ANNALES
DE
L'INSTITUT FOURIER

Gérard BOURDAUD

Remarques sur certains sous-espaces de $BMO(\mathbb{R}^n)$ et de $bmo(\mathbb{R}^n)$

Tome 52, nº 4 (2002), p. 1187-1218.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_4_1187_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 4 (2002), 1187–1218

REMARQUES SUR CERTAINS SOUS-ESPACES DE $BMO(\mathbb{R}^n)$ ET DE $bmo(\mathbb{R}^n)$

par Gérard BOURDAUD

1. Introduction.

Depuis la découverte de l'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$ des fonctions à oscillations moyennes bornées et son identification, par Fefferman et Stein [7], au dual de l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$, il s'est avéré utile de considérer, entre autres sous-espaces de $BMO(\mathbb{R}^n)$, les fermetures de certaines classes de fonctions régulières. C'est ainsi que D. Sarason a introduit, sous le nom de $VMO(\mathbb{R}^n)$, l'adhérence de l'ensemble des fonctions uniformément continues appartenant à BMO [19]. De leur côté, R. Coifman et G. Weiss ont considéré l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — qu'ils appellent également $VMO(\mathbb{R}^n)$ — et établi qu'il s'agit d'un prédual de $H^1(\mathbb{R}^n)$. Depuis lors ces espaces fonctionnels sont d'un usage courant dans l'étude et la résolution de certaines classes d'équations aux dérivées partielles (voir notamment [10], [1]).

Dans les lignes qui suivent, on propose une synthèse des diverses caractérisations des espaces précités, ainsi que de leurs homologues locaux, sous-espaces de $bmo(\mathbb{R}^n)$ (voir D. Goldberg [9]). Pourquoi un tel travail s'agissant de notions étudiées pour l'essentiel durant la décennie 70-80 ? En fait certaines propriétés considérées comme connues manquent de références précises (c'est le cas de la description l'espace de Coifman et Weiss à l'aide des transformations de Riesz). Qui plus est, des erreurs se sont glissées

Mots-clés : Oscillations moyennes bornées – Oscillations moyennes continues.
Classification math. : 46E30 – 42B35.

dans la littérature à propos des espaces VMO ; bien qu'elles soient sans conséquences fâcheuses dans les contextes où elles apparaissent, il convient évidemment de les rectifier.

Dans la section 2, nous donnerons un cadre abstrait à notre étude. Si E est un espace de distributions, il existe plusieurs classes naturelles de fonctions C^∞ dans E, chacune d'elles conduisant à une fermeture spécifique dans E. Le cas de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sera rappelé, car il est à la fois élémentaire et instructif. La section 3 est un rappel des définitions. Dans les deux sections suivantes, on étudie respectivement les sous-espaces de bmo et de BMO ; comme on peut s'y attendre, $bmo(\mathbb{R}^n)$ se comporte comme un espace fonctionnel usuel, alors que $BMO(\mathbb{R}^n)$ s'avère d'un abord beaucoup plus délicat. Pour la clarté de l'exposition, nous avons inclus la caractérisation de vmo et VMO, bien que ce soit essentiellement le résultat classique de Sarason (cf. les théorèmes 1 et 5). En revanche les caractérisations des fermetures, dans bmo et BMO, des sous-espaces bmo_c et BMO_c sont vraisemblablement des résultats nouveaux (cf. les théorèmes 2 et 6). Dans la section 6, on présente une série de contre-exemples ; par là on s'assure de la diversité des espaces fonctionnels considérés et on corrige les erreurs précitées. La section suivante est un appendice, où sont regroupés les lemmes plus ou moins classiques qui nous sont utiles. Une dernière section est dévolue à des commentaires bibliographiques.

1.1. Notations.

Les symboles $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $C(\mathbb{R}^n)$, $C_b(\mathbb{R}^n)$, $C_u(\mathbb{R}^n)$, $C_0(\mathbb{R}^n)$, désignent respectivement les ensembles des fonctions indéfiniment différentiables, indéfiniment différentiables à support compact, continues, continues bornées, uniformément continues, continues tendant vers 0 à l'infini, sur l'espace $\mathbb{R}^n$; quand le contexte est suffisamment clair, on supprime le symbole $\mathbb{R}^n$ dans ces notations. Si $a \in \mathbb{R}^n$ et si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, on pose $\tau_a f(x) := f(x-a)$; on désigne par $B(a,t)$ la boule fermée de centre a et de rayon $t > 0$ et par Ω_t l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $|x| > t$. On note $cl_E(F)$ la fermeture de l'ensemble F dans l'espace topologique E. On désigne par c une constante positive, ne dépendant que de n et des fonctions auxiliaires ; sa valeur peut changer d'une ligne à l'autre.

1.2. Fonctions auxiliaires.

Nous utiliserons des fonctions auxiliaires, qui seront fixées une fois pour toutes. La fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\int \varphi(x)\,dx = 1$; on considère l'approximation de l'unité qui lui est associée, définie par $\varphi_j(x) := j^n \varphi(jx)$, pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$. La fonction ρ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1 \quad , \quad \rho(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \leqslant 1 \quad , \quad \rho(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \geqslant 2\,.$$

À l'aide de ρ, on définit deux suites $(u_j)_{j\geqslant 1}$ et $(v_j)_{j\geqslant 1}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, par les formules suivantes :

$$u_j(x) := \rho\left(\frac{|x|}{j}\right) \quad , \quad v_j(x) := \rho\left(\frac{\log_2 |x|}{j}\right).$$

Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \theta(x-k) = 1\,;$$

on suppose que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et que le support de θ est inclus dans le cube $]-1,+1[^n$; on note U l'ensemble (fini !) $\{-1,0,1,2\}^n$.

Remerciements. — Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide et les encouragements de Tadeusz Iwaniec et de Philippe Tchamitchian. C'est un plaisir pour moi de les remercier, ainsi que leurs «complices» respectifs Peter Jones et Emmanuel Russ. Merci également à Bob Strichartz et à Don Sarason pour d'utiles discussions électroniques.

2. Fonctions régulières dans un espace de distributions.

Soit E un *espace de Banach de distributions* (EBD) dans $\mathbb{R}^n$, autrement dit un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complète telle que l'injection canonique $E \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soit continue. Qu'entend-on par «sous-espace des fonctions régulières dans E» ? Il y a au moins trois réponses naturelles :

(i) $E \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) L'ensemble des fonctions de classe C^∞ qui appartiennent à E ainsi que leurs dérivées de tous ordres, que nous noterons C^∞_E.

(iii) $E \cap \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

On peut en outre s'intéresser au sous-espace E_c des distributions à support compact appartenant à E. En considérant les fermetures de ces sous-espaces dans E on obtient *a priori* quatre sous-espaces fermés distincts, comme le montre l'exemple de L^∞. Observons que l'espace $C^\infty_{L^\infty}$, noté simplement C^∞_b, n'est autre que l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables bornées ainsi que leurs dérivées de tous ordres.

PROPOSITION 1. — *Dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^n)$,*

(i) *la fermeture de $C^\infty \cap L^\infty$ est égale à C_b,*

(ii) *la fermeture de C^∞_b est égale à $C_b \cap C_u$,*

(iii) *la fermeture de $\mathcal{D}$ est égale à C_0,*

(iv) *la fermeture de L^∞_c est l'ensemble des fonctions $f \in L^\infty$ telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \|f|_{\Omega_t}\|_\infty = 0.$$

Preuve. — Nous n'établirons que la première assertion, les trois autres étant classiques ou élémentaires. Soient f une fonction continue bornée et $\varepsilon > 0$. Posons

$$f_k(x) := f(x+k)\theta(x). \tag{1}$$

Puisque f_k est continue, à support dans $]-1,+1[^n$, la fonction $g_k := \varphi_j * f_k$ est de classe C^∞, à support dans $]-2,+2[^n$; de plus, pour un choix convenable de $j = j(\varepsilon, k)$, on a $\|f_k - g_k\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Considérons la fonction

$$g(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g_k(x-k). \tag{2}$$

S'agissant d'une somme localement finie, on voit que g est une fonction de classe C^∞. De plus, pour un $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, il existe $m \in \mathbb{Z}^n$ tel que

$$f(x) = \sum_{k\in m+U} f_k(x-k) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k\in m+U} g_k(x-k),$$

d'où $|f(x) - g(x)| \leqslant 4^n\varepsilon$. On a ainsi $\|f-g\|_\infty \leqslant 4^n\varepsilon$, ce qui termine la démonstration.

3. L'espace BMO et ses sous-espaces.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction f, localement intégrable sur Ω, est à *oscillations moyennes bornées sur* Ω si on a

$$\|f\|_{BMO(\Omega)} := \sup_{B\subset\Omega} \fint_B \left| f - \fint_B f \right| < +\infty, \tag{3}$$

où la borne supérieure porte sur l'ensemble des boules fermées B, incluses dans Ω, et

$$\fint_B f$$

désigne la valeur moyenne de f sur B. Si Ω est connexe, l'ensemble des fonctions à oscillations moyennes bornées sur Ω, quotienté par les constantes, constitue un espace de Banach noté $BMO(\Omega)$. On notera q la surjection canonique de $\mathcal{D}'(\Omega)$ sur le quotient $\mathcal{D}'(\Omega)/\mathbb{C}$. On dira abusivement que la fonction f appartient à $BMO(\Omega)$ si sa classe d'équivalence $q(f)$ y appartient.

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, on utilise aussi une version locale de BMO. Il s'agit de l'espace $bmo(\mathbb{R}^n)$ des fonctions f qui appartiennent à $BMO(\mathbb{R}^n)$ et vérifient de plus

$$\sup_{|B|\geqslant 1} \fint_B |f| < +\infty. \tag{4}$$

On montre aisément que la propriété (4) est équivalente à

$$\sup_{|B|=1} \int_B |f| < +\infty$$

(voir par exemple [3, lem. 7]). L'espace $bmo(\mathbb{R}^n)$ est un EBD pour la norme

$$\|f\|_{bmo} := \sup_{|B|<1} \fint_B \left| f - \fint_B f \right| + \sup_{|B|=1} \int_B |f|. \tag{5}$$

Les espaces $BMO(\mathbb{R}^n)$ et $bmo(\mathbb{R}^n)$ seront parfois notés BMO et bmo sans autre précision.

Voici une liste de semi-normes continues sur $BMO(\mathbb{R}^n)$. La première, introduite par Sarason [19], mesure le défaut de régularité locale de la fonction f, les suivantes précisent son comportement à l'infini :

$$M(f) := \lim_{t\to 0}\left(\sup_{|B|\leqslant t}\fint_B |f-\fint_B f|\right);$$
$$\gamma_1(f) := \lim_{t\to+\infty} \|f|_{\Omega_t}\|_{BMO(\Omega_t)};$$
$$\gamma_2(f) := \lim_{t\to+\infty}\left(\sup_{|B|\geqslant t}\fint_B |f-\fint_B f|\right);$$
$$\gamma_3(f) := \limsup_{t\to+\infty}\left(\fint_{B(0,t)} |f-\fint_{B(0,t)} f|\right);$$
$$\gamma_B(f) := \limsup_{a\to\infty}\left(\fint_{B+a} |f-\fint_{B+a} f|\right),$$

où B est une boule fixée ;

$$\gamma_4(f) := \limsup_{a\to\infty}\left(\sup_{0<t\leqslant 1}\fint_{B(a,t)} |f-\fint_{B(a,t)} f|\right).$$

On utilisera en outre la semi-norme continue suivante, sur $bmo(\mathbb{R}^n)$:

$$\gamma_5(f) := \limsup_{a\to\infty}\fint_{B_0+a} |f|,$$

où B_0 désigne la boule unité $B(0,1)$.

DÉFINITION 1. — *On désigne par $VMO(\mathbb{R}^n)$ (resp. $vmo(\mathbb{R}^n)$) l'adhérence dans $BMO(\mathbb{R}^n)$ (resp. $bmo(\mathbb{R}^n)$) de l'ensemble C^∞_{BMO} (resp. C^∞_{bmo}) des fonctions indéfiniment différentiables qui appartiennent à BMO (resp. bmo) ainsi que leurs dérivées de tous ordres.*

DÉFINITION 2. — *On désigne par $CMO(\mathbb{R}^n)$ (resp. $cmo(\mathbb{R}^n)$) l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$ (resp. $bmo(\mathbb{R}^n)$).*

On désigne par R_p les transformations de Riesz, définies par

$$\widehat{(R_pf)}(\xi) := i\frac{\xi_p}{|\xi|}\widehat{f}(\xi) \quad , \forall\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},$$

pour $p=1,\dots,n$. Les transformations r_p sont définies par

$$\widehat{(r_pf)}(\xi) := i(1-u_1(\xi))\frac{\xi_p}{|\xi|}\widehat{f}(\xi).$$

En cas de besoin, l'opérateur identité sera noté R_0 ou r_0. Pour tout

$$f := (f_0, f_1, \dots, f_n) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)^{n+1},$$

on pose

$$R(f) := \sum_{p=0}^{n} R_p(f_p) \quad , \quad r(f) := \sum_{p=0}^{n} r_p(f_p).$$

Rappelons les caractérisations de $BMO(\mathbb{R}^n)$ et $bmo(\mathbb{R}^n)$ au moyen des transformations de Riesz (voir [7] et [9]).

PROPOSITION 2.— *R et r sont des opérateurs linéaires bornés de $L^\infty(\mathbb{R}^n)^{n+1}$ sur $BMO(\mathbb{R}^n)$ et $bmo(\mathbb{R}^n)$ respectivement.*

4. Fonctions régulières dans $bmo(\mathbb{R}^n)$.

4.1. Énoncés des théorèmes.

Nous allons décrire successivement les fermetures, dans $bmo(\mathbb{R}^n)$, des sous-espaces C^∞_{bmo}, bmo_c, $\mathcal{D}$ et $bmo \cap C^\infty$.

THÉORÈME 1.— *Pour une fonction f appartenant $bmo(\mathbb{R}^n)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$f \in vmo(\mathbb{R}^n), \tag{6}$$

$$f \in cl_{bmo}\,(C_u \cap C_b(\mathbb{R}^n)), \tag{7}$$

$$f \in cl_{bmo}\,(C_u \cap bmo(\mathbb{R}^n)), \tag{8}$$

$$f \in r\left((C_u \cap C_b)^{n+1}\right), \tag{9}$$

$$\lim_{x \to 0} \|\tau_x f - f\|_{bmo} = 0, \tag{10}$$

$$f = \lim_{j \to +\infty} f * \varphi_j \quad \text{dans} \quad bmo(\mathbb{R}^n), \tag{11}$$

$$M(f) = 0. \tag{12}$$

THÉORÈME 2.— *Pour une fonction $f \in bmo(\mathbb{R}^n)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f appartient à la fermeture de $bmo_c(\mathbb{R}^n)$ dans $bmo(\mathbb{R}^n)$,*

(ii) $\gamma_4(f) = \gamma_5(f) = 0$,

(iii) *$f = \lim_{j\to+\infty} u_j f$ dans $bmo(\mathbb{R}^n)$,*

(iv) $f \in r\left(cl_{L^\infty}\left(L_c^\infty(\mathbb{R}^n)\right)^{n+1}\right)$.

THÉORÈME 3. — *Pour une fonction $f \in bmo(\mathbb{R}^n)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in cmo(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $f \in cl_{bmo}(C_0(\mathbb{R}^n))$,

(iii) $f \in r\left(C_0(\mathbb{R}^n)^{n+1}\right)$,

(iv) $M(f) = \gamma_4(f) = \gamma_5(f) = 0$.

THÉORÈME 4. — *Pour une fonction $f \in bmo(\mathbb{R}^n)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in cl_{bmo}(C^\infty \cap bmo(\mathbb{R}^n))$,

(ii) $f \in cl_{bmo}(C \cap bmo(\mathbb{R}^n))$,

(iii) *f appartient localement à $vmo(\mathbb{R}^n)$.*

4.2. Preuve du théorème 1.

L'équivalence entre les propriétés (8), (10) et (12) est due essentiellement à Sarason [19]. La preuve qu'il donne dans $BMO(\mathbb{R})$ s'adapte sans difficulté à $bmo(\mathbb{R}^n)$. Les implications (10) $\Rightarrow$ (11) $\Rightarrow$ (6) résultent classiquement de l'invariance de $bmo(\mathbb{R}^n)$ par translation. D'après le lemme 6, on a

$$C^\infty_{bmo} = C^\infty_b \subset C_u \cap C_b \subset C_u \cap bmo,$$

ce qui nous donne les implications (6) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (8). Il nous reste à établir l'équivalence entre la condition (9) et les autres propriétés.

Preuve de l'implication (9) $\Rightarrow$ (10). — Soit $f := r_p(g)$, où $g \in C_u \cap C_b$. On a

$$\lim_{x \to 0} \|\tau_x g - g\|_\infty = 0.$$

Puisque l'opérateur r est continu de L^∞ dans bmo et qu'il commute avec les translations, on en déduit la propriété (10).

Preuve de l'implication (11) $\Rightarrow$ (9). La proposition 2 et le théorème de l'application ouverte entraînent l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

(13)
$$\forall f \in bmo(\mathbb{R}^n) \quad \exists g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)^{n+1} \quad : \quad f = r(g) \quad \text{et} \quad \|g\|_\infty \leqslant c\|f\|_{bmo}.$$

Supposons maintenant que f vérifie (11) et considérons une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)^{n+1}$ fournie par la propriété (13). Alors $\varphi_j * g \in C_b^\infty$, $\|\varphi_j * g\|_\infty \leqslant c\|f\|_{bmo}$ et $f - r(\varphi_j * g) = f - \varphi_j * f$, de sorte que $\|f - r(\varphi_j * g)\|_{bmo}$ peut être rendu arbitrairement petit. On est dès lors dans les conditions d'application du lemme 2 et on peut conclure à la surjectivité de $r : (C_u \cap C_b)^{n+1} \to vmo(\mathbb{R}^n)$.

4.3. Preuve du théorème 2.

Preuve de l'implication (i) ⇒ (ii). — On voit aisément que les semi-normes γ_4 et γ_5 s'annulent sur bmo_c et donc aussi sur $cl_{bmo}(bmo_c)$.

Preuve de l'implication (ii) ⇒ (iii). — Soit une fonction $f \in bmo$ telle que $\gamma_4(f) = \gamma_5(f) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $A > 0$ tel que

$$\fint_{B(a,1)} |f| + \fint_{B(a,t)} |f - \fint_{B(a,t)} f| \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $|a| \geqslant A$ et tout $0 < t \leqslant 1$. Il existe un entier j_0 dépendant de ε tel que $u_j(x) = 1$ sur $B(a,t)$ pour tous $j \geqslant j_0$, $|a| < A$ et $t \in]0,1]$. Pour tout $j \geqslant j_0$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$\fint_{B(a,1)} |(1-u_j)f| \leqslant \varepsilon.$$

Le théorème des accroissements finis nous donne

$$\fint_{B(a,t)} |u_j - u_j(a)| \leqslant ctj^{-1}$$

et le lemme 3 conduit à

$$\left|\fint_{B(a,t)} f\right| \leqslant c\,(1 + |\log t|)\|f\|_{bmo}.$$

Il vient alors

$$\fint_{B(a,t)} |(1-u_j)f - ((1-u_j)(a)) \fint_{B(a,t)} f|$$
$$\leqslant \fint_{B(a,t)} |f - \fint_{B(a,t)} f| + cj^{-1}\|f\|_{bmo}.$$

Ainsi il existe $j_1 = j_1(\varepsilon)$ tel que

$$\fint_B |(1-u_j)f - (\fint_B (1-u_j)f)| \leqslant 4\varepsilon,$$

pour tout $j \geqslant j_1$ et toute boule B de rayon inférieur à 1.

Preuve de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii).— Compte tenu de la continuité de l'opérateur r_p (cf. la proposition 2), il suffit de considérer $f := r_p(g)$, avec $g \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, et d'établir la propriété (ii). On sait que r_p est l'opérateur de convolution par une distribution h_p vérifiant

$$h_p(x) = O\left(|x|^{-n}\right) \quad \text{quand} \quad |x| \to 0, \tag{14}$$

$$h_p(x) = O\left(|x|^{-N}\right) \quad \text{quand} \quad |x| \to \infty \quad , \forall N \in \mathbb{N} \tag{15}$$

(voir par exemple [2, prop. V.17]). Pour tout x loin du support de g, il vient

$$|f(x)| = \left| \int h_p(x-y) g(y)\, dy \right| \leqslant c|x|^{-1} \|g\|_1, \tag{16}$$

d'où $\gamma_4(f) = \gamma_5(f) = 0$.

Preuve de l'implication (i) $\Rightarrow$ (iv).— Supposons que $f \in bmo_c(\mathbb{R}^n)$ et considérons une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)^{n+1}$ fournie par la propriété (13). On a

$$u_j g \in L_c^\infty \quad , \quad \|u_j g\|_\infty \leqslant c\|f\|_{bmo}$$

et, pour j assez grand,

$$f - r(u_j g) = \sum_{p=1}^{n} [u_j, r_p](g_p).$$

Des estimations (14) et (15), il résulte que le commutateur $[u_j, r_p]$ est un opérateur borné sur L^∞, avec une norme en $O(j^{-1})$. On voit donc que $\|f - r(u_j g)\|_{bmo}$ peut être rendu arbitrairement petit. On peut appliquer le lemme 2 et conclure à la surjectivité de $r : cl_{L^\infty}(L_c^\infty(\mathbb{R}^n))^{n+1} \to cl_{bmo}(bmo_c(\mathbb{R}^n))$.

4.4. Preuve du théorème 3.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiate et, pour justifier l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv), il suffit de constater que toute fonction $f \in C_0$ satisfait la propriété (iv).

Preuve de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i).— Soit f une fonction qui vérifie (iv). Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 2, il existe $g \in bmo_c$ telle que $\|f - g\|_{bmo} \leqslant \varepsilon$. Il vient alors

$$\|f - g * \varphi_j\|_{bmo} \leqslant \|f - f * \varphi_j\|_{bmo} + \|f * \varphi_j - g * \varphi_j\|_{bmo} \leqslant \|f - f * \varphi_j\|_{bmo} + \varepsilon.$$

D'après le théorème 1, on a $\lim_{j\to+\infty} \|f - f * \varphi_j\|_{bmo} = 0$. Il vient

$$\limsup_{j\to+\infty} \|f - g * \varphi_j\|_{bmo} \leqslant \varepsilon,$$

avec $g * \varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ce qui montre que $f \in cmo(\mathbb{R}^n)$.

Preuve de l'implication (iii) ⇒ (ii).— Soit $f := r_p(g)$, où $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. L'identité $f^{(\alpha)} = r_p(g^{(\alpha)})$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, entraîne que f est une fonction de classe C^∞. L'estimation (16) montre que f tend vers 0 à l'infini. On a ainsi l'inclusion $r\left(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^{n+1}\right) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$, qui implique $r\left(C_0(\mathbb{R}^n)^{n+1}\right) \subseteq cl_{bmo}\left(C_0(\mathbb{R}^n)\right)$.

Preuve de l'implication (i) ⇒ (iii).— D'après le théorème 1, il existe une constante c telle que

$$\forall f \in vmo(\mathbb{R}^n) \quad \exists g \in (C_u \cap C_b(\mathbb{R}^n))^{n+1} \ : \ f = r(g) \quad \text{et} \quad \|g\|_\infty \leqslant c\|f\|_{bmo}.$$

Appliquons ceci à une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On a

$$u_j g \in C_0(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \|u_j g\|_\infty \leqslant c\|f\|_{bmo}$$

et, pour j assez grand, $\|f - r(u_j g)\|_{bmo}$ peut être rendu arbitrairement petit (cf. le théorème 2, preuve de (i) ⇒ (iv)).

4.5. Preuve du théorème 4.

Preuve de l'implication (ii) ⇒ (iii).— Puisque toute fonction continue appartient localement à $vmo(\mathbb{R}^n)$, il suffira de montrer que $vmo_{\mathrm{loc}} \cap bmo$ est fermé dans $bmo(\mathbb{R}^n)$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. D'après le lemme 4, on a $\|\psi f\|_{bmo} \leqslant A(\psi)\, \|f\|_{bmo}$, pour tout $f \in bmo(\mathbb{R}^n)$. L'ensemble des $f \in bmo(\mathbb{R}^n)$ telles que $\psi f \in vmo(\mathbb{R}^n)$ est donc fermé dans $bmo(\mathbb{R}^n)$.

Preuve de l'implication (iii) ⇒ (i).— On procède essentiellement comme dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (voir la preuve de la proposition 1, dont on reprend les notations). Soit $f \in vmo_{\mathrm{loc}} \cap bmo$ et $k \in \mathbb{Z}^n$; alors la fonction f_k définie par (1) appartient à $vmo(\mathbb{R}^n)$; d'après le théorème 1, la fonction $g_k := \varphi_j * f_k$ vérifie $\|f_k - g_k\|_{bmo} \leqslant \varepsilon$, pour j assez grand. Définissons la fonction g par l'égalité (2). Alors g est une fonction de classe C^∞ et, pour tout $m \in \mathbb{Z}^n$, on a

$$(\tau_m\theta)(f - g) = \sum_{k\in m+U} (\tau_m\theta)(f_k - g_k),$$

d'où

$$\|(\tau_m\theta)(f - g)\|_{bmo} \leqslant c\varepsilon \quad , \forall m \in \mathbb{Z}^n.$$

D'après le lemme 5, on obtient $\|f - g\|_{bmo} \leqslant c\varepsilon$.

5. Fonctions régulières dans $BMO(\mathbb{R}^n)$.

5.1. Énoncés des théorèmes.

THÉORÈME 5. — *Pour une fonction $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, les propriétés suivantes sont équivalentes entre elles :*

$$f \in VMO(\mathbb{R}^n), \tag{17}$$

$$f \in cl_{BMO}\left(C_u \cap BMO(\mathbb{R}^n)\right), \tag{18}$$

$$f \in R\left((C_u \cap C_b)^{n+1}\right), \tag{19}$$

$$\lim_{x \to 0} \|\tau_x f - f\|_{BMO} = 0, \tag{20}$$

$$f = \lim_{j \to +\infty} f * \varphi_j \quad \text{dans} \quad BMO(\mathbb{R}^n), \tag{21}$$

et elles sont équivalentes à la condition (12).

Pour décrire la fermeture de BMO_c dans BMO, il sera commode d'introduire la définition suivante.

DÉFINITION 3. — *Soit $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. On dit que f est nulle à l'infini si les conditions suivantes sont vérifiées respectivement :*

- *en dimension $n > 1$, $\gamma_1(f) = 0$,*
- *en dimension 1, $\gamma_1(f) = \gamma_3(f) = 0$.*

THÉORÈME 6. — *Pour une fonction $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in cl_{BMO}(BMO_c(\mathbb{R}^n))$,

(ii) *f est nulle à l'infini,*

(iii) $f = \lim_{j \to +\infty} v_j f$ *dans* $BMO(\mathbb{R}^n)$,

(iv) $f \in R\left(cl_{L^\infty}(L_c^\infty)^{n+1}\right)$.

THÉORÈME 7. — *Pour une fonction $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in CMO(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $f \in cl_{BMO}(C_0(\mathbb{R}^n))$,

(iii) $M(f) = \gamma_2(f) = 0$ *et* $\gamma_B(f) = 0$ *pour toute boule B,*

(iv) $f \in R\left(C_0(\mathbb{R}^n)^{n+1}\right)$.

(v) $f \in VMO(\mathbb{R}^n) \cap cl_{BMO}(BMO_c(\mathbb{R}^n))$.

5.2. Preuve du théorème 5.

La preuve est pour l'essentiel identique à celle du théorème 1. Pour justifier l'implication (17) $\Rightarrow$ (18), il suffit de disposer du plongement

$$C^{\infty}_{BMO}(\mathbb{R}^n) \subset C_u(\mathbb{R}^n),$$

qui résulte du lemme 6.

5.3. Preuve du théorème 6.

Preuve de l'implication (i) $\Rightarrow$ (iii). — Soit $f \in cl_{BMO}(BMO_c(\mathbb{R}^n))$ et soit $\varepsilon > 0$. On considère une fonction g, à support compact, telle que $\|f - g\|_{BMO} \leqslant \varepsilon$. Il existe un entier j_0 tel que $(1 - v_j)g = 0$ pour tout $j \geqslant j_0$. Posons $\mu = \fint_{B_0} (f - g)$. Pour $j \geqslant j_0$, il vient

$$\begin{aligned}
\|(1 - v_j)f\|_{BMO} &= \|(1 - v_j)(f - g)\|_{BMO} \\
&\leqslant \|(1 - v_j)(f - g - \mu)\|_{BMO} + \|(1 - v_j)\mu\|_{BMO} \\
&\leqslant \|f - g - \mu\|_{BMO} + \|v_j(f - g - \mu)\|_{BMO} + |\mu|\,\|v_j\|_{BMO}.
\end{aligned}$$

Des lemmes 7 et 8, on déduit

$$\|(1 - v_j)f\|_{BMO} \leqslant c(\varepsilon + |\mu| j^{-1}).$$

On obtient $\|(1 - v_j)f\|_{BMO} \leqslant (c + 1)\varepsilon$, pour j assez grand.

Preuve de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) en dimension $n > 1$. — Soit $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ telle que $\gamma_1(f) = 0$. Suivant la proposition 13, on pose $g_j = E_j\left(f|_{\Omega_j}\right)$, de sorte que $\lim_{j\to+\infty} g_j = 0$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$. Puisque la fonction $f - g_j$ est portée par la boule $|x| \leqslant j$, on en déduit que $f \in cl_{BMO}(BMO_c)$.

Preuve de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) en dimension 1.

1. – Soit f une fonction *paire* telle que $\gamma_1(f) = 0$. Considérons l'opérateur de restriction

$$T : BMO(\mathbb{R}) \to BMO(]0, +\infty[)$$

et posons, suivant la proposition 11 et son corollaire,

$$f_j := (E \circ T \circ E_j)\left(f|_{]j,+\infty[}\right) \quad , \forall j \in \mathbb{N};$$

on a alors

$$\lim_{j\to+\infty} \|f_j\|_{BMO} = 0.$$

Puisque $f - f_j$ est portée par $[-j, j]$, on conclut que f appartient à la fermeture de BMO_c.

2. – Soit f une fonction *impaire* telle que $\gamma_1(f) = \gamma_3(f) = 0$. On va vérifier que $v_j f$ tend vers f dans $BMO(\mathbb{R})$. Puisque $v_j f - f$ est une fonction impaire, il nous suffit, d'après la proposition 12, d'établir les propriétés suivantes :

$$\lim_{j\to+\infty} \|(1-v_j)f\|_{BMO(]0,+\infty[)} = 0, \tag{22}$$

$$\lim_{j\to+\infty} \left(\sup_{a>0} \fint_{[0,a]} |(1-v_j)f| \right) = 0. \tag{23}$$

Preuve de (22). — On pose

$$\varepsilon_j := \|f|_{]2^{j-1},+\infty[}\|_{BMO} \quad , \forall j \geqslant 1;$$

par hypothèse sur f, cette suite tend vers 0. Pour tout segment $I = [a, b] \subset]0, +\infty[$, on pose

$$\mathcal{U}_{j,I} = \fint_I \left| (1-v_j)f - \mu_I \fint_I (1-v_j) \right|,$$

où μ_I est une constante, dépendant également de f et au besoin de j ; il s'agit d'établir que, pour un choix convenable de ces constantes, on a

$$\lim_{j\to+\infty} \left(\sup_I \mathcal{U}_{j,I} \right) = 0.$$

Notons l'existence d'une constante A telle que $\displaystyle\fint_I |f| \leqslant A$, dès que $b \geqslant 2a$ (cf. le lemme 10).

On considère les cas suivants :

– Pour $I \subseteq [0, 2^j]$, on a $v_j = 1$ sur I, d'où $\mathcal{U}_{j,I} = 0$.

– Pour $I \subseteq [4^j, +\infty[$, on a $v_j = 0$ sur I, d'où

$$\mathcal{U}_{j,I} = \fint_I |f - \mu_I|;$$

on choisit alors $\mu_I := \displaystyle\fint_I f$, ce qui donne $\mathcal{U}_{j,I} \leqslant \varepsilon_j$.

On suppose désormais que le segment I rencontre $]2^j, 4^j[$ et on observe que

$$\mathcal{U}_{j,I} \leqslant \fint_I |f - \mu_I|(1 - v_j) + |\mu_I| \fint_I |v_j - \fint_I v_j|.$$

– Si $a \leqslant 2^{j-1}$, on pose $I' = [2^{j-1}, b]$ et $\mu_I := \fint_{I'} f$. Puisqu'on a $b > 2^j \geqslant 2a$, il vient

$$\mathcal{U}_{j,I} \leqslant \varepsilon_j + A \|v_j\|_{BMO}. \tag{24}$$

– Dans le cas $a > 2^{j-1}$, $b \geqslant 2a$, on pose $\mu_I := \fint_I f$ et on obtient encore la majoration (24).

– Dans le cas $a > 2^{j-1}$, $b < 2a$, on pose $\mu_I := \fint_I f$. On a alors $|I| \leqslant 4^j$ et le lemme 3 implique

$$\left| \fint_I f - \fint_{[2^j, 4^j]} f \right| \leqslant c \left(j + \log_+ \frac{1}{|I|} \right) \varepsilon_j.$$

Il vient

$$\left| \fint_I f \right| \leqslant c \left(j + \log_+ \frac{1}{|I|} \right) \varepsilon_j + A.$$

Suivant le lemme 7, on obtient

$$\mathcal{U}_{j,I} \leqslant c\varepsilon_j + \frac{A'}{j},$$

pour une constante A' ne dépendant que de f, ce qui termine la preuve de (22).

Preuve de (23).— On a

$$\sup_{a>0} \fint_{[0,a]} |(1 - v_j) f| \leqslant \sup_{a \geqslant 2^j} \fint_{[0,a]} |f|,$$

expression qui tend vers 0, puisque $\gamma_3(f) = 0$.

Preuve de l'implication (iv) ⇒ (ii).— Compte tenu de la continuité de l'opérateur R_p, il suffit de considérer $f := R_p(g)$, avec $g \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, et d'établir que f est nulle à l'infini. On sait que R_p est l'opérateur de convolution par une distribution H_p telle que

$$H_p(x) = c \frac{x_p}{|x|^{n+1}} \quad \text{pour} \quad x \neq 0. \tag{25}$$

Pour tout x loin du support de g, il vient

$$|f(x)| = \left| \int H_p(x-y)g(y)\,dy \right| \leqslant c|x|^{-n}\|g\|_1, \tag{26}$$

d'où $\gamma_1(f) = 0$. En dimension un, l'estimation (26) et la continuité de l'opérateur R_1 sur $L^2(\mathbb{R})$ entraînent

$$\frac{1}{2a}\int_{|x|\leqslant a} |f(x)|\,dx = O\left(\frac{\log a}{a}\right) \quad , \quad \text{quand} \quad a \to +\infty,$$

et donc $\gamma_3(f) = 0$.

Preuve de l'implication (i) $\Rightarrow$ (iv). — Si la méthode de démonstration est, dans son principe, la même que dans le cas de $bmo(\mathbb{R}^n)$, elle s'avère plus délicate à mettre en oeuvre pour la raison suivante : le commutateur $[v_j, R_p]$ n'est pas défini de façon univoque sur L^∞. En effet, si $g \in L^\infty$, $R_p(g)$ est une classe d'équivalence modulo les constantes, de sorte que $[v_j, R_p](g)$ est défini modulo une fonction de la forme $\alpha v_j + \beta$, où α et β sont des scalaires.

Soit f une fonction à support compact appartenant à $BMO(\mathbb{R}^n)$. On suppose l'entier j assez grand pour que $v_j f = f$. Suivant la proposition 2, il existe $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)^{n+1}$ tel que $f = R(g)$ et $\|g\|_\infty \leqslant c\|f\|_{BMO}$. Soit B une boule de centre x_0. Désignons par f_p le représentant de $R_p(g_p)$ de moyenne nulle sur B. Considérons enfin les fonctions suivantes, définies sur B :

$$a_{1,p}(x) = R_p\left((v_j - \fint_B v_j)g_p 1_{2B}\right)(x),$$

$$a_{2,p}(x) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus 2B} \left(H_p(x-y) - H_p(x_0-y)\right)(v_j(y) - \fint_B v_j)g_p(y)\,dy,$$

$$a_{3,p}(x) = (v_j(x) - \fint_B v_j)f_p(x),$$

où $2B$ désigne la boule de même centre que B et de rayon double. Notons que $a_{1,p}(x)$ a une signification univoque, puisque l'argument de R_p est une fonction appartenant à $L^2(\mathbb{R}^n)$. On dispose alors des estimations suivantes :

$$\fint_B |a_{m,p}| \leqslant c\|g_p\|_\infty \|v_j\|_{BMO} \quad (m = 1,2,3). \tag{27}$$

Preuve de (27). — Pour $m = 1$, on utilise la continuité de R_p sur $L^2(\mathbb{R}^n)$; il vient

$$\fint_B |a_{1,p}| \leqslant c\|g_p\|_\infty \left(\fint_{2B} |v_j - \fint_B v_j|^2\right)^{1/2} ;$$

on conclut à l'aide du lemme 3 et du théorème de John et Nirenberg [12]. Dans le cas $m = 2$, on utilise l'estimation suivante du gradient de H_p :

$$|\nabla H_p(x)| \leqslant \frac{c}{|x|^{n+1}}.$$

On en déduit que

$$|a_{2,p}(x)| \leqslant c\|g_p\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n\setminus 2B} \frac{|x-x_0|}{|y-x_0|^{n+1}} |v_j(y) - \fint_B v_j|\, dy,$$

pour tout $x \in B$; l'inégalité de Fefferman et Stein permet de conclure (voir [7], p. 142). Le cas $m = 3$ résulte immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème de John-Nirenberg. □

Suivant la formule classique permettant de calculer R_p sur L^∞ (voir par exemple [2, th. VII.9]), il existe des constantes $\mu_{B,p}$ telles que

$$R_p\left((v_j - \fint_B v_j)g_p\right)(x) = a_{1,p}(x) + a_{2,p}(x) + \mu_{B,p} \quad , \forall x \in B. \tag{28}$$

Il existe par ailleurs une constante μ_B telle que

$$\sum_{p=1}^n f_p = f - g_0 + \mu_B. \tag{29}$$

En combinant (28) et (29), on obtient une constante μ'_B telle que

$$R(v_jg)(x) - f(x) - \mu'_B = \sum_{p=1}^n (a_{1,p}(x) + a_{2,p}(x) - a_{3,p}(x)) + \mu_B\left(v_j(x) - \fint_B v_j\right), \tag{30}$$

identiquement sur B. Puisque f appartient en fait à $bmo(\mathbb{R}^n)$, on a

$$|\mu_B| = \left|\fint_B (g_0 - f)\right| \leqslant A\left(1 + \log_+ \frac{1}{|B|}\right),$$

pour une constante A ne dépendant que de n et de f. Du lemme 7, on déduit alors

$$\lim_{j\to+\infty}\left(\sup_B \fint_B |\mu_B(v_j - \fint_B v_j)|\right) = 0. \tag{31}$$

En combinant les estimations (27), (31) et l'identité (30), on conclut que $\|f - R(v_jg)\|_{BMO}$ peut être rendu arbitrairement petit.

5.4. Preuve du théorème 7.

L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est un résultat d'Uchiyama [23]. Les assertions (v) $\Rightarrow$ (i) et (iv) $\Rightarrow$ (i) se démontrent comme les assertions correspondantes du théorème 3. La preuve de (i) $\Rightarrow$ (iv) est identique à celle de l'implication (i) $\Rightarrow$ (iv) du théorème 6.

6. Contre-exemples.

6.1. Diversité des sous-espaces.

Rappelons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} bmo(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & BMO(\mathbb{R}^n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ vmo(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & VMO(\mathbb{R}^n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ cmo(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & CMO(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

où les flèches horizontales représentent les restrictions de la surjection canonique q et les flèches verticales les injections canoniques. Nous commencerons par vérifier que les injections canoniques sont strictes.

Proposition 3. — *Il existe une fonction $f \in bmo(\mathbb{R}^n)$ telle que $q(f) \notin VMO(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. — L'exemple est bien connu. Nous le rappelons pour la commodité du lecteur. Soit $f(x) := \rho(|x|)\log|x|$. Soit $B = B(0,\varepsilon)$, avec ε assez petit ; on a

$$\begin{aligned} ⨍_B \left| f - ⨍_B f \right| &\geqslant \frac{1}{2\,|B|^2} \int\!\!\int_{B^2} \left|\log \frac{|x|}{|y|}\right| dx\,dy \\ &= \frac{1}{|B|^2} \int\!\!\int_{|x|\leqslant|y|\leqslant\varepsilon} \left|\log \frac{|x|}{|y|}\right| dx\,dy. \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire montre que l'expression ci-dessus est une constante non nulle, ne dépendant que de n. On voit ainsi que f n'appartient pas à $VMO(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4. — *Il existe une fonction indéfiniment différentiable $f \in vmo(\mathbb{R}^n)$ telle que $q(f) \notin CMO(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. — La fonction $f(x) := \sin x_1$ appartient à $vmo(\mathbb{R}^n)$ car elle est uniformément continue et bornée. Considérons les cubes

$$Q_k := [2k\pi, 2(k+1)\pi]^n \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a $\displaystyle\fint_{Q_k} f = 0$ et $\displaystyle\fint_{Q_k} \left| f - \fint_{Q_k} f \right| = \frac{2}{\pi}$, de sorte que $\gamma_1(f) > 0$.

□

Nous passons maintenant aux flèches horizontales, pour nous assurer qu'aucune d'elles ne représente une surjection.

PROPOSITION 5. — *Il existe une fonction indéfiniment différentiable $f \in CMO(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour toute constante μ, on ait $f + \mu \notin bmo(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. — Elle repose sur une construction de P. Jones et T. Iwaniec (communication personnelle).

LEMME 1. — *Il existe une suite $(\psi_j)_{j\geqslant 1}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$, $\psi_j(x) = 1$ pour $e^{5j} \leqslant |x| \leqslant e^{6j}$, $\psi_j(x) = 0$ en dehors de $e^{4j} \leqslant |x| \leqslant e^{7j}$ et $\|\psi_j\|_{BMO} = O(1/j)$, pour $j \to +\infty$.*

Preuve du lemme. — On se donne une fonction $L \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant L \leqslant 1$, $L(t) = 1$ sur l'intervalle $[5,6]$ et $L(t) = 0$ en dehors de l'intervalle $[4,7]$. Si ψ_j est définie par

$$\psi_j(x) := L\left(\frac{\log|x|}{j}\right),$$

on a $\|\psi_j\|_{BMO} \leqslant \dfrac{2}{j} \|L'\|_\infty \|\log|.|\|_{BMO}$. □

D'après le lemme 1, on a $\|\psi_{2^k}\|_{BMO} = O(2^{-k})$ et $\psi_{2^k} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, de sorte que la série

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} k\, \psi_{2^k} \tag{32}$$

représente un élément de $CMO(\mathbb{R}^n)$. La fonction f est indéfiniment différentiable car la somme qui la définit est localement finie. Soit B_k une boule de rayon 1 incluse dans la couronne $e^{5.2^k} \leqslant |x| \leqslant e^{6.2^k}$; soit μ un nombre complexe. On a

$$\fint_{B_k} |f + \mu| = |k + \mu| \quad , \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi $f+\mu$ n'appartient pas à $bmo(\mathbb{R}^n)$. □

Des théorèmes 1 et 5, il résulte que

$$q(vmo) = VMO \cap q(bmo).$$

Nous allons voir qu'en revanche l'inclusion

$$q(cmo) \subset CMO \cap q(vmo)$$

est stricte.

PROPOSITION 6. — *Il existe une fonction f, de classe C^∞, appartenant à $CMO(\mathbb{R}^n)$ et à $vmo(\mathbb{R}^n)$, telle que, pour toute constante μ, on ait $f+\mu \notin cmo(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. — On reprend les notations de la preuve précédente, en posant cette fois

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{2^k}. \tag{33}$$

Puisque $f \in CMO(\mathbb{R}^n)$, on a *a fortiori* $f \in VMO(\mathbb{R}^n)$. L'encadrement $0 \leqslant f \leqslant 1$ nous donne $f \in bmo(\mathbb{R}^n)$. Soit B'_k une boule de rayon 1 incluse dans la couronne $e^{7.2^k} \leqslant |x| \leqslant e^{8.2^k}$. On a

$$⨍_{B_k} |f+\mu| = |1+\mu| \quad \text{et} \quad ⨍_{B'_k} |f+\mu| = |\mu|,$$

de sorte que $f+\mu$ ne peut appartenir à $cmo(\mathbb{R}^n)$. □

Pour caractériser les fonctions nulles à l'infini en dimension un, on est amené à imposer une condition supplémentaire, à savoir $\gamma_3(f)=0$ (cf. la définition 3). Nous allons voir que cette condition n'est pas superflue.

PROPOSITION 7. — *Il existe une fonction indéfiniment différentiable $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ qui vérifie $\gamma_1(g)=0$ mais n'appartient pas à $cl_{BMO}(BMO_c(\mathbb{R}))$.*

Preuve. — On repart de la fonction f définie par (33). Soit g le prolongement impair de la fonction $f|_{]0,+\infty[}$. Puisque f appartient à $CMO(\mathbb{R})$, on voit aussitôt que $\gamma_1(g)=0$. On a cependant

$$⨍_{[0,e^{6\ 2^N}]} |g| \geqslant e^{-6.2^N} \int_{e^{5\ 2^N}}^{e^{6.2^N}} |g| = 1 - e^{-2^N},$$

pour tout entier $N>0$, de sorte que $\gamma_3(g) \geqslant 1$.

6.2. Quelques rectifications.

1. – E. Stein mentionne que $CMO(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ telles que $M(f) = \gamma_2(f) = 0$ (cf. [21, p. 180]). Cette affirmation est inexacte.

PROPOSITION 8. — *Il existe une fonction indéfiniment différentiable f, appartenant à $vmo(\mathbb{R}^n)$, telle que $\gamma_2(f) = 0$ et $f \notin CMO(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. — On considère le cube Q_k de volume 1 et de centre $k^2 e_1$ ($k \in \mathbb{N}$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$). Soit $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction de support Q_0, telle que $\int g(x)\,dx = 0$. On pose

$$f(x) := \sum_{k \geqslant 0} g(x - k^2 e_1).$$

On a aussitôt $f \in C_b^\infty$, d'où $f \in vmo(\mathbb{R}^n)$. Soit Q un cube de coté t. Soit

$$S := \{k \geqslant 0 \,:\, Q \cap Q_k \neq \varnothing\}.$$

On voit facilement que le cardinal de S est un $O(\sqrt{t})$, uniformément par rapport au centre de Q, quand $t \to \infty$. On a donc

$$⨏_Q |f| = O\left(t^{\frac{1}{2} - n}\right)$$

et *a fortiori*

$$⨏_Q \left| f - ⨏_Q f \right| = O\left(t^{\frac{1}{2} - n}\right).$$

Par contre $⨏_{Q_k} f = 0$, d'où

$$⨏_{Q_k} \left| f - ⨏_{Q_k} f \right| = ⨏_{Q_0} |g| > 0,$$

quel que soit $k \geqslant 0$. Ceci montre que $f \notin CMO(\mathbb{R}^n)$. □

2. – J.M. Angeletti, S. Mazet et Ph. Tchamitchian présentent $VMO(\mathbb{R}^n)$ comme la fermeture, dans $BMO(\mathbb{R}^n)$, de l'ensemble des fonctions uniformément continues *bornées* (voir [1, def. 5 et lem. 6]). L'assertion suivante va nous convaincre qu'il n'en est rien.

Proposition 9. — *Il existe une fonction f, indéfiniment différentiable, qui appartient à $BMO(\mathbb{R}^n)$ ainsi que ses dérivées de tous ordres, dont la distance à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, dans l'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$, est non nulle.*

Preuve. — La démonstration nous a été indiquée par Ph. Tchamitchian et E. Russ. Elle s'appuie sur le théorème suivant de Garnett et Jones [8] : *si $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, la distance de f à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, dans l'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$, est équivalente à la borne inférieure des nombres $\varepsilon > 0$ tels que*

$$(34) \qquad \exists\lambda_0 \quad \forall\lambda \geqslant \lambda_0 \quad \forall Q \quad \left|\left\{x \in Q \,:\, |f(x) - \fint_Q f| > \lambda\right\}\right| \leqslant e^{-\lambda/\varepsilon}|Q|$$

(la quantification porte sur l'ensemble des cubes de côtés parallèles aux axes de coordonnées).

Plaçons-nous d'abord en dimension un. Soit

$$g(x) := (1 - \rho(2|x|)) \log |x|.$$

D'après le lemme 4, la fonction g appartient à $BMO(\mathbb{R})$. De plus g est indéfiniment différentiable et toutes ses dérivées sont bornées; elles appartiennent donc à BMO. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre tel que

$$(35) \qquad \left|\left\{t \in I \,:\, |g(t) - \fint_I g| > \lambda\right\}\right| \leqslant e^{-\lambda/\varepsilon}|I|,$$

pour tout λ assez grand et tout segment I. On va voir que $\varepsilon \geqslant 1$, ce qui nous permettra de conclure. Pour tout $x > 1$, on pose

$$G(x) := \fint_{[1,x]} g(t)\,dt = \frac{x \log x}{x - 1} - 1.$$

Soit λ un nombre tel que

$$(36) \qquad G(x) - \log x < \lambda < G(x).$$

Alors l'intervalle $[1, \exp(G(x) - \lambda)]$ est inclus dans $[1, x]$ et, sur cet intervalle, on a

$$\log t - G(x) < -\lambda.$$

En reportant dans l'inégalité (35), on obtient

$$(37) \qquad \exp(G(x) - \lambda) - 1 \leqslant e^{-\lambda/\varepsilon}(x - 1),$$

pour $x > 1$ et λ assez grand. Posons finalement $\lambda = \frac{1}{2}\log x$. La condition (36) est vérifiée pour x assez grand et l'inégalité (37) entraîne

$$\sqrt{x} \leqslant e\left(1 + x^{-1/2\varepsilon}(x - 1)\right),$$

ce qui impose $1 - (1/2\varepsilon) \geqslant 1/2$, autrement dit $\varepsilon \geqslant 1$.

En dimension supérieure, on considère la fonction

$$f(t,x') := g(t) \quad , \quad \forall (t,x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Soit ε un nombre vérifiant la condition (34). À tout segment I, on associe le cube $Q' := [0, |I|]^{n-1}$. On a

$$\fint_{I \times Q'} f = \fint_I g,$$

de sorte que, pour tout $(t,x') \in I \times Q'$, il vient

$$\left| f(t,x') - \fint_{I \times Q'} f \right| > \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \left| g(t) - \fint_I g \right| > \lambda.$$

La propriété (34) nous donne

$$\left| \left\{ t \in I \, : \, \left| g(t) - \fint_I g \right| > \lambda \right\} \right| \, |I|^{n-1} \leqslant e^{-\lambda/\varepsilon} |I|^n,$$

autrement dit l'inégalité (35). On est ainsi ramené au cas $n = 1$. □

3. – Iwaniec et Sbordone affirment que, pour toute fonction $f \in CMO(\mathbb{R}^n)$, il existe un nombre μ tel que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^n} \int_{|x| \leqslant t} |f(x) - \mu| \, dx = 0 \tag{38}$$

(voir [10, prop. (1.9), p. 186]). Notons que la propriété (38) entraîne

$$\lim_{t \to +\infty} \fint_{B(0,t)} f = \mu. \tag{39}$$

La condition (39) sera mise en défaut par l'assertion suivante.

PROPOSITION 10. — *Il existe une fonction indéfiniment différentiable $f \in CMO(\mathbb{R}^n)$, telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$ et*

$$0 = \liminf_{t \to +\infty} \fint_{B(0,t)} f < \limsup_{t \to +\infty} \fint_{B(0,t)} f = 1.$$

Preuve. — On utilise à nouveau la fonction f définie en (33). On va estimer les moyennes de f sur les boules centrées à l'origine de rayons respectifs

$$t := e^{4.2^N} \quad , \quad t' := e^{6.2^N}.$$

On a

$$\fint_{B(0,t')} f \geqslant \frac{1}{|B(0,t')|} \int_{e^{5.2^N} \leqslant |x| \leqslant e^{6\ 2^N}} \psi_{2^N} = \frac{e^{6n2^N} - e^{5n2^N}}{e^{6n2^N}} = 1 - e^{-n2^N},$$

qui tend vers 1 quand $N \to \infty$. En revanche, il vient

$$\fint_{B(0,t)} f \leqslant \frac{1}{|B(0,t)|} \sum_{k=1}^{N-1} \int \psi_{2^k}(x)\,dx \leqslant \frac{1}{|B(0,t)|} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{|x| \leqslant e^{7\ 2^k}} dx$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{N-1} \frac{e^{7n2^k}}{e^{4n2^N}} \leqslant (N-1)\,\frac{e^{7n2^{N-1}}}{e^{4n2^N}} = (N-1)\,e^{-n2^{N-1}},$$

qui tend vers 0 quand $N \to \infty$. □

Remarque. — En utilisant la formule (32), on obtiendrait de la même façon une fonction $f \in CMO(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\limsup_{t \to +\infty} \fint_{B(0,t)} f = +\infty.$$

7. Appendice.

7.1. Un lemme d'analyse fonctionnelle.

Le résultat suivant est un énoncé classique d'analyse fonctionnelle, utilisé notamment dans la démonstration du théorème de l'application ouverte (cf. Rudin [17, 5.6]).

LEMME 2. — *Soient E, F des espaces de Banach et T une application linéaire continue de E dans F. On suppose qu'il existe un sous-espace dense G de F et une constante $c > 0$ tels que, pour tout $f \in G$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in E$ vérifiant*

$$\|g\|_E \leqslant c\|f\|_F \quad \text{et} \quad \|f - T(g)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Alors T est une application surjective.

7.2. Quelques propriétés des fonctions de BMO.

LEMME 3. — *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\left| \fint_B f - \fint_{B'} f \right| \leqslant c \left(1 + \left| \log \frac{|B'|}{|B|} \right| \right) \|f\|_{BMO},$$

pour toutes boules B, B' de $\mathbb{R}^n$ telles que $B \cap B' \neq \varnothing$ et toute fonction $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. La même estimation est vérifiée si on remplace $\mathbb{R}^n$ par un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

LEMME 4. — *Soit B une boule de $\mathbb{R}^n$. Pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante $A > 0$, ne dépendant que de g, B et n, telle que*

$$\|gf\|_{bmo} \leqslant A \left(\|f\|_{BMO} + \left| \fint_B f \right| \right),$$

pour tout $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

LEMME 5. — *Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que*

$$c_1 \|f\|_{bmo} \leqslant \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \|(\tau_k \theta) f\|_{bmo} \leqslant c_2 \|f\|_{bmo},$$

pour toute fonction f, localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

Le premier lemme est bien connu (voir par exemple [7]). Le second est une variante du théorème de Stegenga sur les multiplicateurs ponctuels de $BMO(\mathbb{T})$ (voir [20], [3, lem. 11] et [18, 4.9.1, th. 2]). Le troisième, qu'on appelle la *propriété de localisation* de l'espace $bmo(\mathbb{R}^n)$, apparaît dans la thèse de Marschall [15]. □

Pour formuler le lemme suivant, il sera commode d'introduire une notation. Si E est un EBD, $W^1(E)$ désigne l'espace de Sobolev de base E, autrement dit l'ensemble des distributions f telles que $f \in E$ et $\partial_j f \in E$, pour $j = 1, \ldots, n$.

LEMME 6. — *On dispose des plongements suivants :*

$$W^1(BMO(\mathbb{R}^n)) \subset C_u(\mathbb{R}^n) \quad , \quad W^1(bmo(\mathbb{R}^n)) \subset C_u \cap C_b(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. — On sait que $BMO(\mathbb{R}^n)$ s'injecte dans l'espace de Besov homogène $\dot{B}^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que $W^1\left(BMO(\mathbb{R}^n)\right)$ s'injecte dans l'espace de Zygmund homogène $\dot{B}^1_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$, lui-même inclus dans $C_u(\mathbb{R}^n)$. On a de même

$$W^1\,(bmo(\mathbb{R}^n)) \subset B^1_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

7.3. Estimations de la suite (v_j).

LEMME 7. — *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\fint_B |v_j - \fint_B v_j| \leqslant c \min\left(\frac{1}{j}, \frac{|B|^{1/n}}{j2^j}, \frac{4^{jn}}{|B|}\right),$$

pour toute boule B de $\mathbb{R}^n$ et tout $j \geqslant 1$.

Preuve. — Par définition de v_j, on a

$$\|v_j\|_{BMO} \leqslant 2j^{-1}\|\rho'\|_\infty \|\log_2|.|\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}.$$

On a en outre

$$\nabla v_j(x) = \frac{1}{j\log 2}\rho'\left(\frac{\log_2|x|}{j}\right)\frac{x}{|x|^2},$$

ce qui donne

$$\|\nabla v_j\|_\infty \leqslant \frac{c}{j2^j}, \tag{40}$$

d'où

$$\fint_B |v_j - \fint_B v_j| \leqslant \fint_B\fint_B |v_j(x) - v_j(y)|\,dx\,dy \leqslant \frac{c}{j2^j}\fint_B\fint_B |x-y|\,dx\,dy$$

et l'on voit facilement que

$$\fint_B\fint_B |x-y|\,dx\,dy = c\,|B|^{1/n}.$$

Il vient enfin

$$\fint_B |v_j - \fint_B v_j| \leqslant 2\fint_B v_j \leqslant |B|^{-1}\int_{|x|\leqslant 4^j} dx = c\frac{4^{jn}}{|B|}.$$

□

On va maintenant préciser le lemme 4 en montrant qu'au cas où $g = v_j$, la constante A est indépendante de j.

LEMME 8. — *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|v_j f\|_{BMO} \leqslant c\left(\|f\|_{BMO} + \left|\fint_{B_0} f\right|\right),$$

pour toute fonction $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ et tout entier $j \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. — Désignons par B_j la boule $B(0, 4^j)$. Alors il existe $c > 0$ tel que

$$\left|\log \frac{|B|}{|B_j|}\right| \fint_B |v_j - \fint_B v_j| \leqslant c, \tag{41}$$

quels que soient la boule B et l'entier j. Pour le vérifier, il suffit d'examiner successivement les cas $|B| \geqslant 16^{jn}|B_0|$, $1 \leqslant |B| < 16^{jn}|B_0|$ et $|B| < 1$, en appliquant le lemme 7. Si $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, il vient

$$\fint_B \left|fv_j - \left(\fint_B f\right)\left(\fint_B v_j\right)\right| \leqslant \fint_B \left|f - \fint_B f\right| + \left|\fint_B f\right| \fint_B \left|v_j - \fint_B v_j\right|. \tag{42}$$

On peut supposer que $B \cap B_j \neq \varnothing$, auquel cas le lemme 3 nous conduit à

$$\left|\fint_B f\right| \leqslant c\left(j + \left|\log \frac{|B|}{|B_j|}\right|\right) \|f\|_{BMO} + \left|\fint_{B_0} f\right|. \tag{43}$$

En combinant les inégalités (41)-(43), on obtient

$$\fint_B \left|fv_j - \left(\fint_B fv_j\right)\right| \leqslant c\left(\|f\|_{BMO} + \left|\fint_{B_0} f\right|\right),$$

quels que soient la boule B et l'entier $j > 0$.

7.4. Extension des fonctions de BMO.

Il est utile de disposer d'un théorème d'extension pour les fonctions de $BMO(\Omega_t)$. En dimension un, la non-connexité de Ω_t complique la situation. Aussi traiterons-nous d'abord ce cas.

LEMME 9. — *Si $f \in BMO(]0, +\infty[)$, alors f est localement intégrable sur $[0, +\infty[$ et l'on a*

$$\fint_I \left|f - \fint_I f\right| \leqslant \|f\|_{BMO(]0,+\infty[)}, \tag{44}$$

pour tout segment $I \subset [0, +\infty[$.

Preuve. — Il nous suffit d'établir que f est intégrable sur $[0,1]$. Pour cela, on considère les segments $I_j = [2^{-j}, 2^{-j+1}]$, pour $j \in \mathbb{N}^*$. D'après le lemme 3, on a

$$\fint_{I_j} |f| = O(j) \quad \text{pour} \quad j \to +\infty,$$

de sorte que

$$\int_0^1 |f| \leqslant A \sum_{j \geqslant 1} j 2^{-j} < +\infty.$$

Pour obtenir (44), on considère les segments $I \cap [1/k, +\infty[$ et on fait tendre k vers l'infini.

PROPOSITION 11. — *Pour toute fonction f définie sur $]0,+\infty[$, on considère le prolongement pair de f, que l'on note $E(f)$. Alors E est un opérateur linéaire borné de $BMO(]0,+\infty[)$ dans $BMO(\mathbb{R})$.*

Preuve. — D'après le lemme 9, la fonction $E(f)$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Considérons un intervalle $[-a,b]$, avec $a, b > 0$. Si μ est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, \max(a,b)]$, on a

$$\begin{aligned} \fint_{[-a,b]} |E(f) - \mu| &= \frac{1}{a+b} \left(\int_0^a |f-\mu| + \int_0^b |f-\mu| \right) \\ &\leqslant \frac{2}{\max(a,b)} \int_0^{\max(a,b)} |f-\mu| \leqslant 2\|f\|_{BMO(]0,+\infty[)}; \end{aligned}$$

d'où finalement $\|E(f)\|_{BMO(\mathbb{R})} \leqslant 4\|f\|_{BMO(]0,+\infty[)}$.

COROLLAIRE 1. — *Pour tout réel t, il existe un opérateur linéaire borné*

$$E_t : BMO(]t,+\infty[) \to BMO(\mathbb{R}),$$

tel que toute fonction $f \in BMO(]t,+\infty[)$ soit la restriction de $E_t(f)$ à $]t,+\infty[$. De plus la norme de E_t est indépendante de t.

Preuve. — Il suffit de poser $E_t f(x) = f(2t-x)$ pour $x < t$. La proposition 11 et l'invariance de BMO par translation permettent de conclure. □

L'extension impaire d'une fonction de $BMO(]0,+\infty[)$ suppose une condition supplémentaire que nous allons formuler maintenant.

PROPOSITION 12. — *Soit f une fonction localement intégrable impaire sur $\mathbb{R}$. Alors f appartient à $BMO(\mathbb{R})$ si et seulement si $f|_{]0,+\infty[} \in BMO(]0,+\infty[)$ et*

$$K(f) := \sup_{a>0} ⨍_{[0,a]} |f| < +\infty;$$

on a en outre

$$\max\left(\|f\|_{BMO(]0,+\infty[)}, K(f)\right) \leqslant \|f\|_{BMO(\mathbb{R})} \leqslant 2\max\left(\|f\|_{BMO(]0,+\infty[)}, K(f)\right).$$

Preuve. — Si f est impaire et appartient à $BMO(\mathbb{R})$, on a

$$⨍_{[0,a]} |f| = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\left|f - \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f\right| \leqslant \|f\|_{BMO(\mathbb{R})}.$$

Réciproquement, si $f|_{]0,+\infty[} \in BMO(]0,+\infty[)$ et $K(f) < +\infty$, on a

$$⨍_{[-a,b]} |f| = \frac{1}{a+b}\left(\int_0^a |f| + \int_0^b |f|\right) \leqslant K(f),$$

d'où

$$⨍_{[-a,b]}\left|f - ⨍_{[-a,b]} f\right| \leqslant 2K(f).$$

LEMME 10. — *Soit une fonction $f \in BMO(]0,+\infty[)$ telle que $K(f) < +\infty$. On a*

$$⨍_{[a,b]} |f| \leqslant K(f) + c\|f\|_{BMO(]0,+\infty[)},$$

pour tous réels a, b vérifiant la condition $0 < a \leqslant b/2$.

Preuve. — D'après le lemme 3, on a

$$\left|⨍_{[a,b]} |f| - ⨍_{[0,b]} |f|\right| \leqslant c\left(1 + \left|\log\frac{b}{b-a}\right|\right)\|f\|_{BMO(]0,+\infty[)}$$

et la condition $b \geqslant 2a$ implique $1 \leqslant \frac{b}{b-a} \leqslant 2$.

PROPOSITION 13. — *Soit $n > 1$. Pour tout $t > 0$, il existe un opérateur linéaire borné $E_t : BMO(\Omega_t) \to BMO(\mathbb{R}^n)$ tel que $E_t(f)|_{\Omega_t} = f$ pour tout $f \in BMO(\Omega_t)$. De plus la norme de E_t est indépendante de t.*

Preuve. — Le cas $t = 1$ résulte du théorème d'extension de P. Jones [13]. L'invariance isométrique de $BMO(\mathbb{R}^n)$ par dilatations donne le cas général.

8. Notes bibliographiques et commentaires.

L'espace $VMO(\mathbb{R}^n)$ a été défini initialement par Sarason [19]. L'espace $CMO(\mathbb{R}^n)$ a été introduit par Coifman et Weiss [6], qui le notaient d'ailleurs comme l'espace de Sarason. Neri [16] et Janson [11] ont proposé la notation $CMO(\mathbb{R}^n)$ pour éviter la confusion; cependant Lakey [14] l'utilise pour désigner un *autre* espace fonctionnel proche de BMO. Les sigles VMO et CMO signifient respectivement "vanishing mean oscillation" et "continuous mean oscillation". Le fait que cette terminologie soit ou non adéquate ne sera pas discuté ici.

L'ambiguïté de la notation $VMO(\mathbb{R}^n)$ a pu être à l'origine d'erreurs. C'est ainsi que D.C. Chang, pensant que $VMO(\mathbb{R}^n)$ est la fermeture de $C_0(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$, affirme à tort que l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $VMO(\mathbb{R}^n)$ (cf. [4], notamment la remarque de la page 79).

Dans son article de 1975, Umberto Neri définit $CMO(\mathbb{R}^n)$ comme l'image de $C_0(\mathbb{R}^n)^{n+1}$ par l'opérateur R. Neri mentionne sans démonstration l'équivalence des propriétés (iii) et (iv) de notre théorème 7. Se fondant sur une information de Charles Fefferman, il en attribue la paternité à Herz, Strichartz et Sarason (cf. [16, p. 186]). Consulté en 2001, Bob Strichartz expliquait à l'auteur qu'il n'a pas publié le résultat, car il croyait la preuve de Sarason antérieure. De son côté, Don Sarason affirme ne rien avoir démontré de tel.

Pour Uchiyama [23], $CMO(\mathbb{R}^n)$ est, comme pour nous, la fermeture de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$. Il établit l'équivalence des propriétés (i) et (iii) de notre théorème 7, mais il ignore la condition (iv).

L'idée d'utiliser le commutateur $[v, R_p]$ remonte à l'article de Coifman, Rochberg et Weiss [5], où est établie l'estimation

$$\| [v, R_p] \|_{\mathcal{L}(L^s(\mathbb{R}^n))} \leqslant c(s) \, \|v\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}, \tag{45}$$

pour tout $1 < s < +\infty$. On a repris ici, en l'adaptant au cas $s = +\infty$, la méthode utilisée par Strömberg pour prouver l'estimation (45) (cf. [22, pp. 417-419]).

Voici quelques prolongements possibles de notre travail :

1) Définir dans $bmo(\mathbb{R}^n)$ une notion de fonction nulle à l'infini analogue à celle de la définition 3 et montrer qu'elle caractérise $cl_{bmo}(bmo_c)$.

2) Établir qu'une fonction $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ est nulle à l'infini si et seulement si $\gamma_2(f) = 0$ et $\gamma_B(f) = 0$ pour toute boule B.

Il est par ailleurs raisonnable de conjecturer pour $BMO(\mathbb{R}^n)$ un résultat analogue au théorème 4, à savoir que la fermeture de $C^\infty \cap BMO$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$ est égale à $(VMO)_{\text{loc}} \cap BMO$. La difficulté, c'est qu'on ne dispose pas d'une propriété de localisation analogue au lemme 5.

Les erreurs relevées par Iwaniec et Tchamitchian dans leurs articles ([1], [10]) n'ont heureusement aucune répercussion sur les résultats contenus dans les susdits. C'est ce que souligne Iwaniec dans une communication personnelle : "The error we have made with Carlo Sbordone is on the commentary side of our paper and as such has no effect on any result therein."

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. ANGELETTI, S. MAZET and Ph. TCHAMITCHIAN, Analysis of second order elliptic operators whitout boundary conditions and with VMO or Hölderian coefficients, Multiscale Wavelet Methods for PDEs, W. Dahmen, A.J. Kurdila, and P. Oswald (eds.), Academic Press 1997, 495-539.

[2] G. BOURDAUD, Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien, 2ième édition, Pub. Math. Univ. Paris 7 (1995).

[3] G. BOURDAUD, M. LANZA de CRISTOFORIS and W. SICKEL, Functional calculus on BMO and related spaces, J. Funct. Anal., 189 (2002), 515-538.

[4] D.C. CHANG, The dual of Hardy spaces on a bounded domain in $\mathbb{R}^n$, Forum Math., 6 (1994), 65-81.

[5] R. COIFMAN, R. ROCHBERG and G. WEISS, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, Ann. of Math., 103 (1976), 611-635.

[6] R. COIFMAN and G. WEISS, Extension of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1977), 569-645.

[7] C. FEFFERMAN and E.M. STEIN, H^p spaces of several variables, Acta Math., 129 (1972), 137-193.

[8] J.B. GARNETT and P.W. JONES, The distance in BMO to L^∞, Ann. of Math., 108 (1978), 373-393.

[9] D. GOLDBERG, A local version of real Hardy space, Duke Math. J., 46 (1979), 27-42.

[10] T. IWANIEC and C. SBORDONE, Riesz transforms and elliptic PDEs with VMO coefficients, J. Anal. Math., 74 (1998), 183-212.

[11] S. JANSON, On functions with conditions on mean oscillation, Ark. Mat., 14 (1976), 189-196.

[12] F. JOHN and L. NIRENBERG, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 415-426.

[13] P.W. JONES, Extension theorems for BMO, Indiana Univ. Math. J., 29 (1980), 41-66.

[14] J.D. LAKEY, Constructive decomposition of functions of finite central mean oscillation. Proc. Amer. Math. Soc., 127 (1999), 2375–2384.

[15] J. MARSCHALL, Pseudo-differential operators with non-regular symbols, Thèse FU Berlin, 1985.

[16] U. NERI, Fractional integration on the space H^1 and its dual, Studia Math., 53 (1975), 175-189.

[17] W. RUDIN, Analyse réelle et complexe, Masson, Paris, 1975.

[18] T. RUNST and W. SICKEL, Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations, De Gruyter, 1996.

[19] D. SARASON, Functions of vanishing mean oscillation, Trans. Amer. Math. Soc., 207 (1975), 391-405.

[20] D.A. STEGENGA, Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation, Amer. J. Math., 98 (1976), 573-589.

[21] E.M. STEIN, Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals, Princeton University Press, Princeton, 1993.

[22] A. TORCHINSKY, Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, 1986.

[23] A. UCHIYAMA, On the compactness of operators of Hankel type, Tôhoku Math. J., 30 (1978), 163-171.

Manuscrit reçu le 15 octobre 2001,
accepté le 10 janvier 2002.

Gérard BOURDAUD,
Institut de Mathématiques de Jussieu
Équipe d'Analyse Fonctionnelle
Case 186, 4 place Jussieu
75252 Paris cedex 05 (France).
bourdaud@ccr.jussieu.fr