL(2, \mathbb{C})$ . En particulier, la forme  $\omega_1$  définit en dehors de son lieu singulier un feuilletage transversalement projectif.*

Ce résultat admet une réciproque partielle :

**THÉORÈME I.1.2** (voir [Sca]). — *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe régulier et transversalement projectif défini sur une variété complexe  $M$  par une 1-forme holomorphe intégrable  $\omega_1$ . Supposons qu'il existe sur  $M$  une 1-forme holomorphe  $\omega_2$  telle que*

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_1.$$

*Alors, il existe une 1-forme méromorphe  $\omega_3$  sur  $M$  vérifiant*

$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \omega_3 \wedge \omega_2.$$

### I.2. Développement, équivalence des structures projectives.

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement projectif sur une variété complexe  $M$ .

PROPOSITION I.2 (cf. [God]). — L'existence de  $\mathcal{F}$  est équivalente aux données :

- d'un revêtement galoisien holomorphe  $p : P \rightarrow M$ ,
- d'un homomorphisme  $h : \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ,
- d'une submersion  $\Phi : P \rightarrow \mathbb{P}_1$

avec les propriétés suivantes :

i)  $\Phi$  est équivariante pour  $h$ ,

ii)  $p^*\mathcal{F}$  est le feuilletage défini par la submersion  $\Phi$ . En particulier, si  $M$  est simplement connexe,  $\mathcal{F}$  est donné par les niveaux d'une submersion de  $M$  dans  $\mathbb{P}_1$ . Le triplet  $(p, h, \Phi)$  est appelé développement du feuilletage  $\mathcal{F}$ .

Remarques I.2. — On remarquera en particulier que dans le cas où  $M$  est simplement connexe, un tel feuilletage admet une intégrale première méromorphe. Par ailleurs, si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage holomorphe (éventuellement singulier) défini sur une variété complexe  $M$  et transversalement projectif en dehors d'un sous-ensemble analytique propre, on peut supposer (par des arguments élémentaires de transversalité) que ce dernier est invariant par  $\mathcal{F}$ .

DÉFINITION I.2. — Soient  $(f_i)$  et  $(g_i)$  deux familles de submersions définissant le feuilletage  $\mathcal{F}$  sur les ouverts  $U_i$  d'un recouvrement de  $M$  et satisfaisant l'énoncé de l'introduction. On dira que  $(f_i)$  et  $(g_i)$  définissent deux structures projectives transverses équivalentes si, quitte à raffiner le recouvrement  $(U_i)$ , il existe une famille  $(h_i)$  d'éléments de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  telle que  $g_i = h_i \circ f_i$ .

### I.3. Un exemple non trivial : les feuilletages de Riccati.

Ce sont les feuilletages (éventuellement singuliers) définis sur une surface complexe lisse et admettant une fibration compacte et connexe transverse en dehors d'un ensemble isolé de fibres spéciales. L'exemple standard est le feuilletage sur  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$  donné dans une carte affine par l'équation polynomiale

$$p(x) dy - (y^2 c(x) - yb(x) - a(x)) dx = 0.$$

Ce dernier est transversalement projectif sur le complémentaire de  $((p=0) \times \mathbb{C}) \cup (\mathbb{C} \times (y=0))$ . On hérite ainsi de feuilletages transversa-

lement projectifs sur des ouverts Zariski denses de variétés algébriques par pull-back rationnel de l'équation initiale. Dans [Sca], B. Scardua établit que ces feuilletages sont exactement caractérisés par l'existence d'une troisième forme de structure  $\omega_3$  admettant une intégrale première rationnelle et obtient ainsi une classification partielle des feuilletages transversalement projectifs sur les surfaces rationnelles. Nous donnerons un exemple n'appartenant pas à cette classe. Par ailleurs, Scardua remarque que cette propriété persiste dans le cas local : si  $\mathcal{F}_{\omega_1}$  est un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de  $\mathbb{C}^n$  admettant les équations de structure données dans le théorème I.2 avec  $\omega_1, \omega_2$  méromorphes et  $\omega_3$  admettant une intégrale première méromorphe  $f$ , alors  $\mathcal{F}_{\omega_1}$  est obtenu comme pull-back méromorphe d'un feuilletage de Riccati sur  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ , i.e., à multiplication près par une fonction méromorphe,

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}h^2 df + dh + R(f) df$$

où  $h$  désigne un germe de fonction méromorphe et  $R$  un germe de fonction méromorphe ou une fraction rationnelle selon que  $f$  est holomorphe ou méromorphe pure.

## II. Feuilletages réduits transversalement projectifs.

### II.1. Définition.

Soient  $X$  un germe de courbe de  $\mathbb{C}^2, 0$  et  $\mathcal{F}_\omega$  le feuilletage induit par un germe de 1-forme holomorphe à singularité isolée en 0. On dira que  $\mathcal{F}_\omega$  est transversalement projectif en dehors de  $X$  s'il existe un représentant  $\tilde{\omega}$  et  $\tilde{X}$  respectivement de  $\omega$  et  $X$  dans un voisinage  $U$  de l'origine tels que le feuilletage induit par  $\tilde{\omega}$  sur  $U$  soit transversalement projectif sur  $U \setminus \tilde{X}$ . Par la remarque I.2, on pourra supposer que  $X$  est invariant par le feuilletage. Compte tenu du théorème I.1.2, on peut énoncer la

PROPOSITION II.1. — *Soit  $\mathcal{F}_{\omega_1}$  un germe de feuilletage holomorphe dans  $\mathbb{C}^2, 0$  transversalement projectif en dehors d'un germe de courbe  $X$ . Alors, il existe deux germes  $\omega_2$  et  $\omega_3$  de 1-formes méromorphes en dehors de  $X$ , telles que*

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_1, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \omega_3 \wedge \omega_2.$$

Nous considérerons dorénavant des germes  $\omega = 0$  d'équations différentielles telles que le 1-jet de  $\omega$  s'écrive dans un système de coordonnées

holomorphes adéquat

$$j^1\omega = x \, dy + \lambda y \, dx$$

où  $\lambda$  est un nombre complexe n'appartenant pas à  $\mathbb{Q}^{-*}$ . On rappelle que de tels germes sont dits réduits et que leur classe analytique est complètement déterminée par celle de leur holonomie (cf. [Ma], [Mo], [MaRa1], [MaRa2]).

## II.2. Les formes normales formelles.

Rappelons qu'un feuilletage réduit est formellement conjugué à l'un des feuilletages modèles définis par les 1-formes suivantes (cf. [MaRa1], [MaRa2]) :

- a)  $\omega_N = x \, dy + \lambda y \, dx$ ,  $\lambda \notin \mathbb{R}^+$ , cas linéaire ;
- b)  $\omega_N = \omega_{k,\mu} = p(1 + (\mu - 1))u^k y \, dx + q(1 + \mu u^k)x \, dy$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $u = x^p y^q$ , cas résonnant ;
- c)  $\omega_N = \omega_{p,\mu} = x^{p+1} \, dy - y(1 + \mu u^p) \, dx$ ,  $p$  entier supérieur à 1,  $\mu \in \mathbb{C}$ , cas nœud-selle.

Chacune de ces formes admet un facteur intégrant  $g_N$  ; il en résulte, en considérant l'intégrale première  $\int \omega_N / g_N$ , que les feuilletages associés sont transversalement projectifs et plus précisément transversalement affines en dehors de leurs séparatrices. À l'instar de [BeTo] traitant du cas transversalement affine, nous voudrions caractériser l'espace des modules des feuilletages réduits transversalement projectifs. Il va s'avérer, toujours en parallèle avec la situation affine, que seuls les cas résonnant et nœud-selle sont susceptibles de produire des exemples non triviaux.

## II.3. Le cas à petits diviseurs.

Dans ce paragraphe,  $\omega$  désigne un germe de 1-forme holomorphe réduit dont le 1-jet est holomorphiquement conjugué à  $y \, dx + \lambda x \, dy$  où le nombre caractéristique  $\lambda$  appartient à  $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ . Rappelons que le germe  $\omega$  est toujours formellement conjugué à sa partie linéaire  $\omega_\lambda$  et lui est analytiquement conjugué si  $\lambda$  satisfait la condition diophantienne de Brujno

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$$

où  $(q_n)_{n \geq 1}$  désigne la suite des réduites associées à la décomposition en fraction continue de  $\lambda$ . Nous nous proposons ici d'établir le

THÉORÈME II.3.1. — *Un germe  $\omega$  de 1-forme holomorphe réduit dont le nombre caractéristique est irrationnel positif est analytiquement linéarisable si et seulement si il définit un feuilletage transversalement projectif en dehors de ses séparatrices.*

La preuve s'inspire substantiellement du résultat suivant établi par Pérez Marco [Pe] :

THÉORÈME II.3.2. — *Soit  $h(z) = e^{2i\pi\lambda}z + h.o.t.$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , un germe de difféomorphisme holomorphe formellement mais non analytiquement linéarisable. Alors, pour tout disque  $\bar{D}_r = \{|z| \leq r\}$  de rayon  $r$  assez petit, il existe un compact  $K_r \subset \bar{D}_r = \{|z| \leq r\}$  totalement invariant par  $h$  et tel que*

- a)  $K_r \cap \partial\bar{D}_r \neq \emptyset$ ;
- b)  $K_r$  est plein, connexe et contient l'origine;
- c)  $K_r$  est d'intérieur vide dans  $\bar{D}_r$ ;
- d) pour tout  $a \in \bar{D}_r \setminus K_r$ , il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $f^n(a) \notin \bar{D}_r$ .

*Preuve du théorème II.3.1.* — Soit  $\omega_\lambda$  un germe de forme non linéarisable. On sait (cf. [BrBo]) que le germe de feuilletage  $\mathcal{F}_{\omega_\lambda}$  qu'elle induit admet un ensemble de séparatrices isomorphe à  $\{xy = 0\}$ . Le difféomorphisme  $h$  d'holonomie de la séparatrice  $\{x = 0\}$  évalué sur la transversale  $\{y = 1\}$  satisfait donc les hypothèses du théorème II.3.2. Supposons par l'absurde  $\mathcal{F}_{\omega_\lambda}$  transversalement projectif en dehors des séparatrices. D'après la proposition I.2, on hérite alors d'une intégrale première multiforme vérifiant  $F \circ p = \Phi$ ; on remarquera que l'image de sa représentation de monodromie

$$\rho : \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus xy = 0) \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

est un groupe abélien à deux générateurs. Considérons le disque épointé  $\mathbb{D}^* = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, 0 < |x| < 1, y = 1\}$ . Si  $\gamma$  est un chemin joignant  $x \in \mathbb{D}^*$  à  $h(x)$ , le prolongement analytique  $[\gamma]\underline{F}$  d'un germe de détermination  $\underline{F}$  de  $F$  en  $x$  le long de  $\gamma$  vaut, au voisinage de  $h(x)$  :

$$[\gamma]\underline{F} = \alpha \cdot \underline{F}, \quad \alpha \in \mathrm{Im} \rho.$$

On vérifie aisément que l'image de la représentation  $\rho$  est donnée, à conjugaison près dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ , sous l'une des trois formes suivantes :



- i)  $\text{Im } \rho = \langle z \mapsto az, z \mapsto bz \rangle, a, b \in \mathbb{C}^*$  ;
- ii)  $\text{Im } \rho = \langle z \mapsto z + a, z \mapsto z + b \rangle, a, b \in \mathbb{C}$  ;
- iii)  $\text{Im } \rho = \langle z \mapsto z^{-1}, z \mapsto -z \rangle$ .

En particulier, on obtient sur  $\mathbb{D}^*$  une forme métrique  $\xi$  invariante sous l'action de  $h$  : celle induite par  $|\underline{dF}/\underline{F}|^2$  dans les cas i) et iii) et par  $|\underline{dF}|^2$  dans le cas ii). Cette métrique ne comporte par construction qu'un ensemble isolé de singularités. La contradiction recherchée résulte alors de l'opération suivante.

Choisissons deux réels  $0 < r < r'$  de sorte que  $\overline{\mathbb{D}}_r$  et  $\overline{\mathbb{D}}_{r'}$  satisfassent l'énoncé du théorème II.3.2. On peut supposer de surcroît que  $\xi$  est non singulière sur  $\mathbb{D}_{r'} \setminus \mathbb{D}_r$  et qu'ainsi la distance  $d_\xi(\partial\mathbb{D}_r, \partial\mathbb{D}_{r'})$  est minorée par un réel positif  $\rho$ . Soit  $a$  un point du compact invariant  $K_r$  au voisinage duquel la métrique  $\xi$  est non singulière. Soit  $D_\xi(a, \rho')$  le disque centré en  $a$  de rayon  $\rho' < \rho$  (relativement à  $\xi$ ) et soit  $b \in D_\xi(a, \rho') \setminus K'_r$ . On sait qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $h^n(b) \notin \overline{\mathbb{D}}_{r'}$ . Par suite,  $d_\xi(h^n(b), h^n(a)) \geq \rho$ , mais par ailleurs  $d_\xi(h^n(b), h^n(a)) = d_\xi(a, b) < \rho$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

#### II.4. Formes résonnantes et feuilletages transversalement projectifs.

Rappelons de façon succincte et dans un cas particulier comment l'on décrit la classe analytique d'un difféomorphisme résonnant à partir de son espace d'orbites. La référence systématique est ici [MaRa2].

Tout germe de difféomorphisme holomorphe fixant l'origine et tangent à l'identité est formellement conjugué à une unique forme normale

$$h_f(z) = \exp\left(2i\pi \frac{z^{k+1}}{1 + \nu z^k} \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

où  $\nu$  est un nombre complexe et  $k$  un entier strictement positif. Dans la suite, nous ne traiterons en détail que le cas  $k = 1$  et  $\nu = 0$ . La forme normale associée admet alors pour fonction invariante

$$F_f(z) = e^{1/z}.$$

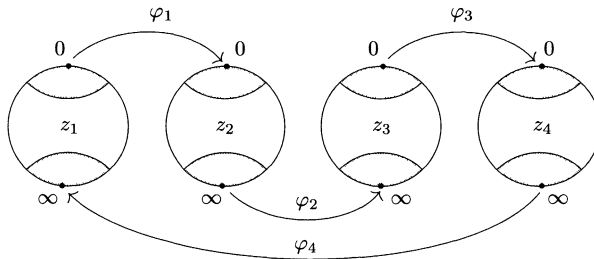
On pose  $\theta_j = -\frac{1}{2}\pi + j\pi$ ,  $j = 0, 1$  et  $V_j$  les secteurs définis par

$$V_j = \{|z| < \varepsilon, \theta_j - (\pi - \delta) < \text{Arg } z < \theta_j + (\pi - \delta)\}$$

où  $\delta$  est choisi de telle sorte que les  $V_j$  forment un bon recouvrement du disque  $\mathbb{D}_\varepsilon = \{|z| < \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon$  étant choisi assez petit.

On vérifie que  $F_f$  identifie chaque espace quotient  $V_j/h_f$  à une sphère de Riemann  $S^2_j$ ; l'espace quotient total est obtenu en recollant ces sphères par l'identité au voisinage de zéro et l'infini. On obtient alors l'espace des orbites de  $h$  en remplaçant dans la construction précédente l'identité par un couple de germes de difféomorphismes  $(\varphi_1, \varphi_2) \in \text{Diff}(S^2, 0, \infty)$ . Ce couple détermine complètement la classe analytique de  $h$ . Dans la situation générale, cet espace d'orbites s'obtient comme un chapelet de  $2k$  sphères recollées alternativement en 0 et  $\infty$  par des germes de difféomorphismes holomorphes. Comme l'atteste l'exemple qui suit, il existe des feuilletages résonnants transversalement projectifs en dehors de leurs séparatrices dont l'espace des feuilles admet des fonctions de recollement arbitrairement compliquées.

Il découle en effet de la classification de Martinet et Ramis [MaRa2] qu'il existe un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de  $\mathbb{C}^2$  donnée par une forme résonnante admettant comme modèle formel  $\omega_{2,0}$  et présentant la configuration suivante : son espace des feuilles est le même que celui des orbites du difféomorphisme d'holonomie attaché à l'une des deux séparatrices et admet la structure dessinée ci-dessous.



Il s'agit d'un chapelet de quatre sphères  $(S^2_i)$  de coordonnées respectives  $z_i$  reliées entre elles par les cocycles

$$\begin{aligned} z_2 &= \varphi_1(z_1) = e^{z_1} - 1, & z_3 &= z_2, \\ z_4 &= \varphi_3(z_3) = \varphi_1^{-1}(z_3), & z_1 &= z_4. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les fonctions  $f_i$  définies séparément sur chacune des sphères  $(S^2_i)$  par

$$f_1(z_1) = e^{z_1} - 1, \quad f_3(z_3) = z_3, \quad f_2(z_2) = z_2, \quad f_4(z_4) = e^{z_4} - 1$$

se recollent en une fonction  $f$  définie globalement sur l'espace des feuilles et de surcroît submersive en dehors des points 0 et  $\infty$ . Elle se remonte donc en une intégrale première submersive définie sur le complémentaire des séparatrices et induit donc sur ce domaine une structure projective

transverse (par ailleurs triviale!). Pour éviter ce type de pathologie due à des cocycles de nature transcendantes, nous poserons la définition suivante :

DÉFINITION II.4.1. — *Un germe de feuilletage holomorphe  $\mathcal{F}_\omega$  à l'origine de  $\mathbb{C}^2$  est dit transversalement projectif à croissance modérée s'il existe des germes de 1-formes méromorphes  $\eta$  et  $\Omega$  telles que*

$$d\omega = \eta \wedge \omega, \quad d\eta = \omega \wedge \Omega, \quad d\Omega = \Omega \wedge \eta.$$

Sous ces hypothèses, nous nous proposons de démontrer le théorème qui suit :

THÉORÈME II.4.2. — *Soit  $\mathcal{F}_\omega$  un feuilletage transversalement projectif à croissance modérée donné par une forme  $\omega$  résonnante ou de type noeud-selle. Alors  $\mathcal{F}_\omega$  est le pull-back méromorphe d'une équation de Riccati sur  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ .*

Rappelons (cf. [MaRa1], [MaRa2]) que  $\mathcal{F}_\omega$  admet au moins une séparatrice lisse (variété forte) dont l'holonomie caractérise complètement la classe analytique du feuilletage. Plaçons-nous à l'origine dans un système de coordonnées  $(z_1, z_2)$  de telle sorte que cette séparatrice admette pour équation  $(z_1 = 0)$ . On notera  $h$  son difféomorphisme d'holonomie évalué sur la transversale  $\{z_2 = 1\}$ . Pour des raisons de clarté, nous ne développerons cette preuve que dans le cas où  $h$  est du type décrit au début de cette section ( $\nu = 0, k = 1$ ). Par hypothèse, il existe trois formes méromorphes  $\omega_1 = \omega, \omega_2, \omega_3$  qui satisfont les équations

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_1, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \omega_3 \wedge \omega_2.$$

Si  $\omega_3 = 0$ , on a  $d\omega_2 = 0$  et cette situation est totalement décrite dans [BeTo]; plus précisément, il est montré que  $\mathcal{F}_\omega$  est obtenu comme pull-back rationnel d'une équation différentielle linéaire qui est un cas particulier d'une équation de Riccati. Nous supposons donc ici  $\omega_3$  non identiquement nulle. Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement par des ouverts simplement connexes de  $\mathbb{C}^2 \setminus S$  où  $S$  représente l'union des séparatrices de  $\mathcal{F}_\omega$  et des pôles des  $\omega_k$ . On a

$$\omega_1 = x_i dy_i - y_i dx_i, \quad \omega_2 = 2(v_i dx_i - u_i dy_i), \quad \omega_3 = 2(v_i du_i - u_i dv_i)$$

où les  $\begin{pmatrix} x_i & u_i \\ y_i & v_i \end{pmatrix}$  sont des applications holomorphes de  $U_i$  à valeurs dans

$SL(2, \mathbb{C})$  telles que sur  $U_i \cap U_j$ ,

$$\begin{pmatrix} x_j & u_j \\ y_j & v_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i & u_i \\ y_i & v_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

On peut choisir un tel recouvrement de sorte à en extraire deux ouverts  $U_1$  et  $U_2$  tels que  $\tilde{U}_1 = U_1 \cap \{z_2 = 1\}$  et  $\tilde{U}_2 = U_2 \cap \{z_2 = 1\}$  induisent un bon recouvrement (cf. II.4) du disque épointé  $\mathbb{D}^* = \{0 < |z_1| < 1\} \cap \{z_2 = 1\}$ . Les  $\omega_j$ , en restriction à  $\mathbb{D}$  s'écrivent sous la forme  $\psi_j(z_1) dz_1$ , les fonctions  $\psi_j$  étant par hypothèse holomorphes non identiquement nulles sur  $\mathbb{D}^*$  et à singularité polaire en 0. Plus précisément, on a sur chaque ouvert (dit distingué)  $\tilde{U}_i, i = 1, 2$  :

$$\begin{aligned} \psi_1(z_1) &= \tilde{x}_i \tilde{y}'_i - \tilde{y}_i \tilde{x}'_i, & \tilde{x}_i &= x_{i|\mathbb{D}}, & \tilde{y}_i &= y_{i|\mathbb{D}} \\ \psi_2(z_1) &= \tilde{v}_i \tilde{x}'_i - \tilde{u}_i \tilde{y}'_i, & \tilde{u}_i &= u_{i|\mathbb{D}}, & \tilde{v}_i &= v_{i|\mathbb{D}} \\ \psi_3(z_1) &= \tilde{v}_i \tilde{u}'_i - \tilde{u}_i \tilde{v}'_i. \end{aligned}$$

Ceci va nous permettre de décrire de façon précise la nature des cocycles de  $h$ . Cette partie va constituer les deux premières étapes de la démonstration.

*Première étape : les fonctions  $\tilde{x}_i$  et  $\tilde{y}_i$  sont solutions d'une équation différentielle du second ordre à coefficients méromorphes sur  $\mathbb{D}$ .*

En effet, les couples  $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$  forment un système localement constant de rang deux sur le disque épointé et satisfont donc l'équation différentielle

$$(E) \quad z''(z_1) - \alpha(z_1)z'(z_1) + \beta(z_1)z(z_1) = 0$$

où 
$$\alpha(z_1) = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{x}_i & \tilde{y}_i \\ \tilde{x}''_i & \tilde{y}''_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tilde{x}'_i & \tilde{y}'_i \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad \beta(z_1) = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{x}'_i & \tilde{y}'_i \\ \tilde{x}''_i & \tilde{y}''_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tilde{x}'_i & \tilde{y}'_i \end{vmatrix}}$$

sont *indépendants de  $i$*  et holomorphes sur  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ ; de plus  $\alpha = \psi'_1/\psi_1$  est méromorphe sur  $\mathbb{D}$  par holomorphie de  $\psi_1$ . Montrons que  $\beta$  est méromorphe sur  $\mathbb{D}$ . Puisque

$$\begin{pmatrix} x_i & u_i \\ y_i & v_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

est à valeurs dans  $SL(2, \mathbb{C})$ , on a

$$\tilde{x}'_i \tilde{y}''_i - \tilde{y}'_i \tilde{x}''_i = (\tilde{x}'_i \tilde{y}''_i - \tilde{y}'_i \tilde{x}''_i)(\tilde{x}_i \tilde{v}_i - \tilde{y}_i \tilde{u}_i).$$

En développant et réarrangeant le second membre, on a

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \tilde{x}'_i \tilde{y}''_i - \tilde{y}'_i \tilde{x}''_i &= (\tilde{u}_i \tilde{y}''_i - \tilde{v}_i \tilde{x}''_i)(\tilde{x}_i \tilde{y}'_i - \tilde{y}_i \tilde{x}'_i) \\
 &\quad + (\tilde{x}_i \tilde{y}''_i - \tilde{y}_i \tilde{x}''_i)(\tilde{v}_i \tilde{x}'_i - \tilde{u}_i \tilde{y}'_i) \\
 &= (\tilde{u}_i \tilde{y}''_i - \tilde{v}_i \tilde{x}''_i) \psi_1 + \psi'_1 \psi_2.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, un calcul analogue nous donne que

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \tilde{u}'_i \tilde{y}'_i - \tilde{v}'_i \tilde{x}'_i &= (\tilde{u}'_i \tilde{y}'_i - \tilde{v}'_i \tilde{x}'_i)(\tilde{x}_i \tilde{v}_i - \tilde{y}_i \tilde{u}_i) \\
 &= (\tilde{x}'_i \tilde{v}_i - \tilde{y}'_i \tilde{u}_i)(\tilde{u}'_i \tilde{y}_i - \tilde{v}'_i \tilde{x}_i) + (\tilde{y}'_i \tilde{x}_i - \tilde{x}'_i \tilde{y}_i)(\tilde{v}_i \tilde{u}'_i - \tilde{u}_i \tilde{v}'_i) \\
 &= \psi_2^2 + \psi_1 \psi_3.
 \end{aligned}$$

Finalement, sachant que

$$\tilde{u}_i \tilde{y}''_i - \tilde{v}_i \tilde{x}''_i = -\psi'_2 + (\tilde{x}'_i \tilde{v}'_i - \tilde{y}'_i \tilde{u}'_i),$$

on déduit des égalités (1) et (2) que

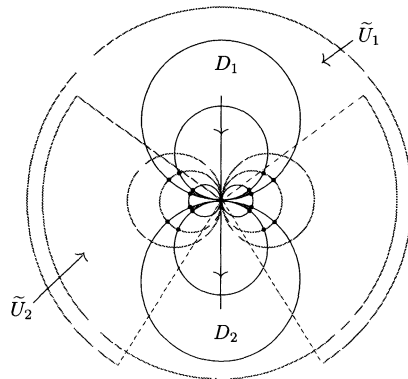
$$\beta = -\psi'_2 - \psi_2^2 - \psi_1 \psi_3 + \alpha \psi_2.$$

*Deuxième étape : écriture explicite des intégrales premières puis des cocycles sur l'espace des orbites du difféomorphisme d'holonomie  $h$ .*

Sur chaque ouvert distingué  $\tilde{U}_i$ , il existe un difféomorphisme  $f_i$  dont le développement asymptotique en 0 est donné par un difféomorphisme formel tangent à l'identité qui conjugue  $h$  à sa forme normale

$$h_N(z_1) = \exp\left(2i\pi z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1}\right) = \frac{z_1}{1 - 2i\pi z_1}$$

i.e.,  $f_i^{-1} \circ h \circ f_i = h_N$  sur chaque  $U_i$ . On rappelle que la dynamique de  $h$  a l'aspect dessiné ci-dessous.



$D_1$  et  $D_2$  sont les domaines fondamentaux de  $h$  dans  $\widetilde{U}_1$  et  $\widetilde{U}_2$ . Chaque domaine  $f_i^{-1}(D_i)$  correspond via le changement de coordonnées  $X = 1/z_1$  à une bande  $B_i$  de la forme  $\{X \in \mathbb{C}, k_i \leq \text{Im } X \leq k_i + 2i\pi\}$   $k_1 > 0, k_2 < 0$ , suffisamment grands en valeur absolue. Après recollement par la translation  $X \mapsto X + 2i\pi$ , c'est-à-dire par  $h_N$  dans la coordonnée  $X$ , chaque  $B_i$  devient un cylindre bi-infini s'identifiant à une sphère du chapelet d'orbites de  $h$  épointée en 0 et  $\infty$ . Dans les coordonnées respectives  $X_i = X \circ f_i^{-1}$ , l'équation différentielle (E) s'écrit

$$(E') \quad \frac{d^2 Z}{dX_i^2} + a_i \frac{dZ}{dX_i} + b_i Z = 0$$

où

$$a_i = -\left(\frac{d^2 z_1/dX_i^2}{dz_1/dX_i} + \alpha \frac{dz_1}{dX_i}\right), \quad b_i = \beta \left(\frac{dz_1}{dX_i}\right)^2.$$

Plaçons-nous sur le domaine  $B_i$  et posons  $u_i(X_i) = \tilde{y}_i/\tilde{x}_i(z_1(X_i))$ ; puisque  $u_i(X_i + 2i\pi) = \varphi_i(u_i)$  où  $\varphi_i \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ , on a

$$S_{u_i}(X_i) = S_{u_i}(X_i + 2i\pi)$$

où  $S_{u_i}$  désigne la dérivée schwartzienne évaluée sur  $u_i$  (cf. annexe A1). En outre (cf. A1),

$$S_{u_i}(X_i) = 2b_i - \frac{1}{2}a_i^2 - a_i.$$

Par suite,  $S_{u_i}$  se redescend sur  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$  en une fraction rationnelle sans pôles et sans zéros admettant même limite en zéro et à l'infini; ceci entraîne manifestement que  $S_{u_i}$  est constante. Il s'ensuit que  $u_i = v_i/w_i$  où  $v_i$  et  $w_i$  sont solutions d'une équation différentielle de la forme

$$Y'' + c_i Y = 0$$

où  $c_i$  est une constante. On en déduit que

$$u_i(X_i) = \varphi_i(X_i) \text{ ou } \varphi_i(e^{\mu X_i}), \quad \mu \in \mathbb{C}, \varphi_i \in \text{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

La fonction  $u_i$  se redescend donc sur  $\mathbb{C}^*$ , modulo l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ , en la fonction  $\log z$  ou  $z^\mu$ . Compte tenu des conditions de recollement, les cocycles ne sont non triviaux que lorsque les fonctions induites par les  $u_i$  sont de la forme  $z^{n_i}$ ,  $n_i = n_j = n$ . On en tire la

PROPOSITION II.4.3. — Soit  $\mathcal{F}_\omega$  satisfaisant les hypothèses du théorème II.4.2. Alors, les cocycles associés à l'holonomie de la variété forte sont des ramifications d'homographies à un ordre  $n$  fixé (i.e.,  $\varphi_i(z) = a_i z (c_i z^n + 1)^{-1/n}$ ).

*Troisième étape : réalisation effective des cocycles et fin de la preuve du théorème II.4.2*

Soit  $\mathcal{F}_\omega$  un germe de feuilletage réduit défini par une forme  $\omega$  résonnante ou de type *nœud-selle*. Dans un bon système de coordonnées analytiques,  $\mathcal{F}_\omega$  est conjugué à sa forme normale par un difféomorphisme formel préservant les fibres de  $\pi(x, y) = x$  (cas nœud-selle) ou  $\pi(x, y) = x^p y^q$  (cas résonnant) (cf. [MaRa1] et [MaRa2]). Rappelons que la classe analytique de l'équation  $\omega = 0$  est complètement déterminée par celle du difféomorphisme d'holonomie  $h$  de la séparatrice ( $x = 0$ ). Nous supposons que l'espace des orbites de ce dernier admet les cocycles décrits dans l'énoncé de la proposition II.4.3 et nous noterons  $n$  leur ordre de ramification.

Si  $n > 1$  et si  $\omega$  est de type *nœud-selle*, il ressort de la classification de Martinet et Ramis que les cocycles définis au voisinage de l'infini sont triviaux et cette situation est totalement analysée dans [BeTo]; il s'agit en particulier d'équations admettant un facteur intégrant généralisé, i.e., une 1-forme fermée  $\omega_1$  vérifiant la relation  $\omega_1 \wedge \omega = d\omega$ . Si  $n = 1$ , la même classification implique que  $\omega = 0$  est une équation de Riccati. Dans ce paragraphe, nous nous contenterons donc de traiter le cas résonnant, situation dans laquelle l'espace des feuilles est le même que celui des orbites de  $h$  (cf. [MaRa2]).

- *Premier cas* :  $\omega$  est une forme résonnante admettant pour modèle formel  $\omega_{1,0}$  (cf. II.2) et dont les cocycles sont des homographies.

Notons  $\pi$  l'application

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \longmapsto \pi(x, y) = xy.$$

On notera  $\tilde{V}_i$  les ouverts  $\pi^{-1}(\tilde{U}_i)$ ,  $i = 1, 2$  où les  $\tilde{U}_i$  sont les ouverts distingués de  $\mathbb{C}$  définis en II.4. On se placera dans ce qui suit sur un voisinage de  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Rappelons (cf. [MaRa2]) que les feuilletages  $\mathcal{F}_\omega$  et  $\mathcal{F}_{\omega_{1,0}}$  induits par  $\omega$  et  $\omega_{1,0}$  sont conjugués sur chaque ouvert  $\tilde{V}_i$  par des difféomorphismes holomorphes  $\psi_i$  tangents à l'identité; plus précisément  $\psi_i^* \mathcal{F}_{\omega_{1,0}} = \mathcal{F}_\omega|_{\tilde{V}_i}$  où  $\psi_i = (x e^{f_i}, y e^{-f_i})$ , chaque  $f_i$  étant holomorphe sur  $\tilde{V}_i$ ,  $\mathcal{C}^\infty$  au sens de Whitney sur  $\tilde{V}_i$  et admettant à l'origine un développement asymptotique

de la forme  $f_i = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{i,n}(x, y)\pi(x, y)^n$  où les  $f_{i,n}$  sont holomorphes sur un polydisque centré à l'origine de rayon positif indépendant de  $n$  et tels que  $f_{i,0} = 0$ . Les  $\psi_i$  sont en particulier des transformations sectorielles préservant la fibration  $\pi$ . On notera  $\tilde{V}_{12}$  (resp.  $\tilde{V}_{21}$ ) l'image réciproque par  $\pi$  de la composante connexe de  $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$  contenant  $i\mathbb{R}^+$  (resp.  $i\mathbb{R}^-$ ). Rappelons aussi que  $\omega_{1,0}$  admet comme intégrale première basique  $F(x, y) = x e^{\frac{1}{xy}}$ , ce qui, compte tenu des hypothèses faites sur la nature des cocycles de  $\omega$ , entraîne que

$$(1) \quad F \circ \psi_i = \varphi_{ij} \circ F \circ \psi_j$$

sur  $U_{i,j}$  où  $\varphi_{ij} \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Sans perdre de généralités, on peut supposer que les objets introduits précédemment sont définis sur le polydisque  $B = (|x| < 1) \cap (|y| < 1)$ . Pour  $\varepsilon \neq 0$ , notons  $F_\varepsilon$  la fibre  $\pi = \varepsilon$  que nous munirons à l'avenir de la coordonnée holomorphe induite par  $x$ ; les  $\psi_i$  (s'ils sont définis) induisent donc dans cette coordonnée une transformation locale de  $F_\varepsilon$  que nous appellerons  $\Phi_{i,\varepsilon}$ .

LEMME II.4.4. — *Quitte à se placer dans un système de coordonnées analytiques de la forme  $(X = x e^f, Y = y e^{-f})$ , où  $f$  est holomorphe au voisinage de l'origine de  $\mathbb{C}^2$  et  $f(0) = 0$ , on peut supposer que  $\Phi_{i,\varepsilon}$ ,  $i = 1, 2$ , est une homographie.*

Preuve. — Considérons les complexes  $p_1 = \frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2}j$ ,  $p_3 = \frac{1}{2}j^2$  ( $j = e^{\frac{2}{3}i\pi}$ ) et notons  $H_{i,\varepsilon}$  l'unique homographie  $H_{i,\varepsilon}(p_k) = \Phi_{i,\varepsilon}(p_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$  telle que, sur chaque fibre  $F_\varepsilon \in \tilde{V}_i$  (par abus de langage,  $p_k$  désigne ici  $\{x = p_k\} \cap F_\varepsilon$ ). La collection des  $H_{i,\varepsilon}$  définit sur chaque  $\tilde{V}_i$  une application  $H_i$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ,  $H_i$  étant holomorphe par transversalité des fibrations  $x = \mathbb{C}^{\text{te}}$  et  $xy = \mathbb{C}^{\text{te}}$ .

Dans chaque ouvert  $\tilde{V}_i$ ,  $H_i$  s'écrit dans la fibre  $F_\varepsilon$  sous la forme

$$\frac{a_i(xy)x + b_i(xy)}{c_i(xy)x + d_i(xy)}, \quad a_i c_i - b_i d_i = 1,$$

avec  $a_i, b_i, c_i, d_i$  holomorphes sur  $U_i$ . Considérons l'application

$$\zeta : \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad \varphi \longmapsto \left( \frac{\varphi(p_1)}{p_1}, \frac{\varphi(p_2)}{p_2}, \frac{\varphi(p_3)}{p_3} \right).$$

Compte tenu du fait que  $x \circ \psi_i = x e^{f_i}$ , on remarque que sur la fibre  $F_\varepsilon$ , il existe un entier  $k$  tel que pour tout  $\varepsilon$  non nul,



$d((\Phi_{i,\varepsilon}(p_1), \Phi_{i,\varepsilon}(p_2), \Phi_{i,\varepsilon}(p_3)), (p_1, p_2, p_3)) < k|\varepsilon|$  ( $d$  désigne ici la distance hermitienne standard sur  $\mathbb{C}^3$ ). Puisque  $\zeta$  est visiblement un difféomorphisme au voisinage de l'identité, il existe un réel positif  $k'$  tel que, sur chaque fibre  $F_\varepsilon$ , on ait

$$(2) \quad \begin{cases} |a_i - 1| < k'|\varepsilon|, & |d_i - 1| < k'|\varepsilon|, \\ |c_i| < k'|\varepsilon|, & |b_i| < k'|\varepsilon|. \end{cases}$$

Ces estimations permettent d'expliciter  $H_i$  (en restriction au polydisque  $B$ ) sous la forme

$$H_i(x, y) = (x e^{g_i}, y e^{-g_i})$$

où  $g_i$  est holomorphe et bornée sur  $\tilde{V}_i \cap B$  et  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \tilde{V}_i \cap B}} g_i(x, y) = 0$ .

Compte tenu de la formule (1) et des propriétés de croissance mentionnées ci-dessus, les  $\psi_i^{-1} \circ H_i$  se recollent en une fonction holomorphe  $\psi(x, y) = (x e^f, y e^{-f})$  définie sur un voisinage de  $0 \in \mathbb{C}^2$  privé des axes de coordonnées,  $f$  étant holomorphe et bornée. Par suite,  $f$  s'étend par le théorème d'Hartogs en une fonction holomorphe sur  $(\mathbb{C}^2, 0)$  qui est par construction nulle à l'origine;  $\psi$  définit donc un germe de difféomorphisme de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  tangent à l'identité et préservant la fibration  $xy = \mathbb{C}^{\text{te}}$ . On a ainsi établi le lemme en substituant  $\psi_i \circ \psi$  à  $\psi_i$ .  $\square$

Sur chaque domaine  $\tilde{V}_i$ , le feuilletage  $\mathcal{F}_\omega$  admet l'intégrale première

$$F \circ \psi_i(x, y) = e^{\frac{1}{xy}} \cdot \frac{a_i(xy)x + b_i(xy)}{c_i(xy)x + d_i(xy)}.$$

On a  $F \circ \psi_i = X_i/Y_i$  où

$$X_i = a_i F + b_i e^{\frac{1}{xy}}, \quad Y_i = c_i e^{-\frac{1}{xy}} F + d_i.$$

Il résulte de la relation (1) que

$$\begin{pmatrix} X_i & U_i \\ Y_i & V_i \end{pmatrix} = M_{ij} \begin{pmatrix} X_j & U_j \\ Y_j & V_j \end{pmatrix}$$

avec  $U_i = -a_i$ ,  $V_i = -c_i e^{-\frac{1}{xy}}$  et où  $M_{ij}$  désigne une matrice de  $SL(2, \mathbb{C})$  à coefficients constants. On constate ainsi qu'il existe trois germes de formes méromorphes  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  avec  $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}_{\omega_1}$  satisfaisant les équations de structure données en I.1.

En effet, il suffit de poser

$$\omega_1 = e^{-\frac{1}{xy}}(X_i dY_i - Y_i dX_i), \quad \omega_2 = 2(V_i dX_i - U_i dY_i) + \frac{d(e^{-\frac{1}{xy}})}{e^{-\frac{1}{xy}}},$$

$$\omega_3 = e^{\frac{1}{xy}}(V_i dU_i - U_i dV_i).$$

Ces expressions sont bien indépendantes du choix de l'indice  $i$  et la méromorphie est une conséquence triviale des estimations (2) précédentes. Enfin, puisque  $\omega_3$  est colinéaire à la différentielle de  $xy$ , on en déduit, suivant [Sca], que le feuilletage  $\mathcal{F}_\omega$  est défini par la forme méromorphe donnée dans l'exemple I.5, ce qui achève la preuve du théorème II.4.2.

• *Deuxième cas* :  $\omega$  est une forme résonnante admettant pour modèle formel  $\omega_{1,0}$  et dont les cocycles sont des homographies ramifiées à l'ordre  $n$ .

Dans cette situation, les conjugaisons sectorielles  $\psi_i$  conservent une forme identique et l'égalité (1) reste valable en substituant  $F^n$  à  $F$ . Les modifications à apporter sont par la suite mineures. On construit de façon similaire sur chaque ouvert  $\tilde{V}_i$  une application  $H_i$  qui induit dans chaque fibre  $F_\varepsilon$  l'application

$$H_{i,\varepsilon} = \frac{a_i(xy)x^n + b_i(xy)}{c_i(xy)x^n + d_i(xy)}$$

vérifiant  $H_{i,\varepsilon}(p_j^{1/n}) = \Phi_{i,\varepsilon}(p_j)$ . On conserve en outre les estimations (2). Soit  $H_{i,n}$  la racine  $n$ -ième de  $H_i$  proche de l'identité. On vérifie alors que les  $\psi_i^{-1} \circ H_{i,n}$  se recollent en un germe de difféomorphisme  $\psi$  de  $\mathbb{C}^2$  préservant la fibration  $xy = C^{te}$  similaire au précédent. On peut donc encore supposer que  $\psi_i = H_{i,n}$ . On a alors

$$F^n \circ \psi_i(x, y) = e^{\frac{1}{nxy}} \cdot \frac{a_i(xy)x^n + b_i(xy)}{c_i(xy)x^n + d_i(xy)}$$

et on récupère encore trois formes méromorphes de structure définissant le feuilletage

$$\omega_1 = e^{-\frac{1}{nxy}}(X_i dY_i - Y_i dX_i), \quad \omega_2 = 2(V_i dX_i - U_i dY_i) + \frac{d(e^{-\frac{1}{nxy}})}{e^{-\frac{1}{nxy}}},$$

$$\omega_3 = e^{\frac{1}{nxy}}(V_i dU_i - U_i dV_i)$$

avec  $X_i = a_i F^n + b_i e^{\frac{1}{nxy}}$ ,  $Y_i = c_i e^{-\frac{1}{nxy}} F^n + d_i$ ,  $U_i = -a_i$ ,  $V_i = -c_i e^{-\frac{1}{nxy}}$  et on conclut comme précédemment.

• *Cas général* : quand  $\omega$  est une forme résonnante admettant pour modèle formel  $\omega_{k,\nu}$ , le traitement du problème reste identique en considérant  $2k$  secteurs au lieu de 2 et quand  $\omega$  est une forme résonnante à valeur propre rationnelle, on se ramène au cas précédent par éclatements successifs (cette dernière procédure est décrite de façon précise dans [BeTo]). □

### III. Un exemple sur une surface rationnelle non transverse à une fibration.

#### III.1. Rappels sur les surfaces modulaires de Hilbert.

On pourra se reporter à [Sa] ou [Hir] pour plus de détails.

Considérons le corps quadratique  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$  où  $p$  est un entier supérieur à 5 congru à 1 (mod 4). On munit  $K$  de l'involution

$$\sigma(u + v\sqrt{p}) = u - v\sqrt{p}.$$

L'anneau  $O$  des entiers algébriques de  $K$  est l'ensemble des  $\frac{1}{2}(u + v\sqrt{p})$  où  $u$  et  $v$  sont de même parité et le groupe  $U^+$  des unités de  $O$  est cyclique infini.

On considère le groupe modulaire de Hilbert

$$G = \mathrm{SL}_2(O)/\pm \mathrm{Id}.$$

Le groupe  $G$  agit de façon proprement discontinue sur le produit  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  du demi-plan de Poincaré par lui-même :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z_1, z_2) = \left( \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \frac{\sigma(a)z_2 + \sigma(b)}{\sigma(c)z_2 + \sigma(d)} \right).$$

L'espace quotient  $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/G$  est une variété analytique non compacte avec un nombre fini de singularités que l'on compactifie par un nombre fini de points (cusps). On hérite ainsi d'une variété analytique compacte ayant un nombre fini de singularités normales. Après avoir éclaté suffisamment ces points singuliers, on obtient la surface de Hilbert  $Y(p)$ . Par la théorie classique des fonctions automorphes, on constate que  $Y(p)$  est algébrique. Plus spécifiquement, Hirzebruch a établi que  $Y(p)$  est rationnelle si et seulement si  $p = 5, 13$  ou  $17$ .

Dans la suite, nous nous limiterons à l'étude du cas  $Y = Y(13)$ .

#### III.2. Un exemple de feuilletage transversalement projectif sur $Y$ .

C'est le feuilletage  $\mathcal{H}$  induit par le feuilletage horizontal  $z_1 = \mathbb{C}^{\mathrm{te}}$  sur  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ . Il est par construction transversalement projectif sur le complémentaire d'un nombre fini de singularités normales dans  $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/G$  et ses feuilles sont denses en vertu du

LEMME III.2.1. — *Le groupe  $\mathrm{SL}_2(O)$  est dense dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ .*

*Preuve.* — Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \left( \text{resp. } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \right)$$

un élément du groupe triangulaire supérieur  $T_+$  (resp. inférieur  $T_-$ ) de  $SL_2(\mathbb{R})$ . Soit  $(u_n)$  une suite dans  $T_+$  convergeant vers 0. Par densité de  $O$  dans  $\mathbb{R}$ , on peut extraire deux suites  $(a_n), (c_n)$  d'éléments de  $O$  convergeant respectivement vers  $a$  et  $c$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n c_n - 1}{u_n} = b.$$

Le lemme résulte alors du fait que  $T_+$  et  $T_-$  engendrent  $SL_2(\mathbb{R})$ . □

LEMME III.2.2. — *Le feuilletage  $\mathcal{H}$  s'étend sur  $Y$  en un feuilletage holomorphe (noté encore  $\mathcal{H}$ ) défini par une forme méromorphe  $\omega$  sur  $Y$ . De plus, il existe deux formes méromorphes  $\eta$  et  $\xi$  sur  $Y$  telles qu'on ait les équations de structure*

$$\omega \wedge \eta = d\omega, \quad \omega \wedge \xi = d\eta, \quad \xi \wedge \eta = d\xi.$$

*Preuve.* — Le feuilletage  $\mathcal{H}$  s'étend sur  $Y$  par normalité des singularités quotients et des cusps. L'existence de  $\omega$  est une simple conséquence du caractère algébrique de la surface  $Y$ . Pour les mêmes raisons (cf. [Sca]), il existe une forme méromorphe  $\eta$  sur  $Y$  satisfaisant la relation

$$\omega \wedge \eta = d\omega.$$

Sur  $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/G$  privé des singularités quotients, la structure projective transverse de  $\mathcal{H}$  est définie par les intégrales premières locales  $f_i = z_1 \circ \pi_{|U_i}^{-1}$ , où

$$\pi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow (\mathbb{H} \times \mathbb{H})/G$$

est la projection canonique et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de la base privée des singularités quotients choisi de telle sorte que  $\pi^{-1}$  soit un biholomorphisme en restriction à  $U_i$ . Dans chaque  $U_i$ , on a donc

$$\begin{aligned} \omega &= -g_i df_i, & \text{avec } g_i \text{ méromorphe sur } U_i, \\ \eta &= \frac{dg_i}{g_i} - h_i \omega, & \text{avec } h_i \text{ méromorphe sur } U_i. \end{aligned}$$

Posons  $y_i^2 = g_i$ ,  $x_i/y_i = f_i$ ,  $h_i = 2v_i/y_i$  avec la condition  $x_i v_i - y_i u_i = 1$ . On vérifie alors (cf. [Sca]) que les

$$\xi_i = 2(v_i du_i - u_i dv_i)$$

se recollent en une forme méromorphe, laquelle s'étend sur  $Y$ , par le théorème de Lévi, en une forme  $\xi$  satisfaisant l'énoncé du théorème.  $\square$

*Remarque III.2.3.* — Notons que  $\mathcal{H}$  ne peut être le pull-back rationnel d'un feuilletage admettant une fibration transverse en courbes de genre supérieur ou égal à deux puisque ses feuilles génériques sont denses. Il n'y a pas non plus de fibration elliptique transverse puisque ceci produirait par pull-back une 1-forme, ou à défaut une puissance tensorielle de cette 1-forme, holomorphe sur  $Y$  (en dehors éventuellement d'un ensemble analytique propre) et invariante par le feuilletage  $\mathcal{F}$ , ce qui est impossible vu que l'adhérence de la monodromie de  $\mathcal{H}$  est de dimension 3 réelle.

Soit  $X$  un sous-ensemble analytique propre de  $Y$  contenant les cusps et les diviseurs exceptionnels issus de l'éclatement du lieu singulier de la surface d'origine  $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/G$ . On a le

**THÉORÈME III.2.4.** — *Le feuilletage  $\mathcal{H}$  n'admet qu'une seule structure projective transverse sur  $Y \setminus X$ .*

*Preuve.* — Soient  $(U_i, f_i)$  une structure projective transverse associée à un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $Y \setminus X$ . Par relèvement des  $f_i$ , on hérite sur  $\mathbb{H}$  d'une fonction  $F$  dont la dérivée schwartzienne est holomorphe en dehors d'un ensemble isolé de points. Supposons cette structure différente de la précédente (définition I.2), ce qui revient à dire que la dérivée schwartzienne  $S_F$  (cf. annexe A1) est non identiquement nulle.

Par hypothèse, et compte tenu des propriétés bien connues de la dérivée schwartzienne (cf. annexe), la différentielle quadratique

$$\omega = S_F(z) dz_1 \otimes dz_1$$

est invariante sous l'action de  $\overline{\mathrm{SL}(2, \mathbb{O})} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ , ce qui est manifestement impossible.  $\square$

Supposons que  $\mathcal{H}$  soit birationnellement équivalent à un feuilletage de Riccati  $\mathcal{G}$  sur une surface compacte  $S$ . Notons  $\alpha$  la transformation birationnelle entre  $Y$  et  $S$ . Cette transformation induit un biholomorphisme

$$Y \setminus X \longrightarrow S \setminus X'$$

où  $X$  et  $X'$  sont deux sous-ensembles analytiques propres respectifs de  $Y$  et  $S$ . Qui plus est, on peut choisir  $X$  de telle sorte à satisfaire l'énoncé du théorème III.2.4. Choisissons sur  $S$  une fibre  $F \simeq \mathbb{CP}(1)$ , qu'on peut supposer rationnelle (remarque III.2.3) et transverse à  $\mathcal{G}$  et non contenue dans  $X'$ . L'intersection  $F \cap X'$  est donc réduite à un nombre fini de points  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ . On notera  $P'$  le plus grand sous-ensemble de  $P$  stabilisé par l'holonomie du feuilletage. Puisque  $\mathcal{H}$  est transversalement hyperbolique en dehors de  $X$ , on hérite d'une métrique hermitienne sur  $F \setminus P$  de courbure  $-1$  et qui s'étend, par transport holonome, en une métrique hermitienne sur  $F \setminus P'$  invariante sous l'action du groupe d'holonomie  $H$  de  $\mathcal{G}$ .

Examinons plusieurs situations :

i)  $P'$  est vide. C'est impossible puisque  $F$  ne peut admettre de métrique de courbure négative.

ii)  $P'$  a au moins trois éléments. Dans ce cas,  $H \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  est fini et ceci contredit l'existence de feuilles génériques denses.

iii)  $P'$  est réduit à un élément. Le groupe  $H$  est donc, à conjugaison près, un sous-groupe du groupe affine et ceci est impossible puisque par ailleurs,  $H$  est isomorphe à  $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ .

iv)  $P'$  a exactement deux éléments. Le lecteur vérifiera facilement que  $H$  est conjugué à un sous-groupe de  $\langle z \mapsto az, z \mapsto z^{-1} \rangle$ , ce qui est impossible pour les mêmes raisons que celles invoquées en (iii).

Ces observations nous conduisent au

**THÉORÈME III.2.5.** — *Le feuilletage  $\mathcal{H}$  n'est pas birationnellement équivalent à un feuilletage de Riccati.*

Plus généralement, on peut établir le

**THÉORÈME III.2.6.** — *Le feuilletage  $\mathcal{H}$  ne peut être obtenu comme pull-back rationnel d'un feuilletage de Riccati sur une surface algébrique.*

*Preuve.* — Supposons par l'absurde qu'il existe une telle surface  $S$ . Pour les mêmes raisons que précédemment, on peut supposer la fibre générique transverse rationnelle. L'application rationnelle  $\alpha$  entre  $Y$  et  $S$  induit un revêtement fini entre deux ouverts Zariski denses de  $Y$  et  $S$ , respectivement  $U_Y$  et  $U_S$ . On remarque donc que  $G$  apparaît comme un sous-groupe  $H$  d'holonomie du feuilletage de Riccati. Si  $H$  stabilise un

nombre fini de points, on conclut comme en ii), iii), ou iv) ; sinon, il reste à envisager les configurations suivantes :

a)  $H$  admet un élément hyperbolique  $h$  de point fixe  $M_h$  qu'on peut supposer être dans  $U_S$ . De plus, quitte à prendre une puissance, on peut supposer que  $h$  est un élément de  $G$ , ce qui contredit manifestement que  $h$  préserve une métrique transverse à  $\mathcal{F}$ .

b)  $H$  n'admet pas d'élément hyperbolique ; on vérifie alors que  $H$  est un groupe ne comportant que des éléments elliptiques et dans ce cas, un résultat bien connu (cf. [Be]) affirme que  $H$  est conjugué dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  à un sous-groupe du groupe orthogonal  $O(3)$  et préserve par conséquent une métrique hermitienne de courbure 1 transverse au feuilletage de Riccati. Par image inverse, on récupère une métrique transverse à  $\mathcal{H}$  de courbure 1 et invariante par  $G$ , ce qui visiblement contredit le lemme III.2.1.  $\square$

*Remarques.* — Pour des raisons similaires, on peut montrer que le feuilletage  $\mathcal{H}$  n'est pas dominé par un feuilletage de Riccati.

Nous avons tenu à donner une démonstration «élémentaire» du théorème III.2.6, mais on peut arriver «brutalement» aux mêmes conclusions en utilisant la notion de *dimension de Kodaira d'un feuilletage* introduite par L.G. Mendes (cf. [Br], [Me]). Nous souhaiterions terminer cette section en explicitant cette autre démonstration. Le lecteur désireux de détailler les définitions et propriétés qui suivent pourra se référer à la monographie de M. Brunella [Br].

RAPPELS III.2.7. — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe à singularités isolées sur une surface complexe. Il existe alors un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $S$  tel que sur chaque  $U_i$ ,  $\mathcal{F}$  soit défini par un champ holomorphe  $v_i$  ou de façon duale par des 1-formes holomorphes  $\omega_i$  vérifiant

$$v_j = f_{ij}v_i, \quad \omega_j = g_{ij}\omega_i, \quad f_{ij}, g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j).$$

Les collections des  $(f_{ij})$  et  $(g_{ij})$  définissent respectivement deux fibrés en droites notés  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}^*$  (fibré cotangent de  $\mathcal{F}$ ) et  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$  (fibré normal de  $\mathcal{F}$ ). Par accouplement, on a de plus que

$$K_S = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{N}_{\mathcal{F}}^*$$

où  $K_S$  désigne le fibré canonique de  $S$ . La *dimension de Kodaira* du feuilletage  $\mathcal{F}$ , notée  $\mathrm{Kod}(\mathcal{F})$  sera alors par définition la dimension de Kodaira du fibré  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}^*$ . Cette dimension est en fait un invariant de la

géométrie birationnelle des feuilletages. Plus exactement, L.G. Mendes a établi que deux feuilletages à singularités *réduites* biméromorphiquement équivalents ont même dimension de Kodaira. Ce résultat repose sur les observations simples mais fondamentales suivantes :

i) Les singularités de feuilletage obtenues après éclatement d'une singularité réduite restent réduites.

ii) Soit  $\omega$  une 1-forme holomorphe à l'origine de  $\mathbb{C}^2$  à singularité réduite et soit

$$\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2, 0} \longrightarrow \mathbb{C}^2, 0$$

l'application d'éclatement. Alors, au voisinage de chaque point  $p$  du diviseur exceptionnel  $\pi^{-1}(0)$ ,  $\pi^*\omega = f_p\omega_p$  où  $f_p = 0$  est une équation locale *réduite* de  $\pi^{-1}(0)$  et  $\omega_p$  est au plus à singularités isolées.

Toujours dans le cadre à singularités réduites, Mendes et Mac Quillan ont établi que les feuilletages de Riccati (à l'exception notable des fibrations rationnelles) ont pour dimension de Kodaira 0 ou 1. Par ailleurs, la dimension de Kodaira du feuilletage  $\mathcal{H}$  est négative après réduction des singularités. Vu ces considérations, le théorème III.2.6 est une conséquence du lemme basique qui suit :

LEMME III.2.8. — Soient  $\mathcal{F}$ ,  $\widetilde{\mathcal{F}}$  deux feuilletages holomorphes à singularités réduites sur deux surfaces complexes compactes  $X$  et  $\widetilde{X}$ . On suppose qu'il existe une application méromorphe  $r$  de  $\widetilde{X}$  sur  $X$  telle que  $\widetilde{\mathcal{F}} = r^*\mathcal{F}$ . Alors,  $\text{Kod}(\widetilde{\mathcal{F}}) \geq \text{Kod}(\mathcal{F})$ .

*Preuve.* — On peut supposer, par invariance birationnelle de la dimension de Kodaira et la propriété ii), que  $r$  est partout définie. Soit  $\tilde{p} \in \widetilde{X}$  et  $p = r(\tilde{p})$ . Choisissons au voisinage de  $\tilde{p}$  et  $p$  deux systèmes de coordonnées  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  et  $(x, y)$  dans lesquels l'application  $r$  a pour expression  $x = r_1(\tilde{x}, \tilde{y})$ ,  $y = r_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}$  est défini au voisinage de  $p$  par un germe de 1-forme holomorphe  $\omega_p = a dx + b dy$  telle que  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . Il existe deux fonctions holomorphes  $f, g$  telles qu'au voisinage de  $\tilde{p}$ ,

$$r^*\omega_p = f\omega_{\tilde{p}}, \quad r^*(dx \wedge dy) = g d\tilde{x} \wedge d\tilde{y}$$

où  $\omega_{\tilde{p}}$  est au plus à singularité isolée. On peut alors envisager trois situations :

a)  $\mathcal{F}$  est régulier en  $p$ . Dans ce cas, on peut supposer que  $\mathcal{F}$  est défini par  $\{dx = 0\}$ . On a alors  $r^*(dx) = dr_1$  et  $r^*(dx \wedge dy) = dr_1 \wedge dr_2$  et ceci établit que  $f$  divise  $g$ .



b)  $\mathcal{F}$  est singulier en  $p$  et  $r$  ne contracte pas de courbes passant par  $\tilde{p}$ . Au voisinage de  $\tilde{p}$ , on a  $r^*\omega_p \wedge dr_1 = -b(r_1, r_2) dr_1 \wedge dr_2$  et  $r^*\omega_p \wedge dr_2 = a(r_1, r_2) dr_1 \wedge dr_2$ , mais puisque  $\text{pgcd}(a(r_1, r_2), b(r_1, r_2)) = 1$  par hypothèse, on a encore que  $f$  divise  $g$ .

c)  $\mathcal{F}$  est singulier en  $p$  et  $r^{-1}(p)$  contient une courbe irréductible  $\mathcal{C}$ . Dans cette dernière situation, on peut choisir  $\tilde{p} \in \mathcal{C}$  et le système de coordonnées  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  tel que  $\tilde{x} = 0$  est une équation locale de  $\mathcal{C}$  et

$$r_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}^{m_1}, \quad r_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}^{m_2} u(\tilde{x}, \tilde{y})$$

où  $m_1$  et  $m_2$  sont des entiers positifs et  $u$  est une unité qui n'est pas réduite à une fonction de la seule variable  $\tilde{x}$ .

Si  $E_1$  désigne l'éclatement de centre  $p$ , on constate que  $E_1^{-1} \circ r$  est régulière au voisinage de  $\tilde{p}$ . Plus généralement on peut construire par induction une succession d'éclatements  $E_1, \dots, E_n$  de centres respectifs  $p_1 = p, p_2 \in E_1^{-1}(p_1), \dots, p_n \in E_{n-1}^{-1}(p_{n-1})$  tels que pour tout  $i \leq n$  :

- $(E_i \circ \dots \circ E_1)^{-1} \circ r$  est régulière au voisinage de  $\tilde{p}$  et envoie  $\tilde{p}$  sur  $p_i$ ,
- $(E_n \circ \dots \circ E_1)^{-1} \circ r$  ne contracte pas la courbe  $\mathcal{C}$ .

On note par  $\pi_i$  l'application  $E_i \circ \dots \circ E_1$ . Par la construction précédente, on peut rechoisir  $\tilde{p}$  de telle sorte que  $p_{n+1} := \pi_n^{-1} \circ r(\tilde{p})$  soit un point régulier du feuilletage  $\pi_n^* \mathcal{F}$ . Soit

$$m = \text{Min}\{2 \leq i \leq n + 1 \mid p_i \text{ soit un point régulier de } \pi_i^* \mathcal{F}\}.$$

Il existe donc en  $p_m$  des coordonnées  $(u, v)$  telles que  $\pi_{m-1}^* \omega_p = h(u, v) du$  et  $\pi_{m-1}^*(dx \wedge dy) = i(u, v) du \wedge dv$ . Par les remarques i) et ii), on observe que  $i/h$  est une unité. Par construction, on a au voisinage de  $\tilde{p}$  les identités

$$(\pi_{m-1}^{-1} \circ r)^*(h du) = f \omega_{\tilde{p}}, \quad (\pi_{m-1}^{-1} \circ r)^* i du \wedge dv = g d\tilde{x} \wedge d\tilde{y}.$$

Par un argument analogue au a), on peut encore conclure que  $f$  divise  $g$ .

En définitive, on vient de montrer que

$$\mathcal{N}_{\tilde{F}}^* = r^*(\mathcal{N}_F^*) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D) \quad \text{et} \quad K_{\tilde{X}} = r^*(K_X) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D')$$

où  $D' - D$  est un diviseur *effectif*. De plus par adjonction, on obtient que

$$\mathcal{T}_{\tilde{F}}^* = r^*(\mathcal{T}_F^*) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D' - D),$$

ce qui achève cette preuve. □

#### IV. Un exemple local non issu d'une équation de Riccati.

On se propose ici de construire un feuilletage  $\mathcal{F}_\omega$  à l'origine de  $\mathbb{C}^2$  donné par un germe de 1-forme holomorphe  $\omega$  admettant les propriétés suivantes :

a)  $\mathcal{F}_\omega$  est non dicritique et transversalement affine en dehors de ses séparatrices.

b)  $\mathcal{F}_\omega$  n'est pas le pull-back méromorphe d'un feuilletage de Riccati sur une surface algébrique. Cette dernière propriété implique notamment que  $\mathcal{F}_\omega$  ne peut être obtenu comme pull-back méromorphe d'une équation linéaire :

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y + b(x) = 0$$

situation qui diffère donc du cas à singularité réduite (cf. [BeTo]).

##### IV.1. Description et construction du feuilletage.

Notons par  $\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}$  l'application d'éclatement de  $\mathbb{C}^2$  à l'origine et prescrivons-nous cinq points  $p_1, \dots, p_5$  sur le diviseur exceptionnel  $\pi^{-1}(0)$ . Il est bien connu qu'il existe au voisinage de  $\pi^{-1}(0)$  cinq courbes lisses  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  contenant respectivement les points  $p_i$ , transverses en ces points à  $\pi^{-1}(0)$  et qui ne sont pas simultanément et analytiquement rectifiables sur des droites de la fibration de Hopf :  $\widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \pi^{-1}(0)$ . Ceci résulte plus précisément de la

*Remarque IV.1.1.* — Soient  $\mathcal{D}_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  cinq germes de droites à l'origine de  $\mathbb{C}^2$ . Si l'on considère une courbe lisse  $\mathcal{C}$  ayant un contact quadratique avec  $\mathcal{D}_5$ , on ne peut redresser holomorphiquement les cinq courbes  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_4, \mathcal{C}$  sur des droites.

En reprenant la construction menée dans [LN], on peut dans ces conditions affirmer qu'il existe au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$  un feuilletage holomorphe  $\mathcal{F}_\omega$  tel que

i)  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega = \pi^* \mathcal{F}_\omega$  est à singularités réduites et son lieu singulier  $\text{Sing}(\widetilde{\mathcal{F}}_\omega)$  est égal à l'union des points  $p_i$ .

ii) Le feuilletage  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  localisé aux points  $p_i$  est défini par les formes respectives

$$\omega_i = x_i dy_i + \lambda_i y_i dx_i$$

où  $(x_i, y_i)$  est un système de coordonnées holomorphes choisies de telle sorte que  $\{y_i = 0\}$  et  $\{x_i = 0\}$  soient des équations locales de  $\pi^{-1}(0)$  et  $C_i$ . En particulier, les courbes  $C_i$  sont invariantes par  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ .

iii) Les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$  sont des réels irrationnels.

iv) Le groupe d'holonomie projective de  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  est non abélien et dense dans le groupe

$$H = \left\langle z \mapsto \frac{e^{2i\pi a} z}{1 + bz}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \right\rangle.$$

D'après [Pa], il existe alors un germe de 1-forme méromorphe fermée  $\omega_1$  à l'origine de  $\mathbb{C}^2$  tel qu'on ait l'équation

$$\omega_1 \wedge \omega = d\omega.$$

Ainsi  $\mathcal{F}_\omega$  admet une structure transversalement affine en considérant l'intégrale première

$$F = \int \frac{\omega}{e^{\int \omega_1}}.$$

Dans ce qui suit, on va répertorier les obstructions à ce que  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  soit le pull-back méromorphe d'un feuilletage de Riccati  $\mathcal{F}_S$  défini sur une surface algébrique  $S$ .

Supposons qu'il existe un germe  $R : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow S$  d'application méromorphe tel que  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega = R^* \mathcal{F}_S$ . Notons que  $R$  est nécessairement non dégénérée (i.e., génériquement de rang 2) puisque, dans le cas contraire,  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  admettrait une intégrale première méromorphe, situation incompatible avec la propriété iv). De façon plus générale, cette même propriété met en évidence que  $\mathcal{F}_\omega$  ne peut être défini par une forme fermée (cf. [Pa]).

La fibration  $p$  transverse à  $\mathcal{F}_S$  produit, en considérant son pull-back par  $R \circ \pi$  un feuilletage  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  «transverse» à  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  et admettant l'intégrale première méromorphe

$$G = \xi \circ p \circ R \circ \pi$$

où  $\xi$  est une fonction méromorphe non constante sur la base  $B$  de la fibration  $p$ . Notons que la fibre générique de  $p$  est nécessairement rationnelle (cf. remarque III.2.3).

On notera  $\text{tang}(\widetilde{\mathcal{F}}_\omega, \widetilde{\mathcal{F}}_p)$  l'ensemble analytique formé du lieu de tangence de  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  et  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$ . Étant donné les hypothèses faites sur  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ , c'est un ensemble non vide et possédant un nombre fini de courbes analytiques.

Enfin, on note  $\mathcal{S}_p$  l'ensemble des fibres de  $p$  non transverses à  $\mathcal{F}_S$ . Par pull-back de la structure projective naturelle associée à  $\mathcal{F}_S$ , on hérite d'une structure projective transverse à  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  dont on peut supposer, quitte à appliquer un argument de transversalité, qu'elle est définie en dehors d'un ensemble analytique invariant par le feuilletage. Compte tenu du lemme A de l'annexe, cette structure coïncide avec celle définie par l'intégrale première  $F$ .

**IV.2. Propriétés du lieu de tangence  $\text{tang}(\widetilde{\mathcal{F}}_\omega, \widetilde{\mathcal{F}}_p)$ .**

Elles sont énumérées par les lemmes suivants :

LEMME IV.2.1. — *Le lieu  $\text{tang}(\widetilde{\mathcal{F}}_\omega, \widetilde{\mathcal{F}}_p)$  contient chaque courbe  $\mathcal{C}_i$ .*

*Preuve.* — Plaçons-nous sur un petit voisinage  $W$  d'une singularité  $p_{i_0}$  de  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ . On rappelle que  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  est défini en coordonnées locales par

$$\omega_{i_0} = x_{i_0} dy_{i_0} + \lambda_{i_0} y_{i_0} dx_{i_0}$$

qui admet l'intégrale première  $f_{i_0}(x_{i_0}, y_{i_0}) = x_{i_0}^{\lambda_{i_0}} y_{i_0}$ . Il en résulte que le groupe d'holonomie de  $\{y_{i_0} = 0\}$  évalué sur la transversale  $D_\varepsilon = \{x_{i_0} = \eta\} \cap \{y_{i_0} < \varepsilon\}$  ( $\varepsilon, \eta$  assez petit) est engendré par

$$h_{i_0} : y_{i_0} \longmapsto e^{2i\pi\lambda_{i_0}} y_{i_0}.$$

On vérifie aisément que tout germe de difféomorphisme holomorphe conjugant  $h_{i_0}$  à un élément de  $H$  appartient à  $H$ . Par suite, l'adhérence du groupe d'holonomie projective globale est bien  $H$  dans la coordonnée  $y_{i_0}$ . Considérons une restriction de  $F$  à  $D_\varepsilon \setminus \{0\}$ . Celle-ci vérifie les hypothèses du lemme A de l'annexe; par prolongement analytique, toute restriction de  $F$  à  $W \setminus \{x_{i_0} y_{i_0} = 0\}$  satisfait donc l'égalité

$$(1) \quad F|_{W \setminus \{x_{i_0} y_{i_0} = 0\}} = \varphi(x_{i_0}^{\lambda_{i_0}} y_{i_0}), \quad \varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

Supposons qu'il existe  $a \in \mathcal{C}_{i_0} \setminus \{p_{i_0}\}$  tel que  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  soit transverse à  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  en  $a$  et notons  $F_a$  la feuille de  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  passant par  $a$ . On peut choisir  $a$  de telle sorte qu'il existe un petit voisinage tubulaire  $W_a$  de  $F_a$  fibré par  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  contenant  $a$  et tel que  $p \circ R \circ \pi(W_a)$  soit un ouvert simplement connexe de  $B \setminus \{p(\mathcal{S}_p)\}$ . Par identification des structures projectives, il en résulte que  $F|_{W \setminus \{x_{i_0} y_{i_0} = 0\}}$  doit être uniforme, ce qui contredit l'égalité (1). □

LEMME IV.2.2. — *Le feuilletage  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  ne contient pas le diviseur  $\pi^{-1}(0)$  comme séparatrice.*

*Preuve.* — Supposons que  $\pi^{-1}(0)$  soit invariant par  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  et considérons l'ouvert  $U$  obtenu en ôtant à un voisinage ouvert de  $\pi^{-1}(0)$  de petits voisinages cylindriques fermés autour de chaque singularité de  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$ . En un point  $a \in U \cap \pi^{-1}(0)$  régulier de  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$ , considérons une transversale holomorphe  $T_a$  à  $\pi^{-1}(0)$ . Visiblement, on peut choisir  $U$  et  $T_a$  de telle sorte que

- a)  $p \circ R \circ \pi(T_a)$  soit — dans une coordonnée holomorphe *ad hoc* — un disque de  $B$  ne rencontrant éventuellement  $p(S_p)$  qu'en  $p \circ R \circ \pi(a)$ ,
- b)  $U$  soit saturé par les feuilles de  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  rencontrant  $T_a$ .

Manifestement, ceci entraîne que l'image de la représentation de monodromie de  $F|_U$  est un groupe monogène, ce qui, compte tenu de la nature du groupe d'holonomie projective de  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  est impossible.  $\square$

LEMME IV.2.3. — *On a  $\text{tang}(\widetilde{\mathcal{F}}_\omega, \widetilde{\mathcal{F}}_p) = \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{C}_i$ .*

*Preuve.* — On a déjà l'inclusion  $\bigcup_{i=1}^5 \mathcal{C}_i \subset \text{Tang} \widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ . Supposons qu'il existe une composante irréductible de  $\text{tang}(\widetilde{\mathcal{F}}_\omega, \widetilde{\mathcal{F}}_p)$  qui ne soit pas une séparatrice de  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ . Notons  $\mathcal{C}$  cette composante. Puisque le lieu de tangence de la fibration  $p$  et du feuilletage  $\mathcal{F}_S$  est une union disjointe de fibres, la courbe  $\mathcal{C}$  est contractée par  $R \circ \pi$  sur un point de  $S$ . Il s'ensuit que  $p$  admet une singularité dicritique en  $R(\mathcal{C})$ , ce qui est évidemment impossible.  $\square$

### IV.3. Nature des singularités du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_p$ .

LEMME IV.3.1.

- a) *L'ensemble  $\text{Sing} \widetilde{\mathcal{F}}_p$  des singularités de  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  est non vide et contenu dans  $\text{Sing} \widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ .*
- b) *Toute singularité de  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  est dicritique.*

*Preuve.* — a) Supposons  $\text{Sing} \widetilde{\mathcal{F}}_p = \emptyset$ . Il résulte alors du lemme IV.2.3 que  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  est transverse en tout point à  $\pi^{-1}(0)$  et contient chaque courbe  $\mathcal{C}_i$  comme séparatrice. Le feuilletage  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  est ainsi holomorphiquement conjugué à la fibration de Hopf sur  $\pi^{-1}(0)$ , ce qui, par hypothèse, est impossible compte tenu de la position des courbes  $\mathcal{C}_i$  (cf. lemme IV.1.1). La dernière assertion de a) est encore une conséquence immédiate du lemme IV.2.3.

b) Soit  $q \in \pi^{-1}(0)$  une singularité de  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$ ; il existe alors un indice  $i_0$  tel que  $q = p_{i_0}$  et  $\mathcal{C}_{i_0}$  soit séparatrice de  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$ . Puisque  $\mathcal{C}_{i_0}$  est lisse,  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  admet en  $q$  une autre séparatrice  $X$  irréductible et non invariante par  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  (lemme IV.2.3). Supposons  $q$  non dicritique; ceci implique, par résolution des indéterminations de  $R$ , que  $R \circ \pi(X)$  et  $R \circ \pi(\mathcal{C}_{i_0})$  appartiennent à la même fibre de  $p$ . Considérons un petit disque tangent à  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  centré en  $a \in X \setminus \pi^{-1}(0)$  et  $b = p \circ R \circ \pi(a)$  paramétrés respectivement par les coordonnées holomorphes  $z$  et  $u$  ( $z(a) = u(b) = 0$ ), lesquelles sont choisies de telle sorte que le graphe de  $p \circ R \circ \pi$ , en restriction à ces disques s'écrive sous la forme  $u = z^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . La courbe  $X$  n'étant pas invariante par  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ , toute restriction de  $F$  au voisinage de  $a$  est une fonction uniforme à valeurs dans  $\mathbb{P}_1$ ; par suite, la monodromie du feuilletage  $\mathcal{F}_S$  autour de la fibre  $p^{-1}(b)$  est finie d'ordre au plus  $m$ , mais elle est par ailleurs d'ordre infini puisque  $R \circ \pi(\mathcal{C}_{i_0}) \subset p^{-1}(b)$  ( et compte tenu du fait que  $\lambda_{i_0}$  est irrationnel). □

Le résultat annoncé dans l'introduction découle alors du

LEMME IV.3.2. — *Le feuilletage  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  ne peut admettre de singularités dicritiques.*

*Preuve.* — Supposons par l'absurde qu'une telle singularité  $q = p_{i_0}$  existe. Le feuilletage  $\widetilde{\mathcal{F}}_p$  admet alors en  $q$  une séparatrice  $Y$  non invariante par  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  telle que

- l'application rationnelle  $R \circ \pi$  soit, en restriction à  $Y \setminus \{q\}$ , une immersion (non nécessairement injective);
- l'image  $R \circ \pi(Y)$  est dans une fibre régulière de  $p$  transverse à  $\mathcal{F}_S$ .

Au point  $q$ , rappelons qu'une intégrale première de  $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$  est donnée (modulo l'action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ ) par  $f(x, y) = x^\lambda y$ . Puisque la projection  $(x, y) \mapsto (x, 1)$  induit sur  $S$  un revêtement ramifié fini, on en déduit que l'image de la représentation de monodromie de toute restriction  $f|_Y$  est infinie, mais elle doit être par ailleurs triviale car  $R \circ \pi(Y)$  est une fibre générique. □

### ANNEXE.

Cette annexe a pour objet de rappeler quelques propriétés de base de la dérivée schwartzienne et d'établir ensuite un critère d'unicité de structure transverse projective (lemme A). Ce dernier est utilisé en IV.1

et c'est aussi ce type de résultat qui est implicitement invoqué dans la preuve du théorème III.2.4. Nous débutons cet appendice par les hypothèses et l'énoncé de ce lemme.

Soit  $H$  un sous-groupe du groupe  $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$  des difféomorphismes holomorphes de  $\mathbb{C}, 0$ . Soit  $D_\varepsilon = \{|z| \leq \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon$  assez petit et  $f$  une fonction multiforme localement méromorphe sur  $D_\varepsilon \setminus \{0\}$  et dont la représentation de monodromie est à valeur dans le groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ . On se propose de détecter parmi ces fonctions celles qui vérifient la relation

$$(1) \quad \forall h \in H, \quad f \circ h = \varphi_h \circ f, \quad \varphi_h \in \text{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

LEMME A. — *Sous l'hypothèse que  $H = \langle z \mapsto \frac{e^{2i\pi\lambda}z}{1+az}, \lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C} \rangle$ ,  $f$  est une transformation de Möbius.*

**A1. La dérivée schwartzienne.** — Soit  $u$  une fonction multiforme et localement méromorphe non constante définie sur un domaine de  $\mathbb{C}$ ; la dérivée schwartzienne de  $u$  est par définition la fonction méromorphe

$$(2) \quad S_u(z) = \left( \frac{u''(z)}{u'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{u''(z)}{u'(z)} \right)^2.$$

On rappelle qu'elle satisfait la règle de composition (cf. [Va]) :

$$(3) \quad S_{u \circ v}(z) = S_u(v(z)) \cdot (v'(z))^2 + S_v(z)$$

et que  $S_u = 0$  si et seulement si  $u$  est une transformation de Möbius. Rappelons enfin que chaque solution de l'équation  $S_u(z) = \alpha(z)$  s'obtient exactement comme quotient de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2y}{dz^2} + a_1(z) \frac{dy}{dz} + a_2(z)y = 0$$

avec  $\alpha = 2a_2 - \frac{1}{2}a_1^2 - a_1$ .

**A2. Preuve du lemme A.** — Soit  $f$  une fonction vérifiant (1); on supposera dans un premier temps que  $H$  est un sous-groupe quelconque de  $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ . D'après l'identité (3), on obtient que  $S_f$  est une fonction méromorphe uniforme sur  $D_\varepsilon \setminus \{0\}$  et que  $S_f(z) = S_f(h(z))h'(z)^2 + S_h(z)$ . En particulier, si  $H \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ , on a  $S_f(z) = S_f(h(z))h'(z)^2$ . Dans la situation où  $f$  n'est pas une homographie, ceci entraîne que la différentielle

quadratique  $S_f(z) dz \otimes dz = \omega$  (par construction méromorphe sur  $D_\varepsilon \setminus \{0\}$ ) est non nulle et invariante sous l'action de  $H$  :

$$(4) \quad \forall h \in H, \quad h^*\omega = \omega.$$

Plaçons-nous maintenant dans la situation où  $H$  satisfait les hypothèses du lemme A et supposons que  $f$  ne soit pas une homographie; il existe donc une différentielle quadratique non triviale méromorphe  $\omega$  sur  $D_\varepsilon \setminus \{0\}$  vérifiant la relation (4). Soit  $a \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$  un point régulier de  $\omega$ . Il existe alors en  $a$  une coordonnée locale  $u$  telle que  $\omega = du \otimes du$ . Soit  $\xi \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$  tel que  $(\xi')^2(u) du \otimes du = du \otimes du$ . On a donc  $\xi(u) = \pm u$  et ceci contredit le fait que le stabilisateur de  $a$  dans  $H$  soit de *dimension réelle égale à 1*.  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [Be] A.F. BEARDON, The geometry of discrete groups, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.
- [BeTo] M. BERTHIER, F. TOUZET, Sur l'intégration des équations différentielles réduites en dimension deux, Bol. Soc. Bras. Mat., 30-3 (1999), 247–286.
- [Br] M. BRUNELLA, Birational geometry of foliations, First Latin American Congress of Mathematicians, IMPA.
- [BrBo] C. BRIOT, J.-C. BOUQUET, Recherches sur les fonctions définies par des équations différentielles, J. École Polytechnique, XXI (1856), 134–198.
- [CeMa] D. CERVEAU, J.-F. MATTÉI, Formes holomorphes intégrables singulières, Astérisque, 97 (1982).
- [God] C. GODBILLON, Feuilletages : études géométriques, Birkhäuser, 1991.
- [Hir] F. HIRZEBRUCH, Hilbert modular surfaces, Enseig. Math., 25, 207–256.
- [LN] A. LINS NETO, Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two, J. Diff. Geom., 26-1 (1987), 1–31.
- [MaMo] J.-F. MATTÉI, R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, Ann. Sci. École Norm. Sup., 4-4 (1980), 469–523.
- [MaRa1] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 55 (1982).
- [MaRa2] J. MARTINET, J.-P. RAMIS, Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre, Ann. Sci. École Normale Sup., 16 (1983).
- [Me] L.G. MENDES, Kodaira dimension of holomorphic singular foliations, Bol. Soc. Bras. Mat., 31-2 (2000), 127–143.
- [Pa] E. PAUL, Feuilletages holomorphes singuliers à holonomie résoluble, J. reine angew. Math., 514 (1999), 9–70.



- [Pe] R. PÉREZ-MARCO, Fixed points and circle maps, *Acta Math.*, 179 (1997), 243–294.
- [Sa] E. SALEM, Feuilletages holomorphes sur les surfaces de Hilbert, Prépublication de l'Université Paul Sabatier, Toulouse.
- [Sca] B. SCARDUA, Transversely affine and transversely projective holomorphic foliations, *Ann. Sci. École Normale Sup.*, 4<sup>e</sup> série, 30 (1997), 169–204.
- [Va] G. VALIRON, Équations fonctionnelles. Applications, Masson et Cie, 1950.

Manuscrit reçu le 7 janvier 2002,  
révisé le 9 septembre 2002,  
accepté le 12 novembre 2002.

Frédéric TOUZET,  
Université de Rennes I  
IRMAR  
Campus de Beaulieu  
35042 Rennes cedex (France).  
ftouzet@univ-rennes1.fr