ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Jean-Claude JOLLY

Solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$ d'un système d'équations aux différences à coefficients constants et à deux pas récurrents

Tome 52, nº 2 (2002), p. 585-622.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_2_585_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 2 (2002), 585–622

SOLUTIONS MÉROMORPHES SUR $\mathbb{C}$ D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES À COEFFICIENTS CONSTANTS ET À DEUX PAS RÉCURRENTS

par Jean-Claude JOLLY

---

1. Exposé du problème et présentation des résultats.

Notons $\mathcal{M}$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$. Soient ω et ω' deux nombres complexes $\mathbb{R}$-linéairement indépendants, et soit $\mathcal{E}$ le sous-corps de $\mathcal{M}$ des fonctions elliptiques admettant ω et ω' comme périodes. Sans perte de généralité, nous supposons que $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)$ est strictement positif.

L'ensemble $\mathcal{M}$ est stable par translation de la variable et il possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{E}$. Considérons X et Y les opérateurs de translation définis sur $\mathcal{M}$ par

$$\begin{cases} (Xf)(z) = f(z+\omega) \\ (Yf)(z) = f(z+\omega'). \end{cases}$$

Ce sont des $\mathcal{E}$-automorphismes de $\mathcal{M}$. Les automorphismes réciproques sont définis par $\left(X^{-1}f\right)(z) = f\left(z-\omega\right)$ et $\left(Y^{-1}f\right)(z) = f\left(z-\omega'\right)$. Pour alléger l'écriture, pour tout nombre complexe c non nul, identifions c et l'opérateur

---

Mots-clés : Fonctions méromorphes – Fonctions elliptiques – Fonctions entières – Polynômes exponentiels – Équations aux différences – Opérateurs aux différences – Algèbre commutative.
Classification math. : 39A10 – 39A70 – 30D30 – 30D20.

homothétie de rapport c sur $\mathcal{M}$ qui à f associe cf. Comme les opérateurs c, X et Y commutent, on dispose des $\mathbb{C}$-algèbres commutatives $\mathbb{C}[X,Y]$ et $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ engendrées par $\mathbb{C}, X, Y$ et par $\mathbb{C}, X, Y, X^{-1}, Y^{-1}$ respectivement. Elles opèrent sur $\mathcal{M}$ de la façon suivante : si $P = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} a_{k,l}X^kY^l$ appartient à $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$, alors

$$(Pf)(z) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} f(z + k\omega + l\omega'),$$

pour tout z dans l'intersection des domaines de définition des fonctions méromorphes X^kY^lf qui interviennent, en nombre fini. L'ensemble $\mathcal{M}$ possède ainsi, muni en outre de l'addition des fonctions, une structure de $\mathbb{C}[X,Y]$-module et une structure de $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$-module.

On appelle *équation aux différences à coefficients constants* relativement *aux pas récurrents ω et ω'* une équation de la forme

$$\sum_{k,l} a_{k,l} f(z + k\omega + l\omega') = 0, \tag{1}$$

où les coefficients $a_{k,l}$ sont des nombres complexes définissant un opérateur $P = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} a_{k,l}X^kY^l$ de $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$, et où l'inconnue f appartient à $\mathcal{M}$. Comme les opérateurs X et Y sont inversibles, on peut sans perte de généralité supposer que P appartient à $\mathbb{C}[X,Y]$.

Pour alléger l'écriture, pour tout nombre complexe c, on convient d'identifier c et la fonction méromorphe constante de valeur c. On écrit alors l'équation (1) plutôt sous la forme $Pf = 0$.

On pose le problème suivant :

PROBLÈME 1 [Problème principal]. — *Résoudre dans $\mathcal{M}$ le* système de deux équations aux différences à coefficients constants et à deux pas récurrents ω et *ω' suivant :*

$$Pf = Qf = 0, \tag{2}$$

où P et Q sont des opérateurs polynomiaux de $\mathbb{C}[X,Y]$ sans facteur commun non constant.

On note $\mathcal{S}_{P,Q}$ l'ensemble des solutions du problème 1.

La condition que P et Q sont sans facteur commun non constant est liée à l'obligation de disposer de deux équations aux différences dans le système (2). Par exemple, s'il existait C appartenant à $\mathbb{C}[X,Y] \setminus \mathbb{C}$

et divisant P et Q, les solutions de l'équation $Cf = 0$ satisferaient le système (2) et on serait alors ramené à la résolution dans $\mathcal{M}$ d'une seule équation aux différences, ce qui échappe à notre étude.

Présentons les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ qui apparaîtront lors de la résolution du problème 1. Elles trouvent leur origine dès la fin du dix-neuvième siècle. Ce sont d'abord les *fonctions elliptiques aux multiplicateurs constants* ou *fonctions elliptiques de deuxième espèce*, selon la terminologie de C. Hermite, leur découvreur. Citons [Ap-Lac] qui renvoie à [Herm], ainsi que l'ouvrage plus récent [Ince]. Relativement aux pas ω et ω', ce sont les solutions dans $\mathcal{M}$ du système (1) lorsqu'il prend la forme élémentaire $(X - a) f = (Y - b) f = 0$ où a et b sont des nombres complexes non nuls. Pour (a, b) fixé, leur ensemble est une $\mathcal{E}$-droite vectorielle dont on particulisera dans le théorème 1, au paragraphe 2.1, un vecteur directeur $r_{a,b}$. Le deuxième type de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ qui interviendra proviendra de la donnée, dans le théorème 2 au paragraphe 2.2, de deux fonctions s et t de $\mathcal{M}$ satisfaisant :

$$\begin{pmatrix} X - 1 \\ Y - 1 \end{pmatrix} (s\ t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elles seront obtenues par combinaisons linéaires sur $\mathbb{C}$ de la fonction ζ de Weierstrass et de la fonction identité, notée z. À ce titre, elles sont apparentées à la fonction Z de Jacobi et Hermite apparaissant dans les décompositions en éléments simples des fonctions elliptiques [Ap-Lac]. Compte tenu de $\mathrm{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) > 0$, cette fonction Z vérifie le système d'équations $(X - 1) Z = 0$ et $(Y - 1) Z = -\frac{2i\pi}{\omega}$. On a donc la relation $Z = -\frac{2i\pi}{\omega} t$.

Présentons le plan de la résolution du problème 1. Il apparaîtra que les solutions de ce dernier appartiennent à la $\mathcal{E}$-algèbre engendrée par les fonctions $r_{a,b}$, s et t introduites ci-dessus, algèbre notée $\mathcal{D}[s, t]$. La construction et l'étude de $\mathcal{D}[s, t]$, réalisées au paragraphe 2, constituent l'étape préliminaire de la résolution. La résolution proprement dite fera l'objet du paragraphe 3, que l'on peut partager en trois parties : réduction du problème (3.1 et 3.2), résolution effective à base de calcul matriciel (3.3), synthèse (3.4). La réduction du problème consiste en une étude à base d'algèbre linéaire (3.1) qui permet ensuite de se ramener à un problème local normalisé (3.2).

La détermination de $\mathcal{S}_{P,Q}$ sera explicitée par le théorème 5, au paragraphe 3.4, qui est donc le résultat principal de notre étude. Notons dès à présent que $\mathcal{S}_{P,Q}$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{E}$. Il est remarquable, dans ce théorème 5, que la dimension sur $\mathcal{E}$ de $\mathcal{S}_{P,Q}$ admette une expression simple fonction de P et Q.

Notons $\mathcal{O}$ l'ensemble des fonctions entières. Dans le théorème 6 au paragraphe 4.1, en s'inspirant du cas méromorphe, on déterminera $\mathcal{S}_{P,Q} \cap \mathcal{O}$ l'ensemble des solutions du problème 1 qui sont entières. Elles ont déjà été étudiées, au moins dans le cas où P appartient à $\mathbb{C}[X]$ et Q appartient à $\mathbb{C}[Y]$. Citons [BeGra1], [BeGra2], [BrisHab], [Gra], [Guelf], [Mart1] et [Mart2]. Elles forment encore un espace vectoriel de dimension finie, mais cette fois-ci sur $\mathbb{C}$. La relation de cette dimension avec les polynômes P et Q est plus complexe que celle évoquée ci-dessus pour $\mathcal{S}_{P,Q}$.

Au paragraphe 4.2 on présentera quelques résultats complémentaires, sans démonstration. Un exemple pour le problème 1 sera donné, avec une $\mathcal{E}$-base de solutions.

Introduisons quelques notations :

(i) $X_a = X - a$ et $Y_b = Y - b$ pour des nombres complexes a et b non nuls.

(ii) Soit M un K-espace vectoriel et soit A un sous-anneau commutatif de l'anneau des K-endomorphismes de M, pour l'addition et la composition des fonctions. Alors M est un A-module pour le produit externe $\cdot$ défini par $R \cdot f = R(f)$, lorsque R appartient à A et f appartient à M. Soit B une partie de A. On notera $\mathrm{Ker}_M\,(B)$ l'annulateur de B dans M. Comme intersection des noyaux de chacun des opérateurs de B, c'est un sous-K-espace vectoriel de M. Par exemple, si $M = \mathcal{M}$, $K = \mathcal{E}$, $A = \mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ ou $A = \mathbb{C}[X, Y]$ et $B = \{P, Q\}$, alors $\mathrm{Ker}_M\,(B) = \mathcal{S}_{P,Q}$.

2. L'algèbre $\mathcal{D}[s,t]$.

La résolution de systèmes élémentaires d'équations aux différences, aux paragraphes 2.1 et 2.2, conduit à définir des fonctions $r_{a,b}$, s et t. L'algèbre $\mathcal{D}[s,t]$ qu'elles engendrent sur $\mathcal{E}$ est étudiée au paragraphe 2.3. Au paragraphe 2.4 on montre que les fonctions entières de $\mathcal{D}[s,t]$ sont les polynômes exponentiels.

2.1. Premier type de systèmes élémentaires.

On cherche à résoudre dans $\mathcal{M}$ le système (2) lorsqu'il prend la forme élémentaire suivante :

$$(3)\qquad \begin{cases} f(z+\omega) = af(z) \\ f(z+\omega') = bf(z), \end{cases} \text{soit encore } \begin{cases} X_a f = (X-a)\,f = 0 \\ Y_b f = (Y-b)\,f = 0, \end{cases}$$

où a et b sont des nombres complexes non nuls donnés.

Si f_1 et f_2 sont des solutions non nulles du système (3), alors $\frac{f_1}{f_2}$ est elliptique. L'espace des solutions est donc au plus de dimension 1 sur le corps $\mathcal{E}$ des fonctions elliptiques de périodes ω et ω'.

Soit σ la fonction de Weierstrass ([SaZy], p. 240), sans pôle et dont les zéros tous simples sont les éléments du réseau $\Omega = \omega\mathbb{Z}+\omega'\mathbb{Z}$. En notant $\Omega' = \Omega\backslash\{0\}$, elle a pour expression

$$(4)\qquad \sigma(z) = z\prod_{w\in\Omega'}\left(1-\frac{z}{w}\right)\exp\left(\frac{z}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2\right).$$

On sait que

$$(5)\qquad \begin{cases} \sigma(z+\omega) = -\exp\left(\mu\left(z+\dfrac{\omega}{2}\right)\right)\sigma(z) \quad \text{où} \quad \mu = 2\dfrac{\sigma'(\omega/2)}{\sigma(\omega/2)}, \\ \sigma(z+\omega') = -\exp\left(\nu\left(z+\dfrac{\omega'}{2}\right)\right)\sigma(z) \quad \text{où} \quad \nu = 2\dfrac{\sigma'(\omega'/2)}{\sigma(\omega'/2)}. \end{cases}$$

Compte tenu de $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) > 0$ la relation de Legendre ([Sa-Zy], p. 286) prend ici la forme

$$\mu\omega' - \nu\omega = 2i\pi.$$

Choisissons a' et b' tels que $a = \exp(2i\pi a')$ et $b = \exp(2i\pi b')$. Il existe un nombre complexe Δ unique congru à $\omega b' - \omega' a'$ modulo Ω et appartenant au parallélogramme fondamental $\mathcal{P} = \{r\omega + s\omega' \mid 0 \leqslant r, s < 1\}$. Cela définit des entiers rationnels k et l uniques tels que

$$(6)\qquad \Delta = \omega b' - \omega' a' + \omega l - \omega' k.$$

Soit ρ le nombre complexe

$$(7)\qquad \rho = \mu b' - \nu a' + \mu l - \nu k.$$

Compte tenu de la relation de Legendre on obtient

$$(8)\qquad \begin{cases} \omega\rho - \mu\Delta = 2i\pi(a'+k) \\ \omega'\rho - \nu\Delta = 2i\pi(b'+l). \end{cases}$$

Grâce aux formules (5) et (8) on vérifie que la fonction

$$r_{a,b}(z) = \frac{\sigma(z-\Delta)}{\sigma(z)} \exp(\rho z)$$

satisfait

$$\begin{aligned} r_{a,b}(z+\omega) &= \frac{\sigma(z+\omega-\Delta)}{\sigma(z+\omega)} \exp(\rho\,(z+\omega)) \\ &= \frac{-\exp\left(\mu\,(z-\Delta)+\omega/2\right)}{-\exp\left(\mu z+\omega/2\right)} \exp\left(\omega\rho\right) \frac{\sigma(z-\Delta)}{\sigma(z)} \exp(\rho z) \\ &= \exp\left(\omega\rho-\mu\Delta\right) r_{a,b}\,(z) = a r_{a,b}\,(z). \end{aligned}$$

De façon analogue on trouve $r_{a,b}(z+\omega') = b r_{a,b}(z)$. Ainsi, $r_{a,b}$ est une solution particulière non nulle du problème. On a donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 1 (Hermite). — *Soit $\mathcal{E}$ le corps des fonctions elliptiques de périodes ω et ω'. On suppose que* $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)$ *est strictement positif. L'ensemble des solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$ du système*

$$\begin{cases} f(z+\omega) = af(z) \\ f(z+\omega') = bf(z), \end{cases}$$

où a et b sont des nombres complexes non nuls et ω et ω' deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ est la droite vectorielle engendrée sur $\mathcal{E}$ par

$$r_{a,b}(z) = \frac{\sigma(z-\Delta)}{\sigma(z)} \exp(\rho z).$$

Dans cette expression σ est la fonction de Weierstrass explicitée en (4) ci-dessus et Δ et ρ sont les nombres complexes donnés par (6) et (7). Les fonctions de $r_{a,b}\mathcal{E}$ ainsi trouvées sont appelées fonctions aux multiplicateurs constants a et b, *ou* fonctions elliptiques de deuxième espèce. *Dans le cas où $a = b = 1$ elles coïncident avec les fonctions elliptiques de $\mathcal{E}$.*

Remarque. — Inversement, étant donné des nombres complexes ρ et Δ, la fonction $\frac{\sigma(z-\Delta)}{\sigma(z)} \exp\left(\rho z\right)$ est une solution dans $\mathcal{M}$ de $X_a f = Y_b f = 0$ pour $a = \exp\left(\omega\rho - \mu\Delta\right)$ et $b = \exp\left(\omega'\rho - \nu\Delta\right)$. C'est la fonction $r_{a,b}$ du théorème précédent. En particulier, toute exponentielle $\exp\left(\rho z\right)$ est la fonction $r_{a,b}$ obtenue pour $a = \exp\left(\omega\rho\right)$ et $b = \exp\left(\omega'\rho\right)$. Dans ce cas, a est une détermination de $b^{\frac{\omega}{\omega'}}$.

COROLLAIRE 2.1. — *Soient a et b des nombres complexes non nuls et soient Δ et ρ qui s'en déduisent par les formules (6) et (7) ci-dessus. Si a est une détermination de $b^{\frac{\omega}{\omega'}}$, ce que l'on notera $a \in \{b^{\frac{\omega}{\omega'}}\}$, alors Δ est nul et les solutions entières du système (3) forment une droite vectorielle sur $\mathbb{C}$ dont un vecteur directeur est*

$$r_{a,b}(z) = \exp(\rho z).$$

Si a n'appartient pas à $\{b^{\frac{\omega}{\omega'}}\}$, alors le système (3) n'a pas de solution entière autre que la fonction nulle.

Démonstration. — Écrire que $a = \exp(2i\pi a')$ est une détermination de $b^{\frac{\omega}{\omega'}} = (\exp(2i\pi b'))^{\frac{\omega}{\omega'}}$ c'est écrire qu'il existe des entiers rationnels k et l tels que $(b' + l)\,\frac{\omega}{\omega'} = a' + k$. Ceci équivaut à $\omega b' - \omega' a' = -\omega l + \omega' k$, c'est-à-dire à $\Delta = 0$.

Soit u une fonction elliptique non nulle et soient γ_i et δ_i, pour i appartenant à $\{1, \ldots, j\}$, les zéros et les pôles de u dans le parallélogramme fondamental $\mathcal{P}$, avec répétition à l'ordre de multiplicité pour chacun des éventuels zéros ou pôles multiples. Il existe $\gamma_i' \equiv \gamma_i \bmod \Omega$ et $\delta_i' \equiv \delta_i \bmod \Omega$ tels que $\gamma_1' + \cdots + \gamma_j' = \delta_1' + \cdots + \delta_j'$. On sait qu'il existe un nombre complexe c non nul tel que u soit défini par

$$u(z) = c\frac{\sigma(z - \gamma_1') \cdots \sigma(z - \gamma_j')}{\sigma(z - \delta_1') \cdots \sigma(z - \delta_j')}.$$

Compte tenu de l'expression de $r_{a,b}$, il vient

$$r_{a,b}(z)u(z) = c\exp(\rho z)\frac{\sigma(z - \Delta)}{\sigma(z)}\,\frac{\sigma(z - \gamma_1') \cdots \sigma(z - \gamma_j')}{\sigma(z - \delta_1') \cdots \sigma(z - \delta_j')}.$$

Supposons maintenant que la fonction $r_{a,b}u$ de $r_{a,b}\mathcal{E}$ est entière. Comme chacun des γ_i' est distinct de chacun des δ_i' et comme une fonction elliptique non constante est d'ordre au moins égal à 2, c'est-à-dire est telle que $j \geqslant 2$, alors $u(z) = c$ et $\Delta = 0$. En effet, si ce n'était pas le cas, $r_{a,b}u$ aurait au moins un pôle modulo Ω, ce qui serait absurde. Le corollaire est établi. □

2.2. Deuxième type de systèmes élémentaires.

On cherche à déterminer deux fonctions s et t dans $\mathcal{M}$ solutions respectives, pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$ à l'exception de pôles éventuels, des deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} f(z+\omega) = f(z)+1 \\ f(z+\omega') = f(z), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(z+\omega) = f(z) \\ f(z+\omega') = f(z)+1, \end{cases}$$

soit, avec les notations déjà introduites,

$$\begin{cases} X_1 f = (X-1)\, f = 1 \\ Y_1 f = (Y-1)\, f = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X_1 f = (X-1)\, f = 0 \\ Y_1 f = (Y-1)\, f = 1. \end{cases}$$

À cette fin on considère la fonction ζ de Weierstrass ([SaZy], p. 240) définie par

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{w \in \Omega'} \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right), \tag{9}$$

où $\Omega' = \Omega \setminus \{0\}$, $\Omega = \omega\mathbb{Z} + \omega'\mathbb{Z}$. On a donc $\mu = 2\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $\nu = 2\zeta\left(\frac{\omega'}{2}\right)$ et on sait que

$$\begin{cases} \zeta(z+\omega) = \zeta(z) + \mu \\ \zeta(z+\omega') = \zeta(z) + \nu \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Notons z la fonction identité de $\mathbb{C}$. Elle satisfait $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega' \end{pmatrix}$. On peut formuler ces propriétés des fonctions z et ζ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} (\zeta\ z) = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ \nu & \omega' \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de la relation de Legendre on obtient alors les fonctions s et t par des combinaisons linéaires de ζ et z, soit

$$(s\ t) = (\zeta\ z) \frac{1}{2i\pi} \begin{pmatrix} \omega' & -\omega \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 2 (Fonctions s et t). — *Soit z la fonction identité de $\mathbb{C}$ et soit ζ la fonction de Weierstrass explicitée en (9) ci-dessus. Les fonctions s et t définies par*

$$\begin{cases} s = \dfrac{1}{2i\pi} (\omega'\zeta - \nu z) \\ t = \dfrac{1}{2i\pi} (-\omega\zeta + \mu z), \end{cases}$$

sont les uniques éléments de $\mathcal{M}$, à l'addition près d'un élément de $\mathcal{E}$, tels que

$$\begin{cases} s(z+\omega) = s(z)+1 \\ s(z+\omega') = s(z) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} t(z+\omega) = t(z) \\ t(z+\omega') = t(z)+1. \end{cases}$$

En outre la fonction z vérifie la relation $z = \omega s + \omega' t$.

2.3. Étude algébrique de $\mathcal{D}[s,t]$.

Soit

$$\mathcal{D} = \sum_{(a,b)\in(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2} r_{a,b}\mathcal{E},$$

le sous-$\mathcal{E}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ engendré par l'ensemble des fonctions $r_{a,b}$ données par le théorème 1 pour a et b parcourant $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Comme

$$\begin{cases} X r_{a,b} r_{a',b'} = aa' r_{a,b} r_{a',b'} \\ Y r_{a,b} r_{a',b'} = bb' r_{a,b} r_{a',b'}, \end{cases}$$

on a $r_{a,b}\mathcal{E} r_{a',b'}\mathcal{E} = r_{aa',bb'}\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ est donc une algèbre sur $\mathcal{E}$. Les solutions du problème 1 apparaîtront, au paragraphe 3.4, comme éléments de l'algèbre $\mathcal{D}[s,t]$ engendrée par $\mathcal{D}$ et les fonctions s et t introduites dans le théorème 2, au paragraphe 2.2.

Dans ce paragraphe on établit d'une part des résultats d'indépendance linéaire dans la $\mathcal{E}$-algèbre $\mathcal{D}[s,t]$ et d'autre part des règles opératoires pratiques dans le $\mathbb{C}[X,Y]$-module $\mathcal{D}[s,t]$.

LEMME 2.1. — *Les fonctions s et t sont algébriquement indépendantes sur le corps $\mathcal{E}$.*

Démonstration. — Soit $F = \sum_{i,j} u_{i,j} S^i T^j$ un polynôme à coefficients dans $\mathcal{E}$ en les indéterminées S et T. Si $f = F(s,t)$ on a $Xf = F(s+1,t)$, $Yf = F(s,t+1)$. À l'aide de deux récurrences successives on montre que $X^m Y^n f = F(s+m, t+n)$ pour tout (m,n) de $\mathbb{N}^2$.

Supposons $f = 0$. On a donc $X^m Y^n f = F(s+m,t+n) = 0$ pour tout (m,n) de $\mathbb{N}^2$. Soit z fixé dans $\mathbb{C}$ autre qu'un pôle de s,t ou des coefficients $u_{i,j}$ de F. En notant $F_z = \sum_{i,j} u_{i,j}(z) S^i T^j$ le polynôme de $\mathbb{C}[s,t]$ déduit de F et du choix fait pour z, ce qui précède montre que $F_z(s(z)+m, t(z)+n) = 0$ pour tout (m,n) de $\mathbb{N}^2$, donc que $F_z = 0$. Il en résulte $u_{i,j}(z) = 0$ pour tout nombre complexe z autre qu'un pôle de

s, t ou des coefficients de F. Ainsi, tous les coefficients elliptiques $u_{i,j}$ de F sont nuls. Le lemme s'en déduit. □

Le lemme suivant est démontré dans ([BeGra1], p. 795).

LEMME 2.2. — *Les opérateurs X et Y sur $\mathcal{M}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$.*

Des récurrences élémentaires permettent d'établir le lemme suivant :

LEMME 2.3. — *Soient a et b des nombres complexes. Pour i, j, k, l entiers naturels, en posant $X_1 = X - 1$ et $Y_1 = Y - 1$, on a*

(i) $X_1^k s^i = Y_1^k t^i = 0$ *si $i < k$;*

(ii) $\deg\left(X_1^k s^i\right) = \deg\left(Y_1^k t^i\right) = i - k$ *si $i \geqslant k$;*

(iii) $X_1^i s^i = Y_1^i s^i = i!$;

(iv) $X_1^i Y_1^j s^i t^j = i! j!$.

Le lemme suivant, joint au lemme 2.3, donne l'outil pratique de calcul dans le $\mathbb{C}[X, Y]$-module $\mathcal{D}[s, t]$.

LEMME 2.4. — *Soient a, b, a' et b' des nombres complexes, a et b étant non nuls, soit P un polynôme de $\mathbb{C}[S, T]$ et soit g une fonction de $\mathcal{M}$. En notant $X_{a'} = X - a'$ et $Y_{b'} = Y - b'$, on a*

$$P\left(X_{a'}, Y_{b'}\right) r_{a,b} g = r_{a,b} P\left(aX_1 + (a - a'), bY_1 + (b - b')\right) g.$$

Le cas particulier $a' = a$ et $b' = b$ donne

$$P\left(X_a, Y_b\right) r_{a,b} g = r_{a,b} P\left(aX_1, bY_1\right) g.$$

Démonstration. — Établissons la relation dans le cas particulier où $a' = a$ et $b' = b$. Soit P dans $\mathbb{C}[S, T]$ et soit g dans $\mathcal{M}$. On calcule

$$X_a r_{a,b} g = (X - a) r_{a,b} g = a r_{a,b} X g - a r_{a,b} g = r_{a,b} a X_1 g.$$

De façon analogue on a $Y_b r_{a,b} g = r_{a,b} b Y_1 g$. Par itération on obtient $X_a^k Y_b^l r_{a,b} g = r_{a,b} \left(aX_1\right)^k \left(bY_1\right)^l g$, puis par combinaison $\mathbb{C}$-linéaire $P\left(X_a, Y_b\right) r_{a,b} g = r_{a,b} P\left(aX_1, bY_1\right) g$. Alors, pour le cas général, il vient

$$\begin{aligned} P\left(X_{a'}, Y_{b'}\right) r_{a,b} g &= P\left(X_a + a - a', Y_b + b - b'\right) r_{a,b} g \\ &= r_{a,b} P\left(aX_1 + (a - a'), bY_1 + (b - b')\right) g. \end{aligned}$$

□

On est en mesure de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3 (Indépendance linéaire sur $\mathcal{E}$). — *La famille des fonctions $r_{a,b}s^i t^j$, pour a et b des nombres complexes non nuls et i et j des entiers naturels, est libre sur $\mathcal{E}$.*

Démonstration. — En vertu de l'indépendance algébrique sur $\mathcal{E}$ des fonctions s et t, donnée par le lemme 2.1, il suffit de montrer que la famille des fonctions $r_{a,b}$ indicées par les couples (a,b) de $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$ est libre sur $\mathcal{E}[s,t]$. En utilisant le lemme 2.4, pour m entier naturel et pour g appartenant à $\mathcal{M}$, on a

$$(X_{a'})^m r_{a,b}g = r_{a,b}h, \quad \text{où} \quad h = (aX_1 + (a-a'))^m g.$$

À l'aide du lemme 2.3 on obtient, par des calculs élémentaires, que pour une fonction g non nulle de $\mathcal{E}[s,t]$:

(i) si $a' \neq a$, alors h est de même degré total que g ; en particulier h n'est pas nul ;

(ii) si $a' = a$ et si m est strictement plus grand que le degré total de g, alors h est nul.

On a des conclusions similaires pour $(Y_{b'})^m r_{a,b}g$ quand on compare b' et b.

Considérons une combinaison linéaire f des fonctions $r_{a,b}$ à coefficients dans $\mathcal{E}[s,t]$,

$$f = \sum_{(a,b)\in E} r_{a,b}g_{a,b}, \quad g_{a,b}\in\mathcal{E}[s,t], \quad E\subset(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2,$$

où E est fini. Soit m un entier strictement supérieur au maximum sur (a,b) appartenant à E des degrés totaux des différents polynômes $g_{a,b}$. Soit $W_{a,b}$ l'opérateur défini par

$$W_{a,b} = \prod_{a'\in pr_1(E)\setminus\{a\}} (X_{a'})^m \prod_{b'\in pr_2(E)\setminus\{b\}} (Y_{b'})^m.$$

Ce qui précède montre que pour (a,b) fixé on a $W_{a,b}f \neq 0$. De manière précise, il reste

$$W_{a,b}f = r_{a,b}\left(\prod_{a'\in pr_1(E)\setminus\{a\}} (aX_1 + (a-a'))^m \prod_{b'\in pr_2(E)\setminus\{b\}} (bY_1 + (b-b'))^m\right) g_{a,b} \neq 0.$$

La fonction f n'est donc pas nulle, ce qui prouve l'indépendance linéaire sur $\mathcal{E}[s,t]$ des fonctions $r_{a,b}$ pour (a,b) appartenant à $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$. $\square$

Il résulte de ce théorème que les fonctions s et t sont algébriquement indépendantes sur $\mathcal{D}$, ainsi que le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.2. — *On a les décompositions en sommes directes*

(i) $\mathcal{D} = \bigoplus_{(a,b)\in(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2} r_{a,b}\mathcal{E}$,

(ii) $\mathcal{D}[s,t] = \bigoplus_{(a,b)\in(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2} (r_{a,b}\mathcal{E}[s,t])$.

2.4 Fonctions entières de l'algèbre $\mathcal{D}[s,t]$.

D'après le corollaire 2.1, pour des nombres complexes a et b non nuls, si a est une détermination de $b^{\frac{\omega}{\omega'}}$ alors la fonction $r_{a,b}$ donnée par le théorème 1 est une exponentielle. Réciproquement, toute exponentielle $\exp(\rho z)$ satisfait le système $Xf = af$ et $Yf = bf$ pour $a = \exp(\rho\omega)$ et $b = \exp(\rho\omega')$. Ainsi, une exponentielle $\exp(\rho z)$ est une fonction $r_{a,b}$ aux multiplicateurs constants a et b tels que a est une détermination de $b^{\frac{\omega}{\omega'}}$.

Ce qui précède établit que la $\mathbb{C}$-algèbre des polynômes exponentiels est la somme des sous-espaces vectoriels $r_{a,b}\mathbb{C}[z]$ de $\mathcal{M}$ sur les (a,b) appartenant à $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$ tels que a est une détermination de $b^{\frac{\omega}{\omega'}}$. Du fait de la relation $z = \alpha s + \beta t$, donnée dans le théorème 2, elle est incluse dans l'algèbre des fonctions entières appartenant à $\mathcal{D}[s,t]$.

Montrons que cette inclusion est en fait une égalité, c'est-à-dire montrons qu'une fonction entière f appartenant à $\mathcal{D}[s,t]$ est un polynôme exponentiel. Une telle fonction est de la forme

$$f = \sum_{(a,b)\in E} r_{a,b}g_{a,b}, \quad g_{a,b}\in\mathcal{E}[s,t], \quad E\subset(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2,$$

où E est fini. Soit m un entier strictement supérieur au maximum sur (a,b) appartenant à E des degrés totaux des différents polynômes $g_{a,b}$. Considérons les opérateurs U et V de $\mathbb{C}[X,Y]$ définis par $U = \prod_{a\in pr_1(E)} X_a^m$ et $V = \prod_{b\in pr_2(E)} Y_b^m$. D'après le lemme 2.4 on a $X_a^m r_{a,b}g_{a,b} = r_{a,b}(aX_1)^m g_{a,b}$ et $Y_b^m r_{a,b}g_{a,b} = r_{a,b}(bY_1)^m g_{a,b}$. La fonction $g_{a,b}$ de $\mathcal{E}[s,t]$ est de la forme

$$g_{a,b} = \sum_{i+j<m,\ (i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{a,b,i,j}s^it^j, \quad u_{a,b,i,j}\in\mathcal{E}.$$

D'après le lemme 2.3 on a $X_1^m s^i = 0$ pour $0 \leqslant i < m$ et donc $X_1^m g_{a,b} = \sum_{i+j<m,\ (i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{a,b,i,j} t^j X_1^m s^i = 0$. De façon analogue on a $Y_1^m g_{a,b} = 0$. On en déduit $Uf = Vf = 0$. La fonction f est donc solution d'un système d'équations aux différences à coefficients constants et à pas séparés. Il résulte de [BeGra1], [BrisHab], [Gra], [Guelf], [Mart1] ou [Mart2] que f est un polynôme exponentiel. Ainsi, les fonctions entières de $\mathcal{D}[s,t]$ sont des polynômes exponentiels. Finalement, les fonctions entières de $\mathcal{D}[s,t]$ sont les polynômes exponentiels.

Ces polynômes exponentiels forment un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ qui est la somme des $\mathbb{C}$-espaces $r_{a,b}\mathbb{C}[z]$ sur les couples (a,b) de $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2$ tels que a est une détermination de $b^{\frac{\omega}{\omega'}}$. Cette somme est directe d'après le théorème 3 donné au paragraphe 2.3. La relation $z = \omega s + \omega' t$ montre que le $\mathbb{C}$-espace $r_{a,b}\mathbb{C}[z]$ est inclus dans le $\mathcal{E}$-espace $r_{a,b}\mathcal{E}[s,t]$. D'après le corollaire 2.2 les $r_{a,b}\mathcal{E}[s,t]$ sont en somme directe. Il en résulte qu'il en est de même des $r_{a,b}\mathbb{C}[z]$. Ainsi, $r_{a,b}\mathbb{C}[z]$ est le $\mathbb{C}$-espace des fonctions entières appartenant à $r_{a,b}\mathcal{E}[s,t]$.

On a montré :

THÉORÈME 4 (Polynômes exponentiels). — *En notant $\mathcal{O}$ l'ensemble des fonctions entières et $\{b^{\frac{\omega}{\omega'}}\}$ l'ensemble des déterminations de $b^{\frac{\omega}{\omega'}}$ pour un nombre complexe b non nul, on a*

$$\mathcal{D}[s,t] \cap \mathcal{O} = \bigoplus_{(a,b)\in(\mathbb{C}\setminus\{0\})^2 \,\mid\, a\in\{b^{\frac{\omega}{\omega'}}\}} r_{a,b}\mathbb{C}[z].$$

Cette somme directe coïncide avec la $\mathbb{C}$-algèbre des polynômes exponentiels. La correspondance est donnée par $r_{a,b}(z) = \exp(\rho z)$ où $a = \exp(\rho\omega)$ et $b = \exp(\rho\omega')$. Pour de tels couples (a,b) on a $(r_{a,b}\mathcal{E}[s,t]) \cap \mathcal{O} = r_{a,b}\mathbb{C}[z]$. En particulier $\mathbb{C}[z] = \mathcal{E}[s,t] \cap \mathcal{O}$.

3. Résolution du problème 1.

On suit le plan de résolution ébauché au paragraphe 1. Les principaux résultats intermédiaires sont donnés par le corollaire 3.1 et le lemme 3.9. La synthèse est réalisée au paragraphe 3.4.

3.1. Décomposition en somme directe de l'algèbre quotient $\mathcal{A}$.

Les opérateurs X et Y sur $\mathcal{M}$ sont les $\mathcal{E}$-automorphismes définis par $(Xf)(z) = f(z+\omega)$ et $(Yf)(z) = f(z+\omega')$. On dispose alors de $\mathbb{C}[X,Y]$

et $\mathbb{C}[X,\ Y,\ X^{-1}, Y^{-1}]$ qui sont des $\mathbb{C}$-algèbres d'opérateurs sur $\mathcal{M}$. On a montré au lemme 2.2 que X et Y sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$.

Conformément aux hypothèses du problème 1, on choisit P et Q dans $\mathbb{C}[X,Y]$ de façon arbitraire, sous la condition qu'ils soient sans facteur commun non constant. Définissons

(i) l'idéal $I = (P,Q)$ engendré par P et Q dans $\mathbb{C}[X,\ Y,\ X^{-1}, Y^{-1}]$ et la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C}[X,\ Y,\ X^{-1}, Y^{-1}]\ /\ I$;

(ii) l'idéal $J = (P,Q)$ engendré par P et Q dans $\mathbb{C}[X,Y]$ et la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{B} = \mathbb{C}[X,Y]\ /\ J$;

(iii) l'idéal $I' = I \cap \mathbb{C}[X,Y]$ de $\mathbb{C}[X,Y]$ et la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}' = \mathbb{C}[X,Y]/I'$.

Comme les idéaux I, J et I' ont chacun pour annulateur dans $\mathcal{M}$ le module $\mathcal{S}_{P,Q}$, mais sur $\mathbb{C}[X,\ Y,\ X^{-1}, Y^{-1}]$ ou $\mathbb{C}[X,Y]$ suivant le cas, les algèbres $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ et $\mathcal{A}'$ opèrent toutes trois sur $\mathcal{S}_{P,Q}$.

Soient A une $\mathbb{C}$-algèbre, K un idéal de A et Z un élément de A. S'il n'y a pas risque de confusion on notera $\overline{Z}$ la classe de Z dans l'algèbre quotient $A\ /\ K$. S'il est nécessaire d'être plus précis on la notera Z_K.

Examinons quelques cas triviaux. Si X ou Y appartient à I, comme $XX^{-1} = YY^{-1} = 1$, on a $\overline{1} = \overline{0}$ donc $\mathcal{A} = \{0\}$. La réciproque étant triviale, on a obtenu que X ou Y appartient à I si et seulement si $\mathcal{A}$ est l'algèbre nulle. Maintenant, si $\mathcal{A} = \{\overline{0}\}$ alors l'ensemble $\mathcal{S}_{P,Q}$ est réduit à la seule fonction nulle, puisque dans ces conditions X appartient à I et que $Xf = 0$ implique $f = 0$. Dans toute la suite on travaillera sous l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 1. — *L'algèbre $\mathcal{A}$ n'est pas réduite à l'algèbre nulle, autrement dit X et Y n'appartiennent pas à I.*

Les relations entre les algèbres $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}$ sont données par le lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Pour les idéaux et les $\mathbb{C}$-algèbres définis ci-dessus on a les isomorphismes*

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}' \quad \text{et} \quad \mathcal{A}' \simeq \mathcal{B}/\,(I'/J).$$

Démonstration. — Par hypothèse P et Q n'ont pas de facteur commun dans $\mathbb{C}[X,Y] \setminus \mathbb{C}$. *A fortiori* P et Q considérés dans $\mathbb{C}[X][Y]$ n'ont pas de facteur commun dans $\mathbb{C}[X][Y] \setminus \mathbb{C}[X]$. Leur résultant S_0, qui appartient à $\mathbb{C}[X]$, n'est donc pas nul. Il est dans l'idéal $J = (P, Q)$ de $\mathbb{C}[X, Y]$. Le polynôme S_0 est de la forme $S_0 = s_k X^k + \cdots + s_{k+n} X^{k+n}$ où $k \geqslant 0$ et $s_k \neq 0$. On a $n \geqslant 1$; sinon, comme J est inclus dans I, on aurait $X = \frac{X^{-k+1}}{s_k} S_1$ qui appartiendrait à I, ce qui contredirait l'hypothèse ci-dessus. Ainsi, $S_0 = s_k X^{k+1} \left(X^{-1} - \mathcal{X}^{-1} \right)$ où $\mathcal{X}^{-1}$ appartient à $\mathbb{C}[X]$, donc $X^{-1} - \mathcal{X}^{-1}$ appartient à I. Par suite $\overline{X}^{-1}$, qui appartient à $\mathcal{A}$, admet le représentant $\mathcal{X}^{-1}$ dans $\mathbb{C}[X]$. De façon analogue on montre que $\overline{Y}^{-1}$, qui appartient à $\mathcal{A}$, admet un représentant $\mathcal{Y}^{-1}$ dans $\mathbb{C}[Y]$. Ceci établit que l'homomorphisme canonique d'algèbres de $\mathbb{C}[X, Y]$ dans $\mathcal{A}$ est surjectif. Son noyau est $I' = I \cap \mathbb{C}[X, Y]$. Il vient

$$\mathcal{A} \simeq \mathbb{C}[X, Y]/I' = \mathcal{A}'.$$

Comme $J \subset I'$, on a

$$\mathcal{A}' \simeq \mathcal{B}/\left(I'/J\right).$$

$\square$

On a le lemme suivant :

LEMME 3.2. — *La dimension de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de chacune des $\mathbb{C}$-algèbres $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}$ est finie.*

Démonstration. — La démonstration du lemme 3.1 donne S_0 non nul dans $J \cap \mathbb{C}[X]$ comme résultant de P et Q considérés dans $\mathbb{C}[X]\,[Y]$. Le même argument de résultant, mais dans $\mathbb{C}[Y]\,[X]$, donne T_0 non nul dans $J \cap \mathbb{C}[Y]$. L'idéal (S_0, T_0) de $\mathbb{C}[X, Y]$ est inclus dans J. Il en résulte que la dimension d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de $\mathcal{B}$ est inférieure ou égale à celle de $\mathbb{C}[X, Y]\ /\ (S_0, T_0)$. Soit R un polynôme de $\mathbb{C}[X, Y]$ et soit $\overline{R}$ sa classe dans $\mathbb{C}[X, Y]\ /\ (S_0, T_0)$. Considérons-le dans $\mathbb{C}[X]\,[Y]$. La division euclidienne par S_0 dans $\mathbb{C}[X]$ de chacun de ses coefficients donne un représentant R_1 de $\overline{R}$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$ dont le degré partiel en X est strictement inférieur au degré de S_0. Considérons R_1 dans $\mathbb{C}[Y]\,[X]$. La division euclidienne par T_0 dans $\mathbb{C}[Y]$ de chacun de ses coefficients donne un représentant R_2 de $\overline{R}$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$ dont le degré partiel en Y est strictement inférieur au degré de T_0 et dont le degré partiel en X est strictement inférieur au degré de S_0. Ceci prouve que la famille $\left(\overline{X}^k \overline{Y}^l\right)_{k,l}$ où $0 \leqslant k < \deg(S_0)$ et $0 \leqslant l < \deg(T_0)$ engendre $\mathbb{C}[X, Y]\ /\ (S_0, T_0)$, qui est donc de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Compte tenu des isomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres du lemme 3.1, la conclusion résulte des majorations

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}') = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) - \dim_{\mathbb{C}}(I'/J) \leqslant \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) \\ \leqslant \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X,Y]/(S_0,T_0)) < \infty.\end{aligned}$$

□

Définissons maintenant les opérateurs $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ sur $\mathcal{A}$ de multiplication par $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ respectivement. L'opérateur $\widehat{X}$ est celui qui à une classe $\overline{R}$ associe la classe $\overline{X}\,\overline{R}$ et l'opérateur $\widehat{Y}$ est celui qui à une classe $\overline{R}$ associe la classe $\overline{Y}\,\overline{R}$. Ce sont des automorphismes de $\mathcal{A}$ d'automorphismes réciproques les multiplications par $\overline{X}^{-1}$ et $\overline{Y}^{-1}$ respectivement. Relativement à $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$, on dispose pour $\mathcal{A}$ des décompositions respectives suivantes en sommes directes de sous-espaces caractéristiques :

(i) $\mathcal{A} = \bigoplus_{\lambda\in Sp(\widehat{X})} \mathcal{A}_\lambda$, où $Sp(\widehat{X})$ est l'ensemble des valeurs propres de $\widehat{X}$ et $\mathcal{A}_\lambda = \operatorname{Ker}(\widehat{X} - \lambda\, Id_{\mathcal{A}})^{i_\lambda}$ est pour un entier i_λ assez grand le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ ;

(ii) $\mathcal{A} = \bigoplus_{\mu\in Sp(\widehat{Y})} \mathcal{A}^*_\mu$, où $Sp(\widehat{Y})$ est l'ensemble des valeurs propres de $\widehat{Y}$ et $\mathcal{A}^*_\mu = \operatorname{Ker}(\widehat{Y} - \mu\, Id_{\mathcal{A}})^{j_\mu}$ est pour un entier j_μ assez grand le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre μ.

Comme $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ commutent, on a

$$(\widehat{X} - \lambda\, Id_{\mathcal{A}})^{i_\lambda} \cdot (\widehat{Y} \cdot \overline{R}) = \overline{0} \Leftrightarrow \widehat{Y} \cdot \left((\widehat{X} - \lambda\, Id_{\mathcal{A}})^{i_\lambda} \cdot \overline{R}\right) = \overline{0},$$

et donc $\widehat{Y}$ laisse stable chacun des $\mathcal{A}_\lambda$. On en déduit que $\mathcal{A}_\lambda$ admet à son tour une décomposition en somme directe suivant les sous-espaces caractéristiques de la restriction de $\widehat{Y}$ à $\mathcal{A}_\lambda$, soit

$$\mathcal{A}_\lambda = \bigoplus_{\mu\in Sp(\widehat{Y}|_{\mathcal{A}_\lambda})} \mathcal{A}_{\lambda,\mu}, \text{ où } \mathcal{A}_{\lambda,\mu} = \operatorname{Ker}(\widehat{Y}|_{\mathcal{A}_\lambda} - \mu\, Id_{\mathcal{A}_\lambda})^{j_\mu} = \mathcal{A}^*_\mu \cap \mathcal{A}_\lambda \neq \{\overline{0}\},$$

et $Sp(\widehat{Y}|_{\mathcal{A}_\lambda})$ est le sous-ensemble de $Sp(\widehat{Y})$ des valeurs propres μ telles que $\mathcal{A}^*_\mu \cap \mathcal{A}_\lambda \neq \{\overline{0}\}$. Une autre expression de $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}$ est

$$\mathcal{A}_{\lambda,\mu} = \operatorname{Ker}(\widehat{X} - \lambda\, Id_{\mathcal{A}})^{i_\lambda} \cap \operatorname{Ker}(\widehat{Y} - \mu\, Id_{\mathcal{A}})^{j_\mu}. \tag{10}$$

Grâce à la propriété classique de croissance stricte puis de stationnarité de la suite des noyaux itérés d'un opérateur linéaire, on a également

$$\mathcal{A}_{\lambda,\mu} = \left\{\overline{R} \in \mathcal{A} \mid \left\{\begin{array}{l} \exists i,\ i \in \mathbb{N}, (X-\lambda)^i R \in I \\ \exists j,\ j \in \mathbb{N}, (Y-\mu)^j R \in I \end{array}\right\}\right\}. \tag{11}$$

Afin de simplifier le jeu des indices notons

$$(\lambda, \mu) = \gamma, \quad \gamma \in \Gamma,$$

de sorte que Γ coïncide avec l'ensemble des (λ, μ) lorsque μ décrit $Sp(\widehat{Y}|_{\mathcal{A}_\lambda})$ et λ décrit $Sp(\widehat{X})$. En particulier les γ sont à coordonnées non nulles et ils sont distincts deux à deux. On a obtenu

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma, \tag{12}$$

qu'on appellera la *décomposition de $\mathcal{A}$ suivant les sous-espaces caractéristiques de $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$.*

Le lemme suivant donne les principales propriétés liées à la décomposition (12) :

LEMME 3.3. — *Considérons la décomposition de l'élément unité $\overline{1}$ de $\mathcal{A}$ suivant la somme directe $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma$, soit*

$$\overline{1} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{e_\gamma}, \tag{13}$$

où pour chaque classe $\overline{e_\gamma}$ on a choisi un représentant e_γ dans $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$. Pour γ dans Γ, soit $\mathcal{A}_\gamma''$ la $\mathbb{C}$-algèbre définie par

$$\mathcal{A}_\gamma'' = \mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}] / (P, Q, 1 - e_\gamma).$$

1. *Pour γ, γ' dans Γ, on a*

$$\overline{e_\gamma}\, \overline{e_{\gamma'}} = \delta_{\gamma,\gamma'}\, \overline{e_\gamma}, \tag{14}$$

où $\delta_{\gamma,\gamma'}$ est le symbole de Kronecker.

2. *La composante $\mathcal{A}_\gamma$ est un idéal de $\mathcal{A}$; c'est une $\mathbb{C}$-algèbre admettant $\overline{e_\gamma}$ pour élément unité et on a*

$$\mathcal{A}_\gamma = \overline{e_\gamma} \mathcal{A}. \tag{15}$$

3. *La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}$ est isomorphe au produit des $\mathbb{C}$-algèbres $\mathcal{A}_\gamma$, soit*

$$\mathcal{A} \simeq \prod_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma. \tag{16}$$

4. *Il existe un isomorphisme $\overline{\theta}_\gamma$ de $\mathbb{C}$-algèbres entre $\mathcal{A}''_\gamma$ et $\mathcal{A}_\gamma$, soit*

$$\mathcal{A}''_\gamma \overset{\overline{\theta}_\gamma}{\simeq} \mathcal{A}_\gamma. \tag{17}$$

5. *Pour tout polynôme R de $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ il existe des entiers i et j tels que $(X-\lambda)^i R$ et $(Y-\mu)^j R$ appartiennent à $(P, Q,\ 1-e_\gamma)$.*

Démonstration. — *Montrons les propriétés 1, 2 et 3.* Il découle de (11) que chacun des $\mathcal{A}_\gamma$ est un idéal de $\mathcal{A}$. Si $\overline{R}$ appartient à $\mathcal{A}_\gamma$ alors $\overline{e_{\gamma'}R}$ appartient à $\mathcal{A}_{\gamma'} \cap \mathcal{A}_\gamma$, qui est réduit à l'élément nul lorsque γ' est différent de γ. On en déduit $\overline{R} = \overline{1R} = \overline{e_\gamma R}$. Ceci signifie que $\mathcal{A}_\gamma$ possède une structure d'algèbre avec pour élément unité $\overline{e_\gamma}$. Comme $\mathcal{A}_\gamma$ est un idéal de $\mathcal{A}$ on en déduit encore $\mathcal{A}_\gamma = \overline{e_\gamma}\mathcal{A}$ (15). La relation $\overline{e_\gamma}\,\overline{e_{\gamma'}} = \delta_{\gamma,\gamma'}\overline{e_\gamma}$ (14) résulte de ce qui précède. En y joignant la décomposition $\overline{1} = \sum_{\gamma\in\Gamma}\overline{e_\gamma}$ (13) on obtient que la somme directe $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{A}_\gamma$ (12) définit en réalité un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres, soit $\mathcal{A} \simeq \prod_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{A}_\gamma$ (16).

Montrons la propriété 4. — Soit θ_γ l'homorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres défini par

$$\theta_\gamma : \mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}_\gamma, \quad R \longmapsto \overline{e_\gamma R}.$$

D'après (15) il est surjectif. Un élément R de son noyau satisfait $\left(\overline{1}-\overline{e_\gamma}\right)\overline{R} = \overline{R}$ dans $\mathcal{A}$. Ceci implique que R appartient à l'idéal $(P, Q,\ 1-e_\gamma)$ de $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$. Réciproquement, un polynôme R de $(P, Q,\ 1-e_\gamma)$, soit $R = PU + QV + (1-e_\gamma)W$ où U, V et W sont dans $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$, satisfait $\overline{e_\gamma R} = \overline{0}$ dans $\mathcal{A}$. Cela résulte de $\left(\overline{1}-\overline{e_\gamma}\right)\overline{e_\gamma} = \overline{0}$ par la relation (14). Finalement, le noyau de θ_γ est l'idéal $(P, Q,\ 1-e_\gamma)$ de $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$. En passant au quotient on obtient l'isomorphisme $\overline{\theta}_\gamma$ de $\mathcal{A}''_\gamma$ sur $\mathcal{A}_\gamma$ (17).

Montrons la propriété 5. — Soit R un polynôme de $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$. Comme $\overline{e_\gamma}$ appartient à $\mathcal{A}_\gamma$ il existe des entiers naturels i et j tels que $(X-\mu)^i e_\gamma$ et $(Y-\lambda)^j e_\gamma$ appartiennent à (P, Q). Il résulte alors de la décomposition $R = e_\gamma R + (1-e_\gamma)R$ que $(X-\mu)^i R$ et $(Y-\lambda)^j R$ appartiennent à $(P, Q,\ 1-e_\gamma)$. □

Le lemme suivant donne une interprétation géométrique de l'ensemble Γ :

LEMME 3.4. — *Soient $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ les opérateurs de multiplication sur $\mathcal{A}$ par respectivement $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ et soit Γ l'ensemble des couples d'une valeur propre de $\widehat{X}$ et d'une valeur propre de $\widehat{Y}$ partageant au moins un* *vecteur propre associé en commun. Cet ensemble* Γ *est l'ensemble des zéros communs à coordonnées non nulles dans* $\mathbb{C}^2$ *des polynômes* P *et* Q.

Démonstration. — *Montrons qu'un zéro* (c,d) *commun à* P *et* Q *et à coordonnées non nulles est un point de* Γ. Comme on l'a établi dans la démonstration du lemme 3.1, la propriété de P et Q de ne pas avoir de polynôme non constant en commun dans $\mathbb{C}[X,Y]$ implique, lorsqu'on les considère dans $\mathbb{C}[X][Y]$, que le résultant correspondant M est un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$. En considérant P et Q dans $\mathbb{C}[Y][X]$ on obtient par le même argument que le résultant correspondant N est un polynôme non nul de $\mathbb{C}[Y]$. Il est connu ([Mall]) que les polynômes M et N appartiennent à l'idéal J. Il en résulte que c est racine de M et que d est racine de N. Il existe donc des polynômes $M' = \frac{M}{(X-c)^i}$ de $\mathbb{C}[X]$ et $N' = \frac{N}{(Y-d)^j}$ de $\mathbb{C}[Y]$, où i et j sont des entiers naturels non nuls, qui ne sont pas divisibles par $(X-c)$ et $(Y-d)$ respectivement. Considérons le polynôme $R = M'N'$ de $\mathbb{C}[X,Y]$. Comme $R(c,d)$ est non nul R n'appartient pas à l'idéal I. En revanche $(X-c)^i R = MN'$ et $(Y-d)^j R = M'N$ appartiennent à I, comme M et N. Ceci établit, d'après la formule (11), que c et d sont des valeurs propres de $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ respectivement auxquelles est associé un vecteur propre commun $\overline{R}$. Le couple (c,d) appartient à Γ.

Réciproquement, montrons qu'un couple $\gamma = (\lambda,\mu)$ *de* Γ *est un zéro commun à* P *et* Q *de coordonnées non nulles.* Par définition des coordonnées λ et μ de γ dans Γ, elles sont non nulles comme valeurs propres des automorphismes $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ respectifs de $\mathcal{A}$ et il existe une classe non nulle $\overline{R}$ de $\mathcal{A}$ telle que $\overline{XR} = \lambda\overline{R}$ et $\overline{YR} = \mu\overline{R}$. Il en résulte $P\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{R} = P(\lambda,\mu)\,\overline{R}$ et $Q\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{R} = Q(\lambda,\mu)\,\overline{R}$. Comme $P\left(\overline{X},\overline{Y}\right) = \overline{P(X,Y)} = \overline{0}$ et $Q\left(\overline{X},\overline{Y}\right) = \overline{Q(X,Y)} = \overline{0}$, il vient $P(\lambda,\mu) = 0$ et $Q(\lambda,\mu) = 0$.

Le lemme est établi. □

Remarque. — Si l'ensemble Γ n'est pas vide alors l'hypothèse que ni X ni Y ne sont dans l'idéal I est vérifiée. Sinon, par exemple si X appartenait à I, il existerait des polynômes U et V de $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ tels que $X = PU + QV$. Compte tenu de l'interprétation de Γ donnée par le lemme 3.4, l'évaluation de cette expression en $\left(X, Y, X^{-1}, Y^{-1}\right) = \left(a, b, a^{-1}, b^{-1}\right)$ pour un couple (a,b) de Γ aboutirait à une contradiction. On arriverait à la même conclusion si Y appartenait à I. L'hypothèse que ni X ni Y ne sont dans I est donc vérifiée.

3.2. Localisation et normalisation du problème 1.

On note que $\mathcal{S}_{P,Q} = \mathrm{Ker}_{\mathcal{M}}(P,Q)$ est le sous-$\mathcal{E}$-espace vectoriel maximal de $\mathcal{M}$ sur lequel opère la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}$. À la décomposition $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{A}_\gamma$ déterminée au paragraphe 3.1 précédent et qui donne $\overline{1} = \sum_{\gamma\in\Gamma}\overline{e_\gamma}$, nous allons établir qu'il correspond une décomposition de $\mathcal{S}_{P,Q}$ en somme de sous-$\mathcal{E}$-espaces $\mathcal{S}_{P,Q,\gamma}$ dont la particularité est que la restriction de l'opérateur $\overline{e_{\gamma'}}$ à $\mathcal{S}_{P,Q,\gamma}$ coïncide avec l'identité si $\gamma = \gamma'$ ou avec l'opérateur nul si $\gamma \neq \gamma'$.

Pour f appartenant à $\mathcal{S}_{P,Q}$ on a $f = \overline{1}f = \sum_{\gamma\in\Gamma}\overline{e_\gamma}f = \sum_{\gamma\in\Gamma}f_\gamma$ où l'on a posé $f_\gamma = e_\gamma f = \overline{e_\gamma}f$. Définissons $\mathcal{S}_{P,Q,\gamma}$ par

$$\mathcal{S}_{P,Q,\gamma} = e_\gamma\mathcal{S}_{P,Q} = \overline{e_\gamma}\mathcal{S}_{P,Q}.$$

La décomposition d'une fonction f de $\mathcal{S}_{P,Q}$ obtenue ci-dessus exprime que $\mathcal{S}_{P,Q}$ est la somme des $\mathcal{S}_{P,Q,\gamma}$. La relation (14) du paragraphe 3.1 donne $e_\gamma\, e_{\gamma'}f = \delta_{\gamma,\gamma'}\, e_\gamma f = \delta_{\gamma,\gamma'}f_\gamma$. On en déduit que $0 = \sum_{\gamma'\in\Gamma}f_{\gamma'}$ implique $0 = e_\gamma\sum_{\gamma'\in\Gamma}\ e_{\gamma'}f = f_\gamma$ pour tout γ de Γ, ce qui assure que la somme des $\mathcal{S}_{P,Q,\gamma}$ est directe, soit

$$\mathcal{S}_{P,Q} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{S}_{P,Q,\gamma}. \tag{18}$$

Si f appartient à $\mathcal{S}_{P,Q,\gamma}$ on a $f = f_\gamma = e_\gamma f$ et donc $(1-e_\gamma)\,f = 0$. Si f appartient à $\mathcal{S}_{P,Q}\setminus\mathcal{S}_{P,Q,\gamma}$ on a $f \neq f_\gamma = e_\gamma f$ et donc $(1-e_\gamma)\,f \neq 0$. Ainsi, $\mathcal{S}_{P,Q,\gamma}$ est l'ensemble des solutions dans $\mathcal{M}$ du système $Pf = Qf = (1-e_\gamma)\,f = 0$. Sa détermination est ce qu'on appellera le *problème local* relativement à γ. Il vient $\mathcal{S}_{P,Q,\gamma} = \mathrm{Ker}_{\mathcal{M}}(P,Q,1-e_\gamma)$. On note que c'est le sous-$\mathcal{E}$-espace vectoriel maximal de $\mathcal{M}$ sur lequel opère la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}''_\gamma$ définie au lemme 3.3.

L'étape suivante consiste à *normaliser* le problème local.

Considérons, pour tout $\gamma = (\lambda,\mu)$ appartenant à Γ, l'automorphisme η_γ de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[X,\,Y,\,X^{-1},Y^{-1}]$ défini par l'identité sur $\mathbb{C}$ et par

$$\begin{cases}\eta_\gamma\,(X) = \lambda X\\ \eta_\gamma\,(Y) = \mu Y,\end{cases}\qquad \begin{cases}\eta_\gamma\left(X^{-1}\right) = (\lambda X)^{-1}\\ \eta_\gamma\left(Y^{-1}\right) = (\mu Y)^{-1}.\end{cases} \tag{19}$$

L'intérêt de cette transformation provient du lemme suivant énoncé pour un automorphisme η_γ comme en (19), mais sans autre condition sur $\gamma = (\lambda,\mu)$ que la non nullité de λ et μ :

LEMME 3.5. — *Soit* $\gamma = (\lambda, \mu)$ *appartenant à* $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ *et soit* r_γ *la fonction de* $\mathcal{M}$, *déterminée au théorème 1, qui satisfait* $Xr_\gamma = \lambda r_\gamma$ *et* $Yr_\gamma = \mu r_\gamma$. *Pour toute fonction* f *de* $\mathcal{M}$ *et tout polynôme* R *de* $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ *on a*

$$Rf = r_\gamma \eta_\gamma (R) \frac{f}{r_\gamma}.$$

Démonstration. — On calcule $X \frac{f}{r_\gamma} = \frac{1}{r_\gamma} \left(\frac{X}{\lambda}\right) f$ et $X^{-1} \frac{f}{r_\gamma} = \frac{1}{r_\gamma} \left(\frac{X}{\lambda}\right)^{-1} f$. En considérant succcessivement i positif et i négatif on établit par deux récurrences élémentaires la relation $X^i \frac{f}{r_\gamma} = \frac{1}{r_\gamma} \left(\frac{X}{\lambda}\right)^i f$ valable pour i entier rationnel. On a la formule analogue $Y^j \frac{f}{r_\gamma} = \frac{1}{r_\gamma} \left(\frac{Y}{\mu}\right)^j f$ pour j entier rationnel. Alors $X^i Y^j \frac{f}{r_\gamma} = \frac{1}{r_\gamma} \left(\frac{X}{\lambda}\right)^i \left(\frac{Y}{\mu}\right)^j f$, puis par combinaison $\mathbb{C}$-linéaire $R(X,Y) \frac{f}{r_\gamma} = \frac{1}{r_\gamma} R\left(\frac{X}{\lambda}, \frac{Y}{\mu}\right) f$, soit $R \frac{f}{r_\gamma} = \frac{1}{r_\gamma} \eta_\gamma^{-1}(R) f$. En substituant $\eta_\gamma(R)$ à R on obtient $\eta_\gamma(R) \frac{f}{r_\gamma} = \frac{1}{r_\gamma} Rf$, puis la formule cherchée. □

Notons, pour $\gamma = (\lambda, \mu)$ dans Γ :

(i) $P_\gamma = \eta_\gamma(P) = P(\lambda X, \mu Y)$;

(ii) $Q_\gamma = \eta_\gamma(Q) = Q(\lambda X, \mu Y)$;

(iii) $e_{(1,1),\gamma} = \eta_\gamma(e_\gamma)$.

Par application du lemme 3.5 on a, pour γ dans Γ,

$$Pf = Qf = (1 - e_\gamma) f = 0 \Leftrightarrow P_\gamma \frac{f}{r_\gamma} = Q_\gamma \frac{f}{r_\gamma} = \left(1 - e_{(1,1),\gamma}\right) \frac{f}{r_\gamma} = 0.$$

Avec les notations du paragraphe 1, le $\mathcal{E}$-espace des solutions du système $P_\gamma f = Q_\gamma f = \left(1 - e_{(1,1),\gamma}\right) f = 0$ est $\mathrm{Ker}_{\mathcal{M}}\left(P_\gamma, Q_\gamma, \ 1 - e_{(1,1),\gamma}\right)$. Sa détermination est ce qu'on appellera le *problème local normalisé* relativement à γ. Nous avons obtenu

$$\mathcal{S}_{P,Q,\gamma} = r_\gamma \mathrm{Ker}_{\mathcal{M}}\left(P_\gamma, Q_\gamma, 1 - e_{(1,1),\gamma}\right). \tag{20}$$

Les relations (18) et (20) montrent que le problème 1 se ramène au problème local normalisé.

Cherchons un énoncé général du problème local normalisé, sans transformation η_γ.

Dans le lemme suivant on considère le cas particulier du problème 1 où les opérateurs polynomiaux ont $(1,1)$ pour zéro commun.

LEMME 3.6.— *Soient V et W deux polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$, sans facteur commun non constant, tels que ni X ni Y ne sont dans l'idéal (V,W) de $\mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$. Soit Δ l'ensemble des zéros communs à V et W qui sont à coordonnées non nulles. On suppose que $(1,1)$ appartient à Δ. Soit $e_{(1,1)}$ un polynôme de $\mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$ donné par la décomposition (13) du paragraphe 3.1 pour $\mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]\ /\ (V,W)$ au lieu de $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{C}$ la $\mathbb{C}$-algèbre définie par*

$$\mathcal{C} = \mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]/\left(V,W,1-e_{(1,1)}\right).$$

Soit $\widehat{X}$ (resp. $\widehat{Y}$) l'opérateur sur $\mathcal{C}$ qui à $\overline{R}$ associe $\overline{X}\,\overline{R}$ (resp. $\overline{Y}\,\overline{R}$). On a

1. $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)} = \operatorname{Ker}_{\mathcal{M}}\left(V,W,1-e_{(1,1)}\right)$;
2. *les endomorphismes $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ sont unipotents.*

Démonstration.— Le 1 résulte de (20) et de $r_{1,1} = 1$. Montrons le 2. D'après la propriété 5 du lemme 3.3, pour tout polynôme R de $\mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$ il existe des entiers i et j tels que $(X-1)^i R$ et $(Y-1)^j R$ appartiennent à $(V,W,\ 1-e_{(1,1)})$. En passant au quotient, cela montre que les endomorphismes $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ sont unipotents, car $\mathcal{C}$ est de dimension finie. □

On prendra garde à distinguer les opérateurs de multiplication $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ introduits dans le lemme 3.6 de ceux définis au paragraphe 3.1.

Le lemme suivant établit le rapport entre $\mathcal{S}_{P,Q,\gamma}$ et $\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}$:

LEMME 3.7.— *Pour γ dans Γ on a la relation*

$$\mathcal{S}_{P,Q,\gamma} = r_\gamma \mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}.$$

Démonstration.— Fixons $\gamma = (\lambda,\mu)$ dans Γ. Posons

$$\Gamma/\gamma = \left\{\left(\frac{\lambda'}{\lambda},\frac{\mu'}{\mu}\right)\ ;\ (\lambda',\mu') \in \Gamma\right\}.$$

Les zéros communs à coordonnées non nulles de $P_\gamma(X,Y) = P(\lambda X,\mu Y)$ et $Q_\gamma(X,Y) = Q(\lambda X,\mu Y)$ sont les couples de Γ/γ. En particulier $(1,1)$ appartient à Γ/γ. Les hypothèses faites sur P et Q, à savoir qu'ils sont sans diviseur commun non constant et que ni X ni Y ne sont dans l'idéal (P, Q) de $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$, montrent que les hypothèses du lemme 3.6 sont satisfaites par $V = P_\gamma$, $W = Q_\gamma$ et $\Delta = \Gamma/\gamma$.

Soit $e_{(1,1),\gamma} = \eta_\gamma(e_\gamma)$. On cherche à établir que $e_{(1,1),\gamma}$ satisfait aux conditions du lemme 3.6 pour $e_{(1,1)}$. Rappelons que les notations utilisant un idéal en indice ont été définies au début du paragraphe 3.1. Notons $I_\gamma = (P_\gamma, Q_\gamma) = \eta_\gamma(I)$ et $\mathcal{A}'_\gamma = \mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}] \,/\, I_\gamma$. Soit $\mathcal{A}'_\gamma = \bigoplus_{\sigma\in\Gamma/\gamma} \mathcal{A}'_{\sigma,\gamma}$ sa décomposition suivant les sous-espaces caractéristiques d'opérateurs de multiplication par X_{I_γ} ou Y_{I_γ}, analogue à celle (12) établie au paragraphe 3.1 pour $\mathcal{A}$. En particulier $\mathcal{A}'_\gamma$ a une composante $\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma}$. Il suffit de vérifier que $\left(e_{(1,1),\gamma}\right)_{I_\gamma}$ appartient à la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma}$ et que c'est son élément unité. Cela va découler de ce que $(e_\gamma)_I$ est l'élément unité de $\mathcal{A}_\gamma$.

On calcule, avec des notations canoniques,

$$
\begin{aligned}
Xe_{(1,1),\gamma} = X\eta_\gamma(e_\gamma) = \eta_\gamma\left(\frac{1}{\lambda}Xe_\gamma\right) = \eta_\gamma\left(\frac{\lambda}{\lambda}e_\gamma\right) \mod \eta_\gamma(I)& \\
= e_{(1,1),\gamma} \mod I_\gamma,& \\
Ye_{(1,1),\gamma} = Y\eta_\gamma(e_\gamma) = \eta_\gamma\left(\frac{1}{\mu}Ye_\gamma\right) = \eta_\gamma\left(\frac{\mu}{\mu}e_\gamma\right) \mod \eta_\gamma(I)& \\
= e_{(1,1),\gamma} \mod I_\gamma.&
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\left(e_{(1,1),\gamma}\right)_{I_\gamma}$ appartient à $\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma}$. Soit R un représentant d'un élément R_{I_γ} de $\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma}$. On a

$$
\begin{aligned}
e_{(1,1),\gamma}R = \eta_\gamma(e_\gamma)R = \eta_\gamma\left(e_\gamma\eta_\gamma^{-1}(R)\right) = \eta_\gamma\left(\eta_\gamma^{-1}(R)\right) \mod \eta_\gamma(I)& \\
= R \mod I_\gamma.&
\end{aligned}
$$

Il en résulte que $\left(e_{(1,1),\gamma}\right)_{I_\gamma}$ est l'élément unité de $\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma}$ et donc $e_{(1,1),\gamma}$ satisfait aux conditions du lemme 3.6 pour $e_{(1,1)}$.

La formule (20) et le 1 du lemme 3.6 appliqué à $V = P_\gamma$, $W = Q_\gamma$, $\Delta = \Gamma/\gamma$ et $e_{(1,1),\gamma} = \eta_\gamma(e_\gamma)$ donnent le résultat cherché. □

L'énoncé général du *problème local normalisé* est alors le suivant :

PROBLÈME 2 (Problème local normalisé). — *Soient V, W dans $\mathbb{C}[X, Y]$ comme au lemme 3.6 et soit $e_{(1,1)}$ dans $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ donné par ce même lemme. Déterminer les solutions f méromorphes sur $\mathbb{C}$ du système suivant :*

$$Vf = Wf = \left(1 - e_{(1,1)}\right)f = 0.$$

Le $\mathcal{E}$-espace des solutions sera noté $\mathrm{Ker}_{\mathcal{M}}\left(V, W,\ 1-e_{(1,1)}\right)$ ou $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$.

Le lemme 3.7 et la relation (18) donnent le corollaire suivant, qui réalise la réduction du problème 1 au problème 2 :

Corollaire 3.1. — *Le problème 1 se ramène au problème 2 grâce à la décomposition suivante :*

$$\mathcal{S}_{P,Q} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma \mathcal{S}_{P_\gamma, Q_\gamma, (1,1)},$$

où

(i) *l'ensemble* Γ *est celui des zéros, à coordonnées non nulles, communs à* P *et* Q *;*

(ii) *si* $\gamma = (\lambda, \mu)$, *la fonction méromorphe* r_γ *est donnée par le théorème 1 ;*

(iii) *si* $\gamma = (\lambda, \mu)$, *l'application* η_γ *est le* $\mathbb{C}$*-automorphisme de* $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ *qui à* X *(resp.* Y*) associe* λX *(resp.* μY*) ;*

(iv) $P_\gamma = \eta_\gamma(P)$, $Q_\gamma = \eta_\gamma(Q)$, $e_{(1,1),\gamma} = \eta_\gamma(e_\gamma)$ *avec* e_γ *donné par la relation (13) du paragraphe 3.1 ;*

(v) $\mathcal{S}_{P_\gamma, Q_\gamma, (1,1)} = \mathrm{Ker}_{\mathcal{M}}\left(P_\gamma, Q_\gamma, 1 - e_{(1,1),\gamma}\right)$.

3.3. Résolution du problème 2.

Dans le cadre du problème 2 et du lemme 3.6 auquel il renvoie, on considère V et W dans $\mathbb{C}[X, Y]$, le polynôme $e_{(1,1)}$ de $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$, la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{C} = \mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}] \,/\, \left(V, W, 1 - e_{(1,1)}\right)$ et les opérateurs de multiplication $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ sur $\mathcal{C}$. Posons

$$m = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}),$$

et soit $\overline{\varepsilon} = (\overline{\varepsilon_1}, \ldots, \overline{\varepsilon_m})$ une base de $\mathcal{C}$ dont le premier élément est $\overline{\varepsilon_1} = \overline{1}$, l'élément unité de $\mathcal{C}$. Pour chaque classe $\overline{\varepsilon_i}$ de la base $\overline{\varepsilon}$, on choisit arbitrairement un représentant ε_i dans $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$. Soient A et B les matrices respectives des opérateurs $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ relativement à la base $\overline{\varepsilon}$. Ce sont des matrices carrées à m lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Soient A_i et B_i les i-èmes colonnes de A et B respectivement. Pour tout i on a les relations $\widehat{X} \cdot \overline{\varepsilon_i} = \overline{\varepsilon}\, A_i$ et $\widehat{Y} \cdot \overline{\varepsilon_i} = \overline{\varepsilon}\, B_i$. Notons encore $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ les opérateurs sur $M_{1,m}(\mathcal{C})$ obtenus de façon naturelle par extension des opérateurs $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ initialement définis sur $\mathcal{C}$. On a

$$\begin{cases} \widehat{X} \cdot \overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}\, A \\ \widehat{Y} \cdot \overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}\, B. \end{cases}$$

Des propriétés de ces matrices A et B sont données par le lemme suivant :

LEMME 3.8. — *Soient A et B les matrices de $M_m(\mathbb{C})$ définies par $A = \mathrm{Mat}_{\overline{\varepsilon}}\left(\widehat{X}\right)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\overline{\varepsilon}}\left(\widehat{Y}\right)$ et, en utilisant l'exposant T pour indiquer la transposition, soit $D = (1, 0, \ldots, 0)^T$ la matrice-colonne de $M_{m,1}(\mathbb{C})$ à coefficients tous nuls sauf celui de la première ligne, qui est égal à 1. Les matrices A et B possèdent les propriétés suivantes :*

1. $AB = BA$;
2. $A, B \in GL(m, \mathbb{C})$;
3. $(A - I_m)^m = (B - I_m)^m = 0$;
4. $\mathbb{C}[A, B, A^{-1}, B^{-1}]D = M_{m,1}(\mathbb{C})$;
5. $V(A, B) = W(A, B) = I_m - e_{(1,1)}\left(A, B, A^{-1}, B^{-1}\right) = 0.$

Pour la propriété 4, en tenant compte des propriétés 1 et 2, on a désigné par $\mathbb{C}[A, B, A^{-1},\ B^{-1}]D$ l'ensemble des matrices-colonnes de $M_{m,1}(\mathbb{C})$ obtenues comme produit d'une matrice carrée de $\mathbb{C}[A, B, A^{-1}, B^{-1}]$ par D.

Démonstration. — D'après le 2 du lemme 3.6 $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ sont des endomorphismes unipotents de $\mathcal{C}$. En particulier, ils sont inversibles. Ils commutent. La traduction matricielle de ces propriétés, relativement à la base $\overline{\varepsilon}$, donne 3, 2 et 1 respectivement.

Comme $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ sont des $\mathbb{C}$-automorphismes de $\mathcal{C}$ qui commutent on dispose de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[\widehat{X},\ \widehat{Y},\ \widehat{X}^{-1},\ \widehat{Y}^{-1}]$ d'opérateurs sur $\mathcal{C}$. On a

$$\mathbb{C}[\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{X}^{-1}, \widehat{Y}^{-1}] \cdot \overline{1} = \mathbb{C}[\overline{X}, \overline{Y}, \overline{X}^{-1}, \overline{Y}^{-1}] = \mathcal{C},$$

dont la traduction matricielle, relativement à la base $\overline{\varepsilon}$, est

$$\mathbb{C}[A, B, A^{-1}, B^{-1}]D = M_{m,1}(\mathbb{C}).$$

Ceci établit 4.

On a, pour tout $\overline{R}$ de $\mathcal{C}$,

$$V\left(\widehat{X},\widehat{Y}\right)\cdot\overline{R}=V\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{R}=\overline{V\left(X,Y\right)R}=\overline{0}.$$

L'opérateur $V\left(\widehat{X},\widehat{Y}\right)$ sur $\mathcal{C}$ est donc nul, ce qui se traduit matriciellement par $V\left(A,B\right)=0$. De façon analogue les relations $W\left(A,B\right)=0$ et $I_m-e_{(1,1)}\left(A,B,\ A^{-1},B^{-1}\right)=0$ découlent de $\overline{W}=\overline{0}$ et de $\overline{1}-\ \overline{e_{(1,1)}}=\overline{0}$ respectivement. Ceci établit 5. □

Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{M}$. Formons dans $M_{1,m}\left(\mathcal{M}\right)$ la matrice-ligne F suivante :

$$F=\varepsilon\, f=\left(\varepsilon_1 f,\ldots,\varepsilon_m f\right).$$

Notons encore X et Y les opérateurs sur $M_{1,m}\left(\mathcal{M}\right)$ obtenus de façon naturelle par extension des opérateurs X et Y initialement définis sur $\mathcal{M}$. Si f appartient à $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$, qui coïncide avec $\mathrm{Ker}_{\mathcal{M}}\left(V,W,1-e_{(1,1)}\right)$, alors $\varepsilon\, f=\overline{\varepsilon}\, f$. En particulier, comme $\overline{\varepsilon_1}=\overline{1}$ par hypothèse, il vient $\varepsilon_1 f=f$, ce qui s'écrit

$$FD=f.$$

On a également

$$XF=X\left(\overline{\varepsilon}\, f\right)=\left(\widehat{X}\cdot\overline{\varepsilon}\right)f=\left(\overline{\varepsilon}\, A\right)f\ =\left(\overline{\varepsilon}\, f\right)A=FA.$$

De façon analogue on obtient $YF=FB$. Ceci suggère que la détermination de $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$ est liée au *problème matriciel* suivant :

Problème 3 (Problème matriciel). — *Soient A' et B' des matrices carrées de $M_m\left(\mathbb{C}\right)$ satisfaisant les propriétés 1 à 4 du lemme 3.8. C'est-à-dire qu'elles commutent, qu'elles sont unipotentes et donc inversibles et qu'elles satisfont $\mathbb{C}[A',B',A'^{-1},B'^{-1}]D=M_{m,1}\left(\mathbb{C}\right)$ où $D=\left(1,0,\ldots,0\right)^T$. Considérons le système matriciel suivant où l'inconnue F appartient à $M_{1,m}\left(\mathcal{M}\right)$:*

$$\begin{cases} XF=FA' \\ YF=FB'. \end{cases}$$

Le problème est le suivant :

1. *montrer que les solutions F sont les matrices-lignes de la forme $F=UC$ où U est une matrice-ligne quelconque de $M_{1,m}\left(\mathcal{E}\right)$ et où C est une matrice carrée de $M_m\left(\mathcal{M}\right)$, à déterminer; vérifier que C est inversible et que la dimension sur $\mathcal{E}$ de l'espace des solutions est donc m;*

2. *montrer que CD fournit une famille de fonctions de $\mathcal{M}$ linéairement indépendantes sur $\mathcal{E}$.*

Pour faire le lien avec la détermination de $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$, supposons un instant ce problème 3 résolu. Appliquons les résultats au cas $A' = A$ et $B' = B$ où A et B sont les matrices du lemme 3.8. Pour une solution F du problème 3 correspondant on a

$$\begin{aligned} V(X,Y)F &= FV(A,B), \\ W(X,Y)F &= FW(A,B), \\ e_{(1,1)}\left(X,Y,X^{-1},Y^{-1}\right)F &= Fe_{(1,1)}\left(A,B,A^{-1},B^{-1}\right). \end{aligned}$$

La propriété 5 du lemme 3.8 donne $V(A,B) = W(A,B) = I_m - e_{(1,1)}\left(A,B,A^{-1},B^{-1}\right) = 0$. On en déduit, en étendant de manière naturelle l'opération de X et Y de $\mathcal{M}$ à $M_m(\mathcal{M})$, que $V(X,Y)F = W(X,Y)F = \left(1 - e_{(1,1)}\left(X,Y,,X^{-1},Y^{-1}\right)\right)F = 0$. Chaque coefficient de F est donc une fonction de $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$, ce qui est en particulier le cas du premier coefficient $FD = f$. Le 1 du problème 3 donne, pour des choix convenables de U dans $M_{1,m}(\mathcal{E})$, le fait que les vecteurs-lignes $C_1,\ldots,C_m$ de la matrice C sont solutions du problème 3. Alors, compte tenu du 2 du problème 3, il vient que CD fournit une famille libre sur $\mathcal{E}$ de fonctions appartenant à $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$. En introduction au problème 3 on a établi que toute fonction f de $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$ donne une matrice-ligne $F = \varepsilon f$ satisfaisant $FD = f$ et solution du problème 3 considéré. Il en résulte que toute fonction $f = FD$ de $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$ est $\mathcal{E}$-engendrée par la famille issue de CD. Finalement, CD fournit une $\mathcal{E}$-base de $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$, qui est donc de dimension m sur $\mathcal{E}$.

Ainsi, la détermination de $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$ est ramenée à la résolution du problème 3. Entreprenons cette résolution.

On sait que l'exponentielle réalise une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_m(\mathbb{C})$ sur l'ensemble des matrices unipotentes de $GL(m,\mathbb{C})$ dont la bijection réciproque est le logarithme. On dispose donc de

$$\begin{cases} a = \ln(A') = \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k-1}\dfrac{(A'-I_m)^k}{k} \\ b = \ln(B') = \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k-1}\dfrac{(B'-I_m)^k}{k}, \end{cases}$$

et aussi
$$\begin{cases} A' = \exp(a) \\ B' = \exp(b) \end{cases} \text{avec} \begin{cases} a^m = 0 \\ b^m = 0. \end{cases}$$

Comme A' et B' commutent, a et b commutent aussi.

Soient s et t les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ définies au paragraphe 2.2. On fait la convention $s^0 = t^0 = 1$. Les matrices

$$\text{(21)}\qquad A'^s = \exp(sa) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^k}{k!} a^k,$$
$$B'^t = \exp(tb) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} b^k,$$

sont dans $GL(m, \mathcal{M})$. Elles commutent. Pour un nombre complexe z autre qu'un pôle de s ou t, c'est-à-dire pour z n'appartenant pas au réseau $\Omega = \omega\mathbb{Z} + \omega'\mathbb{Z}$, comme les matrices $s(z)\,a$ et $t(z)\,b$ de $M_m(\mathbb{C})$ sont nilpotentes, les matrices $A'^{s(z)}$ et $B'^{t(z)}$ de $GL(m, \mathbb{C})$ sont unipotentes.

Si F appartient à $M_{1,m}(\mathcal{M})$ et si $U = FB'^{-t}A'^{-s}$, comme $Xs = s+1$, la relation $XF = FA'$ est équivalente à $XU = U$. De façon analogue $YF = FB'$ est équivalent à $YU = U$. Ainsi, F est solution du problème 3 si et seulement si U appartient à $M_{1,m}(\mathcal{E})$. Comme la matrice $C = A'^s B'^t$ est dans $GL(m, \mathcal{M}) \cap M_m(\mathbb{C}[s,t])$, le 1 du problème 3 est résolu.

Il reste à établir que la famille des coordonnées dans $\mathbb{C}[s,t]$ du vecteur-colonne CD est libre sur $\mathcal{E}$. Pour cela on va montrer que, pour U dans $M_{1,m}(\mathcal{E})$, si $UCD = 0$ alors $U = 0$. Puisque $ab = ba$, on a $C = A'^s B'^t = \sum_{i,j\geqslant 0} \frac{s^i t^j}{i!j!} a^i b^j$, la somme étant finie par le fait que $a^m = b^m = 0$. Il vient $UCD = \sum_{i,j\geqslant 0} \frac{s^i t^j}{i!j!} Ua^i b^j D$. Puisque l'unique coefficient de $Ua^i b^j D$ est une fonction de $\mathcal{E}$ et que, d'après le lemme 2.1 du paragraphe 2.3, les fonctions s et t sont algébriquement indépendantes sur $\mathcal{E}$, on en déduit que $UCD = 0$ équivaut à $Ua^i b^j D = 0$ pour tout couple (i,j) d'entiers naturels. La conclusion $U = 0$ est acquise si l'on parvient à établir que $\left(a^i b^j D\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille génératrice sur $\mathbb{C}$ de $M_{m,1}(\mathbb{C})$. En effet, dans ce cas, si $Ua^i b^j D = 0$ pour tout couple (i,j) d'entiers naturels alors $UM = 0$ pour tout M de $M_{m,1}(\mathbb{C})$, ce qui donne, en considérant les matrices-colonnes M dont tous les coefficients sont nuls sauf un qui vaut 1, le résultat $U = 0$ cherché. Montrons que $\left(a^i b^j D\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille génératrice sur $\mathbb{C}$ de $M_{m,1}(\mathbb{C})$. Par hypothèse $\mathbb{C}[A', B', A'^{-1}, B'^{-1}]D = M_{m,1}(\mathbb{C})$ et donc $\left(A'^i B'^j D\right)_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ est une famille génératrice sur $\mathbb{C}$ de $M_{m,1}(\mathbb{C})$. À l'aide de la formule du binôme la relation $(I_m - A')^m = 0$ se développe dans $\mathbb{C}[A']$ sous la forme $I_m - A'M = 0$, ce qui montre que $A'^{-1} = M$ appartient à $\mathbb{C}[A']$. Pour une raison analogue B'^{-1} appartient à $\mathbb{C}[B']$ et donc $\left(A'^i B'^j D\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille génératrice sur $\mathbb{C}$ de $M_{m,1}(\mathbb{C})$. Les relations $A' = \exp(a) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{a^i}{i!}$ et $B' = \exp(b) =$

$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{b^i}{i!}$ où toutes les matrices commutent montrent que pour i et j entiers naturels les matrices-colonnes $A'^i B'^j D$ s'expriment linéairement en fonction des matrices-colonnes $a^i b^j D$. *A fortiori* $\left(a^i b^j D\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille génératrice sur $\mathbb{C}$ de $M_{m,1}(\mathbb{C})$ et l'indépendance linéaire sur $\mathcal{E}$ de la famille dont les éléments sont les coefficients dans $\mathbb{C}[s,t]$ de CD en résulte.

Le problème 3 est résolu. La détermination de $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$ en découle.

LEMME 3.9 (Résolution du problème 2). — *On se place dans le cadre du problème 2. Soit $m = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{C})$ et soit $\overline{\varepsilon} = (\overline{\varepsilon_1}, \ldots, \overline{\varepsilon_m})$ une $\mathbb{C}$-base de $\mathcal{C}$ telle que $\overline{\varepsilon_1} = \overline{1}$. Soient A et B les matrices carrées de $GL(m,\mathbb{C})$ définies par $A = \mathrm{Mat}_{\overline{\varepsilon}}\left(\widehat{X}\right)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\overline{\varepsilon}}\left(\widehat{Y}\right)$ et soit $D = (1, 0, \ \ldots, 0)^T$ la matrice-colonne de $M_{m,1}(\mathbb{C})$ à coefficients tous nuls sauf celui de la première ligne qui est égal à 1. On dispose dans $M_m(\mathbb{C})$ des matrices $a = \ln(A) = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \frac{(A-I_m)^k}{k}$ et $b = \ln(B) = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \frac{(B-I_m)^k}{k}$. Les matrices $A^s = \exp(sa) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^k}{k!} a^k$, $B^t = \exp(tb) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} b^k$ et $C = (c_{i,j}) = A^s B^t$, où s et t sont les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ déterminées au paragraphe 2.2, définissent des matrices de $GL(m,\mathcal{M}) \cap M_m(\mathbb{C}[s,t])$. Le $\mathcal{E}$-espace $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$ admet la décomposition suivante :*

$$\mathcal{S}_{V,W,(1,1)} = M_{1,m}(\mathcal{E})\, CD = \bigoplus_{i=1}^{m} c_{i,1}\mathcal{E},$$

où $M_{1,m}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des matrices-lignes à m colonnes, à coefficients elliptiques. Il est de dimension m et une $\mathcal{E}$-base en est $(c_{i,1})_{1\leqslant i\leqslant m}$ des éléments dans $\mathbb{C}[s,t]$ les coefficients de la première colonne de C.

3.4. Solutions du problème 1.

Dans ce paragraphe on fait une synthèse des résultats antérieurs (corollaire 3.1 et lemme 3.9, essentiellement) pour aboutir à une détermination de $\mathcal{S}_{P,Q}$, l'ensemble des solutions du problème 1.

Au paragraphe 3.1 on a considéré la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}] / (P, Q)$, qui opère sur $\mathcal{S}_{P,Q}$. Soit Γ l'ensemble des zéros, à coordonnées non nulles, communs à P et Q. On a obtenu une famille $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ à éléments dans $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ liée à une décomposition de l'unité $\overline{1} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{e_\gamma}$ suivant une certaine somme directe $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{A}_\gamma$ (lemme 3.3).

Au paragraphe 3.2 pour $\gamma = (\lambda, \mu)$ dans Γ on a considéré le $\mathbb{C}$-automorphisme qui à X associe λX et à Y associe μY. En notant $P_\gamma =$

$\eta_\gamma(P)$, $Q_\gamma = \eta_\gamma(Q)$ et $e_{(1,1),\gamma} = \eta_\gamma(e_\gamma)$ on a obtenu la somme directe suivante (corollaire 3.1) :

$$\mathcal{S}_{P,Q} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma \mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}, \tag{22}$$

où r_γ est une fonction méromorphe donnée par le théorème 1 (paragraphe 2.1) et où $\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)} = \mathrm{Ker}_{\mathcal{M}}\left(P_\gamma, Q_\gamma,\ 1 - e_{(1,1),\gamma}\right)$. On a énoncé un problème 2 dont l'objet $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$ correspond à $\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}$.

Au paragraphe 3.3 on a déterminé $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)}$. Reprenons sa présentation, mais avec des notations adaptées à $\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}$. Soit la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma} = \mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}] \,/\, \left(P_\gamma, Q_\gamma, 1 - e_{(1,1),\gamma}\right)$ (du type $\mathcal{C}$), soit m_γ sa dimension d'espace vectoriel et soit $\overline{\varepsilon_\gamma} = \left(\overline{\varepsilon_{i,\gamma}}\right)_{1\leqslant i\leqslant m_\gamma}$ une base de $\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma}$ telle que $\overline{\varepsilon_{1,\gamma}} = \overline{1}$. Les automorphismes $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ de multiplication par $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ respectivement, définis sur la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma}$, sont unipotents (lemme 3.6). Soient A_γ et B_γ leurs matrices respectives dans $GL(m_\gamma, \mathbb{C})$ relativement à $\overline{\varepsilon_\gamma}$. Elles sont unipotentes. Cette propriété donne un sens aux matrices A_γ^s et B_γ^t où s et t sont les fonctions méromorphes données par le théorème 2 (paragraphe 2.2). Soit C_γ la matrice carrée de $M_{m_\gamma}(\mathbb{C}[s,t])$ définie par $C_\gamma = A_\gamma^s B_\gamma^t$ et soit D_γ la matrice-colonne de $M_{m_\gamma,1}(\mathbb{C})$ définie par $D_\gamma = (1, 0, \ \ldots, 0)^T$. Le $\mathcal{E}$-espace $\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}$ est explicité par

$$\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)} = M_{1,m_\gamma}(\mathcal{E})\, C_\gamma D_\gamma, \tag{23}$$

où $M_{1,m_\gamma}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des matrices-lignes à m_γ colonnes et à coefficients elliptiques (lemme 3.9). Les formules (22) et (23) donnent la détermination cherchée de $\mathcal{S}_{P,Q}$.

Établissons une nouvelle interprétation de $\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}$. Comme C_γ est à éléments dans $\mathbb{C}[s,t]$, de (23) il résulte que $\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}$ est inclus dans $\mathcal{E}[s,t]$ et donc $r_\gamma \mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}$ est inclus dans $r_\gamma \mathcal{E}[s,t]$. D'après le théorème 3 (paragraphe 2.3) les espaces $r_\gamma \mathcal{E}[s,t]$ sont en somme directe. On en déduit $r_\gamma \mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)} = \mathcal{S}_{P,Q} \cap r_\gamma \mathcal{E}[s,t]$, soit avec les notations du paragraphe 1, $r_\gamma \mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)} = \mathrm{Ker}_{r_\gamma \mathcal{E}[s,t]}(P, Q)$. Si on applique ce résultat énoncé pour $(P, Q, P_\gamma, Q_\gamma)$ à $(P_\gamma, Q_\gamma, P_\gamma, Q_\gamma)$, ce qui est justifié puisque $(1,1)$ est un zéro commun à P_γ et Q_γ, on obtient compte tenu de $r_{1,1} = 1$,

$$\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)} = \mathrm{Ker}_{\mathcal{E}[s,t]}(P_\gamma, Q_\gamma). \tag{24}$$

Ainsi, la somme directe $\mathcal{S}_{P,Q} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma \mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}$ s'écrit

$$\mathcal{S}_{P,Q} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma \mathrm{Ker}_{\mathcal{E}[s,t]}(P_\gamma, Q_\gamma).$$

Cette formulation ramène un système d'équations aux différences posé dans $\mathcal{M}$, soit $Pf = Qf = 0$, à $\operatorname{card}\Gamma$ systèmes d'équations aux différences posés dans $\mathcal{E}[s,t]$, soit $P_\gamma f = Q_\gamma f = 0$, $\gamma \in \Gamma$.

Il reste à mettre en évidence un lien entre le $\mathcal{E}$-espace $\mathcal{S}_{P,Q}$ et la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C}[X,\ Y,\ X^{-1}, Y^{-1}]\ /\ (P,Q)$ qui y opère. Considérons pour cela la somme directe $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{A}_\gamma$ mentionnée ci-dessus. On en déduit

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_\gamma). \tag{25}$$

Le 4 du lemme 3.3 donne l'isomorphisme $\mathcal{A}''_\gamma \overset{\overline{\theta}_\gamma}{\simeq} \mathcal{A}_\gamma$ où $\mathcal{A}''_\gamma = \mathbb{C}[X,Y,X^{-1}, Y^{-1}]/(P,Q,1-e_\gamma)$. Soit η_γ l'automorphisme de $\mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$ rappelé ci-dessus. Comme η_γ associe à P, Q et $(1-e_\gamma)$ les polynômes P_γ, Q_γ et $\left(1-e_{(1,1),\gamma}\right)$ respectifs, il induit un isomorphisme $\overline{\eta}_\gamma$ de $\mathcal{A}''_\gamma$ sur $\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma} = \mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]\ /\ \left(P_\gamma, Q_\gamma, 1-e_{(1,1),\gamma}\right)$; c'est celui qui à une classe $\overline{R}$ de $\mathcal{A}''_\gamma$ associe la classe $\overline{\eta_\gamma(R)}$ de $\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma}$. Il en résulte

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_\gamma) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{A}''_\gamma\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma}\right). \tag{26}$$

Le lemme 3.9 (paragraphe 3.3) appliqué à $V = P_\gamma$ et $W = Q_\gamma$ donne le résultat de dimension

$$\dim_{\mathcal{E}}\left(\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma}\right) = m_\gamma. \tag{27}$$

L'application qui à f associe $r_\gamma f$ réalise un isomorphisme entre les $\mathcal{E}$-espaces $\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}$ et $r_\gamma \mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}$. Ils ont donc même dimension sur $\mathcal{E}$. Ceci joint à la somme directe (22) entraîne

$$\dim_{\mathcal{E}}(\mathcal{S}_{P,Q}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \dim_{\mathcal{E}}\left(\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)}\right). \tag{28}$$

Finalement, les relations de dimension (25), (26), (27) et (28) conduisent au lien suivant entre $\mathcal{S}_{P,Q}$ et $\mathcal{A}$:

$$\dim_{\mathcal{E}}(\mathcal{S}_{P,Q}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}).$$

Rappelons que les résultats exposés ci-dessus sont obtenus sous l'hypothèse 1, faite au paragraphe 3.1, que ni X ni Y n'appartiennent à l'idéal I engendré par P et Q dans $\mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$. Dans le cas contraire, l'ensemble $\mathcal{S}_{P,Q}$ est réduit à la seule fonction nulle. Le théorème suivant donne, sous l'hypothèse 1, la détermination de $\mathcal{S}_{P,Q}$ dans ses grandes lignes :

Théorème 5 (Résolution du problème 1). — *Soit* Γ *l'ensemble des zéros communs à* P *et* Q *et à coordonnées non nulles. Soient* P_γ *et* Q_γ *les opérateurs polynomiaux de* $\mathbb{C}[X,Y]$ *définis par* $P_\gamma(X,Y) = P(\lambda X, \mu Y)$ *et* $Q_\gamma(X,Y) = Q(\lambda X, \mu Y)$ *pour tout* $\gamma = (\lambda, \mu)$ *de* Γ. *Notons* Ker $_{\mathcal{E}[s,t]}(P_\gamma, Q_\gamma)$ *le* $\mathcal{E}$*-espace des solutions dans* $\mathcal{E}[s,t]$ *du système* $P_\gamma f = Q_\gamma f = 0$. *On a les résultats suivants :*

(i) $\mathcal{S}_{P,Q}$ *est un* $\mathcal{E}$*-espace vectoriel dont la dimension coïncide avec celle de la* $\mathbb{C}$*-algèbre* $\mathcal{A} = \mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}] / (P,Q)$, *algèbre qui opère sur* $\mathcal{S}_{P,Q}$ *;*

(ii) $\mathcal{S}_{P,Q}$ *admet la décomposition suivante :*

$$\mathcal{S}_{P,Q} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma \operatorname{Ker}_{\mathcal{E}[s,t]}(P_\gamma, Q_\gamma)\,;$$

dans cette expression, r_γ, s *et* t *sont les fonctions méromorphes sur* $\mathbb{C}$ *déterminées aux théorèmes 1 et 2 du paragraphe 2;*

(iii) *il existe un algorithme, à base de calcul matriciel, qui donne une* $\mathcal{E}$*-base de* Ker $_{\mathcal{E}[s,t]}(P_\gamma, Q_\gamma)$ *dans* $\mathbb{C}[s,t]$.

L'algorithme mentionné au point (iii) ci-dessus est celui qui donne $A_\gamma^s B_\gamma^t D_\gamma$, où $A_\gamma = \mathrm{Mat}_{\overline{\varepsilon_\gamma}}(\widehat{X})$ et $B_\gamma = \mathrm{Mat}_{\overline{\varepsilon_\gamma}}(\widehat{Y})$ pour une base $\overline{\varepsilon_\gamma}$ de $\mathcal{A}'_{(1,1),\gamma}$. La détermination pour tout γ de Γ de représentants dans $\mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ des éléments de $\overline{\varepsilon_\gamma}$ peut s'obtenir à partir de familles ε'_γ satisfaisant $\varepsilon_\gamma = \eta_\gamma(\varepsilon'_\gamma)$ et telles que $\left(\overline{\varepsilon'_\gamma}\right)_{\gamma\in\Gamma}$ forme une base de $\mathcal{A}$ adaptée à la décomposition spectrale $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{A}_\gamma$ établie en (12). Une étude plus complète d'un tel algorithme est proposée dans [Jo]. Elle ne nécessite pas la détermination de la décomposition $\overline{1} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{e_\gamma}$ suivant $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{A}_\gamma$.

4. Compléments.

4.1. Solutions entières du problème 1.

Le théorème suivant décrit les solutions du problème 1 qui sont entières :

Théorème 6 (Solutions entières du problème 1). — *On se place dans le cadre des notations du paragraphe 3.4. En particulier les matrices* A_γ *et* B_γ *de* $M_{m_\gamma}(\mathbb{C})$ *sont celles relatives au problème 2 pour les opérateurs* *polynomiaux P_γ et Q_γ, et D_γ est la matrice-colonne $(1,0,\dots,0)^T$ à m_γ lignes; l'ensemble Γ est celui des zéros communs à P et Q et à coordonnées non nulles.*

Les solutions entières du problème 1 sont des polynômes exponentiels qui forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, noté $\mathcal{S}_{P,Q} \cap \mathcal{O}$. En désignant par $\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(P_\gamma, Q_\gamma)$ le $\mathbb{C}$-espace des solutions dans $\mathbb{C}[z]$ du système $P_\gamma f = Q_\gamma f = 0$, on a la somme directe

$$\mathcal{S}_{P,Q} \cap \mathcal{O} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_{\mathcal{O}}} r_\gamma \ \mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(P_\gamma, Q_\gamma)$$

où $\gamma = (\lambda, \mu)$ appartient au sous-ensemble de Γ, noté $\Gamma_{\mathcal{O}}$, correspondant aux (λ, μ) tels que λ est une détermination de $\mu^{\frac{\omega}{\omega'}}$. Une $\mathbb{C}$-base de $\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(P_\gamma, Q_\gamma)$ est donnée par les coefficients de la matrice-colonne

$$N_\gamma A_\gamma^{\frac{z}{\omega}} D_{m_\gamma},$$

où N_γ est une matrice de $M_{n_\gamma, m_\gamma}(\mathbb{C})$ telle que ses n_γ vecteurs-lignes forment une $\mathbb{C}$-base de l'unique sous-espace propre de la matrice unipotente $A_\gamma B_\gamma^{-\frac{\omega}{\omega'}}$ lorsqu'elle agit par multiplication à droite sur $M_{1,m_\gamma}(\mathbb{C})$.

La dimension sur $\mathbb{C}$ de $\mathcal{S}_{P,Q} \cap \mathcal{O}$ est $\sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathcal{O}}} n_\gamma$.

Démonstration. — D'après le théorème 4 une fonction entière f de $\mathcal{D}[s,t]$ est de la forme

$$f = \sum_\gamma r_\gamma g_\gamma, \quad g_\gamma \in \mathbb{C}[z], \tag{29}$$

la sommation portant sur les couples γ d'une partie finie de l'ensemble

$$\Theta = \left\{ (a,b) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2 \ \middle|\ a \in \{b^{\frac{\omega}{\omega'}}\} \right\}.$$

D'après le théorème 5 une fonction f de $\mathcal{S}_{P,Q}$ est de la forme

$$f = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma g_\gamma^*, \quad g_\gamma^* \in \mathrm{Ker}_{\mathcal{E}[s,t]}(P_\gamma, Q_\gamma). \tag{30}$$

Supposons que f est une fonction entière de $\mathcal{S}_{P,Q}$. On remarque que $\mathbb{C}[z]$ et $\mathrm{Ker}_{\mathcal{E}[s,t]}(P_\gamma, Q_\gamma)$ sont inclus dans $\mathcal{E}[s,t]$. Comme d'après le théorème 3, établi au paragraphe 2.3, les espaces $r_\gamma \mathcal{E}[s,t]$ pour γ dans $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ sont en somme directe, la comparaison des formes (29) et (30) de f implique d'une part que, dans chacune de ces expressions, la sommation porte sur γ dans $\Gamma \cap \Theta$ et d'autre part que $g_\gamma^* = g_\gamma$ pour tout γ de $\Gamma \cap \Theta$. Ainsi, g_γ

appartient à $\mathrm{Ker}_{\mathcal{E}[s,t]}(P_\gamma, Q_\gamma) \cap \mathbb{C}[z] = \mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(P_\gamma, Q_\gamma)$. La relation (24), établie au paragraphe 3.4, donne $\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)} = \mathrm{Ker}_{\mathcal{E}[s,t]}(P_\gamma, Q_\gamma)$. D'après le théorème 4 on a $\mathcal{E}[s,t] \cap \mathcal{O} = \mathbb{C}[z]$. Il vient $\mathcal{S}_{P_\gamma,Q_\gamma,(1,1)} \cap \mathcal{O} = \mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(P_\gamma, Q_\gamma)$. Ainsi, on a

$$\mathcal{S}_{P,Q} \cap \mathcal{O} = \sum_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma \mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(P_\gamma, Q_\gamma).$$

Les fonctions f de $\mathcal{S}_{P,Q} \cap \mathcal{O}$ sont celles de la forme $f = \sum_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma g_\gamma$ où g_γ est solution dans $\mathbb{C}[z]$ du système $P_\gamma g = Q_\gamma g = 0$.

Ceci nous ramène à la détermination de $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)} \cap \mathcal{O} = \mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(V, W)$, l'espace des solutions entières du problème 2. En utilisant les notations correspondantes, la résolution qui suit reprend la résolution matricielle exposée au paragraphe 3.3, avec des modifications liées à la nature entière des solutions cherchées.

À toute fonction f de $\mathcal{S}_{V,W,(1,1)} \cap \mathcal{O} = \mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(V, W)$ on associe, comme au paragraphe 3.3, une solution $F = \varepsilon f$ dans $M_{1,m}(\mathbb{C}[z])$ du système d'équations matricielles $XF = FA$ et $YF = FB$.

Soit (S) ce système. Résolvons-le dans $M_{1,m}(\mathbb{C}[z])$. Comme A est une matrice unipotente on dispose de la matrice nilpotente $a = \ln(A)$ et de la matrice unipotente $A^{-\frac{z}{\omega}} = \exp\left(-\frac{z}{\omega}a\right)$. Faisons le changement de variable $G = FA^{-\frac{z}{\omega}}$. La relation $z = \omega s + \omega' t$ implique $X\frac{z}{\omega} = \frac{z}{\omega} + 1$. On a donc $XG = XFA^{-X\frac{z}{\omega}} = FAA^{-1}A^{-\frac{z}{\omega}} = G$ où G appartient à $M_{1,m}(\mathbb{C}[z])$. Les seuls polynômes 1-périodiques sont les constantes et donc G appartient à $M_{1,m}(\mathbb{C})$. Il en résulte $YG = G$. Compte tenu de $Y\frac{z}{\omega} = \frac{z}{\omega} + \frac{\omega'}{\omega}$ on a aussi $YG = YFA^{-Y\frac{z}{\omega}} = FBA^{-\frac{z}{\omega}}A^{-\frac{\omega'}{\omega}}$. Les matrices B et $A^{-\frac{z}{\omega}}$ commutent. Il vient $YG = FA^{-\frac{z}{\omega}}\,BA^{-\frac{\omega'}{\omega}} = GBA^{-\frac{\omega'}{\omega}}$. Des deux expressions de YG on déduit $G = GBA^{-\frac{\omega'}{\omega}}$. Ainsi, le vecteur-ligne correspondant à G est vecteur propre associé à la valeur propre 1 de la matrice $BA^{-\frac{\omega'}{\omega}}$ lorsqu'elle agit par multiplication à droite sur $M_{1,m}(\mathbb{C})$. Réciproquement, pour un tel vecteur propre, la matrice-ligne $F = GA^{\frac{z}{\omega}}$ satisfait le système (S). La matrice $b - \frac{\omega'}{\omega}a$ est nilpotente donc la matrice $BA^{-\frac{\omega'}{\omega}} = \exp\left(b - \frac{\omega'}{\omega}a\right)$ est unipotente. Soit n la dimension sur $\mathbb{C}$ de l'unique sous-espace propre de la matrice $BA^{-\frac{\omega'}{\omega}}$ lorsqu'elle agit par multiplication à droite sur $M_{1,m}(\mathbb{C})$ et soit N dans $M_{n,m}(\mathbb{C})$ une matrice dont les vecteurs-lignes forment une base de ce sous-espace propre. Comme $A^{\frac{z}{\omega}}$ est inversible dans $M_m(\mathbb{C}[z])$ d'inverse $A^{-\frac{z}{\omega}}$, les vecteurs-lignes de la matrices $NA^{\frac{z}{\omega}}$ forment une $\mathbb{C}$-base de l'espace des solutions du système (S).

Montrons que la première colonne de $NA^{\frac{z}{\omega}}$, soit $NA^{\frac{z}{\omega}}D$ encore notée $d = (d_1, \dots, \ d_n)^T$, donne une $\mathbb{C}$-base de $\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(V, W)$. Comme au paragraphe 3.3, les relations $V(A, B) = W(A, B) = 0$ conduisent à $V(X, Y)\, d_i = W(X, Y)\, d_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi, les d_i appartiennent à $\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(V, W)$. On a établi ci-dessus que toute fonction f de $\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(V, W)$ est de la forme $f = FD$ où $F = \varepsilon f$ est solution du système (S). Il en résulte que F est une combinaison $\mathbb{C}$-linéaire des lignes de $NA^{\frac{z}{\omega}}$ et donc que $f = FD$ est la même combinaison $\mathbb{C}$-linéaire des éléments d_i de $d = NA^{\frac{z}{\omega}}D$. Ainsi, la famille des éléments les coefficients de d engendre $\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(V, W)$ sur $\mathbb{C}$. Il reste à montrer qu'elle est libre sur $\mathbb{C}$. Soit α dans $M_{1,n}(\mathbb{C})$. Supposons $\alpha d = 0$ et montrons $\alpha = 0$. On a $A^{\frac{z}{\omega}} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(z/\omega)^k}{k!} a^k$, la somme étant finie puisque la matrice a est nilpotente. On en déduit

$$\alpha d = \sum_{k\geqslant 0} \frac{z^k}{k!} \alpha N \left(\frac{a}{\omega}\right)^k D.$$

La fonction z étant transcendante sur $\mathbb{C}$, l'identité $\alpha d = 0$ implique $\alpha N \left(\frac{a}{\omega}\right)^k D = 0$ pour tout entier k positif ou nul, soit encore $\alpha N\mathbb{C}[a]D = 0$. Soit G une ligne de N. Le vecteur-ligne correspondant est vecteur propre pour la matrice unipotente $BA^{-\frac{\omega'}{\omega}} = \exp\left(b - \frac{\omega'}{\omega} a\right)$ lorsqu'elle agit par multiplication à droite sur $M_{1,m}(\mathbb{C})$, associé à la valeur propre 1. C'est donc aussi un vecteur propre de la matrice nilpotente $b - \frac{\omega'}{\omega} a$ lorsqu'elle agit par multiplication à droite sur $M_{1,m}(\mathbb{C})$, associé à la valeur propre 0. On a donc $G\frac{b}{\omega'} = G\frac{a}{\omega}$. On en déduit $N\frac{b}{\omega'} = N\frac{a}{\omega}$, puis $N\mathbb{C}[a] = N\mathbb{C}[a, b]$. Comme $A = \exp(a)$, $B = \exp(b)$, $A^{-1} = \exp(-a)$ et $B^{-1} = \exp(-b)$ appartiennent à $\mathbb{C}[a, b]$, il en résulte que $N\mathbb{C}[A, B, A^{-1}, B^{-1}]$ est inclus dans $N\mathbb{C}[a, b]$. La propriété 4 du lemme 3.8 donne $\mathbb{C}[A, B, A^{-1}, B^{-1}]D = M_{m,1}(\mathbb{C})$. La matrice N étant de rang n il vient $N\mathbb{C}[A, B, A^{-1}, B^{-1}]D = M_{n,1}(\mathbb{C})$. Compte tenu de ce qui précède on en déduit $N\mathbb{C}[a]D = M_{n,1}(\mathbb{C})$. Finalement, l'identité $\alpha d = 0$ implique $\alpha M_{n,1}(\mathbb{C}) = 0$ et donc $\alpha = 0$. Ceci montre que les coefficients de $d = NA^{\frac{z}{\omega}}D$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. Ils forment une $\mathbb{C}$-base de $\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}[z]}(V, W)$. □

Remarque. — La condition pour qu'un couple $\gamma = (a, b)$ de Γ appartienne à $\Gamma_{\mathcal{O}}$ est $a \in \left\{b^{\frac{\omega}{\omega'}}\right\}$, soit encore $1 \in \left\{ab^{-\frac{\omega}{\omega'}}\right\}$. Il est intéressant de noter l'analogie de cette expression avec celle donnée dans le théorème 6 de la matrice unipotente dont on a considéré, pour la multiplication à droite de $M_{1,m}(\mathbb{C})$, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, à savoir $AB^{-\frac{\omega}{\omega'}}$.

4.2. Conclusions.

Les résultats présentés dans le théorème 5 peuvent être complétés dans plusieurs directions :

(i) dans le cas particulier où P appartient à $\mathbb{C}[X]$ et Q appartient à $\mathbb{C}[Y]$ il existe une description explicite des solutions, éventuellement à la détermination près des racines de P et Q ;

(ii) dans le cas général, la résolution donnée par le théorème 5 conduit à un algorithme de calcul effectif des solutions, éventuellement à la détermination près des racines d'un polynôme à une indéterminée ;

(iii) soit $\mathbb{C}[S,T]$ la $\mathbb{C}$-algèbre des polynômes à deux indéterminées sur $\mathbb{C}$ et soient $\overset{\circ}{\mathrm{X}}$ et $\overset{\circ}{\mathrm{Y}}$ les $\mathbb{C}$-automorphismes de $\mathbb{C}[S,T]$ définis, pour F dans $\mathbb{C}[S,T]$, par $\left(\overset{\circ}{\mathrm{X}}F\right)(S,T) = F(S+1,T)$ et $\left(\overset{\circ}{\mathrm{Y}}F\right)(S,T) = F(S,T+1)$ respectivement ; considérons la $\mathbb{C}$-algèbre d'opérateurs $\mathbb{C}[\overset{\circ}{\mathrm{X}},\overset{\circ}{\mathrm{Y}}]$ et dans celle-ci $\overset{\circ}{\mathrm{P}}$ et $\overset{\circ}{\mathrm{Q}}$ sans diviseur commun non constant ; la résolution dans $\mathbb{C}[S,T]$ du système d'équations aux différences $\overset{\circ}{\mathrm{P}}F = \overset{\circ}{\mathrm{Q}}F = 0$, d'un nouveau type, peut être ramenée au problème local normalisé énoncé au paragraphe 3.2 et résolu dans le lemme 3.9.

Les compléments d'étude correspondants sont proposés dans [Jo].

Un intérêt du point (i) est qu'il permet d'approcher le cas général. En effet, au paragraphe 3.1, pour P et Q dans $\mathbb{C}[X,Y]$, on a déterminé S_0 dans $\mathbb{C}[X]$ et T_0 dans $\mathbb{C}[Y]$ tels que l'idéal (S_0,T_0) est inclus dans l'idéal (P,Q). Il en résulte que $\mathcal{S}_{P,Q}$ est inclus dans $\mathcal{S}_{S_0,T_0}$. Dans le cas du point (i) J.-P. Bézivin m'a indiqué, dans une communication privée [Be], une méthode de résolution différente de celle exposée ici.

Concernant le point (ii), voici un exemple sur lequel l'algorithme ébauché à la suite du théorème 5 est développé dans [Jo], à l'aide du logiciel de calcul formel Maple6. Soit le système de deux équations aux différences à coefficients constants et à deux pas récurrents ω et ω', correspondant aux opérateurs polynomiaux P et Q définis par

$$P = (Y-1)\left(X^3 - 3X^2 - 2X - 2 + 5XY + Y\right),$$
$$Q = (X-1)\left(Y^2 - 2Y - 1 + 2X\right).$$

J'ai obtenu pour $\mathcal{S}_{P,Q}$ la $\mathcal{E}$-base des éléments suivants :

$$(1,t,s,st) \quad , \quad r_{-1,-1}(1,t+2s) \quad , \quad r_{a_1,b_1} \quad , \quad r_{a_2,b_2} \quad , \quad r_{\overline{a_2},\overline{b_2}} \quad ,$$

en posant

$$\begin{aligned} a_1 &= -(2/3)10^{2/3} + (1/3)\,10^{1/3} + 7/3 \\ b_1 &= (1/3)10^{2/3} - (2/3)\,10^{1/3} + 7/3 \\ a_2 &= (1/3)\,10^{2/3} - (1/6)\,10^{1/3} + 7/3 + i\sqrt{3}/2\left(-(2/3)\,10^{2/3} - (1/3)\,10^{1/3}\right) \\ b_2 &= -(1/6)\,10^{2/3} + (1/3)\,10^{1/3} + 7/3 + i\sqrt{3}/2\left((1/3)\,10^{2/3} + (2/3)\,10^{1/3}\right), \end{aligned}$$

et en convenant, par exemple, que $r_{-1,-1}\,(1, t+2s)$ désigne les éléments $r_{-1,-1}$ et $r_{-1,-1}\,(t+2s)$. Conformément au théorème 5 et à ses notations, on vérifie que les zéros communs à P et Q sont $(1,1)$, $(-1,-1)$, (a_1, b_1), (a_2, b_2), $(\overline{a_2}, \overline{b_2})$, que $P_{1,1}$, $Q_{1,1}$ annulent t, s, st et que $P_{-1,-1}$, $Q_{-1,-1}$ annulent $t+2s$.

Remerciements. — *J'exprime ma reconnaissance à mon Directeur de thèse,* J.-J. LOEB, *pour m'avoir proposé ce travail et pour m'avoir guidé et soutenu lors de sa réalisation. Je remercie également l'Arbitre anonyme à qui je dois nombre d'améliorations.*

BIBLIOGRAPHIE

[ApLac] P. APPELL, E. LACOUR, Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications, Gauthier-Villars, Paris, 1897, p. 25, 30-35, 325-350.

[Be] J.-P. BÉZIVIN, communication privée (1999).

[BeGra1] J.-P. BÉZIVIN, F. GRAMAIN, Solutions entières d'un système d'équations aux différences, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 43-3 (1993), 791-814.

[BeGra2] J.-P. BÉZIVIN, F. GRAMAIN, Solutions entières d'un système d'équations aux différences II, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 46-2 (1996), 465-491.

[BrisHab] N. BRISEBARRE, L. HABSIEGER, Sur les fonctions entières à double pas récurrent, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 49-2 (1999), 653-671.

[Gra] F. GRAMAIN, Équations aux différences et polynômes exponentiels, C.R. Acad. Sciences, Paris, 313 (1991), 131-134.

[Guelf] A.O. GUELFOND, Calcul des différences finies, Dunod, Paris, 1963, théorème VI et remarque, 365-367.

[Herm] C. HERMITE, Sur quelques applications des fonctions elliptiques, Gauthier-Villars, Paris, 1885.

[Ince] E.L. INCE, Ordinary differential equations, Dover Publications Inc, 1956, 376.

[Jo] J.-C. JOLLY, Solutions méromorphes sur $\mathbb{C}$ des systèmes d'au moins deux équations aux différences à coefficients constants et à deux pas récurrents (première partie) ; solutions à ε près de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type mixte posés sur des ouverts non bornés (deuxième partie), thèse, Angers (2001).

[Mall] M.-P. MALLIAVIN, Algèbre commutative, applications en géométrie et théorie des nombres, Masson, Paris, 1985, cor. 4.4. p. 43.

[Mart1] N. MARTEAU, quations aux différences et fonctions représentatives, thèse, Angers (1999), 11-13.

[Mart2] N. MARTEAU, Sur les équations aux différences en une variable, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 50-5 (2000), 1589-1615.

[SaZy] S. SAKS, A. ZYGMUND, Fonctions analytiques, Masson, Paris, 1970, p. 240.

Manuscrit reçu le 25 juin 2000,
révisé le 6 juillet 2001,
accepté le 9 octobre 2001.

Jean-Claude JOLLY,
Université d'Angers
I.S.T.I.A.
62, avenue Notre-Dame du Lac
49 000 Angers (France).
Jean-Claude.Jolly@univ-angers.fr