ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Emmanuel FRICAIN

Complétude des noyaux reproduisants dans les espaces modèles

Tome 52, n° 2 (2002), p. 661-686.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_2_661_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 2 (2002), 661–686

COMPLÉTUDE DES NOYAUX REPRODUISANTS DANS LES ESPACES MODÈLES

par Emmanuel FRICAIN

1. Introduction.

Nous notons par $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité, par $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité et pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$,

$$H^p = \{f : \mathbb{D} \longmapsto \mathbb{C} \text{ holomorphe} : \sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p \, dm(\zeta) < \infty\}$$

désigne l'espace de Hardy du disque unité. De façon habituelle, on identifiera H^p avec le sous-espace des fonctions $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour lesquelles $\hat{f}(n) = 0$, $n < 0$. Rappelons qu'une fonction $\Theta \in H^\infty$ est dite intérieure si $|\Theta(\zeta)| = 1$ pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$. On associe à toute fonction intérieure le sous-espace

$$K^p_\Theta := H^p \cap \Theta \overline{H^p_0},$$

où $H^p_0 = \{f \in H^p : f(0) = 0\}$ et la barre désigne la conjugaison complexe. En considérant la dualité naturelle entre H^p et $H^{p'}$, définie par

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} \, dm(\zeta), \quad f \in H^p, \ g \in H^{p'},$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on peut définir de façon équivalente K^p_Θ comme l'ensemble des fonctions $f \in H^p$ pour lesquelles

$$\langle f, \Theta g \rangle = 0, \quad \forall g \in H^{p'}.$$

Mots-clés : Espaces de Hardy – Noyaux reproduisants – Complétude – Systèmes d'exponentielles.
Classification math. : 46E22 – 30C40 – 30D55 – 47A15 – 47B32 – 47B38.

Par conséquent, K^p_Θ correspond à l'ensemble des formes linéaires de $H^{p'}$ qui s'annulent sur le sous-espace $\Theta H^{p'}$. Pour $p = 2$, on notera $K_\Theta = K^2_\Theta$. De plus, dans le cas où $1 < p < +\infty$, il résulte du théorème de Beurling (voir [Gar81], chapitre II) que tout sous-espace propre fermé et invariant par l'action de l'opérateur $S^* : f \longmapsto \frac{f-f(0)}{z}$ est du type K^p_Θ et inversement. En dehors de leur intérêt propre, ces sous-espaces K^p_Θ possèdent un lien étroit avec des sujets tels que l'approximation rationnelle (voir [Dya], [Hay90], [Sar94]), les opérateurs de Toeplitz (voir [DSS70], [Dya94b]) et la théorie spectrale des opérateurs linéaires généraux (voir [Nik86]). Dans cet article, nous nous intéressons aux noyaux reproduisants des sous-espaces $K^{p'}_\Theta$, c'est-à-dire aux fonctions $k_\Theta(.,\lambda) \in K^p_\Theta$ pour lesquelles

$$f(\lambda) = \langle f, k_\Theta(.,\lambda)\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{D},\ f \in K^{p'}_\Theta$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ représente la dualité entre K^p_Θ et $K^{p'}_\Theta$. Dans le cas où $1 < p < +\infty$, le sous-espace ΘH^p est complémenté dans H^p car les projections standard $\Theta P_+\overline{\Theta}$ et $P_\Theta := I - \Theta P_+\overline{\Theta} = \Theta P_-\overline{\Theta}$ sont bornées sur H^p (par le théorème de Riesz, voir [Dur70]). Ici P_+ désigne la projection de Riesz $(P_+f)(z) = \sum_{n\geqslant 0}\hat{f}(n)z^n)$. On a donc $H^p = P_\Theta H^p + (I - P_\Theta)H^p = P_\Theta H^p + \Theta H^p$, d'où $K^p_\Theta = P_\Theta H^p$. De plus, il est facile de voir que $k_\Theta(.,\lambda) = P_\Theta k_\lambda$, où $k_\lambda = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}$ est le noyau de Cauchy classique et un petit calcul montre alors que

$$k_\Theta(.,\lambda) = \frac{1-\overline{\Theta(\lambda)}\Theta}{1-\overline{\lambda}z}$$

(voir [HNP81] ou [Nik86]). Dans cet article, nous allons étudier deux problèmes relatifs à la complétude des suites de noyaux reproduisants dans l'espace K^p_Θ. Rappelons qu'une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'un espace de Banach $\mathcal{X}$ est dite complète dans $\mathcal{X}$ si l'enveloppe linéaire fermée engendrée par les x_n, notée $\operatorname{span}\{x_n : n \geqslant 1\}$, est égale à $\mathcal{X}$. Dans notre cas, en utilisant le théorème de Hahn-Banach, il est facile de voir qu'une suite de noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ sera complète dans K^p_Θ si et seulement si l'implication suivante:

$$\left(f \in K^{p'}_\Theta,\ f(\lambda_n) = 0,\ n \geqslant 1\right) \Longrightarrow f \equiv 0$$

est vraie pour toute fonction $f \in K^{p'}_\Theta$. Par conséquent, étudier la complétude d'une suite de noyaux reproduisants $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ dans K^p_Θ se ramène à étudier si la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ peut être incluse ou non dans l'ensemble des zéros d'une fonction de $K^{p'}_\Theta$ non identiquement nulle. La question naturelle qui se pose alors est de chercher un critère, en langage de $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ et Θ, pour que la suite $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ soit complète dans

K^p_Θ. Étant donné $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, il est facile de montrer que la suite $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K^p_Θ, pour toute fonction intérieure Θ, si et seulement si la suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas de Blaschke, c'est-à-dire si

$$\sum_{n\geqslant 1}(1-|\lambda_n|) = +\infty.$$

Par conséquent, la véritable question qui se pose est : étant donné $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, une suite de Blaschke sans multiplicité, et Θ une fonction intérieure fixée, peut-on trouver un critère suffisamment explicite de complétude pour la suite $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ dans K^p_Θ ?

Cette question est encore ouverte même pour le cas particulier des exponentielles. Rappelons que si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$, $a > 0$, et $\Theta_a := \exp\left(a\frac{z+1}{z-1}\right)$, l'espace K_{Θ_a} s'identifie de façon unitaire à l'espace $L^2(0,a)$ et la complétude de la suite $(k_{\Theta_a}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ dans K_{Θ_a} est équivalente à la complétude de la suite $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ dans $L^2(0,a)$, $\mu_n := i\frac{1+\lambda_n}{1-\lambda_n}$ (voir [HNP81] ou [Nik86]). Même dans ce cas particulier donc, on ne connaît pas de critère géométrique portant sur les fréquences $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$. Les travaux les plus avancés restent ceux de A. Beurling et P. Malliavin qui ont donné une méthode pour calculer le rayon de complétude d'une suite d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ en fonction d'une certaine densité (voir [BM62] et [BM67] pour les travaux originaux, [KT90] pour une réinterprétation de ces résultats, [Red77] et [Koo96] pour une présentation très complète du sujet).

Dans cet article, nous allons étudier deux problèmes plus particuliers relatifs à cette complétude des noyaux reproduisants. Le premier problème auquel nous nous intéressons est un problème de stabilité :

on se donne $1 < p < +\infty$, *une suite* $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ *et* Θ_1 *une fonction intérieure de* H^∞ *tels que le système* $(k_{\Theta_1}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est complet dans* $K^p_{\Theta_1}$. *Si on perturbe la suite* Λ *ou (et) la fonction intérieure* Θ_1, *est-ce-que le nouveau système* $(k_{\Theta_2}(.,\lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ *est complet dans* $K^p_{\Theta_2}$ *?*

Le deuxième problème concerne la complétude de la biorthogonale associée aux noyaux reproduisants de $K_\Theta := K^2_\Theta$:

si $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est une suite minimale et complète dans* K_Θ, *la question naturelle qui se pose est de savoir si la biorthogonale associée à cette suite est aussi complète dans* K_Θ.

Le premier problème peut être motivé par plusieurs raisons. D'une part, nous avons vu que le problème général de complétude dans lequel s'inscrit ce problème de stabilité est très difficile et loin d'être résolu.

D'autre part, dans beaucoup de cas, la famille donnée est une petite perturbation d'une famille dont on sait déjà qu'elle est complète. Un critère de stabilité permettrait donc, dans beaucoup d'applications, et notamment en théorie du contrôle, de prouver la complétude des noyaux reproduisants.

Il faut également signaler que ce problème de stabilité est lié au problème d'unicité fondamental suivant : étant donnée $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une famille complète dans un espace de Banach E, on cherche à caractériser $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ tel que si $f \in E^*$, alors

$$\Big(|\langle f, e_n\rangle| \leqslant \varepsilon_n \|f\|, \quad (\forall n \geqslant 1)\Big) \Longrightarrow f \equiv 0. \tag{1}$$

Il est facile de voir que ce problème d'unicité est équivalent à la stabilité de la complétude de la suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ sous l'effet de petites perturbations en norme contrôlées par ε_n.

Remarquons que le problème de l'existence d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ vérifiant (1) a été résolu par V. Gurarii et M. Meletidi (voir [GM]). Mais ce théorème est un résultat de pure existence et il reste le problème de trouver une estimation sur la décroissance des suites $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ qui garantissent l'unicité ou la stabilité de la complétude. Le problème d'unicité précédent a été abondamment étudié dans le cas où $E^* = H^\infty(\mathbb{D})$ et $e_n = k_{\lambda_n}$, $n \geqslant 1$, est une suite de noyaux reproduisants telle que $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas de Blaschke. De nombreux auteurs se sont intéressés à caractériser la décroissance des suites $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ qui garantissent l'unicité (1). Citons notamment les travaux de S. Khavinson [Kha63], N. Danikas [Dan94], W. Hayman [Hay98], Y. Lyubarskii–K. Seip [LS97] et ceux en cours de A. Nicolau, J. Pau–P. Thomas. Citons enfin les travaux de R. Redheffer qui a beaucoup étudié la stabilité de la complétude des systèmes d'exponentielles (voir [Red68] et [Red77]).

Remarquons enfin que le problème de complétude des noyaux reproduisants dans l'espace modèle K_Θ^p peut se reformuler dans le langage des opérateurs de Toeplitz (voir le lemme 2.2.1 pour cette reformulation). Or, de nombreux auteurs se sont intéressés à la structure des noyaux des opérateurs de Toeplitz. Citons notamment les travaux de E. Hayashi [Hay85], [Hay86], [Hay90]) et ceux de K. Dyakonov [Dya]. Signalons cependant que les opérateurs de Toeplitz, comme les autres outils, n'ont pas permis, jusqu'à présent, de progrès visibles sur ce problème de complétude des noyaux reproduisants dans K_Θ. Dans cet article, nous utiliserons cette approche via les opérateurs de Toeplitz pour obtenir un résultat de stabilité quand on perturbe à la fois la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ et la fonction intérieure Θ.

Pour motiver le deuxième problème autour de la complétude de la biorthogonale, rappelons qu'une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'un espace de Hilbert H est dite minimale si, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n \notin \operatorname{span}\{x_k,\ k \neq n\}$. Par le théorème de Hahn-Banach, ceci est équivalent à l'existence d'une suite $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ de H, dite biorthogonale, telle que

$$\langle x'_n, x_k\rangle = \delta_{nk}.$$

Si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite minimale et complète dans H, on peut associer à tout élément x de H sa “série de Fourier généralisée” :

$$\varphi : x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \langle x, x'_n\rangle x_n,$$

où $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ est la biorthogonale associée à $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Pour travailler avec ces séries de Fourier généralisées, la première chose naturelle à demander, si on veut reconstruire x à partir de ses coefficients de Fourier $(\langle x, x'_n\rangle)_{n\geqslant 1}$, est que l'application φ soit injective, ce qui est équivalent à dire que $(x'_n)_{n\geqslant 1}$ est complète dans H. Ce n'est en général pas le cas! (Voir, par exemple, [You81], pour un contre-exemple.) Cependant, pour les noyaux reproduisants de H^2, la situation est totalement différente : si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke, alors la biorthogonale à $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est complète dans K_{B_Λ}, où B_Λ est le produit de Blaschke associé à Λ. Dans [You81], R.M. Young a montré que pour les systèmes d'exponentielles, la situation est la même. Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier ce problème pour les noyaux reproduisants $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ de l'espace modèle K_Θ.

Les résultats de cet article s'organisent de la façon suivante. Dans la section 2, nous montrons que la complétude des noyaux reproduisants $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ reste stable sous l'effet de petites perturbations de la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ par rapport à la distance pseudo-hyperbolique (voir théorème 2.1.1). Puis, en imposant une condition de Fredholm sur l'opérateur de Toeplitz $T_{\overline{\Theta}B_\Lambda}$, nous prouvons qu'il existe $\varepsilon > 0$ telle que la complétude de $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est préservée si $\|\Theta - \Theta_1\| \leqslant \varepsilon$ et $\|B_\Lambda - B_{\Lambda'}\| \leqslant \varepsilon$ (voir théorème 2.2.3). Si B_Λ et $B_{\Lambda'}$ sont les transformées de Frostman d'une même fonction intérieure, alors $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ et $(k_\Theta(., \lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ sont simultanément complètes ou non dans K^p_Θ (voir théorème 2.2.10). Ce résultat nous permet d'obtenir comme corollaire l'existence, pour toute fonction intérieure Θ de H^∞, d'une suite de Blaschke $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telle que $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K^p_Θ (voir corollaire 2.2.11). Dans la section 3, nous étudions le problème de la complétude de la biorthogonale pour les noyaux reproduisants. On montre que si $(k_\Theta(., \lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite complète et minimale dans K_Θ et si $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\Theta'(z)(1 - z)^2| < +\infty$, alors la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$, biorthogonale à $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$, est aussi complète dans K_Θ.

2. Stabilité de la complétude pour les noyaux reproduisants.

2.1. Perturbations des fréquences.

Le théorème suivant établit une condition de stabilité dans le cas des noyaux reproduisants, qui nous permettra de retrouver à la fois un résultat de R. Redheffer, un autre de K. Chan–S. Seubert et une généralisation d'un théorème de N. Levinson.

THÉORÈME 2.1.1. — *Soient* $1 < p < \infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ *et* Θ *une fonction intérieure dans* H^∞ *telle que* $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est complète dans* K_Θ^p. *Soit* $(\lambda_n')_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ *telle que*

$$\sum_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda_n')| < +\infty. \tag{2}$$

Alors $(k_\Theta(.,\lambda_n'))_{n\geqslant 1}$ *est aussi complète dans* K_Θ^p.

Rappelons que conformément aux notations usuelles $|b_{\lambda_n}(\lambda_n')| = \left|\frac{\lambda_n-\lambda_n'}{1-\overline{\lambda_n}\lambda_n'}\right|$ désigne la distance pseudo-hyperbolique entre les points λ_n et λ_n'.

Preuve. — Raisonnons par l'absurde. Supposons que la suite $(k_\Theta(.,\lambda_n'))_{n\geqslant 1}$ ne soit pas complète dans K_Θ^p. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in K_\Theta^q$, $f \not\equiv 0$, telle que $f(\lambda_n') = 0$, pour tout $n \geqslant 1$, avec q l'exposant conjugué associé à p. Définissons par récurrence une suite de fonctions $(\phi_n)_{n\geqslant 1}$ dans H^q :

$$\phi_0 := f, \text{ et } \phi_n := \frac{b_{\lambda_n'} - b_{\lambda_n'}(\lambda_n)}{b_{\lambda_n'}}\phi_{n-1}\,,\ n \geqslant 1.$$

Il est facile de vérifier que $\phi_n \in K_\Theta^q$, pour tout $n \geqslant 1$. De plus, $\phi_n(\lambda_k) = 0$, $\forall k \leqslant n$, et $\phi_n(\lambda_k') = 0$, $\forall k > n$. D'autre part,

$$\|\phi_n - \phi_{n-1}\|_q = |b_{\lambda_n'}(\lambda_n)|\,\|\phi_{n-1}\|_q. \tag{3}$$

Donc

$$(1 - |b_{\lambda_n'}(\lambda_n)|)\|\phi_{n-1}\|_q \leqslant \|\phi_n\|_q \leqslant (1 + |b_{\lambda_n'}(\lambda_n)|)\|\phi_{n-1}\|_q,$$

et par récurrence, on obtient

$$(4)\qquad \prod_{k=1}^{n}\Big(1-|b_{\lambda'_k}(\lambda_k)|\Big)\|f\|_q \leqslant \|\phi_n\|_q \leqslant \prod_{k=1}^{n}\Big(1+|b_{\lambda'_k}(\lambda_k)|\Big)\|f\|_q.$$

De l'hypothèse (2), on déduit que les deux produits infinis $\prod_{k=1}^{+\infty}\big(1-|b_{\lambda'_k}(\lambda_k)|\big)$ et $\prod_{k=1}^{+\infty}\big(1+|b_{\lambda'_k}(\lambda_k)|\big)$ sont convergents. Posons $c_i := \prod_{k=1}^{\infty}\big(1+\varepsilon_i|b_{\lambda'_k}(\lambda_k)|\big)$, $i=1,2$, avec $\varepsilon_1=1$ et $\varepsilon_2=-1$. Alors (4) implique que

$$(5)\qquad \|\phi_n\|_q \leqslant c_1\|f\|_q,\ \forall n \geqslant 1.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, les inégalités (3) et (5), nous obtenons alors que

$$\|\phi_{n+p}-\phi_n\|_q \leqslant c_1\|f\|_q \sum_{k=1}^{p} |b_{\lambda'_{n+k}}(\lambda_{n+k})|.$$

En utilisant (2), on en déduit finalement que $(\phi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans K^q_Θ. Par conséquent, il existe $\phi \in K^q_\Theta$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\phi_n = \phi$, dans K^q_Θ. Nous obtenons, d'après (4), que $c_2\|f\|_q \leqslant \|\phi\|_q$, ce qui prouve que $\phi \not\equiv 0$. Comme $\phi(\lambda_n) = \lim_{p\to+\infty}\phi_p(\lambda_n) = 0$, on en déduit que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ n'est pas complète dans K^p_Θ, ce qui contredit l'hypothèse. □

En utilisant l'isomorphisme naturel entre H^p et $H^p(\mathbb{C}_+)$, l'espace de Hardy du demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m}(z) > 0\}$ (voir par exemple [Dur70] ou [HNP81]), il est immédiat de voir que le théorème 2.1.1 admet l'analogue suivant dans le demi-plan supérieur.

COROLLAIRE 2.1.2. — *Soient $1 < p < \infty$, $M = (\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}_+$ et Θ une fonction intérieure de $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ telle que $(k_\Theta(.,\mu_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans $K^{+p}_\Theta := H^p_+ \cap \overline{zH^p_+}$. Soit $(\mu'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}_+$ telle que*

$$(6)\qquad \sum_{n\geqslant 1} |b^+_{\mu_n}(\mu'_n)| < +\infty.$$

Alors $(k_\Theta(.,\mu'_n))_{n\geqslant 1}$ est aussi complète dans K^{+p}_Θ.

Ici $|b^+_{\mu_n}(\mu'_n)| = \left|\frac{\mu'_n-\mu_n}{\mu'_n-\overline{\mu_n}}\right|$ désigne la distance pseudo-hyperbolique dans $\mathbb{C}_+$.

Remarque 2.1.3. — En reprenant le raisonnement utilisé, il est facile de voir que le théorème 2.1.1 et son corollaire restent valables dans le cas $(K^p_\Theta)^*$, $p = 1, +\infty$, avec la topologie faible*.

Dans le cas, où $\Theta = 0$, $K^p_\Theta = H^p$, on a un résultat de stabilité uniforme qui montre que le théorème 2.1.1 n'est pas optimal.

THÉORÈME 2.1.4. — *Soient* $1 < p < +\infty$, $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ *une suite de noyaux reproduisants complète dans* H^p *et* $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$. *Si*

$$\sup_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| < 1, \tag{7}$$

alors $(k_{\lambda'_n})_{n\geqslant 1}$ *est aussi complète dans* H^p.

Preuve. — Un résultat de Vinogradov-Havin (voir [HV74]) implique que, sous l'hypothèse (7), on a $(1 - |\lambda_n|) \asymp (1 - |\lambda'_n|)$. Il est alors clair que les deux suites $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ et $(k_{\lambda'_n})_{n\geqslant 1}$ sont complètes ou non simultanément. □

Remarque 2.1.5. — (1) Ce résultat est optimal, à savoir qu'il existe des suites $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telles que $\sup_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| = 1$ avec $(k_{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ complète dans H^p alors que $(k_{\lambda'_n})_{n\geqslant 1}$ ne l'est pas. Par exemple, on peut prendre $\lambda_n := 1 - \frac{1}{n}$ et $\lambda'_n := 1 - \frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$.

(2) L'exemple du système trigonométrique montre aussi qu'il existe un décalage entre le théorème 2.1.1 et certains résultats déjà connus pour les exponentielles. Passons au demi-plan supérieur, et considérons

$$\mu_n := n + i, \quad \mu'_n := n + \delta_n + i, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \delta_n \in \mathbb{R}.$$

Un résultat de N. Levinson [Lev40] permet d'affirmer que si

$$|\delta_n| \leqslant \frac{1}{2q}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z},$$

alors $(\exp(i\mu'_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ est complète dans $L^p(-\pi,\pi)$.

D'autre part, si on calcule $|b^+_{\mu_n}(\mu'_n)|$, le corollaire 2.1.2 donne comme condition suffisante de stabilité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\delta_n| < +\infty.$$

Ceci prouve que notre théorème n'est pas optimal. Cependant, cet exemple montre aussi que le résultat 2.1.4 n'est plus valide pour les noyaux reproduisants de l'espace modèle K_Θ : il existe $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(\mu'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}_+$ telles que $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |b^+_{\mu_n}(\mu'_n)| < 1$ et $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ est complète dans $L^2(-\pi,\pi)$ alors que $(\exp(i\mu'_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ ne l'est pas. Considérons, par exemple, $\mu_n := n+i$ et $\mu'_n := n+\frac{1}{4}+\varepsilon+i$, pour $n \geqslant 1$, $\mu'_0 := i$, $\mu'_n := n-\frac{1}{4}-\varepsilon+i$, pour $n \leqslant -1$. Clairement, $(\exp(i\mu_n t))_{n\in\mathbb{Z}}$ est complète dans $L^2(-\pi,\pi)$ (c'est même une base de Riesz!). De plus, N. Levinson a montré que $(\exp(i(\mu'_n - i)t))_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas complète dans $L^2(-\pi,\pi)$.

(3) Par contre, le théorème 2.1.1 est optimal dans le sens où on ne peut pas améliorer l'exposant dans la convergence de la série. Cela signifie qu'il existe deux suites $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et une fonction intérieure Θ telle que

$$\sum_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)|^\alpha < +\infty\,,\ \ \forall \alpha > 1,$$

et la suite $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K_Θ alors que la suite $(k_\Theta(.,\lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ ne l'est pas. Il suffit pour cela de considérer

$$\lambda_n := 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \lambda'_n := \lambda_{n+1}\,,\ n \geqslant 1$$

et de poser $\Theta := B_\Lambda$, le produit de Blaschke associé à $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$. Un calcul simple montre alors que $|b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| \sim \frac{1}{n}$ et $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K_Θ alors que $(k_\Theta(.,\lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ ne l'est pas, car la première suite est minimale.

Donnons maintenant les trois applications annoncées du théorème 2.1.1. Le premier résultat qu'on peut retrouver est un résultat de R. Redheffer [Red77].

Corollaire 2.1.6. — *Soient $a > 0$ et $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$, $(\mu'_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites complexes telles que*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\mu_n - \mu'_n|}{1 + |\mathfrak{Im}\,\mu_n| + |\mathfrak{Im}\,\mu'_n|} < \infty.$$

Alors les familles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ et $(\exp(i\mu'_n t))_{n\geqslant 1}$ sont complètes ou non simultanément dans $L^2(-a,a)$.

Preuve. — Tout d'abord, on utilise un principe de réflexion classique qui permet de ramener toutes les fréquences des exponentielles dans le demi-plan supérieur. Pour cela, on définit

$$\mu_n^* := \begin{cases} \mu_n & \text{si } \mathfrak{Im}\,\mu_n \geqslant 0 \\ \overline{\mu_n} & \text{si } \mathfrak{Im}\,\mu_n < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad {\mu'_n}^* := \begin{cases} \mu'_n & \text{si } \mathfrak{Im}\,\mu'_n \geqslant 0 \\ \overline{\mu'_n} & \text{si } \mathfrak{Im}\,\mu'_n < 0. \end{cases}$$

En utilisant la théorie des fonctions entières et la factorisation d'Hadamard, on peut alors montrer (voir [Fri99] théorème 2.2.4, page 61–62) que les suites $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ et $(\exp(i\mu_n^* t))_{n\geqslant 1}$ d'une part et, les suites $(\exp(i\mu'_n t))_{n\geqslant 1}$ et $(\exp(i{\mu'_n}^* t))_{n\geqslant 1}$ d'autre part, sont complètes ou non simultanément dans $L^2(-a,a)$. Fixons maintenant $\delta > 0$. Comme l'application $\phi(t) \longmapsto \phi(t)\exp(-\delta t)$ est un isomorphisme sur $L^2(-a,a)$, on remarque que les suites $(\exp(i\mu_n^* t))_{n\geqslant 1}$ et $(\exp(i(\mu_n^* + i\delta)t))_{n\geqslant 1}$ d'une part et, les suites $(\exp(i{\mu'_n}^*t))_{n\geqslant 1}$ et $(\exp(i({\mu'_n}^*+i\delta)t))_{n\geqslant 1}$ d'autre part, sont complètes ou non simultanément dans $L^2(-a,a)$. Le résultat se déduit alors aisément du corollaire 2.1.2 et du calcul suivant :

$$\begin{aligned}|b^+_{\mu_n^*+i\delta}({\mu'_n}^*+i\delta)| &= \frac{|\mu_n^*-{\mu'_n}^*|}{|\mu_n^*-\overline{{\mu'_n}^*}+2i\delta|}\\ &\leqslant C\frac{|\mu_n^*-{\mu'_n}^*|}{1+|\mathfrak{Im}\,\mu_n^*|+|\mathfrak{Im}\,{\mu'_n}^*|}\\ &\leqslant C\frac{|\mu_n-\mu'_n|}{1+|\mathfrak{Im}\,\mu_n|+|\mathfrak{Im}\,\mu'_n|}.\end{aligned}$$

□

Dans [CS97], K. Chan et S. Seubert cherchent des conditions nécessaires et suffisantes pour que le noyau d'un opérateur de Toeplitz soit non trivial, dans le cas où le symbole est le quotient de deux fonctions intérieures. Ils montrent, en particulier, que si Θ_0 et Θ_1 sont deux fonctions intérieures telles que $\ker_2 T_{\overline{\Theta}_0\Theta_1}\neq\{0\}$ alors

$$\mathbb{T}\cap\sigma(\Theta_1)\subset\mathbb{T}\cap\sigma(\Theta_0),$$

où $\sigma(\Theta)$ désigne le spectre de Θ. Si Θ_0 et Θ_1 sont deux produits de Blaschke infinis, cette condition signifie que les zéros de Θ_1 ne peuvent s'accumuler qu'aux points de $\mathbb{T}$ où ceux de Θ_0 s'accumulent. Les zéros de Θ_1 doivent donc être, en un certain sens, proches de ceux de Θ_0. Dans le résultat qui suit, K. Chan et S. Seubert donnent une condition suffisante portant sur cette proximité des zéros pour que $\ker_2 T_{\overline{\Theta}_0\Theta_1}\neq\{0\}$, propriété qui admet une formulation équivalente en terme de complétude d'une certaine suite de noyaux reproduisants (voir lemme 2.2.1). Nous obtenons, en fait, ce résultat comme corollaire du théorème 2.1.1.

COROLLAIRE 2.1.7. — *Soient $1<p<+\infty$, B_1 un produit de Blaschke associé à une suite de Blaschke $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ et Θ_0 une fonction intérieure qui s'annule en $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n-\beta_n|}{1-|\alpha_n|}<\infty,$$

et si Θ_0 possède au moins un autre zéro en dehors des α_n, alors $\ker_q T_{\overline{\Theta}_0B_1}\neq\{0\}$, c'est-à-dire que $(k_{\Theta_0}(.,\beta_n))_{n\geqslant 1}$ n'est pas complète dans $K^p_{\Theta_0}$.

Preuve. — Supposons que le système $(k_{\Theta_0}(.,\beta_n))_{n\geqslant 1}$ soit complet dans $K^p_{\Theta_0}$. D'après notre hypothèse, il est facile de voir que

$$\sum_{n\geqslant 1}|b_{\alpha_n}(\beta_n)|<\infty.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème 2.1.1 et conclure que la suite $(k_{\Theta_0}(.,\alpha_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans $K^p_{\Theta_0}$. Mais, ceci est absurde car, si B désigne le produit de Blaschke associé à la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$, alors on a

$$K^p_{\Theta_0} = \operatorname{span}_{K^p_{\Theta_0}} \left\{k_{\Theta_0}(.,\alpha_n) : n \geqslant 1\right\} = \operatorname{span}_{H^p} \left\{k_{\alpha_n} : n \geqslant 1\right\} = K^p_B,$$

ce qui est impossible puisque Θ_0 possède au moins un autre zéro en dehors des α_n. □

En 1940, N. Levinson [Lev40] a montré que la complétude d'une suite d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ n'est pas altérée si l'une des fréquences μ_n est remplacée par une autre μ, avec $\mu \neq \mu_n$, $\forall n$. Le théorème 2.1.1 nous permet de retrouver ce résultat dans le cadre général des noyaux reproduisants, ce qui avait déjà été remarqué dans [HNP81].

COROLLAIRE 2.1.8. — *Soient $1 < p < +\infty$, $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure telle que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ soit complète dans K^p_Θ. Alors $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant N} \bigcup (k_\Theta(.,\lambda'_n))_{1\leqslant n<N}$ est complète dans K^p_Θ, pour toute suite finie $(\lambda'_n)_{1\leqslant n<N}$, $\lambda'_n \neq \lambda_i$, $\lambda'_n \neq \lambda'_m$.*

Preuve. — Il suffit de noter que si

$$\widetilde{\lambda_n} := \begin{cases} \lambda'_n : & 1 \leqslant n < N \\ \lambda_n : & n \geqslant N, \end{cases}$$

alors

$$\sum_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\widetilde{\lambda_n})| = \sum_{1\leqslant n<N} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| < +\infty,$$

et le théorème 2.1. implique que $(k_\Theta(.,\widetilde{\lambda_n}))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K^p_Θ. □

2.2. Perturbation de la fonction intérieure Θ.

Jusqu'à présent, nous avons uniquement étudié les effets de perturbations sur les "fréquences" $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ mais on peut aussi perturber la fonction intérieure Θ. Plus précisément, si $(k_{\Theta_1}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est une famille complète dans $K^p_{\Theta_1}$ et si Θ_2 est une autre fonction intérieure, quelle doit être la proximité entre Θ_1 et Θ_2 pour que $(k_{\Theta_2}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ soit une famille complète dans $K^p_{\Theta_2}$?

La première conjecture naturelle est de penser qu'il suffit que $\Theta_1(\lambda_n)$ soit proche de $\Theta_2(\lambda_n)$. Mais cela ne suffit pas comme le montre l'exemple suivant : soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke dans $\mathbb{D}$ et ζ un point de $\mathbb{D}$ tel que $\zeta \neq \lambda_n$, $\forall n \geqslant 1$. Notons

$$\Theta_1 := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}, \quad \text{et} \quad \Theta_2 := b_\zeta \Theta_1.$$

Alors $\Theta_1(\lambda_n) = \Theta_2(\lambda_n) = 0$, $\forall n \geqslant 1$ et $(k_{\Theta_1}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est une famille complète dans K_{Θ_1} alors que $(k_{\Theta_2}(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ n'est pas complète dans $K^p_{\Theta_2}$. En effet,

$$\begin{aligned}\operatorname{span}\{k_{\Theta_2}(.,\lambda_n) \, : \, n \geqslant 1\} &= \operatorname{span}\{k_{\lambda_n} : n \geqslant 1\} \\ &= K^p_{\Theta_1} \subsetneqq K^p_{\Theta_2}.\end{aligned}$$

En fait, en utilisant les opérateurs de Toeplitz et leurs liens avec le problème de la complétude, nous allons montrer que, sous certaines hypothèses, on peut donner des conditions qui garantissent la stabilité de la complétude. Tout d'abord, précisons la reformulation de notre problème de complétude à l'aide des opérateurs de Toeplitz. Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ et $1 < p < +\infty$, on notera

$$\ker_p T_\varphi := \{f \in H^p : T_\varphi f = 0\}.$$

On a alors le résultat suivant :

LEMME 2.2.1. — *Soient $1 < p < +\infty$, B un produit de Blaschke, à zéros simples, associé à une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure. Alors*

$$\dim \ker_q T_{\overline{\Theta}B} = \dim \left(K^q_\Theta \cap BH^q\right) = \operatorname{codim}_{K^p_\Theta} \left(\operatorname{span}\{k_\Theta(.,\lambda_n) : n \geqslant 1\}\right).$$

En particulier, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $T_{\overline{\Theta}B} : H^q \longrightarrow H^q$ *est injectif.*

(ii) $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ *est complète dans* K^p_Θ.

(iii) $K^q_\Theta \cap BH^q = \{0\}$.

Le cas $p = q = 2$ trouve son origine dans [LS71] et est démontré dans [Nik86], (Lemme 97, Appendice 4, page 336). Le cas général se démontre exactement de la même manière et la preuve est laissée au lecteur.

Rappelons maintenant un lemme de L. Coburn dont nous allons avoir besoin par la suite.

LEMME 2.2.2 (L. Coburn). — *Si $1 < p < +\infty$ et $\varphi \in L^\infty$, $\varphi \not\equiv 0$, alors soit $\ker_q T_\varphi = \{0\}$ soit $\ker_p T^*_\varphi = \{0\}$.*

Pour le cas $p = q = 2$, nous renvoyons le lecteur à [Cob66] ou [Nik86], (Appendice 4, page 318). Le cas général suit, en fait, exactement le même schéma et sa démonstration est laissée au lecteur.

En imposant une condition de Fredholm, nous obtenons un résultat de stabilité. Si φ est une fonction de $L^\infty(\mathbb{T})$ telle que T_φ est de Fredholm dans H^q alors $\operatorname{ind}_q T_\varphi$ désignera l'indice de T_φ vu comme opérateur de H^q dans H^q, c'est-à-dire, par définition,

$$\operatorname{ind}_q T_\varphi = \dim \ker_q T_\varphi - \dim \ker_p T_\varphi^*.$$

THÉORÈME 2.2.3. — *Soient $1 < p < +\infty$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ_1 une fonction intérieure dans H^∞. Supposons que l'opérateur de Toeplitz $T_{\overline{\Theta_1} B_\Lambda}$ soit Fredholm dans H^q. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute suite $\Lambda' = (\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et toute fonction intérieure Θ_2 satisfaisant*

$$\|B_\Lambda - B_{\Lambda'}\|_\infty < \varepsilon \quad et \quad \|\Theta_1 - \Theta_2\|_\infty < \varepsilon, \tag{8}$$

on a

$$\operatorname{codim}_{K^p_{\Theta_1}}(\operatorname{span}\{k_{\Theta_1}(.,\lambda_n) : n \geqslant 1\}) = \operatorname{codim}_{K^p_{\Theta_2}}(\operatorname{span}\{k_{\Theta_2}(.,\lambda'_n) : n \geqslant 1\}).$$

Nous allons décomposer la preuve de ce théorème en 2 lemmes.

LEMME 2.2.4. — *Soient $1 < q < +\infty$, Θ_1 et B_1 deux fonctions intérieures de H^∞. Supposons que l'opérateur de Toeplitz $T_{\overline{\Theta_1} B_1}$ soit de Fredholm dans H^q. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toutes fonctions intérieures Θ_2, B_2 satisfaisant $\|\Theta_1 - \Theta_2\|_\infty < \varepsilon$ et $\|B_1 - B_2\|_\infty < \varepsilon$, l'opérateur $T_{\overline{\Theta_2} B_2}$ est de Fredholm dans H^q et*

$$\operatorname{ind}_q T_{\overline{\Theta_1} B_1} = \operatorname{ind}_q T_{\overline{\Theta_2} B_2}.$$

Preuve. — Comme $T_{\overline{\Theta_1} B_1}$ est de Fredholm dans H^q, il existe $\eta > 0$ tel que $T_{\overline{\Theta_1} B_1} + A$ est de Fredholm dans H^q, pour tout opérateur A satisfaisant $\|A\| < \eta$ (voir [Kat67]). De plus, nous avons

$$\operatorname{ind}_q \left(T_{\overline{\Theta_1} B_1} + A\right) = \operatorname{ind}_q \left(T_{\overline{\Theta_1} B_1}\right).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|T_{\overline{\Theta_1} B_1} - T_{\overline{\Theta_2} B_2}\| &= \|T_{\overline{\Theta_1} B_1 - \overline{\Theta_2} B_2}\| \\ &= \sup_{\substack{f\in H^q \\ \|f\|_q \leqslant 1}} \|P_+(\overline{\Theta_1} B_1 - \overline{\Theta_2} B_2) f\|_q \\ &\leqslant \|\overline{\Theta_1} B_1 - \overline{\Theta_2} B_2\|_\infty \\ &\leqslant \|B_1 - B_2\|_\infty + \|\Theta_1 - \Theta_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc, si $\|B_1 - B_2\|_\infty < \frac{\eta}{2}$ et $\|\Theta_1 - \Theta_2\|_\infty < \frac{\eta}{2}$, alors $T_{\overline{\Theta_2}B_2} = T_{\overline{\Theta_1}B_1} + (T_{\overline{\Theta_2}B_2} - T_{\overline{\Theta_1}B_1})$ est Fredholm dans H^q et

$$\operatorname{ind}_q T_{\overline{\Theta_1}B_1} = \operatorname{ind}_q T_{\overline{\Theta_2}B_2}.$$

□

LEMME 2.2.5. — *Soient* $1 < q < +\infty$, $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ *telle que* $\operatorname{ind}_q T_\varphi = \operatorname{ind}_q T_\psi$. *Alors*

$$\dim \ker_q T_\varphi = \dim \ker_q T_\psi.$$

Preuve. — Premier cas : $\ker_q T_\varphi = \{0\}$. Alors $\operatorname{ind}_q T_\psi = \operatorname{ind}_q T_\varphi = -\dim \ker_p T_\varphi^* \leqslant 0$. Supposons que $\ker_q T_\psi \neq \{0\}$. Alors, d'après le lemme 2.2.2, nécessairement $\ker_p T_\psi^* = \{0\}$ et donc $\operatorname{ind}_q T_\psi = \dim \ker_q T_\psi > 0$, ce qui est absurde. Donc $\ker_q T_\psi = \{0\}$.

Deuxième cas : $\ker_q T_\varphi \neq \{0\}$. D'après le lemme 2.2.2, $\ker_p T_\varphi^* = \{0\}$ et donc $\operatorname{ind}_q T_\psi = \operatorname{ind}_q T_\varphi = \dim \ker_q T_\varphi > 0$. Un raisonnement analogue montre que $\ker_p T_\psi^* = \{0\}$ et donc $\operatorname{ind}_q T_\psi = \dim \ker_q T_\psi$. Par conséquent, on obtient

$$\dim \ker_q T_\varphi = \dim \ker_q T_\psi.$$

□

Preuve (du théorème 2.2.3). — D'après le lemme 2.2.4, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute suite $\Lambda' = (\lambda_n')_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et toute fonction intérieure Θ_2 satisfaisant (8), l'opérateur $T_{\overline{\Theta_2}B_{\Lambda'}}$ est de Fredholm dans H^q et

$$\operatorname{ind}_q T_{\overline{\Theta_1}B_\Lambda} = \operatorname{ind}_q T_{\overline{\Theta_2}B_{\Lambda'}}.$$

Le lemme 2.2.5 entraîne alors que

$$\dim \ker_q T_{\overline{\Theta_1}B_\Lambda} = \dim \ker_q T_{\overline{\Theta_2}B_{\Lambda'}},$$

ce qui est équivalent, d'après le lemme 2.2.1, à

$$\operatorname{codim}_{K^p_{\Theta_1}}(\operatorname{span}\{k_{\Theta_1}(.,\lambda_n) : n \geqslant 1\}) = \operatorname{codim}_{K^p_{\Theta_2}}(\operatorname{span}\{k_{\Theta_2}(.,\lambda_n') : n \geqslant 1\}).$$

□

Remarque 2.2.6. — Si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite dans $\mathbb{D}$ et Θ est une fonction intérieure dans H^∞ telles que $T_{\overline{\Theta}B}$ est de Fredholm et $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K^p_Θ, alors le théorème 2.2.3 montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute suite $\Lambda' = (\lambda_n')_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ satisfaisant

$$\|B_\Lambda - B_{\Lambda'}\|_\infty < \varepsilon, \qquad (9)$$

la suite $(k_\Theta(.,\lambda'_n))_{n\geqslant 1}$ est aussi complète dans K^p_Θ. La question naturelle qui se pose est de comparer les deux conditions de stabilité (2) et (9). Tout d'abord, notons que la condition (9) n'implique pas la condition (2). En effet, considérons $B_\Lambda = \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}$ un produit de Blaschke. Le théorème de Frostman implique l'existence de $\zeta \in \mathbb{D}$, suffisamment petit, pour que

$$B_{\Lambda'} := \frac{B_\Lambda - \zeta}{1-\overline{\zeta} B_\Lambda}$$

soit un produit de Blaschke tel que $\|B_{\Lambda'} - B_\Lambda\|_\infty < 1$. Il est alors facile de voir que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|b_{\lambda'_n}(\lambda_n)| \geqslant |B_{\Lambda'}(\lambda_n)| = |\zeta| > 0$ et donc

$$\sum_{n\geqslant 1} |b_{\lambda'_n}(\lambda_n)| = +\infty.$$

Par contre, la réciproque est vraie dans le sens suivant :

THÉORÈME 2.2.7. — *Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Blaschke telle que $\lambda_n \neq 0$, $n \geqslant 1$. Il existe $C = C(\Lambda) > 0$ tel que, pour toute suite $\Lambda' = (\lambda'_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant*

$$\sum_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| < C,$$

alors la suite $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1}$ est de Blaschke et

$$\|B_\Lambda - B_{\Lambda'}\|_\infty < 1.$$

Preuve. — Le résultat de Vinogradov-Havin, déjà mentionné ci-dessus, montre que si $C < 1$, alors la suite $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1}$ est nécessairement de Blaschke. Commençons, tout d'abord, par évaluer $\|b_\lambda - b_\mu\|_\infty$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{D}$. On a $\|b_\lambda - b_\mu\|_\infty = \|b_\lambda \circ b_\mu^{-1} - z\|_\infty$. Un calcul élémentaire montre alors que

$$b_\lambda \circ b_\mu^{-1}(z) = c_{\lambda\mu} \frac{z - b_\mu(\lambda)}{1 - \overline{b_\mu(\lambda)} z},$$

où $c_{\lambda\mu} := \frac{|\lambda|}{\lambda} \frac{\mu}{|\mu|} \frac{1-\lambda\overline{\mu}}{1-\overline{\lambda}\mu}$. On en déduit donc que

$$\|b_\lambda - b_\mu\|_\infty \leqslant \frac{|c_{\lambda\mu} - 1| + 2|b_\mu(\lambda)|}{1 - |b_\mu(\lambda)|}.$$

Or, un calcul facile montre que $|c_{\lambda\mu} - 1| \leqslant \frac{4}{|\lambda|} |b_\lambda(\mu)|$. Par conséquent, on obtient

$$\|b_\lambda - b_\mu\|_\infty \leqslant \left(\frac{4}{|\lambda|} + 2\right) \frac{|b_\lambda(\mu)|}{1 - |b_\lambda(\mu)|} \leqslant 2\left(\frac{4}{|\lambda|} + 2\right) |b_\lambda(\mu)|. \tag{10}$$

Comme $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke et $\lambda_n \neq 0$, $n \geqslant 1$, on a $c := \inf_{n\geqslant 1} |\lambda_n| > 0$. Montrons alors que, pour toute suite $(\lambda'_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ satisfaisant

$$\sum_{n\geqslant 1} |b_{\lambda_n}(\lambda'_n)| < \frac{1}{2(\frac{4}{c}+2)},$$

on a

$$\|B_\Lambda - B_{\Lambda'}\|_\infty < 1.$$

En utilisant (10), on montre facilement, par récurrence, que

$$\left\|\prod_{k=1}^n b_{\lambda_k} - \prod_{k=1}^n b_{\lambda'_k}\right\|_\infty \leqslant 2\left(\frac{4}{c}+2\right)\sum_{k=1}^n |b_{\lambda_k}(\lambda'_k)|,$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\|B_\Lambda - B_{\Lambda'}\|_\infty \leqslant 2\left(\frac{4}{c}+2\right)\sum_{k\geqslant 1} |b_{\lambda_k}(\lambda'_k)| < 1.$$

□

Si Θ_0 et Θ_1 sont deux fonctions intérieures, considérons l'application φ définie par

$$\begin{array}{cccl} \varphi : & [0,1] & \to & H^\infty \\ & t & \mapsto & \varphi(t) := t\Theta_1 + (1-t)\Theta_0. \end{array}$$

Si on impose une condition de Fredholm sur les opérateurs $T_{\overline{\Theta}\varphi(t)}$, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2.8. — *Soient $1 < p < +\infty$, Θ, Θ_0 et Θ_1 trois fonctions intérieures dans H^∞. Supposons que, pour tout $t \in [0,1]$, $T_{\overline{\Theta}\varphi(t)}$ est de Fredholm dans H^q. Alors*

$$\mathrm{ind}_q\, T_{\overline{\Theta}\Theta_0} = \mathrm{ind}_q\, T_{\overline{\Theta}\Theta_1}.$$

En particulier, si $\Theta_0 = B_\Lambda$ et $\Theta_1 = B_{\Lambda'}$ sont deux produits de Blaschke à zéros simples, nous avons

$$\mathrm{codim}_{K^p_\Theta}\left(\mathrm{span}\{k_\Theta(.,\lambda_n) : n \geqslant 1\}\right) = \mathrm{codim}_{K^p_\Theta}\left(\mathrm{span}\{k_\Theta(.,\lambda'_n) : n \geqslant 1\}\right).$$

Preuve. — Posons

$$\begin{array}{cccl} \phi : & [0,1] & \to & \mathbb{N} \\ & t & \mapsto & \mathrm{ind}_q T_{\overline{\Theta}\varphi(t)}. \end{array}$$

Rappelons que l'application ind est continue (voir [Kat67]) et donc l'application ϕ est nécessairement constante. Par conséquent,

$$\mathrm{ind}_q\, T_{\overline{\Theta}\Theta_0} = \mathrm{ind}_q\, T_{\overline{\Theta}\Theta_1}.$$

Dans le cas particulier où $\Theta_0 = B_\Lambda$ et $\Theta_1 = B_M$, il suffit d'appliquer les lemmes 2.2.5 puis 2.2.12. □

Dans le cas où Θ_0 et Θ_1 sont des perturbations de Frostman d'une même fonction intérieure, il n'est pas nécessaire de supposer que $T_{\overline{\Theta}\varphi(t)}$ est Fredholm. Le cadre est le suivant. Soit Θ une fonction intérieure. Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, notons par Θ_λ la "transformée de Frostman" de Θ, c'est-à-dire la fonction intérieure définie par

$$\Theta_\lambda := \frac{\Theta - \lambda}{1 - \overline{\lambda}\Theta}.$$

Pour préciser un peu plus les choses, nous allons avoir besoin d'une version améliorée du théorème de O. Frostman qui est un fait bien connu des spécialistes.

Remarque 2.2.9. — Soit Θ une fonction intérieure. Alors il existe un ensemble $\Omega \subset \mathbb{D}$, de mesure nulle, tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \Omega$, la fonction Θ_λ est un produit de Blaschke à zéros simples.

Preuve. — D'après le théorème de Frostman classique (voir [Gar81] ou [Nik86]), il existe $\Omega_0 \subset \mathbb{D}$, de mesure nulle, telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \Omega_0$, Θ_λ est un produit de Blaschke. D'autre part, il est facile de vérifier que

$$\Theta'_\lambda = \frac{(1 - |\lambda|^2)\Theta'}{(1 - \overline{\lambda}\Theta)^2}.$$

Considérons

$$\Omega := \Omega_0 \cup \Theta({\Theta'}^{-1}(0)).$$

Comme Θ' est analytique, ${\Theta'}^{-1}(0)$ est dénombrable et donc $\Theta({\Theta'}^{-1}(0))$ est de mesure nulle. Par conséquent, Ω est aussi de mesure nulle. De plus, si $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \Omega$, alors par définition, Θ_λ est un produit de Blaschke. Notons par $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des zéros de Θ_λ. Comme $\lambda \in {}^c\Theta({\Theta'}^{-1}(0))$, on a

$$\Theta'(\lambda_n) \neq 0 \quad \forall n \geqslant 1.$$

En effet, supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $\Theta'(\lambda_{n_0}) = 0$. Alors, $\lambda = \Theta(\lambda_{n_0}) \in \Theta({\Theta'}^{-1}(0))$, ce qui est absurde. Par conséquent,

$$\Theta'_\lambda(\lambda_n) \neq 0 \quad \forall n \geqslant 1,$$

et Θ_λ est bien un produit de Blaschke à zéros simples. □

On a alors le résultat suivant:

THÉORÈME 2.2.10. — *Soient $1 < p < +\infty$, Θ_1 et Θ deux fonctions intérieures. Alors*

$$\dim \ker_q T_{\overline{\Theta}_1\Theta_\lambda} \equiv \text{cte}, \quad \textit{et} \quad \dim \ker_q T_{\Theta_1\overline{\Theta}_\lambda} \equiv \text{cte}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}.$$

D'autre part, si λ, $\lambda' \in \mathbb{D} \setminus \Omega$, avec $\Theta_\lambda := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}$ et $\Theta_{\lambda'} := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda'_n}$, on a

$$\operatorname{codim}_{K^p_{\Theta_1}}\big(\operatorname{span}\{k_{\Theta_1}(.,\lambda_n) : n \geqslant 1\}\big) = \operatorname{codim}_{K^p_{\Theta_1}}\big(\operatorname{span}\{k_{\Theta_1}(.,\lambda'_n) : n \geqslant 1\}\big).$$

Preuve. — Soit $\zeta \in \mathbb{D}$. Nous avons $\Theta\overline{\Theta}_\zeta = \frac{h}{\overline{h}}$, avec $h := 1 - \overline{\zeta}\Theta$. Comme

$$0 < 1 - |\zeta| \leqslant |h(z)| \leqslant 2\,, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

la fonction h est extérieure et $h, h^{-1} \in H^\infty$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} T_{\overline{\Theta}_1\Theta} &= T_{\overline{\Theta}_1\Theta_\zeta\overline{\Theta}_\zeta\Theta} \\ &= T_{\overline{\Theta}_1\Theta_\zeta\frac{h}{\overline{h}}} \\ &= (T_{h^{-1}})^* T_{\overline{\Theta}_1\Theta_\zeta} T_h. \end{aligned}$$

Comme $h, h^{-1} \in H^\infty$, les opérateurs T_h et $T_{h^{-1}}$ sont inversibles, et donc

$$\dim\ker_q T_{\overline{\Theta}_1\Theta_\zeta} = \dim\ker_q T_{\overline{\Theta}_1\Theta}.$$

On en déduit aussi que

$$T_{\Theta_1\overline{\Theta}} = T^*_{\overline{\Theta}_1\Theta} = T^*_h T_{\Theta_1\overline{\Theta}_\zeta} T_{h^{-1}},$$

et donc

$$\dim\ker_q T_{\Theta_1\overline{\Theta}_\zeta} = \dim\ker_q T_{\Theta_1\overline{\Theta}}.$$

Si λ, $\lambda' \in \mathbb{D} \setminus \Omega$, avec $\Theta_\lambda := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}$ et $\Theta_{\lambda'} := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda'_n}$ deux produits de Blaschke à zéros simples, il suffit d'appliquer le lemme 2.2.1. □

COROLLAIRE 2.2.11. — *Soit Θ une fonction intérieure de H^∞. Alors il existe une suite de Blaschke $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telle que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K^p_Θ, pour tout $1 < p < +\infty$.*

Preuve. — D'après le théorème 2.2.10, on a

$$\dim\ker_q T_{\overline{\Theta}\Theta_\lambda} \equiv \text{cte}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}.$$

D'autre part, $T_{\overline{\Theta}\Theta_0} = T_{\overline{\Theta}\Theta} = T_{\mathbb{I}}$ où $\mathbb{I}$ désigne l'application identiquement égale à 1 et donc

$$\dim\ker_q T_{\overline{\Theta}\Theta_\lambda} = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}.$$

Il suffit alors de choisir $\lambda \in \mathbb{D}$ tel que $\Theta_\lambda := \prod_{n\geqslant 1} b_{\lambda_n}$ soit un produit de Blaschke à zéros simples, ce qui est possible d'après la remarque 2.2.9. □

Remarque 2.2.12. — Dans [Nik86], N. Nikolski a posé la question suivante : étant donnée une fonction intérieure Θ arbitraire, existe-t-il une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telle que $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ forme une base inconditionnelle de K_Θ ?

Dans [Dya92], K. Dyakonov a obtenu le résultat suivant : il y a une constante absolue $N \in \mathbb{N}$ telle que, pour toute fonction intérieure Θ, il existe un produit de Blaschke B d'interpolation et vérifiant

$$\operatorname{dist}(B, \Theta H^\infty) < 1, \quad \text{et} \quad \operatorname{dist}(\Theta^N, BH^\infty) < 1.$$

Une amélioration de ce résultat avec $N = 1$ permettrait de répondre par l'affirmative au problème posé par N. Nikolski. Cependant, jusqu'à présent ce problème reste ouvert.

Le corollaire 2.2.11 montre que l'analogue de cette question pour la complétude admet une réponse positive.

3. Complétude de la biorthogonale pour les noyaux reproduisants.

3.1. Résultat principal.

Cette section est consacrée à l'étude de la complétude de la biorthogonale pour les noyaux reproduisants. On se donne $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ et Θ une fonction intérieure de H^∞ telle que la suite $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est complète et minimale dans K_Θ. Nous nous demandons alors si la biorthogonale à $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est, elle aussi, complète dans K_Θ.

Rappelons la définition suivante :

DÉFINITION 3.1.1. — *Une suite à la fois minimale et complète est dite exacte.*

Remarquons que si $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans K_Θ alors $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke. En effet, si $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas de Blaschke alors

$$\operatorname{span}\{k_\Theta(.,\lambda_n) : n \geqslant 2\} = K_\Theta,$$

ce qui contredit la minimalité de la suite.

Par conséquent, sans perte de généralité pour le problème de la complétude de la biorthogonale, on peut supposer que $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Blaschke, sans multiplicité.

En imposant une condition sur Θ, nous donnons un résultat de complétude pour la biorthogonale, qui nous permettra, en outre, de retrouver le résultat de Young sur les systèmes d'exponentielles.

THÉORÈME 3.1.2. — *Soit Θ une fonction intérieure de $H^\infty(\mathbb{D})$ telle que $\sup_{z\in\mathbb{D}}|\Theta'(z)(1-z)^2| < +\infty$. Soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{D}$ telle que la suite $(k_\Theta(.,\lambda_n))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans K_Θ. Alors sa biorthogonale est aussi exacte dans K_Θ.*

Pour des raisons de lisibilité de la preuve, nous allons passer au demi-plan supérieur $\mathbb{C}_+$. Il est facile de voir, en utilisant l'isomorphisme entre $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{C}_+)$ que l'analogue du théorème 3.1.2 dans le demi-plan supérieur est :

THÉORÈME 3.1.3. — *Soit Θ une fonction intérieure dans $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ telle que $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $M = (\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}_+$ telle que $(k_\Theta(.,\mu_n))_{n\geqslant 1}$ est exacte dans K_Θ^+. Alors, sa biorthogonale, $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$, est aussi exacte dans K_Θ^+.*

Remarque 3.1.4. — La condition $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ est vérifiée, par exemple, pour $\Theta(z) = \exp(iaz)B(z)$ où B est un produit de Blaschke d'interpolation pour lequel $\mathrm{dist}(B^{-1}(0),\mathbb{R}) > 0$. En fait, J. Garnett (voir [Gar81]) a montré que la condition $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ est équivalente à l'une des deux conditions suivantes :

(i) il existe $h > 0$ tel que $\inf\{|\Theta(z)| : 0 < \Im\mathrm{m}\, z < h\} > 0$

(ii) Θ est inversible dans l'algèbre de Douglas $[H^\infty, \exp(-ix)]$, c'est-à-dire l'algèbre engendrée par H^∞ et l'ensemble de toutes les fonctions uniformément continues et bornées sur $\mathbb{R}$.

Pour la preuve de ce théorème, nous allons avoir besoin du résultat suivant, qui est une conséquence simple du résultat de D. Clark [AC70].

LEMME 3.1.5. — *Soit Θ une fonction intérieure dans $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ telle que $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors, il existe une suite $(\gamma_p)_{p\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$ et $|c| = 1$ tels que $\Theta(\gamma_p) = c$, $p \geqslant 1$, et la famille*

$$\left(k_\Theta(z,\gamma_p) := i\frac{1-\bar{c}\Theta(z)}{z-\gamma_p}\right)_{p\geqslant 1}$$

forme une base orthogonale de K_Θ^+. De plus, $\lim_{p\to+\infty}|\gamma_p| = +\infty$.

Le fait suivant, bien connu et dont la preuve est laissée au lecteur, sera également utile :

LEMME 3.1.6. — *Soient $f \in K_\Theta^+$ et $\mu \in \mathbb{C}_+$ tels que $f(\mu) = 0$. Alors* $\frac{f}{z-\mu} \in K_\Theta^+$.

Preuve (du théorème 3.1.3). — Considérons $f := (z - \mu_1)\psi_1$.

Fait 1 : les seuls zéros de f sont les μ_n et chaque μ_n est un zéro simple.

Supposons qu'il existe $\mu \neq \mu_n$ tel que $f(\mu) = 0$. Alors nécessairement $\psi_1(\mu) = 0$ et donc ψ_1 est orthogonale à $(k_\Theta(.,\mu_n))_{n\geqslant 2} \cup (k_\Theta(.,\mu))$. D'autre part, l'analogue du corollaire 2.1.8 pour le demi-plan supérieur montre que $(k_\Theta(.,\mu_n))_{n\geqslant 2} \cup (k_\Theta(.,\mu))$ est complète dans K_Θ^+, ce qui entraîne une contradiction car $\psi_1 \not\equiv 0$.

Remarquons maintenant que, $\forall n \geqslant 1$, $f'(\mu_n) \neq 0$. En effet, supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $f'(\mu_{n_0}) = 0$. On a

$$f'(z) = \psi_1(z) + (z - \mu_1)\psi_1'(z),$$

et donc $f'(\mu_1) = 1$ Nécessairement $n_0 \geqslant 2$ et $\psi_1'(\mu_{n_0}) = 0$. Considérons alors $\mu \neq \mu_n$, $n \geqslant 1$, et

$$g := \frac{z - \mu}{z - \mu_{n_0}} \psi_1.$$

On a $g = \psi_1 + (\mu_{n_0} - \mu)\frac{\psi_1}{z-\mu_{n_0}}$ et donc le lemme 3.1.6 montre que $g \in K_\Theta^+$. D'autre part, $g(\mu) = 0$ et $g(\mu_n) = 0$, $n \geqslant 2$. L'analogue du corollaire 2.1.8 pour le demi-plan supérieur permet encore d'aboutir à une contradiction. Par conséquent, $f'(\mu_n) \neq 0$, $\forall n \geqslant 1$, ce qui achève la preuve du fait 1.

Soit $h \in K_\Theta^+$ telle que

$$\langle h, \psi_n \rangle = 0, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{11}$$

Il s'agit de montrer que $h \equiv 0$.

En utilisant le lemme 3.1.6 et par unicité de la biorthogonale, il est facile de voir que

$$\psi_n = \frac{f}{f'(\mu_n)(z - \mu_n)}, \; n \geqslant 1.$$

D'autre part, d'après le lemme 3.1.5, il existe une suite $(\gamma_p)_{p\geqslant 1} \subset \mathbb{R}$, $\Theta(\gamma_p) = c$, $p \geqslant 1$, telle que la famille

$$\left(k_\Theta(z, \gamma_p) := i\frac{1 - \bar{c}\Theta(z)}{z - \gamma_p} \right)_{p\geqslant 1}$$

forme une base orthogonale de K_Θ^+. De plus, $\lim_{p\to+\infty} |\gamma_p| = +\infty$.

Comme $h \in K_\Theta^+$, on peut écrire

$$h = \sum_{p\geqslant 1} a_p k_\Theta(.,\gamma_p), \quad \text{avec} \quad \|h\|_2^2 = \sum_{p\geqslant 1} |a_p|^2 \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 < +\infty.$$

En utilisant (11), on obtient

$$\sum_{p\geqslant 1} \overline{a_p}\, \frac{f(\gamma_p)}{\gamma_p - \mu_n} = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{12}$$

Supposons qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_{p_0} = 0$ et, pour $p \neq p_0$, posons $c_p := \frac{\overline{a_p} f(\gamma_p)}{\gamma_p}$ (sinon, on définit c_p de la même manière, pour tout $p \geqslant 1$).

Fait 2 : on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$-\frac{\overline{a_{p_0}} f(\gamma_{p_0})}{\mu_n} + r + \mu_n \sum_{p\neq p_0} \frac{c_p}{\gamma_p - \mu_n} = 0, \tag{13}$$

où $r := \sum_{p\neq p_0} c_p$.

Remarquons tout d'abord que $(c_p)_{p\neq p_0} \in \ell^1$. En effet, on a

$$\begin{aligned} c_p &= \overline{a_p} \frac{(\gamma_p - \mu_1)\psi_1(\gamma_p)}{\gamma_p} \\ &= \underbrace{\frac{\gamma_p - \mu_1}{\gamma_p}}_{\text{borné}} \ \underbrace{\overline{a_p} \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|}_{\in \ell^2} \ \underbrace{\langle \psi_1, \frac{k_\Theta(.,\gamma_p)}{\|k_\Theta(.,\gamma_p)\|}\rangle}_{\in \ell^2}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $(c_p)_{p\neq p_0} \in \ell^1$. D'après (12), en écrivant $\gamma_p = (\gamma_p - \mu_n) + \mu_n$, on obtient alors aisément (13). Considérons

$$g(z) := -i(1 - \bar{c}\Theta(z)) \left(-\overline{a_{p_0}} f(\gamma_{p_0}) \frac{1}{z} + r + z \sum_{p\neq p_0} \frac{c_p}{\gamma_p - z} \right).$$

Fait 3 : g s'écrit $g = g_1 + z g_2$, avec $g_1, g_2 \in K_\Theta^+$ et $g(\mu_n) = 0$, pour tout $n \geqslant 1$.

D'après (13), il est immédiat de voir que $g(\mu_n) = 0$, $n \geqslant 1$. De plus, on a

$$g(z) = \underbrace{\overline{a_{p_0}} f(\gamma_{p_0}) k_\Theta(z,\gamma_{p_0})}_{\in K_\Theta^+} \ \underbrace{-ir(1 - \bar{c}\Theta(z))}_{\in z K_\Theta^+} + z \sum_{p\neq p_0} c_p k_\Theta(z,\gamma_p),$$

et donc, il reste à montrer que $\sum_{p\neq p_0} c_p k_\Theta(z,\gamma_p) \in K_\Theta^+$. Or, on a

$$|c_p|^2 \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 = |a_p|^2 \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 \left| \frac{\gamma_p - \mu_1}{\gamma_p} \right|^2 |\psi_1(\gamma_p)|^2.$$

La condition $\Theta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ entraîne alors que $K_\Theta^+ \subset L^\infty(\mathbb{R})$ (voir [Dya94a]) ce qui implique que $(\psi_1(\gamma_p))_{p\geqslant 1}$ est bornée. La suite $\left(\frac{\gamma_p-\mu_1}{\gamma_p}\,\psi_1(\gamma_p)\right)_{p\neq p_0}$ est donc aussi bornée et

$$\sum_{p\neq p_0} |c_p|^2 \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 < +\infty.$$

Ceci prouve que $\sum_{p\neq p_0} c_p k_\Theta(z,\gamma_p) \in K_\Theta^+$, et achève la preuve du fait 3. Comme $g = g_1 + (z-\mu_1)g_2 + \mu_1 g_2$, en utilisant le lemme 3.1.6, on montre que

$$\widetilde{g} := \frac{g}{z-\mu_1} = g_2 + \frac{g_1+\mu_1 g_2}{z-\mu_1} \in K_\Theta^+.$$

Remarquons, d'autre part, que pour tout $p \geqslant 1$,

$$g(\gamma_p) = \overline{a_p} f(\gamma_p) \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2. \tag{14}$$

Si $\widetilde{g}(\mu_1) = 0$, comme la suite $(k_\Theta(.,\mu_n))_{n\geqslant 1}$ est complète dans K_Θ^+, cela implique que $\widetilde{g} \equiv 0$, et donc, $g \equiv 0$. En utilisant (14), on obtient donc

$$\overline{a_p} f(\gamma_p) \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 = 0, \quad \forall p \geqslant 1,$$

et comme $f(\gamma_p) \neq 0$, on a $a_p = 0$, $p \geqslant 1$, ce qui donne $h \equiv 0$.

On peut donc supposer que $\widetilde{g}(\mu_1) \neq 0$, c'est-à-dire que $g'(\mu_1) \neq 0$. D'après le lemme 3.1.6, la fonction

$$\frac{g}{g'(\mu_1)(z-\mu_1)} - \frac{f}{f'(\mu_1)(z-\mu_1)}$$

est dans K_Θ^+ et s'annule aux points μ_n, $n \geqslant 1$. Par conséquent, elle est identiquement nulle et il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que

$$g \equiv Af.$$

D'après (14),

$$Af(\gamma_p) = \overline{a_p} f(\gamma_p) \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2,$$

ce qui donne, comme $f(\gamma_p) \neq 0$,

$$|a_p|^2 \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 = \frac{|A|^2}{\|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2}.$$

D'autre part, on a

$$\|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 = |\Theta'(\gamma_p)| \leqslant \|\Theta'\|_\infty,$$

et donc

$$\frac{|A|^2}{\|\Theta'\|_\infty} \leqslant |a_p|^2 \|k_\Theta(.,\gamma_p)\|^2 \to 0,$$

ce qui implique nécessairement que $A = 0$ et donc $a_p = 0, p \geqslant 1$, c'est-à-dire $h \equiv 0$. $\square$

En utilisant le fait que la propriété de complétude pour la biorthogonale reste invariante par transformation unitaire et en appliquant le théorème 3.1.3 à la fonction $\Theta(z) := \exp(iaz)$,il est facile de voir qu'on retrouve très facilement le résultat de Young. Signalons que ce résultat sur les exponentielles a été redécouvert par Yu. Lyubarskii (1996; manuscrit) avec une preuve différente de celle de Young.

COROLLAIRE 3.1.7 (Young [You81]). — *Soit* $M = (\mu_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ *telle que* $\inf_{n\geqslant 1} \mathfrak{Im}\, \mu_n > -\infty$.

Si la suite d'exponentielles $(\exp(i\mu_n t))_{n\geqslant 1}$ *est exacte dans* $L^2(-\pi, \pi)$ *alors sa biorthogonale est aussi exacte dans* $L^2(-\pi, \pi)$.

Remerciements. — Une grande partie de ce travail a été effectuée durant ma thèse, encadrée par N. Nikolski. Je voudrais à cette occasion le remercier chaleureusement.

BIBLIOGRAPHIE

[AC70] P. AHERN and D. CLARK, Radial limits and invariant subspaces, Amer. of Math., 2 (1970), 332–342.

[BM62] A. BEURLING and P. MALLIAVIN, On Fourier transforms of measures with compact support, Acta Math., 107 (1962), 291–309.

[BM67] A. BEURLING and P. MALLIAVIN, On the closure of characters and the zeros of entire functions, Acta Math., 118 (1967), 79–93.

[Cob66] L.A. COBURN, Weyl's theorem for nonnormal operators, Michigan Math J., 13 (1966), 285–288.

[CS97] K.C. CHAN and S.M. SEUBERT, Reducing subspaces of compressed analytic Toeplitz operators on the Hardy space, Integr. Equa. Oper. Theory, 28 (1997), 147–157.

[Dan94] N. DANIKAS, On an identity theorem in the Nevanlinna class N, J. Approx. Theory, 77 (1994), 184–190.

[DSS70] R.G. DOUGLAS, H.S. SHAPIRO and A.L. SHIELDS, Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 20–1 (1970), 37–76.

[Dur70] P. DUREN, Theory of H^p Spaces, Academic Press, New-York, 1970.

[Dya] K.M. DYAKONOV, Kernels of Toeplitz operators via Bourgain's factorization theorem , J. Funct. Anal. (à paraître).

[Dya92] K.M. DYAKONOV, Interpolating functions of minimal norm, star-invariant subspaces, and kernels of Toeplitz operators, Proc. Amer. Math. Soc., 116, n° 4 (1992), 1007–1013.

[Dya94a] K.M. DYAKONOV, Entire functions of exponentials type and model subspaces in H^p, Journal of Math. Sciences, 71, n° 1 (1994), 2222–2233.

[Dya94b] K.M. DYAKONOV, Smooth functions in the range of a Hankel operator, Indiana Univ. Math. J., 43 (1994), 805–838.

[Fri99] E. FRICAIN, Propriétés géométriques des suites de noyaux reproduisants dans les espaces modèles, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 1999.

[Gar81] J.B. GARNETT, Bounded analytic functions, Academic Press, New York, 1981.

[GM70] V.I. GURARII and M.A. MELETIDI, Stability of completeness of sequences in Banach spaces, Bull. Acad. Pol. Sci., 18 (1970), 533–536 (Russian).

[Hay85] E. HAYASHI, The solution sets of extremal problems in H^1, Proc. Amer. Math. Soc., 93 (1985), 690–696.

[Hay86] E. HAYASHI, The kernel of a Toeplitz operator, Integral Equations Operator Theory, 9 (1986), 588–591.

[Hay90] E. HAYASHI, Classification of nearly invariant subspaces of the backward shift, Proc. Amer. Math. Soc., 110 (1990), 441–448.

[Hay98] W.K. HAYMAN, Identity theorems for functions of bounded characteristic, J. London Math. Soc., 58, n° 1 (1998), 127–140.

[HNP81] S. HRUSCHEV, N. NIKOLSKI and B. PAVLOV, Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 864 (1981), 214–335.

[HV74] V.P. HAVIN and S.A. VINOGRADOV, Free interpolation in H^∞ and in some other function classes, Zapiski Nauchn. Seminarov Mat. Inst. Steklova (LOMI), 47 (1974), 15–54, (Russian) English transl. : J. Soviet Math., 9, n° 2 (1978), 137–171.

[Kat67] T. KATO, Perturbation theory for linear operators, Grundlehren der Math. Wissenschaften, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer Verlag, 144 (1967).

[Kha63] S.Ya. KHAVINSON, Extremal problems for bounded analytic functions with interior side conditions, Russ. Math. Survey, 18, n° 2 (1963), 21–96.

[Koo96] P. KOOSIS, Leçons sur le Théorème de Beurling et Malliavin, Les Publications CRM, Montréal, 1996.

[KT90] I.F. KRASICHKOV-TERNOVSKII, An interpretation of the Beurling-Malliavin theorem on the radius of completeness, Math. USSR Sbornik, 66, n° 2 (1990), 405–429.

[Lev40] N. LEVINSON, Gap and density Theorems, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., New-York, 26 (1940).

[LS71] M. LEE and D.E. SARASON, The spectra of some Toeplitz operators, J. Math. Anal. Appl., 33 (1971), 529–543.

[LS97] Y.I. LYUBARSKII and K. SEIP, A uniqueness theorem for bounded analytic functions, Bull. London Math. Soc., 29 (1997), 49–52.

[Nik86] N.K. NIKOLSKII, Treatise on the shift operator, Grundlehren der Math. Wissenschaften, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer Verlag, 273 (1986).

[Red68] R.M. REDHEFFER, Elementary remarks on completeness, Duke Math. J., 35, n° 1 (1968), 103–116.

[Red77] R.M. REDHEFFER, Completeness of sets of complex exponentials, Adv. in Math., 24 (1977), 1–62.

[Sar94] D. SARASON, Kernels of Toeplitz operators, Oper. Theory, Adv. Appl., 71 (1994), 153–164.

[You81] R.M. YOUNG, On complete biorthogonal systems, Proceedings of the Amer. Soc., 83, n° 3 (1981), 537–540.

Manuscrit reçu le 20 septembre 2000,
accepté le 22 juin 2001.

Emmanuel FRICAIN,
Université Claude Bernard Lyon I
Institut Girard Desargues
Bâtiment 101
43, boulevard du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex (France).
fricain@desargues.univ-lyon1.fr