Annales de l'institut Fourier

Gabriel Mokobodzki

Nouvelle méthode pour démontrer la paracompacité des espaces métrisables

Annales de l'institut Fourier, tome 14, n^o 2 (1964), p. 539-542

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_539_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble,
14, 2 (1964), 539-542.

NOUVELLE MÉTHODE POUR DÉMONTRER LA PARACOMPACITÉ DES ESPACES MÉTRISABLES

par Gabriel MOKOBODZKI.

Nous utiliserons la terminologie et les notations de Bourbaki.

1. Soit (E, d) un espace métrique et soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert de E.

THÉORÈME 1. — *Il existe une partition continue de l'unité subordonnée à* $\mathfrak{U}$.

Démonstration. — On considère des familles $\mathcal{F} = (p_i)_{i \in I}$ de fonctions numériques continues, positives, sur E, ayant les propriétés suivantes :

a) pour tout $i \in I$, l'ouvert $(p_i > 0)$ est contenu dans un ouvert $U \in \mathfrak{U}$ et $p_i \neq 0$.

b)
$$\sum_{\iota \in I} p_\iota = p \leqslant 1.$$

c) Pour tous $y, y' \in E$, $|p(y) - p(y')| \leqslant d(y, y')$, de sorte que p est toujours continue.

Exemple d'une telle famille.

Soit $x \in E$; il existe $r \in R^+$, $0 < r \leqslant 1$ et un ouvert $U \in \mathfrak{U}$, tels que la boule ouverte de centre x et de rayon r soit contenue dans U. La fonction numérique p définie, pour tout $y \in E$, par $p(y) = (r - d(y, x))^+$ est non nulle, et pour tous $y, y' \in E$, $|p(y) - p(y')| \leqslant d(y, y')$.

La famille $\mathcal{F} = \{p\}$ satisfait bien aux conditions a), b), c). Nous aurons besoin du lemme suivant qu'on démontre par passage à la limite en se ramenant au cas fini.

LEMME 1. — *Soit* $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ *une famille de fonctions numriéques sur* E *telle que, pour tout* $\alpha \in A$ *et pour tout* $y, y' \in E$, *on ait*

$$|f_\alpha(y) - f_\alpha(y')| \leqslant d(y, y').$$

Si $f = \sup_{\alpha\in A} f_\alpha$ (resp. $g = \inf_{\alpha\in A} f_\alpha$) *est finie, alors pour tous* $y, y' \in E$, *on a*

$$|f(y) - f(y')| \leqslant d(y, y')$$
$$(\text{resp. } |g(y) - g(y')| \leqslant d(y, y')).$$

Ce lemme étant admis, revenons aux familles $\mathcal{F} = (p_i)_{\iota\in I}$ satisfaisant aux conditions a), b), c).

L'ensemble de ces familles, ordonné par inclusion est inductif, et cet ensemble n'est pas vide.

D'après le lemme de Zorn, soit donc $\mathcal{F} = (p_\iota)_{\iota\in I}$ une famille maximale.

On va montrer que $p = \sum_{\iota\in I} p_i$ est strictement positive en tout point de E.

En effet, soient $x \in E$, $U \in \mathfrak{U}$, $B_{x,r}$ une boule ouverte, de rayon $r \leqslant 1$, contenue dans U.

La fonction numérique $f_x : y \rightsquigarrow (r - d(y, x))^+$ est continue, positive et $0 \leqslant f_x \leqslant 1$. Posons $p' = \sup(p, f_x)$; on a donc encore pour tous $y, y' \in E$, $|p'(y) - p'(y')| \leqslant d(y, y')$.

Posons encore $p_\alpha = p' - p \geqslant 0$.

La famille $\mathcal{F}$ étant maximale, on a $p_\alpha \equiv 0$, ou encore $p \geqslant f_x$, et comme $f_x(x) = r > 0$, on a bien $p(x) > 0$.

On obtient une partition continue de l'unité subordonnée à $\mathfrak{U}$ en posant, pour tout $i \in I$

$$f_i = \frac{p_i}{p} \qquad \text{et alors} \qquad \sum_\iota f_i = 1.$$

2. Soit E un espace topologique quelconque.

THÉORÈME 2. — *Soit* $(p_i)_{i\in I}$ *une partition continue de l'unité sur* E.

Il existe alors une famille $(f_\iota)_{\iota\in I}$ *de fonctions numériques continues* $\geqslant 0$, *formant une partition de l'unité et telle que*

1° *Pour tout* $i \in I$, *le support fermé de* f_i *est contenu dans l'ouvert* $(p_i > 0)$.

2° *Les supports fermés des fonctions* f_i *forment une famille localement finie.*

Démonstration. — Posons $d(x, y) = \sup_{\iota \in I} |p_i(x) - p_i(y)|$ pour tous $x, y \in E$. On obtient ainsi un écart borné sur E et l'on va voir qu'il est aussi continu sur E. Soit $x \in E$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe J fini, $J \subset I$ tel que $\sum_{\iota \in J} p_i(x) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

La fonction $f = \sum_{j \notin J} p_j$ est continue sur E et $f(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe donc un voisinage ω de x tel que

$$(x' \in \omega) \Longrightarrow |p_i(x') - p_i(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall i \in J$$

et $f(x') < \varepsilon$; d'où finalement, pour tout $\iota \in I$, $|p_i(x) - p_i(x')| \leqslant \varepsilon$ ou encore

$$(x' \in \omega) \Longrightarrow d(x, x') \leqslant \varepsilon.$$

On introduit maintenant, les fonctions

$$\varphi = \sup_{i \in I} p_i \quad \text{et pour tout } x \in E,$$
$$\theta_x = \sup_{p_j(x) < \frac{1}{2}\varphi(x)} p_j.$$

On remarquera que pour tout $x \in E$, il existe un indice j tel que $\theta_x(x) = p_j(x)$ de sorte que

$$\theta_x(x) < \frac{1}{2}\varphi(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

LEMME 2. — *Les fonctions* φ, θ_x, $x \in E$, *sont continues.*

D'après notre lemme 1, on a, pour tous $y, y' \in E$, $x \in E$

$$|\varphi(y) - \varphi(y')| \leqslant d(y, y')$$

et

$$|\theta_x(y) - \theta_x(y')| \leqslant d(y, y').$$

Le lemme 2 résulte alors de la continuité de l'écart d. Considérons maintenant la famille des fonctions

$$p'_i = \left(p_i - \frac{1}{2}\varphi\right)^+.$$

Cette famille possède les propriétés suivantes :

1° $0 \leqslant p'_i \leqslant p_i$, p'_i est continue, $\forall i \in I$.

2° Pour tout $x \in E$, il existe $i \in I$ tel que $p'_i(x) > 0$, (par exemple $i \in I$ tel que $p_i(x) > \frac{1}{2}\varphi(x)\Big)$.

3° Pour tout $i \in I$, le support fermé de p'_i est contenu dans l'ouvert $(p_i > 0)$.

4° Pour tout $x \in E$, l'ouvert $\left(\theta_x < \frac{\varphi}{2}\right)$ contient x, ne rencontre que les supports des fonctions p'_i telles que

$$p_i(x) \geqslant \frac{1}{2}\varphi(x) > 0,$$

et il y a seulement un nombre fini de telles fonctions p_i, puisque la somme $\sum_{i \in I} p_i\,(x) = 1$.

5° La fonction $p' = \sum_{i \in I} p'_i$ est continue et pour tout $x \in E$, $p'(x) > 0$.

En effet, pour tout $i \in I$, on peut écrire $p_i = p'_i + p''_i$ où p''_i est $\geqslant 0$.

Les fonctions $p' = \sum_{i \in I} p'_i$ et $p'' = \sum_{i \in I} p''_i$ sont semi-continues inférieurement et de somme $p' + p'' = \sum_{i \in I} p_i = 1$, de sorte que p' est continue. Ceci étant établi, la famille de fonctions $f_i = \frac{p'_i}{p'}$ $i \in I$, satisfait aux conditions du théorème 2.

COROLLAIRE. — *Soit* (E, d) *un espace métrique.*

1° L'espace topologique E est paracompact.

2° Pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de E, il existe une partition continue de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ subordonnée à $\mathfrak{U}$ et telle que la famille des ouverts $(p_i > 0)_{i \in I}$ soit localement finie.

Manuscrit reçu en novembre 1964

Gabriel MOKOBODZKI,
102, avenue de Saint-Mandé,
Paris, 12e.